Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

FUNDAMENTOS
DE ÁLGEBRA PARA INGENIERÍA

Dr Adrian M. Canzian
Ing. Alfredo Rojas Lagarde

Colaboración:
Ing. Laura Gelsi

Departamento de Ciencias Básicas
Facultad Regional General Pacheco
Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N.
Argentina

[II]

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - edUTecNe

http://www.edutecne.utn.edu.ar
edutecne@rec.utn.edu.ar

Números Complejos

NC I

Un poco de historia antigua

Lo que sigue ha sido extraído del libro de G. Gamow "Uno, dos, tres, infinito".

a. Teniendo a los números reales como único bagaje, es claro que la raíz cuadrada de 4 es 2, que la raíz cuadrada de 9 es 3, que la raíz cuadrada de 5 es 2,236 ... etc.
Pero, ¿cuál sería la raíz cuadrada de un número negativo?. ¿Tienen significado expresiones tales como $\sqrt{-5}$ y $\sqrt{-1}$?
Si se trata de resolver estos problemas con los números reales, se llegará a la conclusión de que estas expresiones carecen de sentido.
Para citar las palabras del matemático del siglo XII Brahmin Bashkara: "El cuadrado de un número positivo es positivo y el cuadrado de un número negativo es también positivo. En consecuencia la raíz cuadrada de un número positivo es doble, positiva y negativa. No hay raíz cuadrada de un número negativo, porque un número negativo no es un cuadrado."
Pero los matemáticos son gente obstinada y cuando algo que parece no tener sentido aparece una y otra vez, entonces hacen todo lo posible para dárselo. Y las raíces cuadradas de números negativos aparecen sorpresivamente por todas partes, ya sea en simples cuestiones aritméticas (como resolver la ecuación $x^2 + a = 0$, siendo $a > 0$) o en el problema sobre la unificación del espacio y del tiempo de la teoría de la relatividad.
El valiente que por primera vez puso sobre el papel una fórmula que incluía la raíz cuadrada de un número negativo, aparentemente sin sentido, fue el matemático italiano Cardano en el siglo XVI. Al estudiar la posibilidad de desdoblar al número 10 en dos partes cuyo producto fuera 40, demostró que aunque este problema no tiene solución en el campo real, se lograría la respuesta en forma de dos expresiones matemáticas imposibles: $5 + \sqrt{(-15)}$ y $5 - \sqrt{(-15)}$.
Cardano escribió las líneas anteriores con la reserva de que lo anterior no tiene sentido y que es ficticio e imaginario, pero sin embargo las escribió.
Una vez que el hielo se rompió, las raíces cuadradas de los números negativos, o "números imaginarios" según el adjetivo peyorativo de Cardano, fueron usados con más y más libertad, aunque siempre con grandes reservas y pidiendo disculpas a diestra y siniestra. En su libro sobre Algebra publicado en 1770, el Sr. Leonardo Euler (uno de los ases de las matemáticas) incluyó un gran número de aplicaciones de los números imaginarios, mitigadas sin embargo por la observación: "Todas las expresiones tales como $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-2}$ son números imposibles e imaginarios, puesto que presentan raíces de cantidades negativas, y de tales números podemos afirmar verdaderamente que no son nada, ni mayores que nada, ni menores que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios o imposibles".
Pero a pesar de todos estos abusos y disculpas, los números imaginarios pronto se hicieron tan inevitables en la Matemática como las fracciones o los radicales y hoy prácticamente no podría hacerse nada sin utilizarlos.
La familia de los números imaginarios representa, por decirlo así, una imagen en un espejo ficticio de los números reales y, exactamente del mismo modo que se pueden producir todos los números reales comenzando con el número básico 1, también se podrían producir todos los números imaginarios a partir de la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$, que generalmente se designa con el símbolo *i*.
Es fácil ver que $\sqrt{-9} = (\sqrt{9})(\sqrt{-1}) = 3i$; $\sqrt{-7} = (\sqrt{7})(\sqrt{-1}) = i\sqrt{7} = 2{,}646...i$, etc. de modo que todo número real común tiene su doble imaginario.

También se pueden asociar números reales e imaginarios para hacer expresiones tales como $5+\sqrt{-15}=5+i\sqrt{15}$, como lo hizo por primera vez Cardano. Estas fórmulas híbridas fueron llamadas con el nombre de números complejos.
Durante más de dos siglos después que los números imaginarios hicieron su aparición en las Matemáticas, quedaron envueltos en un velo de misterio e incredulidad hasta que finalmente les fue dada una interpretación geométrica muy simple por dos matemáticos aficionados: un agrimensor noruego llamado Wessel y un contador francés llamado Argand.
De acuerdo a sus interpretaciones (ver figura NC I. a) un número complejo, como por ejemplo: 3 + 4*i*, puede ser representado como un punto del plano (en lo futuro "plano complejo") cuya abscisa sea 3 y cuya ordenada sea 4.
Todos los números reales están representados por puntos que estén sobre el eje de las abscisas (eje real en lo futuro) y todos los números imaginarios están representados por puntos que estén sobre el eje de ordenadas (eje imaginario en lo futuro).

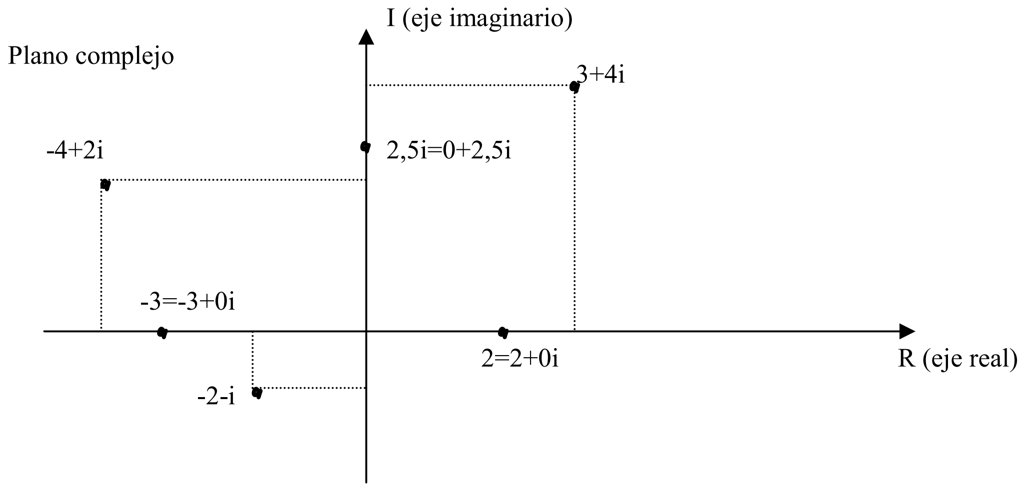


Fig. NC I. a

Hasta acá la crónica del Sr. Gamow.

b. El modesto diagrama de la figura NC I.a sugiere dos ideas fundamentales:

1º) Ampliación del conjunto de los números existentes, agregando a los números correspondientes a los puntos del eje real todos los números correspondientes a los restantes puntos del plano complejo (evidentemente, todos los puntos del plano complejo que no pertenecen al eje real corresponden a números "nuevos").

2º) Como los números complejos corresponden a puntos del plano complejo, y como un punto de un plano queda individualizado por su abscisa y su ordenada, un número complejo puede ser individualizado como un par ordenado de números reales, correspondiendo el primer número del par a la parte real del complejo y el 2º número del par a la parte imaginaria.
Así:
2 + 3*i* = (2 , 3)
Más aún, un número complejo puede ser imaginado desde el vamos como un par ordenado de números reales (con los cuales se opera de una cierta manera). Si cuando al Sr. Cardano se le presentaron sus célebres problemas hubiera tenido una llamarada de inspiración que le hubiera develado todos los misterios de los números complejos, no hubiera nunca usado la notación a + *i* b (la cual, según se verá más adelante, no es gran cosa ya que induce a errores conceptuales), sino la notación (a , b).

c. El primero en dejar de mirar a los complejos como “bichos raros” y considerarlos como una ampliación “natural” de los números reales, con la misma “vigencia física” que éstos, fue Karl Friedrich Gauss (que junto con Cauchy forma el binomio máximo de las Matemáticas), con motivo de su demostración del Teorema Fundamental del álgebra (1799).

d. Más adelante, alrededor de 1830, los Sres. Agustín Cauchy y Bernardo Riemann desarrollaron su teoría de las funciones de variable compleja, con la que virtualmente arrasaron con todo el tema.

e. Tal como indicado más arriba, los números complejos nacieron de la necesidad de dar respuestas coherentes y lógicas a problemas de índole puramente matemática.
Poco a poco su uso se fue extendiendo más y más a problemas de índole práctica. Si el lector ha pasado por un buen curso de electrotecnia sabrá ya, por ejemplo, que la impedancia es una magnitud física de uso corriente cuya medida se expresa por un número complejo.

f. Una dificultad que de entrada asusta al lector es no tener a mano ningún ejemplo fácil que le “materialice” a los números complejos.
Se harán algunas tímidas tentativas de subsanar esta falencia.
1º) Si Juan tiene una presión arterial de 14 de máxima y 8 de mínima, puede decirse que la medida de la tensión arterial de Juan es el número complejo (14 ; 8). En efecto, (14 ; 8) es un par ordenado de números reales, y, tal como se dijo más arriba, un par ordenado de números reales es un número complejo.
2º) Si el 5/5/06 las temperaturas máxima y mínima en Buenos Aires fueron 15º y 5º, puede decirse que la medida de la temperatura en dicha fecha está dada por el complejo (15 ; 5) etc., etc.
Se deja constancia que en estos ejemplos se han dejado bastantes cosas en el tintero.

NC II

<u>**Definición de número complejo**</u>

a. Tal como se mencionó en el párrafo NC I, se empezará por suponer que los números complejos son pares ordenados de números reales.
Como definición, a lo recién dicho le falta mucho. Falta indicar como se opera con dichos números. Dicha operatoria debe ser tal, que se obtenga un todo autoconsistente y tal que cuando se aplique a los números reales (caso particular de los complejos) se obtenga la ya conocida operatoria definida oportunamente para los números reales.
Sería interesante seguir los pasos que condujeron a la definición de la operatoria de los complejos, pero desgraciadamente sería muy largo hacerlo.
Las definiciones de operaciones en el campo complejo han sido siempre hechas por “pálpito condicionado”, es decir que se han buscado definiciones tales que “a posteriori” condujeran a resultados previamente deseados. Así, por ejemplo, se ha definido el producto de complejos de manera tal que resulte:

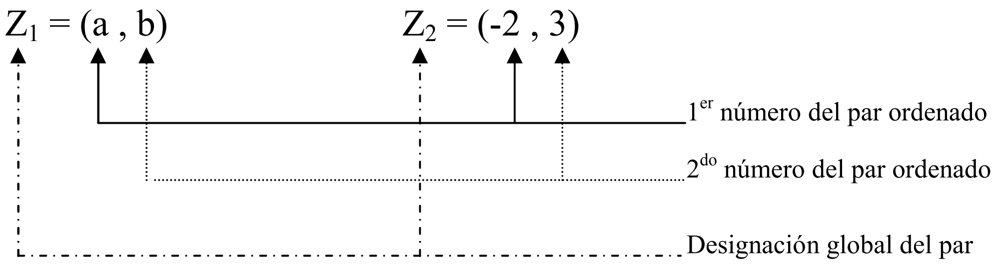
$$i \,.\, i = -1 \qquad ; \qquad (a , 0).(b , 0) = \text{Producto de los reales a y b} \quad ; \text{etc., etc..}$$

<u>La definición de la operatoria de los complejos forma parte de la definición de número complejo</u>. En efecto, decir que los números complejos son pares ordenados de números reales y no decir que hacer con dichos pares es algo que no serviría para nada.

En lo que sigue se marcará con **DEF** a las definiciones correspondientes a las operaciones con complejos para indicar que dichas definiciones forman parte de la definición general del número complejo.

b. Para empezar, se indicará la notación a usarse.

Sean por ejemplo los complejos:



[1]

Al 1er número del par ordenado que forma un complejo se lo llamará <u>parte real</u> del mismo y al 2º número de dicho par se lo llamará <u>parte imaginaria</u> del mismo. Así (ver **[1]**):

$R(Z_1) = R(a , b) = a \qquad I(Z_1) = I(a , b) = b$

$R(Z_2) = R(-2 , 3) = -2 \qquad I(Z_2) = I(-2 , 3) = 3$

La elección de los vocablos "parte real" y "parte imaginaria" para designar respectivamente a los números 1º y 2º del par ordenado que constituye un complejo es sumamente desafortunada (herencia del Sr. Cardano, transmitida de generación en generación), ya que insinúa que el primer número tiene "existencia concreta" mientras que el segundo es un ente etéreo que "en realidad no existe". Esta insinuación es completamente falsa: ambos números del par tienen la misma naturaleza (son números reales comunes y corrientes) y tan importante es el uno como el otro.

c. Igualdad de complejos.

Sean los complejos:

$Z_1 = (a_1 , b_1) \qquad \text{y} \qquad Z_2 = (a_2 , b_2)$

Se define que:

<u>DEF</u> $\boxed{Z_1 = Z_2 \text{ cuando y sólo cuando } a_1 = a_2 \text{ y además } b_1 = b_2}$ **[2]**

Es decir que si $Z_1 = Z_2$ se tiene que los símbolos Z_1 y Z_2 son designaciones distintas de un mismo complejo.
Sobre la desigualdad de complejos se hablará más adelante.

d. Suma de complejos.
Sean los complejos:

$Z_1 = (a_1 , b_1) \qquad \text{y} \qquad Z_2 = (a_2 , b_2)$

Se define que:

DEF $\boxed{Z_1 + Z_2 = (a_1 , b_1) + (a_2 , b_2) = (a_1 + a_2 , b_1 + b_2)}$ **[3]**

Así:

$(2 , -3) + (-1 , -5) = [2 + (-1) , -3 + (-5)] = (1 , -8)$

e. Diferencia de complejos.

Sean los complejos:

$Z_1 = (a_1 , b_1)$ y $Z_2 = (a_2 , b_2)$

Se define que:

DEF $\boxed{Z_1 - Z_2 = (a_1 , b_1) - (a_2 , b_2) = (a_1 - a_2 , b_1 - b_2)}$ **[4]**

Así:

$(2 , -3) - (-1 , -5) = [2 - (-1) , -3 - (-5)] = (3 , 2)$

Puede verificarse fácilmente que la operación diferencia es la recíproca de la operación suma, es decir que si $Z_1 + Z_2 = Z_3$ se tiene entonces que $Z_3 – Z_1 = Z_2$ y $Z_3 – Z_2 = Z_1$.

f. Producto de complejos.

Sean los complejos:

$Z_1 = (a_1 , b_1)$ y $Z_2 = (a_2 , b_2)$

Se define que:

DEF $\boxed{Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 , b_1) \cdot (a_2 , b_2) = (a_1a_2 – b_1b_2 , a_1b_2 + a_2b_1)}$ **[5]**

Nota: Observar que si Z_1 y Z_2 son números reales este producto es el producto de números reales.

Así:

$(2 , -3) \cdot (-1 , -5) = [2(-1) – (-3)(-5), 2(-5) + (-3)(-1)] = (-17 , -7)$

g. Cociente de complejos.

Sean los complejos:

$Z_1 = (a_1 , b_1)$ y $Z_2 = (a_2 , b_2) \neq (0 , 0)$

Se define que:

DEF $\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1,b_1)}{(a_2,b_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$ **[6]**

Así:

$$\frac{(-2,3)}{(-1,-5)}=\left[\frac{(-2)(-1)+3(-5)}{(-1)^2+(-5)^2},\frac{(-1)3-(-2)(-5)}{(-1)^2+(-5)^2}\right]=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

<u>Notar que no se define el cociente Z_1/Z_2 cuando $Z_2 = (0\ ,\ 0)$</u>.

h. Se verificará a continuación que el cociente de complejos, tal como definido en **[6]** es la operación recíproca del producto de complejos tal como definido en **[5]**.

Sean los complejos:

$$Z_1 = (a_1\ ,\ b_1)\quad ,\qquad Z_2 = (a_2\ ,\ b_2) \neq (0\ ,\ 0)\qquad \text{y}\qquad Z_3 = Z_1 / Z_2$$

Entonces será:

$$Z_2Z_3 = Z_2\left[\frac{Z_1}{Z_2}\right]\overset{\text{Ver [6]}}{=}(a_2,b_2)\left[\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right]\overset{\text{Ver [5]}}{=}$$

$$=\left[a_2\,\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-b_2\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2},a_2\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+b_2\,\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{a_1a_2^2+\cancel{a_2b_1b_2}-\cancel{b_2a_2b_1}+a_1b_2^2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2^2b_1-\cancel{a_2a_1b_2}+\cancel{b_2a_1a_2}+b_1b_2^2}{a_2^2+b_2^2}\right]=$$

$$=\left[\frac{a_1(a_2^2+b_2^2)}{a_2^2+b_2^2},\frac{b_1(a_2^2+b_2^2)}{a_2^2+b_2^2}\right]=(a_1,b_1)=Z_1$$

Resumiendo, si $Z_1/Z_2 = Z_3$, entonces resulta que $Z_1 = Z_2\ Z_3$, con lo que queda verificado lo arriba indicado.

i. En base a las definiciones dadas es fácil verificar que:

1º) $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$ **[7]**

2º) $Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$ **[8]**

3º) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$ **[9]**

4º) $Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3$ **[10]**

5º) $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$ **[11]**

j. Se define que:

<u>**DEF**</u>

$$\boxed{\underbrace{(a\ ,\ 0)}_{\text{Complejo}} = \underset{\text{Real}}{a}}\qquad \textbf{[12]}$$

Es decir que los complejos tienen a los reales como caso particular (todo complejo cuya parte imaginaria sea nula es un número real, <u>además de seguir siendo un complejo</u>).

Esta definición es consistente con lo ya conocido del campo real ya que, haciendo nula la parte imaginaria de los complejos involucrados en todas las definiciones (**<u>DEF</u>**) que se van dando, se obtienen expresiones que son todas válidas en el campo real.

k. Según indicado en **[12]** es:

$$\underbrace{(0\ ,\ 0)}_{\text{Complejo}} = \underbrace{0}_{\text{Real}} \qquad \textbf{[13]}$$

El complejo (0 , 0) será indicado en lo sucesivo con el símbolo 0.

i. Salvo el caso de comparar dos reales (casos particulares de los complejos), <u>no se establece nunca que un complejo sea mayor o menor que otro</u>.
Dos números complejos son iguales o distintos. En caso de ser distintos no se los compara entre sí.

NC III

<u>Notación binómica de los números complejos</u>

a. Si se define la siguiente notación:

$$i = (0\ ,\ 1) \qquad , \qquad -i = (0\ ,\ -1) \qquad \textbf{[1]}$$

se tiene que:

$$1^{\text{o}})\ (-1)\ i = (-1\ ,\ 0)(0\ ,\ 1) \overset{\text{Por [5] de NC II}}{=} [(-1).0 - 0.1\ ,\ (-1).1 + 0.0] = (0\ ,\ -1) = -i \qquad \textbf{[2]}$$

$$2^{\text{o}})\ i^2 = (0\ ,\ 1)(0\ ,\ 1) \overset{\text{Por [5] de NC II}}{=} [0.0 - 1.1\ ,\ 0.1 + 1.0] = (-1\ ,\ 0) = -1 \qquad \textbf{[3]}$$

$$3^{\text{o}})\ (-i)^2 = (0\ ,\ -1)(0\ ,\ -1) \overset{\text{Por [5] de NC II}}{=} [0.0 - (-1)(-1)\ ,\ 0(-1) + (-1)0] = (-1\ ,\ 0) = -1 \qquad \textbf{[4]}$$

$$4^{\text{o}})\ i\ .\ \text{b} \overset{\text{Ver [1] y ver [12] de NC II}}{=} (0\ ,\ 1)(\text{b}\ ,\ 0) \overset{\text{Por [5] de NC II}}{=} (0.\text{b} - 1.0\ ,\ 0.0 + 1.\text{b}) = (0\ ,\ \text{b}) \qquad \textbf{[5]}$$

Entonces, como:

$$(\text{a}\ ,\ \text{b}) = (\text{a}\ ,\ 0) + (0\ ,\ \text{b})$$

se tiene, ver **[5]** y ver **[12]** de NC II que:

$$(\text{a}\ ,\ \text{b}) = \text{a} + i\ \text{b} \qquad \textbf{[6]}$$

Esta notación indicada en **[6]** es llamada "<u>binómica</u>", y es de lejos la más "popular" en la vida diaria por razones de "tradición".

b. El número $i = (0\ ,\ 1)$ es llamado "unidad imaginaria pura", rótulo bastante desafortunado por las razones indicadas en **b** de NC II.

c. Usando la notación binomial, las expresiones **DEF** indicadas en **[2], [3], [4], [5], [6], [12]** y **[13]** de NC II toman respectivamente los siguientes aspectos:

DEF $a_1 + i\,b_1 = a_2 + i\,b_2$ cuando y solo cuando $a_1 = a_2$ y además $b_1 = b_2$ **[7]**

DEF $(a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ **[8]**

DEF $(a_1 + i\,b_1) - (a_2 + i\,b_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$ **[9]**

DEF $(a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) = (a_1{\cdot}a_2 - b_1{\cdot}b_2) + i(a_1{\cdot}b_2 + a_2{\cdot}b_1)$ **[10]**

DEF $\dfrac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$, si $a_2 + ib_2 \neq 0 + i0$ **[11]**

DEF $a + i\,0 = a$ **[12]**

DEF $0 + i\,0 = 0$ **[13]**

d. La fórmula **[10]** tiene una deducción mnemotécnica (a la que todo el mundo acude siempre):

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + \underbrace{i^2}_{= -1,\ \text{por } \mathbf{[1]}}b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Surge enseguida una pregunta: ¿Por qué no usar esta "deducción" como definición del producto de complejos en vez del "decreto" dado en **[5]** de NC II y en **[10]** del presente párrafo?.
La razón es muy sencilla: En la "deducción" antedicha se ha usado la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma en el campo complejo <u>sin haber definido previamente al producto de complejos</u> y, evidentemente, mal puede usarse una propiedad de una operación que todavía no está definida.
Pero, por otra parte, no cabe duda que dicha "deducción" (que es ilícita sin una definición previa del producto de complejos) constituyó el "pálpito condicionado" que llevó a la definición rigurosa del producto de complejos.

e. Algo similar ocurre con la fórmula **[11]**:

$$\frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 + ib_2)} = \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ia_2b_1 - \overbrace{i^2}^{= -1}b_1b_2}{a_2^2 - \cancel{ia_2b_2} + \cancel{ia_2b_2} - \underbrace{i^2}_{= -1}b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

NC IV

<u>Fórmula módulo argumental (o polar) de los números complejos</u>

(No iniciar la lectura de este párrafo sin haber digerido a fondo el contenido del Apéndice de este capítulo).

a. Sea el plano complejo ya considerado en NC I. a.

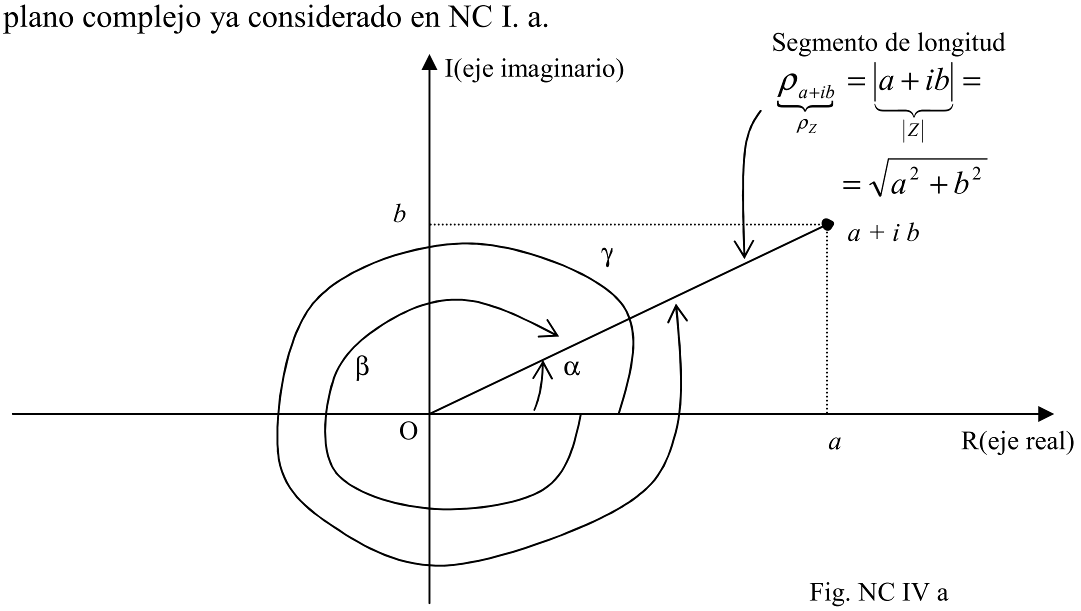


Fig. NC IV a

Sea el complejo: $Z = a + i\,b$
Se define.

$$\underbrace{\rho_Z = \rho_{a+ib}}_{\text{Módulo de } Z=a+ib} = \underbrace{|Z|}_{\substack{\text{Valor absoluto}\\ \text{de } Z=a+ib}} = \underbrace{|a+ib|}_{\substack{\text{Valor absoluto}\\ \text{de } Z=a+ib}} = \text{valor positivo de } \sqrt{a^2+b^2} \qquad [1]$$

"Modulo" y "valor absoluto" son vocablos equivalentes al referirse a los números complejos.
Notar (ver figura NC IV a) que el módulo o valor absoluto de un complejo es la distancia que en el plano complejo media entre el origen y el punto que corresponde al complejo.

b. Sea un complejo no nulo. Se define que:

Dado $a + ib \neq 0 + i0$, se llamarán argumentos de $a + ib$ a los infinitos ángulos que en el plano complejo forma con respecto al eje real la semirrecta que con origen en $0 + i0$ pasa por el punto que representa a $a + ib$.	**[2]**

Así por ejemplo, los ángulos α, β y γ indicados en la figura NC IV a son tres de los infinitos argumentos del complejo $a + ib$ allí considerado.
Según la definición recién dada, es obvio (ver fig. NC IV a) que si α es un argumento <u>cualquiera</u> de $a + ib$, se tendrá que ... $\alpha - 4\pi$, $\alpha - 2\pi$, α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, ... serán infinitos argumentos de $a + ib$, no existiendo otros argumentos adicionales a estos.

En forma más compacta, puede escribirse que:

> Los infinitos argumentos de $a + ib$ son: $\alpha + 2\pi k$
> siendo: **[3]**
> α = Un argumento <u>cualquiera</u> de $a + ib$
> k = Un entero cualquiera

Si bien a efectos de calcular se prefiere usar argumentos de magnitud chica y fácilmente visualizables, desde un punto de vista conceptual entre los argumentos no hay "hijos y entenados". Todos son "iguales ante la ley".

c. Evidentemente (ver fig. NC VI a), para que un ángulo α sea un argumento de $a + ib$, es necesario y suficiente que:

$$1^{o})\ Cos\alpha = \frac{a}{|a+ib|} = \frac{a}{|z|} \qquad 2^{o})\ Sen\alpha = \frac{b}{|a+ib|} = \frac{b}{|z|} \qquad \textbf{[4]}$$

Entonces será:

$$a = |a + ib|\ Cos\ \alpha = |Z|\ Cos\ \alpha \quad ; \qquad b = |a + ib|\ Sen\ \alpha = |Z|\ Sen\ \alpha \qquad \textbf{[5]}$$

y por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} Z = a + ib &= |a + ib|\ Cos\ \alpha + i\ |a+ib|\ Sen\ \alpha = \\ &= |a + ib|\ (Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) = |Z|\ (Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) \end{aligned}\right\} \textbf{[6]}$$

Ahora bien, como <u>para k entero</u> es:

Por teorema del coseno

$$Cos(\alpha + 2\pi k) = Cos\alpha\ \underbrace{Cos(2\pi k)}_{=1} - Sen\alpha\ \underbrace{Sen(2\pi k)}_{=0} = Cos\alpha$$

$$Sen(\alpha + 2\pi k) = Sen\alpha\ \overbrace{Cos(2\pi k)}^{=1} + Cos\alpha\ \overbrace{Sen(2\pi k)}^{=0} = Sen\alpha$$

Por teorema del seno **[7]**

entonces por **[6]** y **[7]** se tiene que:

$$Z = a + ib = |Z|(Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) = |Z|[Cos\ (\alpha + 2k\pi) + i\ Sen\ (\alpha + 2k\pi)] \qquad \text{k entero cualquiera}$$

Resumiendo:

$$Z = a + ib = |Z|(Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) = |Z|[Cos\ (\alpha + 2k\pi) + i\ Sen\ (\alpha + 2k\pi)]$$

siendo: **[8]**

1º) $|Z| = |a + ib|$ = Módulo o valor absoluto de $a + ib$ =
= Valor positivo de $\sqrt{a^2 + b^2}$

2º) α = un argumento <u>cualquiera</u> de $Z = a + ib$

3º) k = un entero <u>cualquiera</u>

Esta es la así llamada <u>forma módulo argumental o polar</u> del complejo $a + ib$.

NC V

<u>Método para poner en forma módulo argumental a un complejo dado en forma binómica</u>

a. Dado un coseno (valor comprendido entre –1 y 1 inclusive), existe siempre un único ángulo φ_1 comprendido entre 0 y π (inclusive) que tiene dicho coseno y además también existe otro ángulo $\varphi_2 = -\varphi_1$ comprendido entre 0 y $-\pi$ (inclusive) que también tiene el mismo coseno (ver figura NC V a).

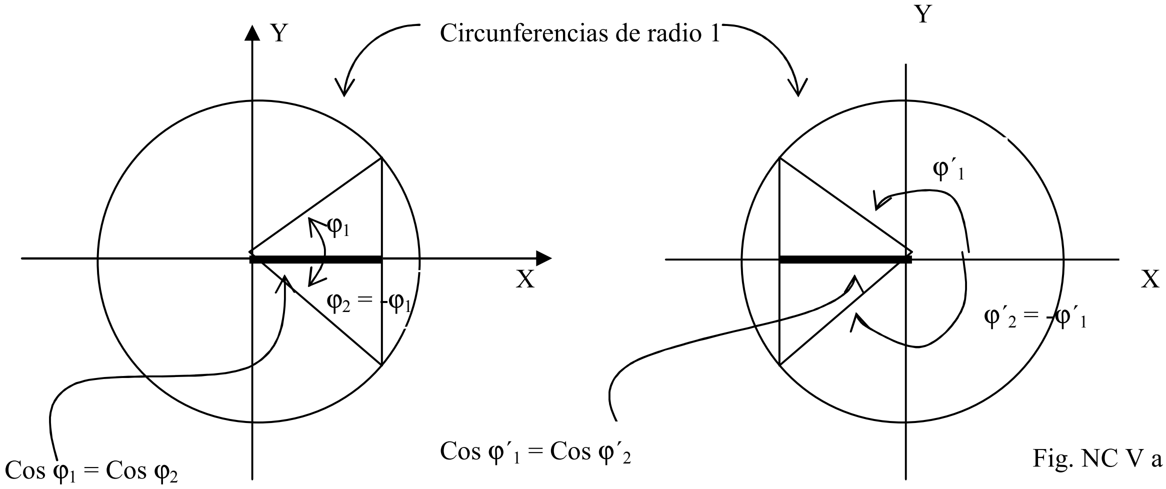


Fig. NC V a

Por otra parte, si es $0 \le \varphi_1 \le \pi$, se tiene que $Sen\varphi_1 \ge 0$, y si es $-\pi \le \varphi_2 \le 0$ se tiene que $Sen\varphi_2 \le 0$.

Por lo tanto, dado el coseno de un ángulo y <u>el signo</u> de su seno, dicho ángulo queda completamente individualizado.

Así, por ejemplo, supóngase que sea Cos $\varphi = ½$ y Sen $\varphi < 0$. Por ser Cos $\varphi = ½$ se tiene que los "candidatos" a ser iguales a φ son:

$$Arc\ Cos\frac{1}{2} = \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ \varphi_2 = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

y como por ser *Sen* $\varphi < 0$ debe ser $-\pi \le \varphi \le 0$, resulta entonces que:

$$\varphi = \varphi_2 = -\pi/3$$

b. <u>A tener muy en cuenta:</u> Al usar una calculadora de mano para hallar el ángulo *Arc Cos* x, la calculadora dará siempre como única respuesta el ángulo comprendido entre 0 y π inclusive cuyo coseno es x, es decir el ángulo que más arriba se llamó φ_1.

Evidentemente, se tendrá que $\varphi_2 = -\varphi_1$.

c. Sea ahora el complejo:

$$a + ib$$

Se tiene que (ver **[1]** de NC IV):

$|Z|$ = Valor positivo de $\sqrt{a^2+b^2}$ **[1]**

y que si α es un argumento de Z que tiene que (ver **[4]** de NC IV):

$$Cos\alpha = \frac{a}{|Z|} \qquad \text{y} \qquad Sen\alpha = \frac{b}{|Z|}$$

Tal como visto en **a**, por ser $Cos\alpha = \frac{a}{|Z|}$ se tiene que los dos "candidatos" a ser argumentos de Z son:

$$Arc\ Cos\frac{a}{|Z|} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 \end{cases}$$

Como siempre es $|Z| > 0$, el denominador de la expresión de *Sen* α es siempre positivo y por lo tanto <u>*Sen* α será positivo o negativo según que b, parte imaginaria de Z, sea positiva o negativa</u>.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \alpha_1 & \text{si } b > 0 \\ \alpha = \alpha_2 = -\alpha_1 & \text{si } b < 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{[2]}$$

Los restantes infinitos argumentos de Z están dados por:

$\alpha + 2k\pi$, k entero cualquiera

y la fórmula módulo argumental de Z = $a + ib$ será.

$Z = |Z|\ [Cos\ (\alpha + 2k\pi) + i\ Sen\ (\alpha + 2k\pi)]$ k entero cualquiera

donde $|Z|$ está dado por **[1]** y α está dado por **[2]**.

(Preguntita fácil para el lector: ¿Qué pasa si en Z = $a + ib$ es b = 0?)

d. Ejemplo:

Sea:

$Z = 5 + i\,4$

Se tiene que:

$|Z|$ = Valor positivo de $\sqrt{5^2+4^2} = 6{,}4031$

Pidiendo a la calculadora de mano el valor:

$$Arc\ Cos\frac{5}{6{,}4031}$$

se obtiene:

$\alpha_1 = 0{,}6747$

y por lo tanto será:

$\alpha_2 = -\ 0{,}6747$

Como la parte imaginaria de Z es 4, valor positivo, se tiene entonces que:

α = un argumento de Z = $\alpha_1 = 0{,}6747$

y por lo tanto:

$Z = 5 + i\,4 = 6{,}4031\ [Cos\ (0{,}6747 + 2k\pi) + i\ Sen\ (0{,}6747 + 2k\pi)]$, k entero cualquiera

e. Otro ejemplo:
Sea.

$Z = 4 - i\,3$

Se tiene que:

$|Z|$ = Valor positivo de $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

Pidiendo a la calculadora de mano el valor:

$$Arc\ Cos\ \frac{4}{5}$$

se obtiene:

$\alpha_1 = 0{,}6435$

y por lo tanto será:

$\alpha_2 = -\ 0{,}6435$

Como la parte imaginaria de Z es -3, valor negativo, se tiene entonces que:

α = un argumento de $Z = \alpha_2 = -0{,}6435$

y por lo tanto:

$Z = 4 - i\,3 = 5\ [Cos\ (-0{,}6435 + 2k\pi) + i\ Sen\ (-0{,}6435 + 2k\pi)]$, k entero cualquiera **[3]**

A veces, por "prejuicios burgueses", el hecho de tener un argumento negativo en una fórmula es algo que molesta a la vista. En caso de que esto ocurra en el presente caso, haciendo k = 1 en **[3]** se obtiene:

$Z = 5\ [Cos\ (-0{,}6435 + 6{,}2832) + i\ Sen\ (-0{,}6435 + 6{,}2832)] =$
$= 5\ (Cos\ 5{,}6397 + i\ Sen\ 5{,}6397)$

y de nuevo, por lo indicado en **[7]** de NC IV, resulta finalmente que:

$Z = 5\ [Cos\ (5{,}6397 + 2k\pi) + i\ Sen\ (5{,}6397 + 2k\pi)]$, k entero cualquiera **[4]**

Notar lo siguiente:
Puede ser que la comparación de las fórmulas **[3]** y **[4]** cause una cierta perplejidad al lector. Ambas fórmulas corresponden al mismo complejo, y sin embargo en **[3]** se ha escrito (- 0,6435 + 2kπ) mientras que en **[4]** se ha escrito (5,6397 + 2kπ). Tener en cuenta al respecto que <u>en cada una de estas fórmulas</u>, el número k puede asumir un valor entero <u>cualquiera</u>. Se obtendrán expresiones idénticas si en **[3]** se hace k = 1 y en **[4]** se hace k = 0, o si en **[3]** se hace k = -2 y en **[4]** se hace k = -3, etc., etc.. Ambas fórmulas indican lo mismo.

NC VI

<u>Igualdad de complejos expresados en forma módulo argumental</u>

Se tiene que:

1º) Un complejo tiene un único módulo o valor absoluto (ver **a** de NC IV)
2º) Un complejo tiene un único conjunto de argumentos, existiendo entre dos de ellos cualesquiera una diferencia igual a 2kπ, siendo k un número entero (ver **c** de NC IV).
3º) Dos complejos son iguales cuando y solo cuando son <u>el mismo número</u> (ver **c** de NC II).

y entonces será:

$$|Z_1|(Cos\ \alpha_1 + i\ Sen\ \alpha_1) = |Z_2|(Cos\ \alpha_2 + i\ Sen\ \alpha_2)$$

cuando y sólo cuando sean:

$$|Z_1| = |Z_2|$$

y además:

$\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$, es decir que $\alpha_2 = \alpha_1 + 2k\pi$, k entero. **[1]**

NC VII

<u>Producto de complejos indicados en forma módulo argumental</u>

a. Sean:

$$Z_1 = |Z_1|(Cos\alpha_1 + iSen\alpha_1) = (\underbrace{|Z_1|Cos\alpha_1}_{a_1}) + i(\underbrace{|Z_1|Sen\alpha_1}_{b_1}) = a_1 + ib_1$$

$$Z_2 = |Z_2|(Cos\alpha_2 + iSen\alpha_2) = (\underbrace{|Z_2|Cos\alpha_2}_{a_2}) + i(\underbrace{|Z_2|Sen\alpha_2}_{b_2}) = a_2 + ib_2 \qquad \textbf{[1]}$$

Entonces: Por **[10]** de NC III Por **[1]**

$$Z_1Z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1) =$$
$$=(|Z_1|\,|Z_2|\,Cos\ \alpha_1\ Cos\alpha_2 - |Z_1|\,|Z_2|\,Sen\ \alpha_1\ Sen\alpha_2) +$$
$$+\ i\,(|Z_1|\,|Z_2|\,Cos\ \alpha_1\ Sen\alpha_2 + |Z_1|\,|Z_2|\,Cos\ \alpha_2\ Sen\alpha_1) =$$

$$=|Z_1|\,|Z_2|\,[(Cos\ \alpha_1\ Cos\alpha_2 - Sen\ \alpha_1\ Sen\alpha_2) + i\,(Cos\ \alpha_1\ Sen\alpha_2 + Cos\ \alpha_2\ Sen\alpha_1)] =$$
$$=|Z_1|\,|Z_2|\,[Cos\ (\alpha_1 + \alpha_2) + i\ Sen\ (\alpha_1 + \alpha_2)]$$

Por los teoremas del seno y del coseno

Resumiendo:

$$Z_1 \cdot Z_2 = [\,|Z_1|(Cos\ \alpha_1 + i\ Sen\ \alpha_1)]\,[\,|Z_2|(Cos\ \alpha_2 + i\ Sen\ \alpha_2)] =$$
$$=|Z_1|\,|Z_2|\,[Cos\ (\alpha_1 + \alpha_2) + i\ Sen\ (\alpha_1 + \alpha_2)] =$$
$$=|Z_1|\,|Z_2|\,[Cos\ (\alpha_1 + \alpha_2 + 2k\pi) + i\ Sen\ (\alpha_1 + \alpha_2 + 2k\pi)]$$

siendo:

1º) $|Z_1|$ = Módulo o valor absoluto de Z_1
2º) $|Z_2|$ = Módulo o valor absoluto de Z_2
3º) α_1 = Un argumento cualquiera de Z_1
4º) α_2 = Un argumento cualquiera de Z_2
5º) k = Un entero cualquiera **[2]**

b. Ejemplo:

Sean:

$Z_1 = \sqrt{3} + i$ $\qquad\qquad$ $Z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Como entonces es:

1º) $|Z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

2º) $Arc\ Cos \frac{\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\qquad\qquad I(Z_2) = 1 > 0$

lo que implica que sea:

α_1 = un argumento de $Z_1 = \frac{\pi}{6}$

3º) $|Z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

4º) $Arc\ Cos \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\qquad\qquad I(Z_2) = -\sqrt{2} < 0$

lo que implica que sea:

α_2 = un argumento de $Z_2 = -\frac{\pi}{4}$

resulta que:

$Z_1 = 2(Cos\ \frac{\pi}{6} + i\ Sen\ \frac{\pi}{6})$, $Z_2 = 2\ [Cos\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\ Sen\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)]$

Entonces, por lo visto en **[2]** se tiene que:

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2.2\left\{Cos\left[\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + i\ Sen\left[\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$= 4\left[Cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\ Sen\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] =$$

$$= 4\left[Cos\left(-\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right) + i\ Sen\left(-\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right)\right]$$

NC VIII

<u>Potencia *n*-ésima de un complejo indicado en forma módulo argumental</u>

a. Por potencia enésima de un número cualquiera se entiende el resultado de multiplicar *n* factores Z, <u>siendo *n* natural.</u>

b. Sea:

$Z = |Z|\ (Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha)$

Aplicando *n* veces el procedimiento indicado en el párrafo anterior resulta:

$$Z^n = |Z|^n\,(Cos\ n\alpha + i\ Sen\ n\alpha) =$$
$$= |Z|^n\,[Cos\ (n\alpha + 2k\pi) + i\ Sen\ (n\alpha + 2k\pi)] \qquad \textbf{[1]}$$

Siendo:

1º) $|Z|$ = Módulo o valor absoluto de Z
2º) α = Un argumento cualquiera de Z
3º) k = Un entero cualquiera

c. Ejemplo:

Sea el complejo:

$$Z = 1 + i\sqrt{3} = 2(Cos\ \frac{\pi}{3} + i\ Sen\ \frac{\pi}{3})$$

Según **[1]** se tiene que:

$$Z^{32} = 2^{32}\left(Cos\frac{32\pi}{3} + i\ Sen\frac{32\pi}{3}\right) =$$
$$= 2^{32}\left[Cos\left(\frac{32\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\ Sen\left(\frac{32\pi}{3} + 2\pi k\right)\right] \qquad \textbf{[2]}$$

En esta fórmula aparece un argumento igual a 32π/3, el cual no resulta "simpático" por los siguientes motivos:

1º) No es inmediato visualizar adonde fue a parar en el plano complejo el punto correspondiente a Z^{32}.
2º) Aún más importante, una calculadora de mano no da el coseno y el seno de un ángulo tan grande.
Para solucionar este inconveniente, en **[2]** se dará a k un valor tal que resulte un argumento comprendido entre 0 y 2π. Para esto debe ser:

$$0 \leq \frac{32\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi$$

es decir:

$$-\frac{32\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 2\pi - \frac{32\pi}{3}$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{32\pi}{3}\right) \leq k \leq \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - \frac{32\pi}{3}\right)$$
$$-{}^{16}\!/_{3} \leq k \leq 1 - {}^{16}\!/_{3}$$
$$-5{,}3333... \leq k \leq -4{,}3333...$$

y como el único entero que cumple con esta condición es

k = -5

de **[2]** se deduce que:

$$Z^{32} = 2^{32}\left[Cos\left({}^{32\pi}\!/_{3} - 10\pi\right) + i\ Sen\left({}^{32\pi}\!/_{3} - 10\pi\right)\right] =$$
$$= 2^{32}\left(Cos\,{}^{2\pi}\!/_{3} + i\ Sen\,{}^{2\pi}\!/_{3}\right) \qquad \textbf{[3]}$$

y por **[7]** de NC IV se tiene finalmente que:

$$Z^{32} = 2^{32}\left[Cos\left(2\pi/_3 + 2k\pi\right) + i\ Sen\left(2\pi/_3 + 2k\pi\right)\right]$$

Si se quiere hallar esta potencia en forma binómica, usando la fórmula **[3]** y acudiendo a la calculadora de mano se obtiene:

$$Z^{32} = 2^{32}\left(Cos\,2\pi/_3 + i\ Sen\,2\pi/_3\right) = 4,29496\times10^{9}\left[-0,5 + i0,8660254\right] =$$
$$= -2,14748\times10^{9} + i3,7195444\times10^{9}$$

d. Ejemplo:
Supóngase que se desee hallar $(3 - 4i)^5$
Poniendo:

$Z = 3 - 4i$

se obtiene:

1º) $|Z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

2º) $Arc\ Cos\,\frac{3}{5} = \begin{cases} 0,9272952 \\ -0,9272952 \end{cases}$ I(Z_2) = - 4 < 0

Lo que implica que sea:

α = Un argumento cualquiera de Z = -0,9272952

y por lo tanto será:

Z = 3 – 4*i* = 5 [*Cos*(-0,9272952) + *i Sen*(-0,9272952)]

y entonces, por **[1]** resulta:

$Z^5 = (3 - 4i)^5 = 5^5$ {*Cos* [5 (-0,9272952) + 2πk] + *i Sen* [5 (-0,9272952) + 2πk]}=
$= 5^5$ [*Cos*(-4,636476 + 2πk) + *i Sen* (-4,636476 + 2πk)] **[5]**

Si se quiere un argumento comprendido entre 0 y 2π inclusive, en esta expresión habrá que tomar a k tal que:

$$0 \le -4,636476 + 2\pi k \le 2\pi$$

es decir:

$$4,636476 \le 2\pi k \le 2\pi + 4,636476$$
$$1/_{2\pi}(4,636476) \le k \le 1 + 1/_{2\pi}(4,636476)$$
$$0,737918 \le k \le 1,737918$$

y como el único entero que cumple con esta condición es

k = 1

entonces por **[5]** resulta:

$Z^5 = 5^5$ [*Cos* (-4,636476 + 2π) + *i Sen* (-4,636476 + 2π)]=
$= 5^5$ (*Cos* 1,6467093 + *i Sen* 1,6467093) **[6]**

y por **[7]** de NC IV se tiene finalmente que:

$Z^5 = 5^5$ [*Cos* (1,6467093 + 2πk) + *i Sen* (1,6467093 + 2πk)]

Si se desea hallar esta potencia en forma binómica, usando la fórmula **[6]** y acudiendo a la calculadora de mano resulta:

$Z^5 = 3125\ (-0{,}07584 + i\ 0{,}9971199) = -237 + i\ 3116$

e. A título ilustrativo, trate el lector de hallar a $(3 - 4i)^5$ usando el método binómico, es decir, calculando:

$$(3 - 4i)\ (3 - 4i)\ (3 - 4i)\ (3 - 4i)\ (3 - 4i)$$

Lo más probable es que abandone a mitad de camino, convencido de dos cosas:
1º) De que la única manera civilizada de hallar una potencia mayor que 3 de un número complejo es usando el método módulo argumental.
2º) De que, tal como dijo el Sr. Cauchy, "Hacer cuentas no es trabajo propio de un cristiano".

NC IX

Cociente de dos complejos dados en forma módulo argumental

a. Sean:

$$Z_1 = |Z_1|\,(Cos\ \alpha_1 + i\ Sen\ \alpha_1) \qquad\qquad Z_2 = |Z_2|\,(Cos\ \alpha_2 + i\ Sen\ \alpha_2) \qquad \textbf{[1]}$$

Si $Z_2 \neq 0$, existe el cociente Z_1/Z_2, (ver **[11]** de NC III). Supóngase que dicho cociente expresado en forma módulo argumental sea:

$$Z_3 = Z_1/Z_2 = |Z_3|\,(Cos\ \alpha_3 + i\ Sen\ \alpha_3) \qquad \textbf{[2]}$$

donde por el momento $|Z_3|$ y α_3 son desconocidos.
Ahora bien, como $Z_3 = Z_1/Z_2$, se tiene que es $Z_1 = Z_2 \cdot Z_3$, lo que por **[1], [2]** y por **[2]** de NC VII implica que sea:

$$|Z_1|\,(Cos\ \alpha_1 + i\ Sen\ \alpha_1) = |Z_2| \cdot |Z_3|\,[Cos\ (\alpha_2 + \alpha_3) + i\ Sen\ (\alpha_2 + \alpha_3)] \qquad \textbf{[3]}$$

Esta es una igualdad de complejos expresada en forma módulo argumental.
Evidentemente (ver **[1]** de NC VI), esta expresión será válida cuando y sólo cuando:

$$\left.\begin{array}{l} 1º)\ |Z_1| = |Z_2| \cdot |Z_3| \\ 2º)\ (\alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_1 = 2\pi k \end{array}\right\} \qquad \textbf{[4]}$$

Como evidentemente estas condiciones se cumplen si y solo si:

$$\left.\begin{array}{ll} 1º)\ |Z_3| = |Z_1| / |Z_2| & \\ 2º)\ \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\pi k & k = \text{entero cualquiera} \end{array}\right\} \qquad \textbf{[5]}$$

resulta entonces que al tomar a $|Z_3|$ y α_3 tal como indicado en **[5]** se tendrá que lo expresado en **[3]** es cierto y que por lo tanto Z_3 será en efecto el cociente Z_1/Z_2.
Resumiendo:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|(Cos\alpha_1 + Sen\alpha_1)}{|Z_2|(Cos\alpha_2 + Sen\alpha_2)} =$$

$$= \frac{|Z_1|}{|Z_2|}[Cos(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\pi k) + Sen(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\pi k)$$

siendo:
1º) $|Z_1|$ = Módulo o valor absoluto de Z_1
2º) $|Z_2|$ = Módulo o valor absoluto de Z_2
3º) α_1 = Argumento de Z_1
4º) α_2 = Argumento de Z_2
5º) k = Un entero cualquiera **[6]**

b. Ejemplo:
Sean los mismos números Z_1 y Z_2 considerados en **b** de NC VII:

$Z_1 = \sqrt{3} + i = 2(Cos\ \frac{\pi}{6} + i\ Sen\ \frac{\pi}{6})$ $\qquad$ $Z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\ [Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\ Sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)]$

Por lo indicado en **[6]** se tiene que:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{2}\left\{Cos\left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + i\ Sen\left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} = Cos\frac{5\pi}{12} + i\ Sen\frac{5\pi}{12} =$$

$$= Cos\left(\frac{5\pi}{12} + 2\pi k\right) + i\ Sen\left(\frac{5\pi}{12} + 2\pi k\right)$$

NC X

Raíz *n*-ésima de un complejo

g. Sea el complejo:

$$Z = |Z|\,(Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) \qquad \textbf{[1]}$$

y supóngase que se desee hallar a todos los complejos que elevados a su potencia *n* (*n* = natural) sean iguales a Z, es decir que se quieren hallar todas las raíces *n*-ésimas de Z.

Sea el número complejo:

$$W = |W|\,(Cos\ \beta + i\ \ Sen\ \beta) \qquad \textbf{[2]}$$

siendo por el momento $|W|$ y β indeterminados.
Para que sea $Z = W^n$, por lo visto en **[1]** de NC VIII se tiene que ha de ser:

$$|Z|\,(Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) = |W|^n(Cos\ n\beta + i\ Sen\ n\beta) \qquad \textbf{[3]}$$

Esta expresión será evidentemente válida (ver **[1]** de NC VI) cuando sean:

$|Z| = |W|^n$
$n\beta - \alpha = 2\pi k$, $\qquad$ k = entero cualquiera **[4]**

Como evidentemente estas condiciones se cumplirán si se toma:

1º) $|W| = |Z|^{\frac{1}{n}}$, siendo $|Z|^{\frac{1}{n}}$ la raíz *n*-ésima positiva de $|Z|$
2º) $\beta = (\alpha + 2\pi k)/n$, siendo k un entero cualquiera **[5]**

resulta entonces que al tomar a $|W|$ y β tal como indicados en **[5]** se tendrá que la expresión **[3]** será cierta y que por lo tanto la expresión de *W* indicada en **[2]** será en efecto una raíz *n*-ésima de Z.
Por lo tanto, las raíces *n*-ésimas de Z estarán dadas por:

$$W_k = |Z|^{\frac{1}{n}}\left(Cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\ Sen\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right), \qquad \text{k = entero cualquiera} \qquad \textbf{[6]}$$

h. Mirando la fórmula **[6]**, a primera vista parecería que existieran infinitas raíces *n*-ésimas de Z, una por cada valor (entero) que se de a k.
Para analizar esta cuestión, se empezará por calcular las raíces cúbicas de 1.
Como:

$$1 = 1\ (Cos\ 0 + i\ Sen\ 0)$$

en este caso la fórmula **[6]** toma el aspecto:

$$\sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}}\left[Cos(\frac{0+2\pi k}{3}) + i\ Sen(\frac{0+2\pi k}{3})\right]$$

y los diversos valores de raíces cúbicas que se van obteniendo al dar distintos valores a k son:

$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=-3} = Cos\left(-6\pi/3\right) + i\ Sen\left(-6\pi/3\right) = Cos(-2\pi) + i\ Sen(-2\pi) = 1 + i\ 0 = 1$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=-2} = Cos\left(-4\pi/3\right) + i\ Sen\left(-4\pi/3\right) = -0{,}5 + i\ 0{,}8660254$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=-1} = Cos\left(-2\pi/3\right) + i\ Sen\left(-2\pi/3\right) = -0{,}5 - i\ 0{,}8660254$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=0} = Cos\ 0 + i\ Sen\ 0 = 1 + i\ 0 = 1$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=1} = Cos\left(2\pi/3\right) + i\ Sen\left(2\pi/3\right) = -0{,}5 + i\ 0{,}8660254$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=2} = Cos\left(4\pi/3\right) + i\ Sen\left(4\pi/3\right) = -0{,}5 - i\ 0{,}8660254$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=3} = Cos\left(6\pi/3\right) + i\ Sen\left(6\pi/3\right) = Cos(2\pi) + i\ Sen(2\pi) = 1 + i\ 0 = 1$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=4} = Cos\left(8\pi/3\right) + i\ Sen\left(8\pi/3\right) = -0{,}5 + i\ 0{,}8660254$$
$$\left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=5} = Cos\left(10\pi/3\right) + i\ Sen\left(10\pi/3\right) = -0{,}5 - i\ 0{,}8660254$$

etc.
Evidentemente:

$$\ldots = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=-3} = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=0} = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=3} = \ldots$$
$$\ldots = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=-2} = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=1} = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=4} = \ldots$$
$$\ldots = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=-1} = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=2} = \left.\sqrt[3]{1}\right|_{k=5} = \ldots$$

existiendo una fuerte presunción de que las únicas raíces cúbicas de 1 sean:

1 , - 0,5 + i 0,8660254 , - 0,5 - i 0,8660254

Ver fig. NC X a.

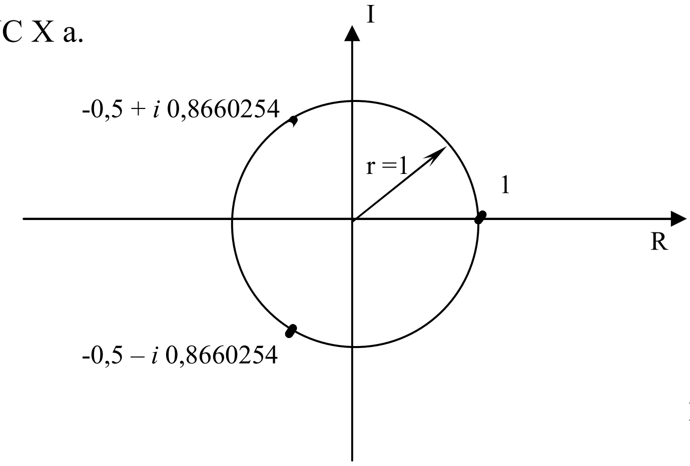


Fig. NC X a

Notar de paso que las tres raíces consideradas están distribuidas simétricamente a lo largo de la circunferencia de radio $|Z| = 1$.

i. Extrapolando lo recién “barruntado”, sería interesante verificar si en efecto un número complejo tiene 4 raíces cuartas, 5 raíces quintas, ... , n raíces n-ésimas.

Considérese de nuevo la fórmula **[6]**, que da las raíces n-ésimas del complejo Z. Sean dos enteros k_1 y k_2 tales que:

$$k_1 - k_2 = n \text{ r, siendo r otro número entero} \qquad \textbf{[7]}$$

Entonces:

Por **[7]**

$$W_{k_1} = |Z|^{\frac{1}{n}} \left(Cos \frac{\alpha + 2\pi k_1}{n} + i \; Sen \frac{\alpha + 2\pi k_1}{n} \right) =$$

$$= |Z|^{\frac{1}{n}} \left(Cos \frac{\alpha + 2\pi (k_2 + nr)}{n} + i \; Sen \frac{\alpha + 2\pi (k_2 + nr)}{n} \right) =$$

$$= |Z|^{\frac{1}{n}} \left[Cos \left(\frac{\alpha + 2\pi k_2}{n} + 2\pi r \right) + i \; Sen \left(\frac{\alpha + 2\pi k_2}{n} + 2\pi r \right) \right] =$$

Por **[7]** de NC IV y por ser r entero

$$= |Z|^{\frac{1}{n}} \left[Cos \left(\frac{\alpha + 2\pi k_2}{n} \right) + i \; Sen \left(\frac{\alpha + 2\pi k_2}{n} \right) \right] = W_{k_2}$$

Resumiendo:

Si es $k_1 - k_2 = n$ r, siendo r entero, entonces es $W_{k1} = W_{k2}$.

Esta expresión indica que cuando en **[6]** se pongan alternativamente valores de k que difieran en un múltiplo de n, se encontrará exactamente la misma raíz n-ésima de Z.

Por lo tanto, cuando en **[6]** se hallan tomado k = 0, 1, 2, ..., (n – 1) se habrán agotado todas las raíces n-ésimas de Z, ya que cualquier otro valor de k que se considere diferirá en un múltiplo de n con alguno de los valores 0, 1, 2, ..., (n – 1). Por ejemplo, si n =3, se considerarán los valores de k iguales a 0, 1, 2. Si se tomara k = 17, se tendrá que este valor diferirá en 5.3 del 2 ya considerado, con lo que resulta que no se obtendrá ninguna nueva raíz cúbica.

Entonces:

Dado el complejo Z = $|Z|$ (*Cos* α + *i Sen* α), sus raíces *n*-ésimas estarán dadas por:

$$W_k = |Z|^{\frac{1}{n}}\left(Cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\ Sen\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) =$$

$$= |Z|^{\frac{1}{n}}\left[Cos\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi\ l\right) + i\ Sen\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi\ l\right)\right] \qquad \textbf{[8]}$$

donde:

1º) $|Z|^{\frac{1}{n}}$ = Raíz *n*-ésima positiva del módulo o valor absoluto de Z

2º) α = Un argumento cualquiera de Z

3º) k = 0, 1, 2, ..., (*n* – 1)

4º) *l* = Un entero cualquiera

j. Ejemplo:

Se hallarán las raíces cuartas de Z = - 1 + *i*

Se tiene que como:

1º) $|Z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}4142$

2º) $Arc\ Cos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 2{,}3561945 \\ -2{,}3561945 \end{cases}$ I(Z) = 1 > 0

resulta que:

Z = $\sqrt{2}$ (*Cos* 2,3561945 + *i Sen* 2,3561945)

y por lo tanto:

$$\sqrt[4]{2}\Big|_{k=0} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(Cos\frac{2{,}3561945}{4} + i\ Sen\frac{2{,}3561945}{4}\right) =$$

$$= 1{,}0905077(0{,}8314695 + i\ 0{,}5555702) = 0{,}906723 + i\ 0{,}6058537$$

$$\sqrt[4]{2}\Big|_{k=1} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(Cos\frac{2{,}3561945 + 2\pi}{4} + i\ Sen\frac{2{,}3561945 + 2\pi}{4}\right) =$$

$$= 1{,}0905077(-0{,}5555702 + i\ 0{,}8314695) = -0{,}6058537 + i\ 0{,}906723$$

$$\sqrt[4]{2}\Big|_{k=2} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(Cos\frac{2{,}3561945 + 4\pi}{4} + i\ Sen\frac{2{,}3561945 + 4\pi}{4}\right) =$$

$$= 1{,}0905077(-0{,}8314695 + i\ 0{,}5555702) = -0{,}906723 + i\ 0{,}6058537$$

$$\sqrt[4]{2}\Big|_{k=0} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(Cos\frac{2{,}3561945 + 6\pi}{4} + i\ Sen\frac{2{,}3561945 + 6\pi}{4}\right) =$$

$$= 1{,}0905077(0{,}5555702 - i\ 0{,}8314695) = 0{,}6058537 - i\ 0{,}906723$$

Ver fig. NC X b.

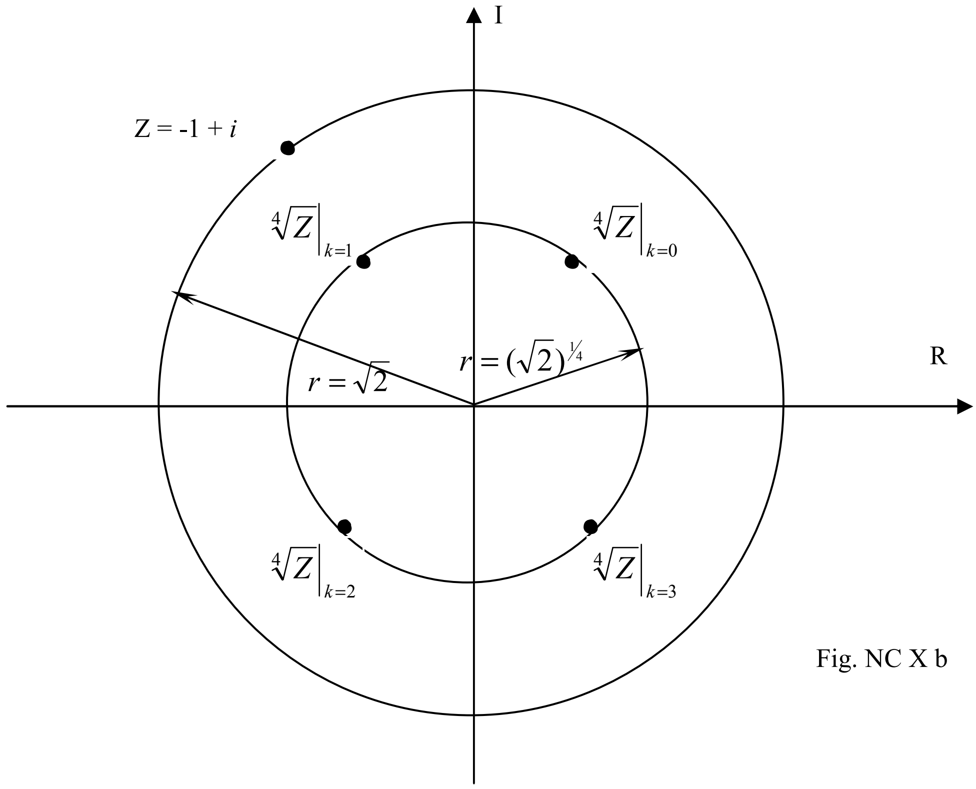


Fig. NC X b

NC XI

<u>**Complejos conjugados**</u>

a. Se define que el conjugado del complejo Z = *a* + *ib* es el complejo $\overline{Z} = a - ib$. Simbólicamente (ver fig. NC XI a)

$$\overline{(a+ib)} = a - ib \qquad , \qquad \overline{(a-ib)} = a + ib \qquad \textbf{[1]}$$

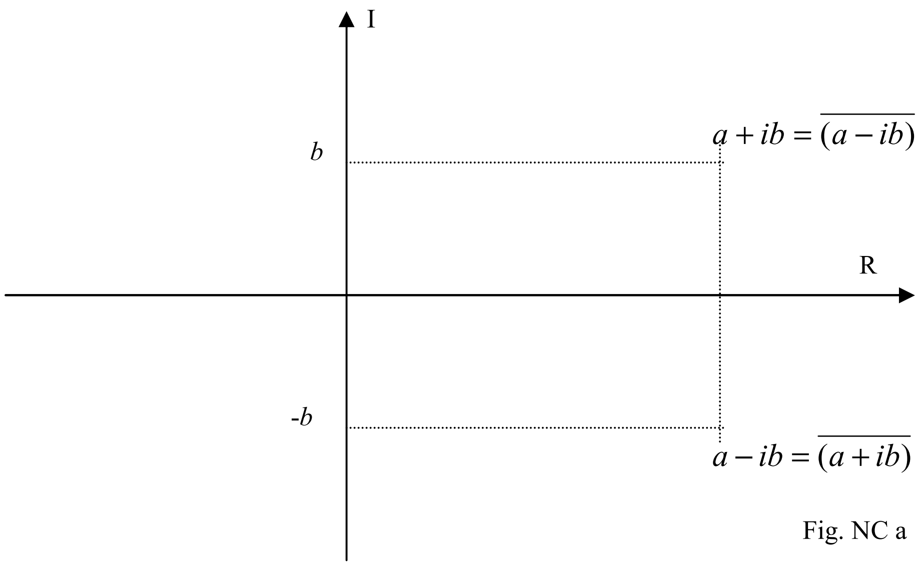


Fig. NC a

b. En forma módulo argumental, como:

$Cos\ \alpha = Cos\ (-\ \alpha)$, $-\ Sen\ \alpha = Sen\ (-\ \alpha)$ **[2]**

se tiene que:

$$\overline{Z} = \overline{\left(|Z|(Cos\alpha + i\ Sen\alpha)\right)} = \overline{\left((|Z|\,Cos\alpha) + i\ (|Z|\,Sen\alpha)\right)} \overset{\text{Por [1]}}{=}$$

$$= |Z|Cos\alpha - i\ |Z|Sen\alpha \overset{\text{Por [2]}}{=} |Z|Cos(-\alpha) + i\ |Z|Sen(-\alpha) =$$

$$= |Z|\left[Cos(-\alpha) + i\ Sen(-\alpha)\right]$$

Resumiendo:

$$\overline{\left(|Z|(Cos\alpha + i\ Sen\alpha)\right)} = |Z|\left(Cos(-\alpha) + i\ Sen(-\alpha)\right) = |Z|(Cos(\alpha) - i\ Sen(\alpha)) \qquad \textbf{[3]}$$

c. Sean:

$Z_1 = a_1 + i\ b_1$, $Z_2 = a_2 + i\ b_2$

Entonces, como:

$$\overline{(Z_1 + Z_2)} = \left(\overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)}\right) = \left(\overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}\right) =$$

$$= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$$

se tiene que:

$$\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 \qquad \textbf{[4]}$$

d. Sean:

$Z_1 = a_1 + i\ b_1$, $Z_2 = a_2 + i\ b_2$

Entonces, como:

1º) $\overline{(Z_1 Z_2)} = \left(\overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)}\right) = \left(\overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)}\right) =$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

y

2º) $\overline{Z}_1\overline{Z}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(-a_1b_2 - a_2b_1) =$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

resulta que:

$$\overline{(Z_1 Z_2)} = \overline{Z}_1\overline{Z}_2 \qquad \textbf{[5]}$$

e. De una manera similar se deduce que:

$$\overline{(Z_1 / Z_2)} = \overline{Z}_1 / \overline{Z}_2 \qquad \textbf{[6]}$$

f. Se tiene que:

$$Z + \overline{Z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2R(Z)$$

Resumiendo:

$$Z + \overline{Z} = 2R(Z) \qquad \textbf{[7]}$$

g. Se tiene que:

$$Z - \overline{Z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2iI(Z)$$

Resumiendo:

$$Z - \overline{Z} = 2iI(Z) \qquad \textbf{[8]}$$

h. Se tiene que:

$$Z.\overline{Z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + i(ab - ab) = a^2 + b^2 = |Z|^2$$

Resumiendo:

$$Z.\overline{Z} = |Z|^2 \qquad \textbf{[9]}$$

NC XII

<u>Números complejos y realidad física</u>

a. Supóngase que como resultado de un proceso de análisis, el Ing. Juan Pérez haya determinado que la solución de un cierto problema consiste en introducir entre los terminales a y b de un circuito eléctrico una impedancia cuya magnitud a 1000 ciclos por segundo sea igual a 620 – *i* 79,557. El Ing. Pérez conectará entonces entre a y b la impedancia indicada en la fig. NC XII a, y dará por resuelto el problema.

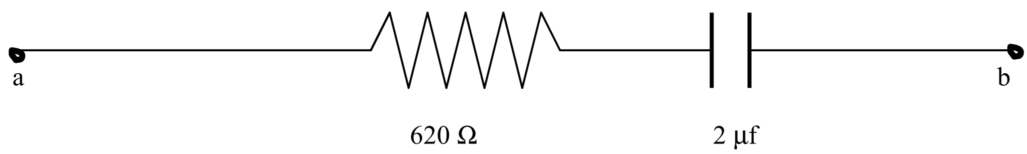


Fig. NC XII a

El Ing. Pérez en ningún momento perdió la calma al encontrar que el problema tenía como respuesta un número complejo. Más aún, lo esperaba. El problema que tenía entre manos fue planteado “en complejo” y todos los pasos de su razonamiento fueron también hechos “en complejo” (puede decirse que la teoría de los circuitos eléctricos no es más que una aplicación directa de la teoría de las funciones de variable compleja). El Ing. Pérez sabe que a cada número complejo (o, mejor dicho, a cada función de variable compleja) que se le vaya presentando corresponde una asociación física de resistencias y/o capacitores y/o inductancias y/o transformadores.

b. Por otra parte, considérese ahora otro tipo de problema.
¿Qué ocurre si trabajando en un caso físico en el cual todas las magnitudes involucradas son medidas en números reales se obtiene una respuesta compleja?
Un ejemplo de este tipo de situación es la que se le presenta a Jaimito si lo mandan a comprar una cantidad de kilos de pan cuyo cuadrado sea – 4.
Para encarar este problema específico se empezará por decir que ha sido enunciado de una manera sumamente capciosa ya que al hablarse de kilos de pan se implica el peso de un cuerpo, <u>magnitud que es siempre medida en números no negativos</u>.

Una formulación leal del problema sería decirle a Jaimito que halle un número real no negativo cuyo cuadrado sea – 4 y que compre una cantidad de kilos de pan igual a dicho número. Evidentemente, Jaimito no podrá cumplir con el encargo ya que no existe ningún número real no negativo cuyo cuadrado sea – 4.
Otra situación se presenta si se puede indicar la abscisa o abscisas del plano xy en las cuales la parábola $y = x^2$ corta la recta $y = x – 1$ (ver fig. NC XII b).

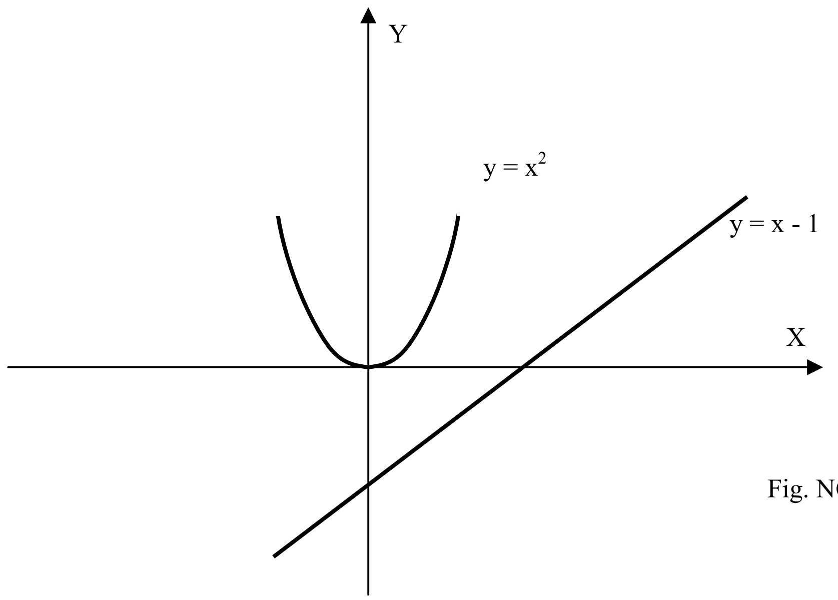


Fig. NC XII b

Como al hablar de "plano xy" se indica implícitamente que las variables x e y son reales, el enunciado leal del problema sería pedir que se indiquen los números reales x tales que sea $x^2 = x – 1$. Como no hay ningún número real que cumpla con esta condición, resulta que este problema tampoco tiene solución.
En general:
El encontrar una repuesta compleja en un problema del cual se sepa que todos los números y funciones involucradas deben ser reales indica que dicho problema no tiene solución.

c. Observación importante:
Si al resolver un problema que se sabe que debe tener una respuesta real se encuentra una solución compleja, hay que cuidarse bien de no tirarla al canasto en forma inmediata ya que existen muchas expresiones reales que pueden aparecer en forma compleja.
Así, por ejemplo, se tiene que la fórmula:

$$v(t)=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2i}\right)e^{i\omega t}+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2i}\right)e^{-i\omega t}$$

(donde *a* y *b* son números reales y *t* es una variable real) también puede ser escrita como:

$$v(t) = aCos\,\omega\, t + bSen\,\omega\, t$$

resultando así que *v(t)* es una función real de la variable real *t*.

NC XIII

Número *e*

El número *e* es un número real irracional dado por la expresión:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = 2{,}7182818\ldots \qquad \textbf{[1]}$$

Este número es uno de los números más importantes de las matemáticas, como con posterioridad el lector tendrá oportunidad de comprobar.
Se usa como base de los logaritmos llamados naturales o neperianos.

NC XIV

Potencias complejas de *e* y sus consecuencias

NC XIV. 1

a. Sea:

$$Z = a + ib \qquad [1]$$

Mediante un ingenioso "pálpito condicionado" se define que:

DEF $$\boxed{e^Z = e^{a+ib} = e^a(Cos\ b + iSen\ b)} \qquad [2]$$

b. Como:

$Cos\ b = Cos\ (b + 2\pi k)$, $Sen\ b = Sen\ (b + 2\pi k)$, k entero cualquiera.

se tiene que:

$$e^Z = e^{a+ib} \overset{\text{Por [2]}}{=} e^a(Cos\ b + iSen\ b) =$$

$$= e^a\left[Cos(b + 2\pi k) + iSen(b + 2\pi k)\right] \overset{\text{Por [2]}}{=}$$

$$= e^{a+i(b+2\pi k)} = e^{(a+ib)+i2\pi k} \overset{\text{Por [1]}}{=} e^{Z+i2\pi k}$$

Resumiendo:

$e^{a+ib} = e^{a+i(b+2\pi k)}$, o, lo que es lo mismo, $e^Z = e^{Z+i2\pi k}$ **[3]**

c. Si en **[1]** es $a = 0$, por **[2]** se obtiene que:

$$e^{ib} = Cos\ b + iSen\ b \qquad [4]$$

igualmente, se tendrá que:

$$e^{-ib} = e^{i(-b)} = Cos(-b) + iSen(-b) = Cos\ b - iSen(b) \qquad [5]$$

Sumando miembro a miembro **[4]** y **[5]** se obtiene:

$$e^{ib} + e^{-ib} = 2Cos\ b \qquad [6]$$

y restando **[5]** de **[4]** se obtiene:

$$e^{ib} - e^{-ib} = 2\ i\ Sen\ b$$ **[7]**

De **[6]** y **[7]** se extrae que:

$$Cos\ b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \quad , \quad Sen\ b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}$$ **[8]**

Estas son las así llamadas Fórmulas de Euler; cuyo uso es muy extendido.

NC XIV. 2

a. Nueva notación de la fórmula módulo argumental de un complejo.
Sustituyendo en **[4]** al símbolo *b* por el símbolo α se tiene que:

$$e^{i\alpha} = Cos\alpha + iSen\alpha$$ **[9]**

y por **[8]** de NC IV se tiene entonces que:

$$Z = a + ib = |Z|e^{i\alpha} = |Z|e^{i(\alpha + 2\pi k)}$$

siendo:
1º) $|Z| = |a + ib|$ = Módulo o valor absoluto de $a + ib$ =
= valor positivo de $\sqrt{(a^2 + b^2)}$
2º) α = Un argumento cualquiera de Z = $a + ib$
3º) k = Un entero cualquiera

[10]

b. Nueva notación del producto de complejos expresados en forma módulo argumental.

Por **[10]** y por **[2]** de NC VII se tiene que:

$$Z_1 Z_2 = \left(|Z_1|e^{i\alpha_1}\right)\left(|Z_2|e^{i\alpha_2}\right) = |Z_1||Z_2|e^{i(\alpha_1 + a_2 + 2\pi k)}$$

siendo:
1º) $|Z_1|$ = Módulo o valor absoluto de Z_1
2º) $|Z_2|$ = Módulo o valor absoluto de Z_2
3º) α_1 = Argumento de Z_1
4º) α_2 = Argumento de Z_2
5º) k = Un entero cualquiera

[11]

c. Nueva notación de la potencia de un complejo expresado en forma módulo argumental.

Por **[10]** y por **[1]** de NC VIII se tiene que:

$$Z_1^n = \left[|Z_1|e^{i\alpha}\right]^n = |Z_1|^n e^{i(n\alpha + 2\pi k)}$$

siendo:
1º) $|Z_1|$ = Módulo o valor absoluto de Z_1
2º) α = Argumento de Z_1
3º) k = Un entero cualquiera

[12]

d. Nueva notación del cociente de complejos expresados en forma módulo argumental.

Por **[10]** y por **[6]** de NC IX se tiene que:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1| e^{i\alpha_1}}{|Z_2| e^{i\alpha_2}} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\pi k)}$$

siendo:
1º) $|Z_1|$ = Módulo o valor absoluto de Z_1
2º) $|Z_2|$ = Módulo o valor absoluto de Z_2
3º) α_1= Argumento de Z_1
4º) α_2= Argumento de Z_2
5º) k = Un entero cualquiera

[13]

e. Nueva notación de la raíz enésima de un complejo:

Por **[10]** y por **[8]** de NC X se tiene que:

Dado el complejo $Z_1 = |Z_1| e^{i\alpha}$, sus raíces *n*-ésimas estarán dadas por:

$$W_k = |Z_1|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)} = |Z_1|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi l\right)}$$

donde:
1º) $|Z_1|^{\frac{1}{n}}$ = Raíz *n*-ésima positiva del módulo o valor absoluto de Z_1
2º) α = Un argumento cualquiera de Z_1
3º) k = 0, 1, ..., (n – 1)
4º) l = Un entero cualquiera

[14]

f. Sean:

$Z_1 = a_1 + ib_1$, $Z_2 = a_2 + ib_2$

Se tiene que:

Por **[2]** Ver **[2]** de NC VII

$$e^{Z_1} e^{Z_2} = \left[e^{a_1}\left(Cos\ b_1 + iSen\ b_1\right)\right]\left[e^{a_2}\left(Cos\ b_2 + iSen\ b_2\right)\right] =$$
$$= e^{a_1+a_2}\left[Cos\left(b_1+b_2\right) + iSen\left(b_1+b_2\right)\right] = e^{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} =$$
$$= e^{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)} = e^{Z_1+Z_2}$$

Por **[2]**

Resumiendo:

$$\boxed{e^{Z_1} e^{Z_2} = e^{Z_1+Z_2}}$$ **[15]**

Como subproducto

$$\boxed{\left(e^{Z}\right)^n = e^{nZ},\ n \text{ natural}}$$ **[16]**

g. Sean:

$$Z_1 = a_1 + ib_1 \qquad , \qquad Z_2 = a_2 + ib_2$$

Se tiene que:

Por **[2]** Ver **[6]** de NC IX

$$\frac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}} = \frac{e^{a_1}(Cos\ b_1 + iSen\ b_1)}{e^{a_2}(Cos\ b_2 + iSen\ b_2)} =$$

Por **[2]**

$$= \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}}\left[Cos(b_1 - b_2) + iSen(b_1 - b_2)\right] =$$

$$= e^{(a_1 - a_2)}\left[Cos(b_1 - b_2) + iSen(b_1 - b_2)\right] =$$

$$= e^{(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)} = e^{(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)} = e^{Z_1 - Z_2} \qquad \textbf{[17]}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\frac{e^{Z_1}}{e^{Z_2}} = e^{Z_1 - Z_2}} \qquad \textbf{[18]}$$

h. A título de curiosidad:

$$e^{i\pi} = e^{0 + i\pi} = e^{0}\ (Cos\ \pi + i\ Sen\ \pi) = 1(-1 + 0) = -1$$

y por lo tanto:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta expresión relaciona entre sí a los 5 números más importantes de las matemáticas, 0, 1, *i*, *e* y π.

NC XV

Logaritmos de números complejos

a. Se define:

DEF

$W = \lg_e Z$ cuando y sólo cuando:
1º) $e^W = Z$
2º) $Z \neq 0$ (es decir que no existe el logaritmo de 0)

[1]

Sea un complejo expresado en la "vieja" forma módulo argumental:

$$Z = |Z|(Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha) \qquad \textbf{[2]}$$

Sea:

$$W = \lg_e Z = u + i\ v$$

donde *u* y *v* son desconocidos por el momento.
Por **[2]** de NC XIV se tiene que:

$$e^W = e^{u + iv} = e^{u}\ (Cos\ v + i\ Sen\ v) \qquad \textbf{[3]}$$

Entonces, para que en efecto sea $W = \lg_e Z$, por lo definido en **[1]** es necesario y suficiente que sean iguales los $2^{\underline{os}}$ miembros de **[2]** y **[3]**.
Según visto en **[1]** de NC VI, para que esto ocurra deberá ser:

1º) $e^u = |Z|$

Notar que u es el número real que es el logaritmo real de $|Z|$ en base e.

2º) $v = \alpha + 2\pi k$, siendo α un argumento cualquiera de Z y k un entero cualquiera.

y entonces resulta que:

$$W = \lg_e Z = u + i\,v = \lg_e |Z| + i\,(\alpha + 2\pi k)$$

donde:
1) $\lg_e |Z|$ es el logaritmo en el campo real del número positivo $|Z|$ en base e.
2) α es un argumento cualquiera de Z
3) k es un entero cualquiera

[4]

b. Notar que todo número complejo tiene infinitos logaritmos (uno por cada valor que asuma k), todos con la misma parte real. Por ejemplo:

$$\lg_e(-1) = \lg_e[1(\mathit{Cos}\,\pi + i\,\mathit{Sen}\,\pi)] = \lg_e 1 + i\,(\pi + 2\pi k) =$$
$$= 0 + i\,(\pi + 2\pi k) = i\,(\pi + 2\pi k)$$

Ver fig. NC XV a.

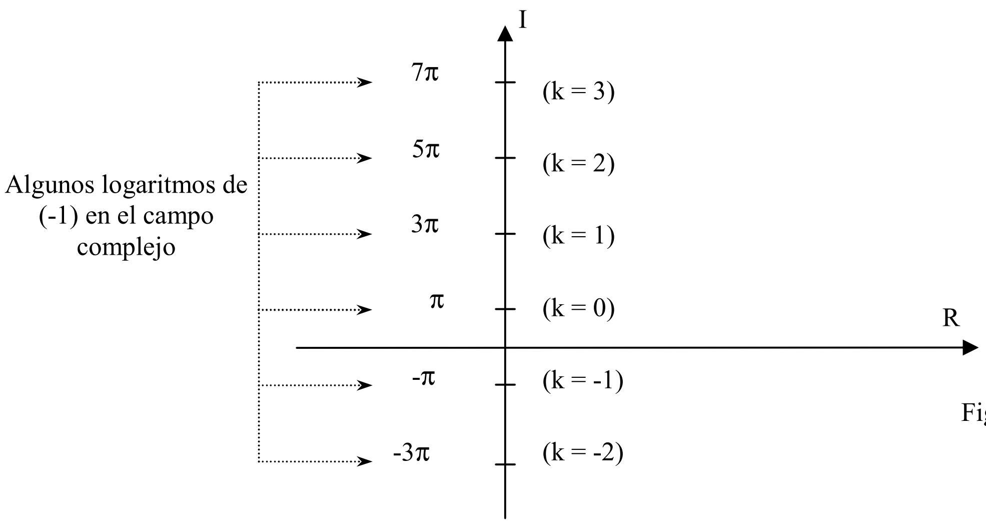


Fig. NC XV a

c. Sean:

$W_1 = \lg_e Z_1$, $W_2 = \lg_e Z_2$ **[5]**

Entonces serán:

$e^{W_1} = Z_1$, $e^{W_2} = Z_2$

resultando así que:

$$Z_1 \cdot Z_2 = e^{W_1} e^{W_2} \underset{\text{Por [15] de NC XIV}}{=} e^{W_1 + W_2}$$

teniéndose entonces por **[1]** que:

$W_1 + W_2 = \lg_e (Z_1.Z_2)$

y por **[5]** resulta finalmente que:

$$\lg_e Z_1 + \lg_e Z_2 = \lg_e (Z_1.Z_2) \qquad \textbf{[6]}$$

Como subproducto:

$$n.\lg_e Z = \lg_e Z^n \qquad , n \text{ natural} \qquad \textbf{[7]}$$

d. De una manera análoga puede demostrarse que:

$$\lg_e Z_1 - \lg_e Z_2 = \lg_e (Z_1/Z_2) \qquad , Z_2 \neq 0 \qquad \textbf{[8]}$$

NC XVI

<u>Potencias complejas de números complejos</u>

a. Dados los complejos Z y W se define que:

<u>DEF</u>

$$\boxed{Z^W = \begin{cases} e^{W \lg_e Z} & si\ Z \neq 0 \\ 0 & si\ Z = 0 \end{cases}} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Por ejemplo, según **[1]** es:

$$i^i = e^{i \lg_e i} = e^{i\left[\underbrace{\lg_e 1}_{=0} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$$

Resumiendo:

$$i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} \qquad \textbf{[2]}$$

Es decir que la potencia imaginaria i del número imaginario i son los infinitos números <u>reales</u> (uno para cada valor entero que asuma k) dados por la expresión **[2]**. Y acá surge una aparente contradicción:
Considerando la definición de logaritmo dada en **[1]** de NC XV y la expresión **[2]** recién indicada resulta que:

$$\lg_e i^i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

Es decir que los logaritmos de i^i serían números <u>reales</u> en vez de ser números <u>complejos</u> tales que a cada componente real corresponda una infinidad de componentes imaginarios separados entre sí por $2\pi i$, tal como indicado en **b** de NC XV.
La salida de esta aparente contradicción es la siguiente.
Se tiene que:

entero

$$\underset{\uparrow \text{ Por } \textbf{[2]}}{i^i =} e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}.1 = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} \underbrace{e^{i 2\pi\, l}}_{=1} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i 2\pi\, l}$$

y entonces, por la definición de logaritmo resulta:

$$\lg_e i^i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\ 2\pi l \quad , \qquad \text{k y } l \text{ enteros}$$

respetándose así lo indicado en **b** de NC XV.

c. Dados los complejos Z y *W* se define:

DEF

$$\boxed{\sqrt[W]{Z} = Z^{\frac{1}{W}} \underset{\text{Por [1]}}{=} e^{\left(\frac{1}{W}\right)\lg_e Z}} \qquad \textbf{[3]}$$

d. Notar que como todo complejo tiene infinitos logaritmos, resulta que una potencia Z^W puede tener infinitos valores.

Fijarse bien que se dijo "puede" y no "debe". El siguiente ejemplo clarificará este punto.

Sea *n* un número natural. Entonces 1/*n* será un número real, y por lo tanto un caso particular de los complejos, pudiendo por lo tanto emplearse la fórmula **[1]** para calcular la potencia $Z^{\frac{1}{n}}$.

Dado un complejo no nulo:

$$Z = |Z|(Cos\ \alpha + i\ Sen\ \alpha)$$

se tiene por **[1]** que:

$$Z^{\frac{1}{n}} = e^{\left(\frac{1}{n}\right)\lg_e Z} = e^{\left(\frac{1}{n}\right)\left[\lg_e|Z| + i(\alpha+2\pi k)\right]} =$$

$$= e^{\left(\frac{1}{n}\lg_e|Z|\right) + i\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)} = e^{\lg_e|Z|^{\frac{1}{n}} + i\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)} =$$

$$= e^{\lg_e|Z|^{\frac{1}{n}}}\, e^{i\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)} = |Z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)} =$$

$$= |Z|^{\frac{1}{n}}\left(Cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + iSen\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)$$

Resumiendo:

$$Z^{\frac{1}{n}} = |Z|^{\frac{1}{n}}\left(Cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\ Sen\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)$$

y esto (ver NC X) no es más que la expresión de las raíces *n*-ésimas de Z, cuya cantidad es *n*, número finito.

e. Se tiene que para Z ≠ 0:

$$Z^{W_1}Z^{W_2} = e^{W_1\lg_e Z}e^{W_2\lg_e Z} = e^{W_1\lg_e Z + W_2\lg_e Z} =$$

$$= e^{(W_1+W_2)\lg_e Z} = Z^{W_1+W_2}$$

y como según **[1]** es:

$$0^{W_1} 0^{W_2} = 0 = 0^{W_1+W_2}$$

resulta entonces que:

$$Z^{W_1} Z^{W_2} = Z^{W_1+W_2} \qquad , \qquad \text{para todo Z} \qquad \textbf{[4]}$$

f. De una manera análoga puede probarse que:

$$\frac{Z^{W_1}}{Z^{W_2}} = Z^{W_1-W_2} \qquad , \qquad \text{para todo Z} \neq 0 \qquad \textbf{[5]}$$

Apéndice

Ángulos

NC (A) I

Concepto geométrico de ángulo

a. Sean dos semirrectas con un origen común. Dichas semirrectas particionan al plano en dos conjuntos de puntos (pudiendo los puntos de cada una de las semirrectas pertenecer a una u otro conjunto).
Según la geometría clásica, se llamará **ángulo** a cada uno de esos conjuntos de puntos.

b. A un ángulo se le asocia una medida de la manera indicada a continuación (ver figura NC (A) I a).
Sea el ángulo (conjunto de puntos) indicado como α en dicha figura. Con centro en el origen de las semirrectas trácese una circunferencia de radio **r**. Sea λ la longitud del arco de circunferencia que pertenece al ángulo α. Se define:

$$\boxed{\text{Medida del ángulo } \alpha \text{ en radianes} = \lambda / r} \qquad \textbf{[1]}$$

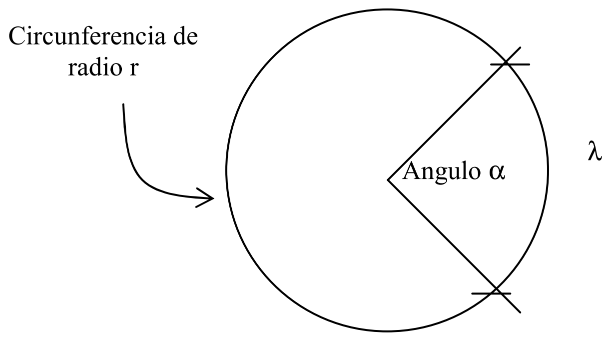


Fig. NC (A) I a

Notar lo siguiente:

1º) Cualquiera sea el radio de la circunferencia, la medida del ángulo será la misma. En efecto, como la longitud total de la circunferencia es $2\pi r$, es decir directamente proporcional a r, se tiene que la longitud del arco correspondiente al ángulo también es directamente proporcional a r, lo que implica que al dividirse dicha longitud por r resulte un número que no depende de r.

2º) La medida del ángulo α tal como indicado en **[1]** es un número "a secas" (no asociado a ninguna dimensión) ya que es cociente de dos longitudes (la de λ y la de r). Sin embargo, a veces a dicho número se le asocia la palabra **"radianes"** para indicar el método de medida empleado (aunque en general se omite este vocablo).

Debido a lo indicado en la observación 1ª, el radio **r** que conviene adoptar es **1** (1 m, 1 cm, 1 pulgada) con lo que resulta que la longitud λ (medida en metros, centímetros o pulgadas, según cual haya sido la unidad empleada para medir el radio) indica directamente la medida del ángulo en radianes.

c. Otra manera, ya conocida, de asociar una medida del ángulo α es definir que:

$$\boxed{\text{Medida del ángulo } \alpha \ \underline{\text{en grados}} = \left(\frac{360}{2\pi}\right) \lambda / r} \qquad \textbf{[2]}$$

También en este caso la medida del ángulo es un número "a secas" (no asociado a ninguna dimensión). Se agrega a dicho número la palabra **"grados"** (o el símbolo º) para indicar el método de medida empleado.
Por **[1]** y **[2]** resulta que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Medida de } \alpha \text{ en radianes} = \frac{2\pi}{360} \text{ Medida de } \alpha \text{ en grados} \\ \text{Medida de } \alpha \text{ en grados} = \frac{360}{2\pi} \text{ Medida de } \alpha \text{ en radianes} \end{array}} \qquad \textbf{[3]}$$

Así:

$0^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).0 = 0$ radianes

$30^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).30 = \frac{\pi}{6}$ radianes

$60^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).60 = \frac{\pi}{3}$ radianes

$90^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).90 = \frac{\pi}{2}$ radianes

$180^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).180 = \pi$ radianes

$270^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).270 = 3\frac{\pi}{2}$ radianes

$360^\circ \leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{360}\right).360 = 2\pi$ radianes

$\frac{360}{2\pi} . 1 = 57^\circ \, 1' \, 46{,}33'' \leftrightarrow 1$ radián

d. El medir los ángulos en radianes presenta grandes ventajas sobre medirlos en grados.
Si en ingeniería se siguen usando los grados, es únicamente por razones de tradición (caso análogo al de los pies, pulgadas y libras usados en el sistema de medidas inglés).
Es así, Sr. lector, que acá damos un adiós definitivo a los grados, minutos y segundos.

e. Según es evidente, la medida de un ángulo es siempre no negativa, teniéndose además que:

$$0 \leq \text{Medida de un ángulo cualquiera} \leq 2\,\pi$$

f. En la notación corriente no se hacen distinciones entre los <u>nombres</u> de los ángulos y sus <u>medidas</u> (cosa que sí se viene haciendo en este apéndice).
Así en el caso de los ángulos opuestos por el vértice indicados en la figura NC (A) I b

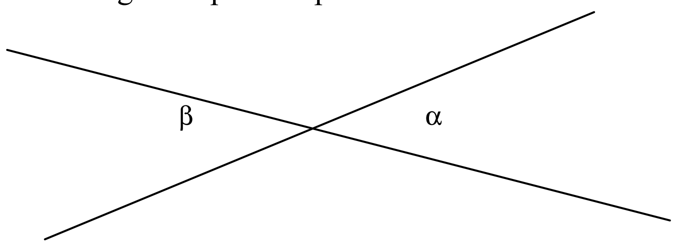


Fig. NC (A) I b

lo usual es poner:

$$\alpha = \beta$$

a pesar de que los ángulos α y β tienen ambos su "individualidad propia", siendo iguales únicamente sus medidas (si en el ángulo α anduviera suelto un león hambriento, al lector no le daría lo mismo transitar por el α que por el β, por más que se escriba que $\alpha = \beta$).
Para no dar lugar a una acusación de inadaptación social, en este texto se conformará con el consenso universal, pero sería muy interesante que el lector esté prevenido de lo antedicho.

NC (A) II

<u>Concepto trigonométrico de ángulo</u>

a. En trigonometría, el concepto de ángulo es distinto que en la geometría plana clásica. Este nuevo concepto está determinado por la necesidad de medir la rotación que sobre su punto de origen se haga sufrir a una semirrecta.

b.

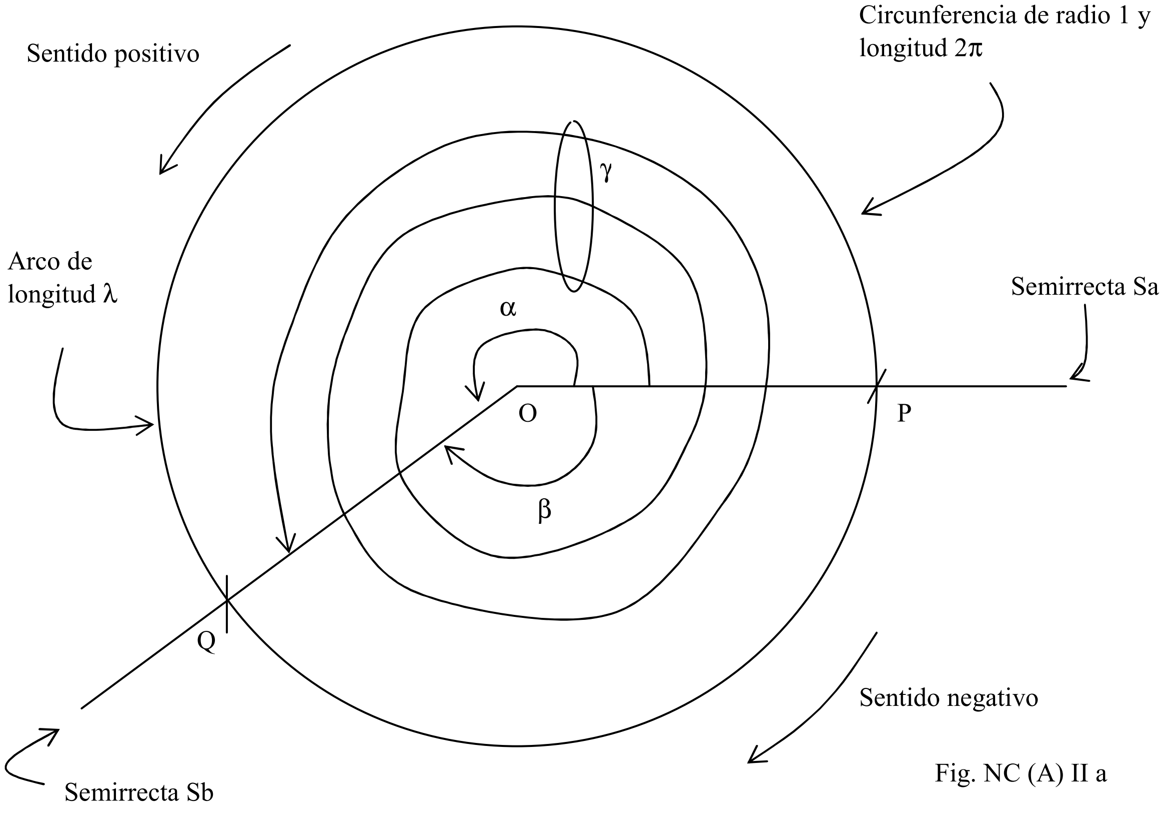


Fig. NC (A) II a

Sean dos semirrectas Sa y Sb que tienen un origen común.
<u>Se define como ángulo formado por la semirrecta Sb con respecto a la semirrecta Sa a cada una de las infinitas rotaciones que llevan la semirrecta Sa a la posición de la Sb</u>.
En la fig. NC (A) II a se han indicado con las flechas curvas α, β y γ a tres de los infinitos ángulos que la semirrecta Sb forma con respecto a la Sa.

c. Para establecer la medida de un ángulo así definido se procede como sigue:
Con centro en el origen común de Sa y Sb, trácese una circunferencia de radio 1 (y por lo tanto de longitud 2π). Se dirá que se recorre a dicha circunferencia en sentido positivo (en sentido negativo) cuando se lo hace en sentido contrario al de las agujas del reloj (en el sentido de las agujas del reloj).

La medida en radianes de un cierto ángulo (es decir de una cierta rotación) es la longitud del camino recorrido sobre la circunferencia en correspondencia con la rotación efectuada, con signo positivo o negativo según que el recorrido haya sido efectuado en sentido positivo o negativo.
Por ejemplo, supóngase que el arco de circunferencia PQ indicado en la figura NC (A) II a tenga una longitud λ (recorriendo la circunferencia de P a Q en sentido positivo). Entonces se tendrá que:

Medida de $\alpha = \lambda$ radianes
Medida de $\beta = -\lambda'$ radianes $= -(2\pi - \lambda)$ radianes $= \lambda - 2\pi$ radianes
Medida de $\gamma = \lambda + 4\pi$ radianes

Puede verificarse fácilmente que las medidas que los infinitos ángulos que Sb forma con respecto a Sa están dados por la expresión:

$(\lambda + 2\pi k)$ radianes, siendo $k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$

siendo λ la medida de uno cualquiera de dichos ángulos.

Ejercicios y problemas sobre Complejos

NC 1 Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(3 + 2\,i) - (4 - i)$ b) $(3 - i) - (4 - 2\,i)$ c) $(2 + 5\,i) + (4 + 5\,i)$

d) $(x + i\,y)(x - i\,y)$ e) $(3 + i)(2 + 3\,i)$ f) $i\,(2 - 7\,i)$

g) $(1 - i)\,(1 - i)\,(1 + i)$ h) $\dfrac{2-i}{-1-3i}$ i) $\dfrac{1+i}{2-i}$

j) $(1 - i)^4$ k) $\dfrac{(3+i)(3-i)}{10(2+i)}$ l) $\dfrac{5+4i}{3+4i}$

m) $\dfrac{1+2i}{3+4i}+\dfrac{2-i}{5i}$ n) $\left[-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]^3$ p) $\dfrac{2i}{(i-2)(i-3)(i-4)}$

NC 2 Demostrar que los números $(1 + i)$ y $(1 - i)$ satisfacen la ecuación: $Z^2 - 2\,Z + 2 = 0$.

NC 3 Usar la definición del producto de complejos para demostrar que si k es real y $Z = x + iy$ entonces es $kZ = kx + i\,ky$.

NC 4 Probar que si $Z_1Z_2 = 0$ entonces es $Z_1 = 0$ y/o $Z_2 = 0$.

NC 5 Usando las definiciones de suma y producto de complejos probar que:

a) $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$ b) $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$ c) $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$

d) $Z_1(Z_2Z_3) = (Z_1Z_2)Z_3$ e) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1Z_2 + Z_1Z_3$

NC 6 Escribir en forma módulo argumental a los siguientes complejos dados en forma binómica:

a) $Z = 1 + i\,\sqrt{3}$ b) $Z = i$ c) $Z = -2$ d) $Z = -2 - 2\,i$

NC 7 Efectuar en forma módulo argumental las siguientes operaciones. Indicar los resultados en forma binómica.

a) $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$ b) $\dfrac{2-2i}{-1-i}$ c) $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-i)^2}$

d) Si $Z = \tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$, indicar a Z^2, Z^3 y Z^4

e) $(-2 - 2\,i)^7$ f) $(1 - i)^4$ g) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}$ h) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{-3}$

NC 8 Hallar y representar en el plano complejo todos los Z tales que:

a) $Z^3 = -1$ b) $Z^6 = 64$ c) $Z^6 = -\,i$ d) $Z^3 = (1 + i)$ e) $Z^2 = (1 + i)$

NC 9 Demostrar que las n raíces de un complejo están distribuidas simétricamente sobre una circunferencia de radio $|Z|^{1/n}$.

NC 10 Sabiendo que una de las raíces cuartas de un complejo Z es $1+i\sqrt{3}$, indicar las otras tres sin efectuar ningún cálculo.

NC 11 Demostrar que el producto de las tres raíces cúbicas de Z es igual al mismo Z.

NC 12 Efectuar las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{i}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^4}}$ b) $\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)^3}{(2+i2)^3}}$

d) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}\right)^3}$ e) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{1/2}(1-i)^2}{(-1+i)^3}$

NC 13 Describir las regiones del plano complejo determinadas por las siguientes expresiones:

a) $|Z| < 3$ b) $I(Z) > 1$ c) $|Z - 4| < 1$

d) $0 \le \arg Z \le \pi/4$ e) $|Z| < |Z - 4|$

NC 14 Demostrar que:

a) $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

b) $|Z_1 - Z_2| \ge |Z_1| - |Z_2|$

NC 15 Hallar:

a) $\lg_e (1+i)^i$ b) $\lg_e\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^3$ c) $\lg_e\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{-1/3}$

d) $(1+i)^{(1-i)}$ e) $\left(\dfrac{1+i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{2i}$ f) $\lg_e i^{1/2}$

g) $\lg_e 3^i$ h) $\lg_e i^i$

NC 16 Demostrar que:

$$\lg_e Z^w = w \lg_e Z$$

NC 17 Hallar todos los números complejos Z tales que:

a) $(1 + i).Z = \overline{Z}$

b) $Z^2 = \overline{Z}$

c) $\begin{cases} \overline{Z}^3 = (1-i).Z \\ \dfrac{\pi}{2} \le \arg(Z) < 2\pi \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones lineales.
Su resolución por el método de Gauss

SEL I

Variables numéricas

a. Se llama variable numérica a todo ente que pueda asumir alternativamente variados valores numéricos.
Las variables numéricas por lo general son designadas por medio de letras, por ejemplo ***x***, ***y***, etc.

b. Por ejemplo:

1º) La variable ***x*** correspondiente a los resultados que vayan saliendo en una sucesión de tiros de dado. En cada tiro dicha variable asumirá uno de los valores 1, 2, 3, 4, 5, o 6 según cual sea el resultado de dicho tiro.

2º) La variable ***v*** correspondiente a la velocidad que esta desarrollando un cierto automóvil. Si la velocidad máxima de éste es de 120 km/h, en un instante determinado cualquiera la variable v estará asumiendo un valor comprendido entre 0 inclusive (auto parado) y 120 inclusive (auto "a fondo"). En instantes distintos de un periodo de aceleración o frenado, esta variable ***v*** asumirá valores distintos.

3º) La variable ***t*** correspondiente a la duración de las llamadas originadas en un cierto teléfono publico. Como la duración de estas llamadas no tiene ningún "tope" superior preestablecido, para una cierta llamada la variable ***t*** asumirá un cierto valor determinado que será un número no negativo, teniéndose que en distintas llamadas la variable casi con seguridad asumirá valores distintos.

c. No es en absoluto necesario que una variable corresponda a una realidad física, tal como fue el caso para las variables indicadas en **b**.
En general: Una variable numérica queda definida cuando:

1º. Se indica la letra (u otro símbolo) que le corresponde.

2º. Se indica el conjunto de valores numéricos que puede asumir.

Muy a menudo se omite este 2º requisito, sobreentendiéndose entonces que la variable pueda asumir cualquier valor numérico.

SEL II

Funciones numéricas

a. Sean dos variables ***x*** e ***y***. Se dice que la variable ***y*** es una función numérica de la variable ***x*** cuando que el valor que asume ***y*** está determinado por el valor que asume ***x***.

Por ejemplo: sean ***v*** y ***e*** las variables correspondientes a la velocidad y la energía cinética de un cuerpo, respectivamente. Como un cuerpo no puede tener energía cinética negativa, se

define que la variable ***e*** no pueden asumir valores negativos y ***v*** puede asumir cualquier valor real.
En Física se demuestra que si la masa del cuerpo considerado es ***m*** se tiene que:

$$e = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \textbf{[1]}$$

resultando así que, para cada valor que asuma ***v*** queda determinado el valor que asume ***e***, lo que implica que ***e*** sea una función de ***v***.

b. En general, el hecho de que una variable ***y*** sea una función de otra variable ***x*** se indica como:

$$y = f(x) \qquad \text{o} \qquad y = y(x)$$

c. Puede darse el caso de que una variable ***y*** sea función de varias otras variables $x_1, ..., x_n$ lo que se indica como:

$$y = f(x_1,...,x_n) \qquad o \qquad y = y(x_1,...,x_n)$$

teniéndose entonces que el valor que asume ***y*** queda determinado por los valores que estén asumiendo $x_1, ..., x_n$.
Por ejemplo, sean ***w***, ***v*** e ***i*** las variables correspondientes respectivamente a la potencia consumida, tensión y corriente de un motor de corriente continua. Como por razones físicas se tiene que ninguna de estas tres magnitudes puede ser negativa, se define que las tres variables antedichas no pueden asumir valores negativos.
En física se demuestra que:

$$w = v \cdot i$$

resultando así para cada par de valores que asumen ***v*** e ***i*** queda determinado el valor que asume ***w***, lo que implica que ***w*** sea una función de ***v*** y de ***i***.

SEL III

<u>Variables independientes entre sí</u>

a. Se dice que dos variables x_1 y x_2 son independientes entre sí cuando el valor que asuma una de ellas no tenga <u>ninguna</u> influencia sobre el valor que esta asumiendo la otra y viceversa.

b. Por ejemplo, si **p** es la variable correspondiente al precio del vino tinto en Buenos Aires y **n** es la variable correspondiente a la caída de nieve en las islas Orcadas durante las últimas 24 horas, se tiene que **p** y **n** son evidentemente independientes.

c. Como contraejemplo, las variables ***v*** y ***e*** de la formula **[1]** de SEL II no son independientes ya que el valor que asume ***v*** determina exactamente el valor que asume ***e***.

d. Sea ahora el caso de las variables correspondientes al precio del vino tinto en Buenos Aires y la precipitación pluvial ocurrida en Mendoza durante el último año. En este caso, la precipitación pluvial no determina exactamente el precio del vino ya que hay otros factores en juego, pero sin embargo tiene su influencia en el mismo, lo que, según la definición dada, basta para destruir la independencia entre las variables consideradas.

e. Extendiendo la definición, se dice que las variables $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$ son independientes entre si cuando los valores que asuma un conjunto cualquiera de ellas no tenga ninguna influencia sobre el valor que esta asumiendo cada una de las restantes.

SEL IV

Funciones lineales

Sean las variables independientes $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$. Se dice que la función $\boldsymbol{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ es una función lineal de dichas variables cuando puede ser expresada como:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

donde: $a_1, a_2, ..., a_n$ son coeficientes (números) cualesquiera.
Por ejemplo:

$$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

es una función lineal de las variables $\boldsymbol{x, y}$ y $\boldsymbol{z}$.
Como contraejemplo:

$$f_2(x, y) = x + 2y^2$$

$$f_3(x, y) = \log_e x + \cos y$$

son funciones de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, pero no son funciones lineales de dichas variables.

SEL V

Ecuaciones lineales

a. Sea una función lineal cualquiera de $\boldsymbol{n}$ variables independientes $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \qquad \textbf{[1]}$$

Si se iguala esta función lineal a un número $\boldsymbol{h}$ cualquiera se obtendrá:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_h x_h = h \qquad \textbf{[2]}$$

lo que constituye una ecuación lineal.
A las variables de una ecuación lineal se les llama también incógnitas.

b. Notar lo siguiente:
Para que la expresión **[2]** enuncie una verdad, por lo general los valores que pueden asumir las variables $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$ no son cualesquiera.

Por ejemplo, si:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 8 \qquad \textbf{[3]}$$

se tiene que cuando x_1, x_2 y x_3 asuman respectivamente los valores 1, 2 y 5 se obtendrá el enunciado falso:

$$1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 8$$

y en cambio, si x_1, x_2, x_3 asumen los valores 1, 2, 3 se obtendrá el enunciado cierto:

$$1 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 8$$

c. En lo sucesivo se dirá que una solución de una ecuación lineal con n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ (por ejemplo la **[2]**) está constituida por n valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que cuando sean asumidos respectivamente por $x_1, x_2, ..., x_n$ se tenga que la ecuación determine un enunciado cierto.

El hecho de que los n valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ constituyen una solución de una cierta ecuación con incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ será indicado estableciendo que:

$x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$ "satisface" a la ecuación o que "es una solución" de la misma

[4]

o, con notación abreviada

$$\boxed{\begin{array}{c}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \\ \text{"satisface" a la ecuación, o que "es una solución" de la misma}\end{array}} \qquad \textbf{[5]}$$

d. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal será llamado **conjunto de verdad** de la misma.
Así, el conjunto de verdad de la ecuación **[3]** es:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix};\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}; \text{etc.} \qquad \textbf{[6]}$$

Distintas soluciones de la ecuación **[3]**

e. Para el caso de 1, 2 y 3 incógnitas existe una manera muy fácil de visualizar el conjunto de verdad de una ecuación.
1º) Sea por ejemplo la ecuación lineal con una sola incógnita:

$$2\,x_1 = 6 \qquad \textbf{[7]}$$

Como entonces es:

$$x_1 = 6/2 = 3 \qquad \textbf{[8]}$$

se tiene que el conjunto de verdad de esta ecuación es el único punto $x_1 = 3$ de un eje x_1 (ver fig. SEL V.a).

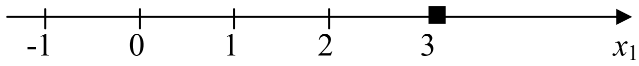


Fig. SEL V.a

2º) Sea ahora la ecuación lineal con dos incógnitas:

$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 6 \qquad \textbf{[9]}$$

Como entonces es:

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{6}{3} = -\frac{2}{3}x_1 + 2$$

y esta expresión corresponde a la recta del plano indicada en la fig. SEL V.b.

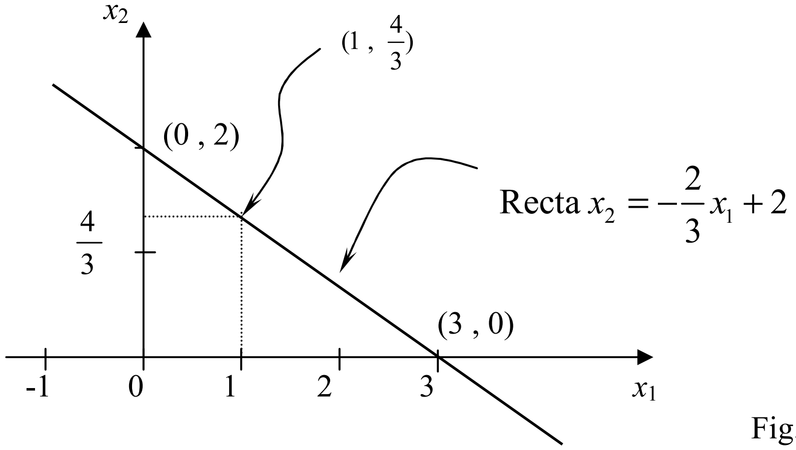


Fig. SEL V.b

resulta entonces que cada uno de los puntos de esta recta corresponde a una solución de la ecuación **[9]**. Así, el conjunto de verdad de dicha ecuación es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & \frac{4}{3}.. \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} ;....\ \text{etc} \right\}$$

3º) Sea la ecuación lineal con 3 incógnitas:

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 = 8 \qquad \textbf{[10]}$$

y como entonces es :

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2$$

y esta expresión corresponde al plano indicado en la fig. SEL V.c.

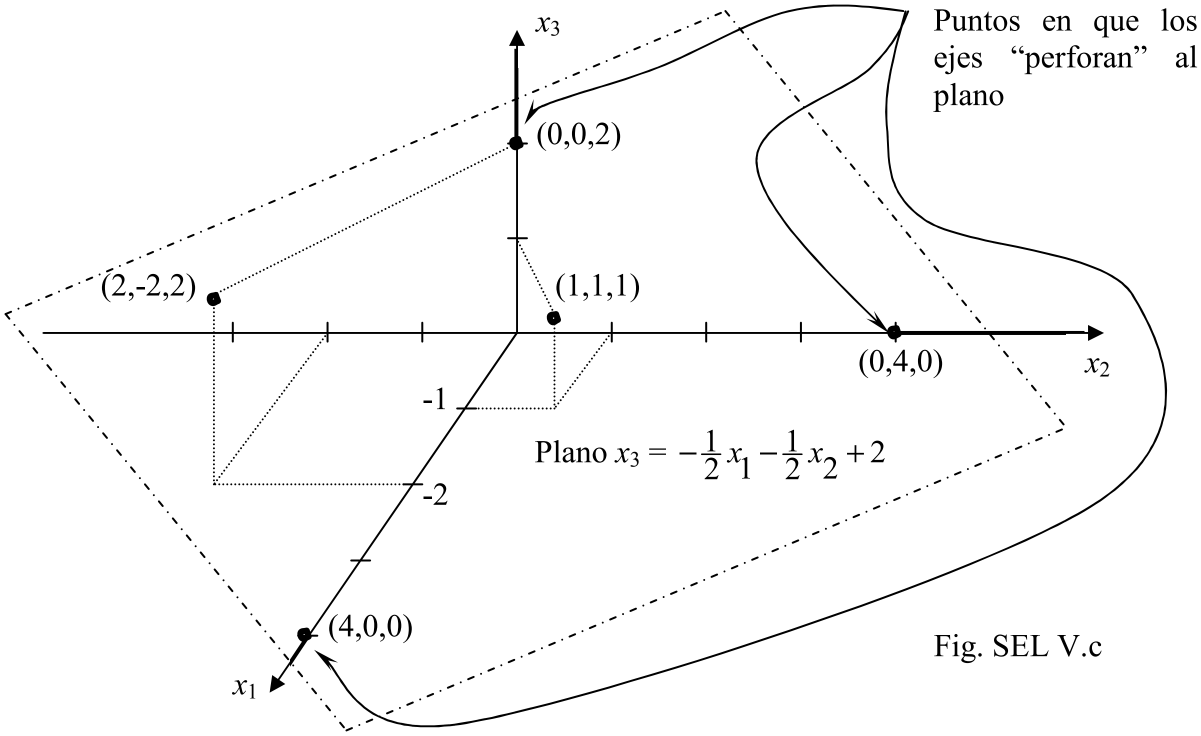


Fig. SEL V.c

resulta entonces que cada uno de los puntos de este plano corresponde a una solución de la ecuación **[9]**. Así, el conjunto de verdad de esta ecuación es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}; \; etc. \right\}$$

4º) Desgraciadamente, para ecuaciones con más de 3 incógnitas no existen métodos para visualizar su conjunto de verdad. Por lo tanto, el lector hará bien en razonar desde el vamos en forma totalmente analítica, sin buscar "muletas" gráficas.

f. Toda ecuación que tenga más de una incógnita y dos o más coeficientes no nulos tiene infinitas soluciones.
En efecto, dada por ejemplo la ecuación:

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = h}, \text{ donde } \boldsymbol{a_1 \neq 0,\;\; a_2 \neq 0,\;\; a_3 \neq 0}$$

se tiene que queda satisfecha por:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \gamma_1 & \dfrac{h - a_1\gamma_1 - a_3\gamma_3}{a_2} & \gamma_3 \end{bmatrix}, \text{ siendo } \gamma_1 \text{ y } \gamma_3 \text{ números cualesquiera}$$

ya que:

$$a_1\gamma_1 + a_2 \frac{h - a_1\gamma_1 - a_3\gamma_3}{a_2} + a_3\gamma_3 = h$$

Como en esta expresión γ_1 y γ_3 pueden ser cualesquiera, para cada par de valores γ_1 y γ_3 que se considere se encontrara una solución distinta, lo que implica que la ecuación tenga infinitas soluciones.
Esto mismo ya fue visto en forma gráfica en el caso 3° considerado en **e**.

g. Una ecuación con una única incógnita tendrá una única solución si su coeficiente no es nulo. Por ejemplo, dada la ecuación:

$$a\,x = h, \qquad\qquad a \neq 0$$

es evidente que su única solución es:

$$x = h/a$$

h. Una ecuación que tenga todos sus coeficientes nulos y un segundo miembro no nulo no tiene ninguna solución:

Por ejemplo, es evidente que la ecuación:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 = 3$$

no tiene ninguna solución ya que constituye un enunciado falso cualquiera sean los valores que asuman $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ **.**

i. Una ecuación que tenga todos sus coeficientes nulos y un segundo miembro también nulo, queda satisfechas para cualquier valor que asuman las incógnitas.
Así, dada la ecuación:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 0$$

sus soluciones son:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } \alpha_1, \alpha_2 \text{ y } \alpha_3 \text{ son números cualesquiera}$$

Este tipo de ecuación lineal se llama <u>trivial</u> por no indicar nada de interés.

SEL VI

<u>Sistemas de ecuaciones lineales</u>

a. Sea un conjunto de ***m*** funciones lineales <u>de las mismas ***n*** variables</u> $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$.
Al igualar cada una de estas funciones a un número cualquiera se obtiene lo que se llama un <u>sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas</u>:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n = h_m \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Se dirá que <u>una solución de este sistema esta constituida por ***n*** valores</u> α_1 , α_2, ..., α_n <u>tales que cuando sean asumidos respectivamente por las variables</u> x_1, x_2, ..., x_n <u>se obtenga que todas las ecuaciones determinen enunciados ciertos</u>.

El hecho de que los ***n*** valores α_1 , α_2, ..., α_n constituyen una solución de **[1]** será indicado estableciendo que:

$x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... $x_n = \alpha_n$
"satisface" al sistema **[1]**, o que "es una solución del mismo

o, con notación abreviada, que:

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$ "satisface" al sistema **[1]**, o que "es una solución" del mismo

c. Se anticipa que existen sistemas de ecuaciones lineales que tienen una única solución, otros que no tienen ninguna y aun otros que tienen una cantidad infinita de soluciones.
No existen sistemas de ecuaciones lineales que tengan una cantidad <u>finita</u> de soluciones mayor que 1.

d. <u>Se llamará **conjunto de verdad** de un sistema de ecuaciones lineales al conjunto de todas sus soluciones</u>.
<u>Ejemplo 1°</u>. El conjunto de verdad del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

es:

Distintas soluciones del sistema **[2]**

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} ; \ldots.\text{etc} \right\} \qquad \textbf{[3]}$$

<u>Ejemplo 2°</u>. El conjunto de verdad del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases} \qquad \textbf{[4]}$$

es:

$$V=\left\{\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{(única solución)} \qquad \textbf{[5]}$$

Ejemplo 3°. El conjunto de verdad del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + 3y + z = 12 \end{cases} \qquad \textbf{[6]}$$

no existe

Este sistema no tiene ninguna solución.

e. Sea **Vs** el conjunto de verdad del sistema **[1]** y sean respectivamente $\mathbf{V_1, V_2,....\ , V_m}$ los conjuntos de verdad de las ecuaciones 1^a , 2^a , ..., "m^a", indicadas en **[1]**, tomadas individualmente.
Según la definición de solución de un sistema, toda solución de **[1]** será solución se cada una de las **m** ecuaciones tomadas individualmente y, a la reciproca, toda solución que las **m** ecuaciones de **[1]** tengan en común será una solución de todo el sistema.
Por lo tanto, el conjunto de verdad del sistema **[1]**, **Vs**, estará formado por todas las soluciones que a la vez figuren en los **m** conjuntos de verdad $\mathbf{V_1, V_2,....\ , V_m}$.
Para el caso de los tres ejemplos indicados en **d**, esto puede visualizarse dibujando los tres planos que representan el conjunto de verdad de cada una de sus ecuaciones (ver el caso 3° de **e** de SEL V).
Todo punto que pertenece a la vez a los tres planos corresponde a una solución del sistema. Así:

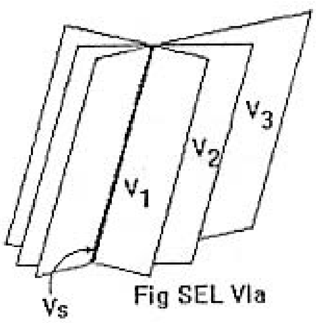


Fig SEL VIa

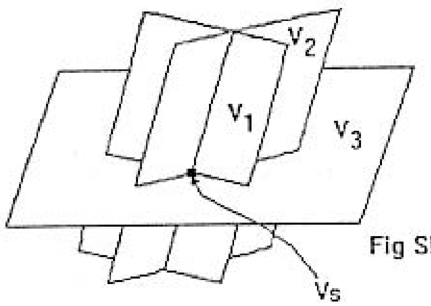


Fig SEL VIb

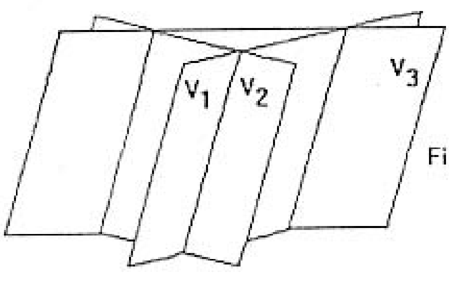


Fig SEL VIc

La figura SEL VIa ilustra la situación que se presenta en el ejemplo 1° de **d**. Los tres planos se cortan según una recta y cada punto de esa recta corresponde a una solución del sistema **[2]**, el cual tiene entonces infinitas soluciones.
La figura SEL VIb ilustra la situación que se presenta en el ejemplo 2° de **d**. Los tres planos se cortan en un único punto, el cual corresponde a la única solución del sistema **[3]**.
La figura SEL VIc ilustra la situación que se presenta en el ejemplo 3° de **d**. En este caso los tres planos no tiene ningún punto en común y por lo tanto el sistema **[6]** no tiene solución.

f. Se dirá que dos sistemas de ecuaciones lineales **S y S*** son <u>equivalentes</u> cuando y sólo cuando:

1°) **S** y **S*** tienen las mismas incógnitas, y además,
2°) **S** y **S*** tienen el mismo conjunto de verdad.
Se hace notar que <u>puede</u> darse el caso de que sean equivalentes dos sistemas que tengan distintas cantidades de ecuaciones.
Así, más tarde se probará que los sistemas:

$$S_1\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad S_1^*\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

son equivalentes.
Evidentemente, <u>si en un sistema se intercambian de lugar ecuaciones y/o incógnitas, se obtendrá otro sistema que es equivalente al primitivo</u>.
Así, son equivalentes los sistemas:

$$S_2\begin{cases} x + 2y + 3z - v = 1 \\ 2x + 3y - z + v = 2 \\ -x + y + z - 2v = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad S_2^*\begin{cases} -z + v + 2x + 3y = 2 \\ z - 2v - x + y = 0 \\ 3z - v + x + 2y = 1 \end{cases}$$

La equivalencia entre sistemas se indica con el signo **~.** Así, para los dos ejemplos recién indicados se tiene que:

$$\mathbf{S_1 \sim S_1^*}$$

$$\mathbf{S_2 \sim S_2^*}$$

g. Sea un sistema en el cual una o más de sus ecuaciones tengan todos sus coeficientes nulos y su segundo miembro también nulo. Por ejemplo sea:

$$S_1 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ 0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{[7]}$$

Según visto en **i** de SEL V se tiene que la 3ª ecuación de este sistema se satisface para cualquier valor que asuman las incógnitas. Por lo tanto, toda solución común a las dos primeras ecuaciones del sistema será también una solución de la 3ª.

Por lo tanto, se tiene que el conjunto de verdad del sistema **S_1** indicado en **[7]** es el mismo del sistema:

$$S_2 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \end{cases}$$

Resultando así que:

$$\mathbf{S_1 \sim S_2}$$

i. Sea un sistema en el cual una o más de sus ecuaciones tengan todos sus coeficientes nulos y un 2º miembro <u>no</u> nulo. Por ejemplo, sea:

$$S_1 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = h_2 \\ 0\,x_1 + \ 0\,x_2 \ + \ 0\,x_3 + \ 0\,x_4 = \ h_3 \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{[8]}$$

Según visto en **h**. de SEL V, la 3ª ecuación de este sistema no tiene ninguna solución.
Entonces, como el conjunto de verdad de **S_1** está formado por todas las soluciones comunes a las tres ecuaciones (ver **e**) y como según visto, la 3ª ecuación no tiene ninguna solución, resulta entonces que el sistema **S_1** indicado en **[8]** tampoco tiene ninguna solución.
Evidentemente, esta conclusión es generalizable a todo sistema del tipo considerado.

SEL VII

<u>Teorema Fundamental</u>

a. Sea un sistema cualquiera de ecuaciones lineales **S_1**.
Se demostrara que si en dicho sistema se toma una ecuación cualquiera, se la multiplica por una constante cualquiera y al resultado así obtenido se lo suma a otra ecuación cualquiera del sistema, se obtendrá un nuevo sistema de ecuaciones lineales, **S_2**, equivalente al **S_1** primitivo.

b. Sea por ejemplo el sistema **S_1** indicado a continuación:

$$S_1 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = h_4 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Tómese la 1ª ecuación de **S_1**, multiplíquesela por la constante arbitraria $\lambda \neq 0$ y súmese el resultado así obtenido a la 3ª ecuación. Se obtendrá así el siguiente sistema **S_2**:

$$S_2 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = h_3 + \lambda\ h_1 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = h_4 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

c. Sea:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

una solución cualquiera de **S**$_1$. Se tiene entonces que los siguientes enunciados son todos ciertos:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = h_1 \qquad \textbf{[3]}$$
$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = h_2 \qquad \textbf{[4]}$$
$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 = h_3 \qquad \textbf{[5]}$$
$$a_{41}\alpha_1 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3 = h_4 \qquad \textbf{[6]}$$

A la expresión **[5]** súmesele la expresión **[3]** multiplicada por λ.
Por ser **[3]** y **[5]** ciertas se obtendrá entonces el enunciado cierto:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = h_3 + \lambda\ h_1 \qquad \textbf{[7]}$$

Entonces, por ser **[3]**, **[4]**, **[7]** y **[6]** enunciados ciertos se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

es una solución de las cuatro ecuaciones de **S**$_2$ y, por lo tanto, es una solución del sistema **S**$_2$**.** Como, según es evidente, podría llegarse a la misma conclusión para cualquier solución de **S**$_1$, se tiene que:

<u>Toda solución de</u> **S**$_1$ <u>es también una solución de</u> **S**$_2$**.**

d. Para terminar de probar lo indicado en <u>a</u> falta todavía demostrar que toda solución de **S**$_2$ es también una solución de **S**$_1$**.**
Sea:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

una solución cualquiera de **S**$_2$, lo que implica que sean ciertos todos los enunciados siguientes:

$$a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3 = h_1 \qquad \textbf{[8]}$$
$$a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\beta_3 = h_2 \qquad \textbf{[9]}$$
$$a_{31}\beta_1 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\beta_3 + \lambda(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3) = h_3 + \lambda\, h_1 \qquad \textbf{[10]}$$
$$a_{41}\beta_1 + a_{42}\beta_2 + a_{43}\beta_3 = h_4 \qquad \textbf{[11]}$$

De la expresión **[10]**, réstese la **[8]** multiplicada por λ. Por ser **[8]** y **[10]** ciertas, se obtendrá entonces el enunciado cierto:

$$a_{31}\beta_1 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\beta_3 = h_3 \qquad \textbf{[12]}$$

Entonces por ser **[8]**, **[9]**, **[12]** y **[11]** enunciados ciertos se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

es una solución del sistema **[1]**.
Como según es evidente, podría llegarse a la misma conclusión para cualquier solución de **S**$_2$, se tiene que:

<u>Toda solución de</u> **S**$_2$ <u>es también una solución de</u> **S**$_1$**.**

e. Resumiendo: toda solución de **S**$_1$ es solución de **S**$_2$ y viceversa, con lo que resulta que **S**$_1$ y **S**$_2$ <u>tienen un mismo conjunto de verdad</u>, con lo que implica la equivalencia de **S**$_1$ y de **S**$_2$, tal como indicado en **a**.
Evidentemente, la demostración recién efectuada para el caso de 4 ecuaciones con 3 incógnitas puede ser fácilmente ampliada para abarcar el caso general de **m** ecuaciones con **n** incógnitas, siendo **m** un natural mayor o igual que 2, y siendo **n** un natural cualquiera.

SEL VIII

<u>Equivalente escalonado de un sistema de ecuaciones lineales</u>

SEL VIII.1

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se llama <u>diagonal principal</u> del mismo a la diagonal que partiendo del 1er sumando de la 1^{a} ecuación pasa por el 2^{o} sumando de la 2^{a} ecuación, por el 3er sumando de la 3^{a} ecuación, etc. Esta diagonal principal abarca <u>únicamente sumandos de los primeros miembros</u> (no "llega a tocar" ningún 2^{o} miembro)
Por ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

Diagonal principal

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Diagonal principal

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Diagonal principal

Nota: obsérvese que las incógnitas están "encolumnadas"

SEL VIII.2

a. Dado un sistema de ecuaciones lineales **S**$_1$, se dirá que otro sistema **S**$_E$ es un equivalente escalonado de **S** cuando y solo cuando:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{o})\ \mathbf{S}_E \sim \mathbf{S} \\ \\ 2^{o})\ \mathbf{S}_E \text{ es tal que cada una de sus ecuaciones tenga su primer coeficiente no nulo} \\ \quad \text{más a la izquierda que el } 1^{er} \text{ coeficiente no nulo de la ecuación subsiguiente.} \end{array}\right\} \quad \textbf{[2]}$$

b. Notar lo siguiente:

1^{o}) La condición 2^{a} implica que todos los coeficientes de **S**$_E$ que estén debajo de su diagonal principal sean nulos.

2^{o}) Se anticipa que todo sistema **S** que tenga más de una ecuación tiene varios equivalentes escalonados.

c. Dado un sistema cualquiera **S**, es siempre posible hallar un equivalente escalonado del mismo mediante el uso repetido de las siguientes manipulaciones:

1^{o}) Multiplicar una ecuación de un sistema por una constante y sumar el resultado así obtenido a otra de las ecuaciones del mismo.

2^{o}) Reordenar las ecuaciones del sistema.

Tal como visto en SEL VII y en **f** de SEL VI, aplicando cualquiera de estas manipulaciones a un sistema cualquiera, se obtiene otro sistema que es equivalente al primitivo.
El procedimiento a seguir para hallar el equivalente escalonado de un sistema será explicado en base a los ejemplos dados en SEL VIII.3, SEL VIII.4 y SEL VIII.5, pero será evidente que se trata de un método completamente general.

SEL VIII.3

a. Sea el sistema:

$$S = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 - 0x_4 - 5x_5 = 0 \\ 8x_1 + 8x_2 + 22\,x_3 + 33x_4 + 25x_5 = 7 \\ 8x_1 + 18x_2 + 4\,x_3 + 3x_4 + 23x_5 = 3 \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

1er coeficiente de la 2ª ecuación de **[3]**

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[3]** por) $-\dfrac{(-2)}{2}=1$ (y súmese el resultado a la) 2ª ecuación de **[3]**

1er coeficiente de la 1ª ecuación de **[3]**

1er coeficiente de la 3ª ecuación de **[3]**

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[3]** por) $-\dfrac{8}{2}=-4$ (y súmese el resultado a la) 3ª ecuación de **[3]**

1er coeficiente de la 1ª ecuación de **[3]**

1er coeficiente de la 4ª ecuación de **[3]**

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[3]** por) $-\dfrac{8}{2}=-4$ (y súmese el resultado a la) 4ª ecuación de **[3]**

1er coeficiente de la 1ª ecuación de **[3]**

Se obtendrá así un sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 1 \\ 0x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 13x_4 + x_5 = 3 \\ 0x_1 + 6x_2 - 12x_3 - 17x_4 - x_5 = -1 \end{cases} \qquad \textbf{[4]}$$

y por las razones indicadas en **c** de SEL VIII.2

Sistema [4] ~ Sistema [3] = S **[5]**

Ahora:

1^er^ coeficiente <u>no nulo</u> de la 3ª ecuación de **[4]**

(Multiplíquese la 2ª ecuación de **[4]** por) $-\dfrac{(-4)}{(-2)} = -2$ (y súmese el resultado a la) 3ª ecuación de **[4]**

1^er^ coeficiente <u>no nulo</u> de la 2ª ecuación de **[4]**

1^er^ coeficiente <u>no nulo</u> de la 4ª ecuación de **[4]**

(Multiplíquese la 2ª ecuación de **[4]** por) $-\dfrac{6}{(-2)} = 3$ (y súmese el resultado a la) 4ª ecuación de **[4]**

1^er^ coeficiente <u>no nulo</u> de la 2ª ecuación de **[4]**

Se obtendrá así un sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 1 \\ 0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \qquad \textbf{[6]}$$

Evidentemente será:

Sistema [6] ~ Sistema [4] ~ S **[7]**

Intercambiando de lugar las ecuaciones 3ª y 4ª de **[6]** se obtiene

$$S_E = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 1 \\ 0x_1 - 0x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \qquad \textbf{[8]}$$

Diagonal principal

Evidentemente será:

S$_E$ = Sistema [8] ~ Sistema [6] ~ Sistema [4] ~ Sistema [3] = S **[9]**

Se tiene además que este sistema **[8]** es un equivalente escalonado de **S** por cumplir también con la condición 2ª indicada en **[2]**.

b. Sea el sistema

$$S' = \begin{cases} -1x_3 - 2x_1 - 5x_2 + 0x_4 - 5x_5 = 0 \\ 4x_3 + 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 + 6x_5 = 1 \\ 4x_3 + 8x_1 + 18x_2 + 3x_4 + 23x_5 = 3 \\ 22x_3 + 8x_1 + 8x_2 + 33x_4 + 25x_5 = 7 \end{cases} \qquad \textbf{[10]}$$

Como este sistema **S'** ha sido obtenido cambiando de lugar ecuaciones e incógnitas en el sistema **S** indicado en **[3]** se tiene que:

S' ~ S **[11]**

$\left(\begin{array}{l}\text{Multiplíquese la 1ª} \\ \text{ecuación de } \textbf{[10]} \text{ por}\end{array}\right) -\dfrac{4}{(-1)} = 4 \left(\begin{array}{l}\text{y súmese el} \\ \text{resultado a la}\end{array}\right)$ 2ª ecuación de **[10]**
3ª ecuación de **[10]**

$\left(\begin{array}{l}\text{Multiplíquese la 1ª} \\ \text{ecuación de } \textbf{[10]} \text{ por}\end{array}\right) -\dfrac{22}{(-1)} = 22 \left(\begin{array}{l}\text{y súmese el} \\ \text{resultado a la}\end{array}\right)$ 4ª ecuación de **[10]**

Se obtendrá el sistema:

$$\begin{cases} -1x_3 - 2x_1 - 5x_2 + 0x_4 - 5x_5 = 0 \\ -6x_1 - 17x_2 + 5x_4 - 14x_5 = 1 \\ -2x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 3 \\ -36x_1 - 102x_2 + 33x_4 - 85x_5 = 7 \end{cases} \qquad \textbf{[12]}$$

Intercambiando de lugar las ecuaciones 3ª y 4ª de **[12]** se obtiene:

$$\begin{cases} -1x_3 - 2x_1 - 5x_2 + 0x_4 - 5x_5 = 0 \\ -6x_1 - 17x_2 + 5x_4 - 14x_5 = 1 \\ -36x_1 - 102x_2 + 33x_4 - 85x_5 = 7 \\ -2x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases} \qquad \textbf{[13]}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Multiplíquese la 2ª} \\ \text{ecuación de } \textbf{[13]} \text{ por}\end{array}\right) -\dfrac{(-36)}{(-6)} = -6 \left(\begin{array}{l}\text{y súmese el} \\ \text{resultado a la}\end{array}\right)$ 3ª ecuación de **[13]**

Resulta el sistema:

$$\begin{cases} -1x_3 \; - \; 2x_1 - \; 5x_2 + \; 0x_4 - \; 5x_5 \; = 0 \\ \quad -6x_1 \; -17x_2 \; + \; 5x_4 - \; 14x_5 \; = \; 1 \\ \qquad\qquad 3x_4 - \; x_5 = 1 \\ \quad -2x_2 \; +3x_4 \; + \; 3x_5 = \; 3 \end{cases} \qquad \textbf{[14]}$$

intercambiando de lugar las ecuaciones 3ª y 4ª de **[14]**, resulta:

$$S'_E \begin{cases} -1x_3 \; - \; 2x_1 - \; 5x_2 + \; 0x_4 - \; 5x_5 \; = 0 \\ \quad -6x_1 \; -17x_2 \; + \; 5x_4 - \; 14x_5 \; = \; 1 \\ \qquad - \; 2x_2 \; +3x_4 \; + \; 3x_5 = \; 3 \\ \qquad\qquad 3x_4 - \; x_5 = 1 \end{cases} \qquad \textbf{[15]}$$

Diagonal principal

Evidentemente:

S'$_E$ = Sistema [15] ~ Sistema [14] ~ Sistema [13] ~ Sistema [12] ~ Sistema [10] = S' [16]

teniéndose (ver **[2]**), que este sistema **[15]** es un equivalente escalonado de **S'**.

c. Como:

S ~ S$_E$ (por **[9]**) **, S' ~ S'$_E$** (por **[16]**) **,** y **S ~ S'** (por **[11]**)

resulta que tanto S$_E$ como S'$_E$ son equivalentes escalonados de S y de S'.

Queda así ilustrado lo indicado en la nota 2ª de **b** de SEL VIII.2.

Evidentemente, podrían obtenerse aun otros equivalentes escalonados de S en base a efectuar en dicho sistema otros cambios de ubicación de las ecuaciones y/o de las incógnitas, y procediendo tal como arriba mencionado.

SEL VIII.4

Sea el sistema:

$$S \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + x_{10} = 97 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6 + 17x_7 + 14x_8 + 18x_9 - x_{10} = 190 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 15x_4 + 19x_5 + 23x_6 + 19x_7 + 25x_8 + 25x_9 + 2x_{10} = 310 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 12x_9 + x_{10} = -53 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 16x_4 + 20x_5 + 26x_6 + 29x_7 + 38x_8 + 38x_9 + 2x_{10} = 411 \\ -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 8x_4 - 10x_5 - 6x_6 - 11x_7 + 4x_8 - 13x_9 + x_{10} = -115 \end{cases} \qquad \textbf{[17]}$$

Multiplíquese la 1ª ecuación de **[17]** por	$-\dfrac{2}{1}=-2$	y súmese el resultado a la	2ª ecuación de **[17]**
Multiplíquese la 1ª ecuación de **[17]** por	$-\dfrac{3}{1}=-3$	y súmese el resultado a la	3ª ecuación de **[17]**
Multiplíquese la 1ª ecuación de **[17]** por	$-\dfrac{(-1)}{1}=1$	y súmese el resultado a la	4ª ecuación de **[17]**
Multiplíquese la 1ª ecuación de **[17]** por	$-\dfrac{4}{1}=-4$	y súmese el resultado a la	5ª ecuación de **[17]**
Multiplíquese la 1ª ecuación de **[17]** por	$-\dfrac{(-2)}{1}=2$	y súmese el resultado a la	6ª ecuación de **[17]**

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+x_{10}=97\\
3x_7-2x_8+0x_9-3x_{10}=-4\\
3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9-x_{10}=19\\
6x_4+8x_5+10x_6-x_7+0x_8-3x_9+2x_{10}=44\\
2x_6+1x_7+6x_8+2x_9-2\,x_{10}=23\\
6x_6+3x_7+20x_8+5x_9+3x_{10}=79
\end{array}\right. \qquad \textbf{[18]}$$

Reordenando este sistema se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+x_{10}=97\\
3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9-x_{10}=19\\
6x_4+8x_5+10x_6-x_7+0x_8-3x_9+2x_{10}=44\\
2x_6+1x_7+6x_8+2x_9-2\,x_{10}=23\\
6x_6+3x_7+20x_8+5x_9+3\,x_{10}=79\\
3x_7-2x_8+0x_9-3x_{10}=-4
\end{array}\right. \qquad \textbf{[19]}$$

Multiplíquese la 2ª ecuación de **[19]** por	$-\dfrac{6}{3}=-2$	y súmese el resultado a la	3ª ecuación de **[19]**
Multiplíquese la 4ª ecuación de **[19]** por	$-\dfrac{6}{2}=-3$	y súmese el resultado a la	5ª ecuación de **[19]**

Se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+x_{10}=97\\
3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9-x_{10}=19\\
3x_7-2x_8+x_9+4x_{10}=6\\
2x_6+x_7+6x_8+2x_9-2x_{10}=23\\
2x_8-x_9+9x_{10}=10\\
3x_7-2x_8+0x_9-3x_{10}=-4
\end{array}\right. \qquad \textbf{[20]}$$

Reordenando resulta:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+x_{10}=97\\
3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9-x_{10}=19\\
2x_6+x_7+6x_8+2x_9-2x_{10}=23\\
3x_7-2x_8+x_9+4x_{10}=6\\
3x_7-2x_8+0x_9-3x_{10}=-4\\
2x_8-x_9+9x_{10}=10
\end{array}\right. \qquad \textbf{[21]}$$

(Multiplíquese la 4ª ecuación de **[21]** por) $-\frac{3}{3}=-1$ (y súmese el resultado a la) 5ª ecuación de **[21]**

Resulta:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+x_{10}=97\\
3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9-x_{10}=19\\
2x_6+x_7+6x_8+2x_9-2x_{10}=23\\
3x_7-2x_8+x_9+4x_{10}=6\\
-x_9-7x_{10}=-10\\
2x_8-x_9+9x_{10}=10
\end{array}\right. \qquad \textbf{[22]}$$

y reordenando resulta que:

$$S_E\left\{\begin{array}{l}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+x_{10}=97\\
3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9-x_{10}=19\\
2x_6+x_7+6x_8+2x_9-2x_{10}=23\\
3x_7-2x_8+x_9+4x_{10}=6\\
2x_8-x_9+9x_{10}=10\\
-x_9-7x_{10}=-10
\end{array}\right. \qquad \textbf{[23]}$$

Evidentemente es:

S = Sistema [17] ~ Sistema [18] ~ Sistema [19] ~ Sistema [20] ~ Sistema [21] ~ ~ Sistema [22] ~ Sistema [23] = S_E **[24]**

El sistema **[23]** es un equivalente escalonado del **S** por cumplir las condiciones indicadas en **[2]**.

SEL VIII.5

a. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x+ \quad 2y+ \quad 3z=1 \\ 4x+ \quad 5y+ \quad 6z=1 \\ 7x+ \quad 8y+ \quad 8z=1 \\ 10x+11y+12z=1 \\ 13x+14y+15z=10 \end{cases} \qquad \textbf{[25]}$$

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[25]** por) $-\frac{4}{1}=-4$ (y súmese el resultado a la) 2ª ecuación de **[25]**

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[25]** por) $-\frac{7}{1}=-7$ (y súmese el resultado a la) 3ª ecuación de **[25]**

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[25]** por) $-\frac{10}{1}=-10$ (y súmese el resultado a la) 4ª ecuación de **[25]**

(Multiplíquese la 1ª ecuación de **[25]** por) $-\frac{13}{1}=-13$ (y súmese el resultado a la) 5ª ecuación de **[25]**

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+ \quad 2y+ \quad 3z=1 \\ \quad -3y \; - \; 6z=-3 \\ \quad -6y \; - \; 13z=-6 \\ \quad -9y \; - \; 18z=-9 \\ \quad -12y \; - \; 24z=-3 \end{cases} \qquad \textbf{[26]}$$

(Multiplíquese la 2ª ecuación de **[26]** por) $-\frac{(-6)}{(-3)}=-2$ (y súmese el resultado a la) 3ª ecuación de **[26]**

(Multiplíquese la 2ª ecuación de **[26]** por) $-\frac{(-9)}{(-3)}=-3$ (y súmese el resultado a la) 4ª ecuación de **[26]**

(Multiplíquese la 2ª ecuación de **[26]** por) $-\frac{(-12)}{(-3)}=-4$ (y súmese el resultado a la) 5ª ecuación de **[26]**

$$S_E \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = 1 \\ -z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 9 \end{cases} \qquad \textbf{[27]}$$

$0 = 9$ ⟵ Ecuación sin solución, ver **h** de SEL V

Evidentemente es:

S = Sistema [25] ~ Sistema [26] ~ Sistema [27] = S_E

Este sistema es $\mathbf{S_E}$ un equivalente escalonado del **S** indicado en **[25]** por cumplir las dos condiciones indicadas en **[2]**.

b. Evidentemente, el sistema $\mathbf{S_E}$ indicado en **[27]** no tiene ninguna solución (ver **i** de SEL VI) y por lo tanto **S**, que es su equivalente, tampoco tendrá ninguna solución.
En general, si dado un sistema **S** se obtiene un equivalente escalonado del mismo, $\mathbf{S_E}$, que tenga una o mas ecuaciones del tipo **0 = k** (k $\neq 0$), se tiene que **S** y $\mathbf{S_E}$ no tienen ninguna solución.
También puede ocurrir que durante el proceso de hallar el equivalente escalonado de un sistema **S** aparezca un sistema **S'** que tenga una o mas ecuaciones del tipo **0 = k** (k $\neq 0$). Como dicho **S'** no tiene ninguna solución y como **S ~ S'** resulta que **S** tampoco tiene ninguna solución.
Resumiendo, si durante el proceso de hallar un equivalente escalonado de un sistema **S** o al llegar a dicho equivalente escalonado, aparecen una o mas ecuaciones del tipo **0 = k** (k $\neq 0$), se tiene que el sistema **S** no tiene ninguna solución. Las cosas se dejan ahí.

SEL VIII.6

Puede ocurrir que durante el proceso de hallar un equivalente escalonado de un sistema **S** o al llegar a dicho equivalente escalonado aparezcan una o más ecuaciones del tipo **0 = 0**.

Como, según visto en **h** de SEL VI, el conjunto de verdad de un sistema no cambia si de él se suprimen todas las ecuaciones del tipo **0 = 0** que tenga, lo práctico es suprimir dichas ecuaciones a medida que vayan apareciendo, llegándose así a un equivalente escalonado sin ecuaciones de dicho tipo.
Por ejemplo, sea el sistema:

$$S \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 8z = 1 \\ 10x + 11y + 12z = 1 \end{cases} \qquad \textbf{[28]}$$

Procediendo como indicado en SEL VIII.3, SEL VIII.4 y SEL VIII.5 se van obteniendo sucesivamente los siguientes sistemas equivalentes a **S.**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = -3 \\ -6y - 12z = -6 \\ -9y - 18z = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = -3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

y suprimiendo de este último sistema las ecuaciones 3ª y 4ª se obtiene el equivalente escalonado de **S**.

$$S_E \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad -3y\ -6z=-3 \end{cases}$$

SEL VIII.7

a. Sea un sistema **S** con más ecuaciones que incógnitas.
Cualquiera de sus equivalentes escalonados, S_E tendrá también más ecuaciones que incógnitas. Como según se vio en **b** de SEL VIII 2, los coeficientes de todas las ecuaciones de S_E que estén debajo de la diagonal principal han de ser ceros, estas ecuaciones son del tipo 0 = 0 ó 0 = k con (k ≠ 0)

Entonces, dado un sistema **S** con más ecuaciones que incógnitas, si su equivalente escalonado **S_E** no tiene ecuaciones de los tipos 0 = 0 o 0 = k (k ≠ 0), entonces la cantidad de sus ecuaciones será como máximo igual a la cantidad de incógnitas.

b. Por otra parte, sea un sistema **S** que tenga a lo sumo tantas ecuaciones como incógnitas. Evidentemente, todo equivalente escalonado del mismo tendrá una cantidad de ecuaciones que será como máximo igual a la cantidad de incógnitas. Con mayor razón todo equivalente escalonado **S_E** de un sistema de este tipo que no tenga ecuaciones de los tipos 0 = 0 ó 0 = k (k ≠ 0) también tendrá una cantidad de ecuaciones que a lo sumo será igual a la cantidad de incógnitas.

c. Entonces, por lo visto en **a** y **b** se tiene que:
Todo equivalente escalonado que no tenga ecuaciones de los tipos 0 = 0 o 0 = k (k ≠ 0), tendrá una cantidad de ecuaciones a lo sumo igual a la cantidad de incógnitas.

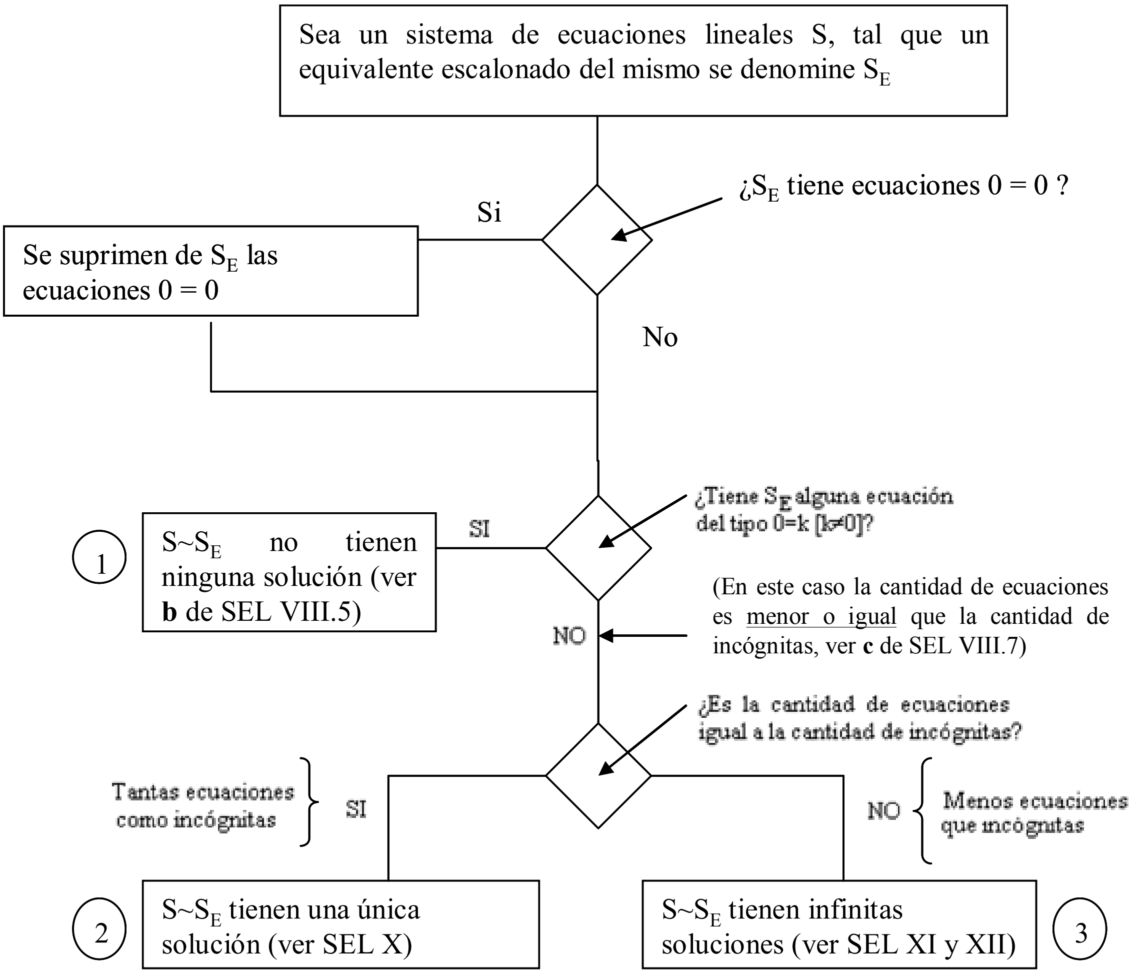
SEL VIII.8

Evidentemente:
El problema de hallar el conjunto de verdad de un sistema cualquiera queda reducido al problema de hallar el conjunto de verdad de uno cualquiera de sus equivalentes escalonados.

SEL IX

Preliminares de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss

Como anticipo de lo que se irá viendo más adelante, se tiene que el proceso de resolución a encararse es tal como esquematizado en el siguiente diagrama de flujo:



SEL X

<u>Caso de un S_E con tantas ecuaciones como incógnitas y sin ecuaciones de los tipos 0 = 0 ó 0 = k (k ≠ 0)</u> (Caso 2 del diagrama de flujo de SEL IX)

a. Para empezar es evidente que un equivalente escalonado S_E tal como indicado no puede tener ningún cero en su diagonal principal.
A la recíproca un equivalente escalonado sin ceros en su diagonal principal y con tantas ecuaciones como incógnitas no tendrá ninguna ecuación de los tipos 0 = 0 ó 0 = k (k ≠ 0).

b. Sea por ejemplo un sistema **S** tal que uno de sus equivalentes escalonados sea:

$$S_E \begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 8 \\ & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & & 3x_3 & +2x_4 & = & 17 \\ & & & 5x_4 & = & 20 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Evidentemente, para que la 4ª ecuación de este sistema determine un enunciado cierto, es necesario que $\boldsymbol{x_4}$ asuma el valor:

$$\alpha_4 = \frac{20}{5} = 4$$

Si x_4 asume el valor 4, para que la 3ª ecuación de S_E determine un enunciado cierto, es necesario que x_3 asuma un valor α_3 tal que:

$$3\alpha_3 + 2 \cdot 4 = 17 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{17-(2\cdot 4)}{3} = 3$$

Si x_4 asume el valor 4 y x_3 asume el valor 3, para que la 2ª ecuación de S_E determine un enunciado cierto, es necesario que x_2 asuma un valor α_2 tal que:

$$-\alpha_2 + 2 \cdot 3 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Por último si x_2, x_3, x_4 asumen los valores 2, 3 y 4, para que la 1ª ecuación de S_E determine un enunciado cierto, es necesario que x_1 asuma un valor α_1 tal que:

$$2\alpha_1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 8 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \frac{8 - 3\cdot 2 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{2} = 1$$

resultando así que el <u>conjunto de verdad de S y S_E esté constituido por la única solución</u>:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

Evidentemente, el proceso de resolución indicado por el ejemplo recién desarrollado es válido para cualquier sistema **S** tal que tenga un equivalente escalonado sin ecuaciones de los tipos 0 = 0 ó 0 = k (k ≠ 0), y que tenga tantas ecuaciones como incógnitas.

c. Se llamarán <u>cramerianos</u> a los sistemas que tengan un equivalente escalonado con tantas ecuaciones como incógnitas y que no tenga ceros en su diagonal principal.
Tal como recién se ha demostrado, <u>los sistemas cramerianos</u> tienen una única solución.

SEL XI

<u>Sistemas con un equivalente escalonado S_E con menos ecuaciones que incógnitas y sin ecuaciones de los tipos 0 = 0 ó 0 = k (k ≠ 0)</u> (Caso 3 del diagrama de flujo de SEL IX).

a. Sea por ejemplo un sistema **S** tal que uno de sus equivalentes escalonados sea:

$$S_E \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 3 \\ & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & -6x_5 & = & -10 \\ & & +3x_3 & -6x_4 & +3x_5 & = & -6 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Este sistema también puede ser puesto bajo la forma:

$$S_E \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 + 2x_4 - x_5 \\ 2x_2 + 2x_3 = -10 - 2x_4 + 6x_5 \\ 3x_3 = -6 + 6x_4 - 3x_5 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

Supóngase que $\boldsymbol{x_4}$ y $\boldsymbol{x_5}$ asuman respectivamente los valores arbitrarios α_4 y α_5 respectivamente. Se tendrá entonces qué:

$$S_E \begin{cases} x_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 = \quad 3 + 2\alpha_4 \quad -\alpha_5 \\ \quad +2x_2 \quad +2x_3 = \quad \text{-}10 \text{-} 2\alpha_4 \quad +6\alpha_5 \\ \quad \quad +3x_3 = \quad \text{-}6 + 6\alpha_4 \quad -3\alpha_5 \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

Como los segundos miembros de **[3]** son números, se está en presencia de un sistema crameriano. Resolviéndole tal como indicado en SEL X se tiene que:
Para que la 3ª ecuaci6n de **[3]** determine un enunciado cierto, es necesario que x_3 asuma un valor α_3 tal que:

$$3\alpha_3 = -6 + 6\alpha_4 - 3\alpha_5 \Rightarrow \alpha_3 = -2 + 2\alpha_4 - \alpha_5 \qquad \textbf{[4]}$$

Si en la 2ª ecuación de **[3]**, x_3 asume el valor indicado en **[4]**, se tiene que para que dicha ecuación determine un enunciado cierto es necesario que x_2 asuma un valor α_2 tal que:

$$2\alpha_2 + 2(-2 + 2\alpha_4 - \alpha_5) = -10 - 2\alpha_4 + 6\alpha_5 \Rightarrow \alpha_2 = -3 - 3\alpha_4 + 4\alpha_5 \qquad \textbf{[5]}$$

Si en la 1ª ecuación de **[3]**, x_3 y x_2 asumen respectivamente los valores indicados en **[4]** y **[5]**, se tiene que para que dicha ecuación determine un enunciado cierto es necesario que x_1 asuma un valor α_1 tal que:

$$\alpha_1 - 2(-3 - 3\alpha_4 + 4\alpha_5) + (-2 + 2\alpha_4 - \alpha_5) = 3 + 2\alpha_4 - \alpha_5 \Rightarrow \alpha_1 = -1 - 6\alpha_4 + 8\alpha_5 \qquad \textbf{[6]}$$

Resulta así que las soluciones del sistema **[1]** son:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -1 - 6\alpha_4 + 8\alpha_5 & -3 - 3\alpha_4 + 4\alpha_5 & -2 + 2\alpha_4 - \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[7]}$$

siendo α_4 y α_5 constantes arbitrarias.
Evidentemente, como α_4 y α_5 son arbitrarias, se tiene que S ~S_E tienen infinitas soluciones.
Así por ejemplo, haciendo $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, resulta la solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[8]}$$

y haciendo $\alpha_4 = 1$ y $\alpha_5 = 2$, resulta la solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 9 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[9]}$$

[8] y **[9]** son dos de las infinitas soluciones de S ~ S_E.

b. Queda todavía por ver si la expresión **[7]** da <u>todas</u> las soluciones del sistema **[1]** o si existen soluciones del mismo que no surgen de **[7]**. Póngase a **[7]** bajo la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[10]}$$

en la cual α_4 y α_5 son arbitrarias y α_1, α_2 y α_3 son funciones de α_4 y α_5 según indicado en **[4]**, **[5]** y **[6]**.
Se tienen que:

$$\begin{cases} \alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & -2\alpha_4 & +\alpha_5 & = & 3 \\ & +2\alpha_2 & +2\alpha_3 & +2\alpha_4 & -6\alpha_5 & = & -10 \\ & & +3\alpha_3 & -6\alpha_4 & +3\alpha_5 & = & -6 \end{cases} \qquad \textbf{[11]}$$

Sea:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[12]}$$

Números

una solución <u>cualquiera</u> de **[1]**.
Entonces será:

$$\begin{cases} \beta_1 & -2\beta_2 & +\beta_3 & -2\beta_4 & +\beta_5 & = & 3 \\ & +2\beta_2 & +2\beta_3 & +2\beta_4 & -6\beta_5 & = & -10 \\ & & +3\beta_3 & -6\beta_4 & +3\beta_5 & = & -6 \end{cases} \qquad \textbf{[13]}$$

y por **[11]** y **[13]** se tiene que:

$$\begin{cases} (\alpha_1-\beta_1) & -2(\alpha_2-\beta_2) & +(\alpha_3-\beta_3) & -2(\alpha_4-\beta_4) & +(\alpha_5-\beta_5) & = & 0 \\ & +2(\alpha_2-\beta_2) & +2(\alpha_3-\beta_3) & +2(\alpha_4-\beta_4) & -6(\alpha_5-\beta_5) & = & 0 \\ & & +3(\alpha_3-\beta_3) & -6(\alpha_4-\beta_4) & +3(\alpha_5-\beta_5) & = & 0 \end{cases} \qquad \textbf{[14]}$$

Haciendo $\alpha_4 = \beta_4$ y $\alpha_5 = \beta_5$, a lo que se tiene derecho ya que α_4 y α_5 son arbitrarias, por **[14]** resulta:

$$\begin{cases} (\alpha_1-\beta_1) & -2(\alpha_2-\beta_2) & +(\alpha_3-\beta_3) & = & 0 \\ & +2(\alpha_2-\beta_2) & +2(\alpha_3-\beta_3) & = & 0 \\ & & +3(\alpha_3-\beta_3) & = & 0 \end{cases} \qquad \textbf{[15]}$$

lo que implica que sean $\alpha_3 - \beta_3 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$ y $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, es decir que se tiene que:

$\alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_2 = \beta_2$ y $\alpha_1 = \beta_1$

con lo que resulta que la solución (cualquiera) indicada en **[12]** surge al hacer en **[7]** $\alpha_4 = \beta_4$ y $\alpha_5 = \beta_5$.
Esto prueba que <u>todas</u> las soluciones de **[1]** están dadas por la expresión **[7]**.

SEL XII

<u>**Sistemas de ecuaciones con un equivalente escalonado S_E con menos ecuaciones que incógnitas y sin ecuaciones de los tipos 0 = 0 ó 0 = k (k $\neq$ 0) (continuación)**</u> (Caso 3 del diagrama de flujo de SEL IX).

a. Sea por ejemplo un sistema S indicado en **[17]** de SEL VIII. Según se dedujo (ver **[23]** de SEL VIII), un equivalente escalonado de dicho sistema es:

$$S_E \begin{cases} x_1 +2x_2 +3x_3 +4x_4 +5x_5 +6x_6 +7x_7 +8x_8 +9x_9 +x_{10} = 97 \\ \quad +3x_4 +4x_5 +5x_6 -2x_7 +x_8 -2x_9 -x_{10} = 19 \\ \quad +2x_6 +x_7 +6x_8 +2x_9 -2x_{10} = 23 \\ \quad +3x_7 -2x_8 +x_9 +4x_{10} = 6 \\ \quad +2x_8 -x_9 +9x_{10} = 10 \\ \quad -x_9 -7x_{10} = -10 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Transfiéranse a los 2ºs miembros tantos términos como sean necesarios para que los 1ºs miembros configuren una "escalera regular". En el presente caso deben transferirse:

Los términos en x_1 y en x_2, o los términos en x_1 y en x_3, o los términos en x_2 y en x_3.
y además,
Los términos en x_4 o los términos en x_5.
y además,
Los términos en x_9 o los términos en x_{10}.

Supóngase que se elija transferir los términos en x_2, x_3, x_4, x_{10}.
Resultará:

$$\begin{cases} x_1 +5x_5 +6x_6 +7x_7 +8x_8 +9x_9 = 97 -2x_2 -3x_3 -4x_4 -x_{10} \\ \quad +4x_5 +5x_6 -2x_7 +x_8 -2x_9 = 19 -3x_4 -x_{10} \\ \quad +2x_6 +x_7 +6x_8 +2x_9 = 23 +2x_{10} \\ \quad +3x_7 -2x_8 +x_9 = 6 -4x_{10} \\ \quad +2x_8 -x_9 = 10 -9x_{10} \\ \quad -x_9 = -10 +7x_{10} \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

Dense a x_2, x_3, x_4 y x_{10} <u>valores arbitrarios</u>. Llámese respectivamente α_2, α_3, α_4, α_{10} a dichos valores. De **[2]** resulta entonces que:

$$\begin{cases} x_1 & +5x_5 & +6x_6 & +7x_7 & +8x_8 & +9x_9 & = & 97 & -2\alpha_2 & -3\alpha_3 & -4\alpha_4 & -\alpha_{10} \\ & +4x_5 & +5x_6 & -2x_7 & +x_8 & -2x_9 & = & 19 & -3\alpha_4 & -\alpha_{10} & & \\ & & +2x_6 & +x_7 & +6x_8 & +2x_9 & = & 23 & +2\alpha_{10} & & & \\ & & & +3x_7 & -2x_8 & +x_9 & = & 6 & -4\alpha_{10} & & & \\ & & & & +2x_8 & -x_9 & = & 10 & -9\alpha_{10} & & & \\ & & & & & -x_9 & = & -10 & +7\alpha_{10} & & & \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

Este es un sistema crameriano. Procediendo de manera análoga a la utilizada con el sistema **[3]** de SEL XI va resultando:

$$\begin{aligned} \alpha_9 &= 10 - 7\alpha_{10} \\ \alpha_8 &= 10 - 8\alpha_{10} \\ \alpha_7 &= \frac{16}{3} - \frac{13}{3}\alpha_{10} \\ \alpha_6 &= -\frac{187}{6} + \frac{205}{6}\alpha_{10} \\ \alpha_5 &= \frac{1173}{24} - \frac{18}{24}\alpha_4 - \frac{1107}{24}\alpha_{10} \\ \alpha_1 &= -\frac{4025}{24} - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 - \frac{6}{24}\alpha_4 + \frac{4367}{24}\alpha_{10} \end{aligned} \qquad \textbf{[4]}$$

Resultando así que las soluciones del sistema **[1]** son:

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccccc} -\frac{4025}{24} - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 - \frac{6}{24}\alpha_4 + \frac{4367}{24}\alpha_{10} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \frac{1173}{24} - \frac{18}{24}\alpha_4 - \frac{1107}{24}\alpha_{10} & -\frac{187}{6} + \frac{205}{6}\alpha_{10} & \frac{16}{3} - \frac{13}{3}\alpha_{10} & 10-8\alpha_{10} & 10-7\alpha_{10} & \alpha_{10} \end{array}\right] \textbf{[5]}$$

donde α_2, α_3, α_4, α_{10} son constantes arbitrarias.
Evidentemente, como α_2, α_3, α_4, α_{10} son constantes arbitrarias, <u>se tiene que $S \approx S_E$ tiene infinitas soluciones</u>.
Tomando por ejemplo $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$, $\alpha_4=1$ y $\alpha_{10}=1$ resulta la solución:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

que es una de las infinitas soluciones.

b. Por un procedimiento análogo al seguido en **b** de SEL XI puede probarse que todas las soluciones del sistema **[1]** están dadas por la expresión **[5]**.

SEL XIII

Observaciones

SEL XIII.1

Es perfectamente posible que un sistema que tenga menos ecuaciones que incógnitas no tenga ninguna solución. Por ejemplo:

$$S\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & +6x_2 & +7x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Un equivalente escalonado de este sistema es:

$$S_E\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & -3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = & -3 \\ & & & 0 & = & -1 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

D. P.

Con lo que resulta (ver **i** de SEL VI) que S ~ S_E no tiene ninguna solución.
Con respecto al diagrama de flujo indicado en SEL IX la resolución del sistema **[1]** "naufraga" en ①.

a. Dado un sistema S puede ocurrir que tenga dos equivalentes escalonados S_E y S_E' tales que:
- Ambos tengan **m** ecuaciones con **n** incógnitas, siendo **m < n**.
- S_E y S'_E no tengan ecuaciones 0 = 0 ni del tipo 0 = k ($k \neq 0$).
- S_E <u>si</u> tenga ceros en su diagonal principal.
- S'_E <u>no</u> tenga ceros en su diagonal principal.

Por ejemplo, sea:

$$S\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

Un equivalente escalonado de este sistema **[3]** es

$$S_E\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{(Un cero en la diagonal principal)} \qquad \textbf{[4]}$$

D.P.

Por otra parte es evidente que si:

$$S'\begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_2 + 3x_4 = 2 \end{cases} \qquad \textbf{[5]}$$

se tiene que:

S ~ S' **[6]**

Un equivalente escalonado de S' es:

$$S'_E \begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 + x_4 = 0 \\ \quad x_3 + 0x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$ (ningún cero en la diagonal principal) **[7]**

resultando así que tanto *S* como *S*' tienen como equivalentes escalonados a S_E (con un cero en su diagonal principal y a S'_E (sin ceros en su diagonal principal).

b. Evidentemente sea cual sea el equivalente escalonado que se use para resolver este sistema <u>el conjunto de verdad a obtenerse será siempre mismo</u>.

SEL XIII.2

Como se ha demostrado que (ver diagrama de flujo en SEL IX).
1º) Los sistemas cramerianos tienen una única solución (ver **c** de SELX).

2ª) Los sistemas que <u>no</u> son cramerianos o bien no tienen ninguna solución (aparece algún 0 = k ($k \neq 0$) en sus equivalentes escalonados) o bien tienen infinitas soluciones (ver SEL XI y XII)

Puede establecerse que:

<u>**Un sistema de ecuaciones lineales es crameriano cuando y sólo cuando tiene una única solución.**</u>

<u>Esta afirmación puede tomarse como una definición alternativa de sistema crameriano.</u>

SEL XIV

<u>**Sistema de ecuaciones lineales homogéneas**</u>

a. Una ecuación lineal es llamada homogénea cuando su segundo miembro es nulo.
Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales homogéneas tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +a_{14}x_4 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +a_{24}x_4 & = & 0 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +a_{34}x_4 & = & 0 \end{cases}$$ **[1]**

b. <u>Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas se resuelve exactamente igual que cualquier otro sistema</u>.

c. Se pueden hacer las siguientes observaciones (ver diagrama de flujo de SEL IX):

1º) Evidentemente:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

es siempre una solución del sistema, y por lo tanto es imposible que un sistema de ecuaciones lineales homogéneas no tenga ninguna solución (no se cae nunca en el caso ① del antedicho diagrama de flujos, y cualquiera de sus equivalentes escalonados no tiene nunca una ecuación del tipo 0 = k, siendo $k \neq 0$).

Por lo tanto los sistemas de ecuaciones lineales homogéneas o bien tienen la única solución **[2]**, o bien tienen infinitas soluciones.

2º) En el caso de que un equivalente escalonado de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas tenga tantas ecuaciones como incógnitas (caso ② del diagrama de flujo), la única solución del sistema será del tipo indicado en **[2]**.

3º) En el caso de que un equivalente escalonado de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas tenga menos ecuaciones que incógnitas, entonces cae en el caso ③ del diagrama de flujos). Por lo tanto:

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneas con menos ecuaciones que incógnitas tiene infinitas soluciones.

SEL XV

Comentarios finales

a. Este tema de los sistemas de ecuaciones lineales es de capital importancia tanto en las Matemáticas puras como en las diversas ramas de la Ingeniería. Estos sistemas aparecen a cada paso (circuitos eléctricos, cálculo de estructuras, etc., etc.) y a menudo en forma bastante "frondosa" (por ejemplo en el cálculo de estructuras son moneda corriente los sistemas de 50 o más ecuaciones con otras tantas incógnitas).

Por lo general, los sistemas que aparecen tienen tantas ecuaciones como incógnitas pero a veces también se presentan sistemas con menos ecuaciones que incógnitas (por ejemplo al tratar de hallar la recta intersección de dos planos), o con más ecuaciones que incógnitas.

b. Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales caen en dos grandes grupos:

1º) Métodos exactos, que de entrada dan la solución del sistema.

2º) Métodos de aproximaciones sucesivas con los cuales mediante un cierto algoritmo se van obteniendo sucesivas aproximaciones de dicha solución.

c. El método de Gauss visto en lo antedicho es uno de los métodos exactos.

Además de este método existen otros métodos exactos, siendo los más "populares" el de los determinantes y el de la inversión de matrices.

Si bien estos dos últimos métodos tienen un gran valor teórico y un bien ganado "lugar al sol" en las Matemáticas, desde el punto de vista de la resolución práctica de sistemas son un desastre.

Para empezar, sirven únicamente para el caso de tantas ecuaciones como incógnitas y la cantidad de aritmética involucrada es mucho mayor que la que se necesita usando el método de Gauss.

Frente a la necesidad de resolver un sistema de digamos, 4 o más ecuaciones con otras tantas incógnitas por un método exacto y por "tracción a sangre" (con lápiz y papel), toda persona que esté en su sano juicio usará el método de Gauss.
Otra ventaja que presenta el método de Gauss es que "canta" cuando un sistema no tiene solución y cuando tiene infinitas soluciones, y en este último caso permite hallarlas. Esto no lo hacen ni el método de los determinantes ni el de inversión de matrices, los cuales se limitan a indicar que la resolución del sistema no puede progresar.

d. En lo que a métodos de aproximaciones sucesivas se refiere, el asunto es un poco más complicado. Según el sistema al cual se aplique uno de estos métodos, puede ser que al cabo de pocos pasos se obtenga una buena aproximación de la solución (convergencia rápida), pero puede también ocurrir que se necesite una gran cantidad de pasos (convergencia lenta) o aun que con los sucesivos pasos se vayan obteniendo resultados más y más alejados de la solución verdadera (divergencia).
Afortunadamente, los sistemas de ecuaciones que se presentan en la práctica tienen a menudo las siguientes características:
1º) Tienen tantas ecuaciones como incógnitas
2º) Son simétricos, es decir que $a_{ij} = a_{ji}$.
3º) Tienen "diagonal principal dominante" es decir que:

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|$$

y dadas estas condiciones los métodos de aproximaciones sucesivas dan una convergencia decente.
A quién le interese este tema, una muy buena presentación elemental puede hallarse en: M. Sadosky "Cálculo Numérico y Gráfico", pág. 149 y siguientes.

e. Volviendo al método de Gauss, se estima que en el tiempo que insume en resolver un sistema de **n** ecuaciones con **n** incógnitas un buen calculista (persona sin sistema nervioso, altamente entrenado y con una enorme capacidad de concentración) está dado por la fórmula empírica:

$$\text{Tiempo en horas} = 0{,}01\ \mathbf{n}^3$$

Resulta así que dicho buen calculista (usando una calculadora de mano) tardaría 10 horas en resolver un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas. Un mortal común tardaría por lo menos el triple.
Resulta entonces obvio que resolver con papel y lápiz, los sistemas que se presentan en la práctica (cuyos coeficientes no son "simpáticos" números enteros, sino que tiene numerosos decimales) cae dentro de la categoría de misión imposible si no se usa una computadora con un software adecuado (por ejemplo MATHEMATICA).

SEL XVI

Relaciones lineales y combinaciones lineales

a. Sea un sistema de ecuaciones lineales:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & =h_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & =h_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & =h_3 \\ a_{41}x_1 & +a_{42}x_2 & +a_{43}x_3 & =h_4 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Hágase corresponder a este sistema el siguiente conjunto de funciones:

$$C:\begin{cases} f_1 = & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & -h_1 \\ f_2 = & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & -h_2 \\ f_3 = & a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & -h_3 \\ f_4 = & a_{41}x_1 & +a_{42}x_2 & +a_{43}x_3 & -h_4 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

(Notar que las expresiones de este conjunto son funciones y **no** ecuaciones).
Se define que, por ejemplo, entre las funciones f_1, f_2 y f_4 existe una relación lineal cuando existan tres números η_1, η_2 y η_4 no todos nulos tales que para cualquier valor que asuman x_1, x_2 y x_4 se tenga que:

$$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_4 f_4 = 0 \qquad \textbf{[3]}$$

b. Así, por ejemplo, dado el sistema:

$$S':\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & =7 \\ 0x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =3 \end{cases}$$

al cual corresponde el conjunto de funciones:

$$C':\begin{cases} f_1 = x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -2 \\ f_2 = 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & -7 \\ f_3 = 0x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -3 \end{cases}$$

Se tiene que entre las tres funciones de este conjunto existe una relación lineal ya que tomando: $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = -1$ y $\eta_3 = 1$ resulta:

$$\begin{aligned} &2f_1 - f_2 + f_3 = \\ &\quad = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2) - (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 7) + \\ &\qquad\qquad + (0x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3) = \\ &= (2-2+0)x_1 + (2-3+1)x_2 + (2-4+2)x_3 + (2-5+3)x_4 + [2(-2) - (-7) + (-3)] = 0 \end{aligned}$$

c. Notar lo siguiente:
Si existe una relación lineal entre k funciones, entonces también existe una relación lineal entre todo conjunto de funciones que incluya a las k antedichas.
En efecto, si existe una relación lineal entre las k funciones f_1, f_2, ..., f_k se tiene que:

$$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + ... + \eta_k f_k = 0\,, \quad \forall x_1, x_2, ...$$

siendo $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k$ no todos nulos y entonces, considerando las funciones $f_1, f_2, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n$ se tiene que:

$$\eta_{k+1} = 0 \qquad \eta_n = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + ... + \eta_k f_k + 0 f_{k+1} + ... + 0 f_n = 0 \qquad \forall x_1, x_2$$

siendo $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k, \eta_{k+1}, ..., \eta_n$ no todos nulos, ya que $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k$ no son todos nulos.

d. Volviendo al sistema S y conjunto de funciones indicadas en **[1]** y **[2]**, supóngase que entre las funciones de **[2]** existe en efecto una relación lineal tal como indicado en **[3]**.
Sea una de las funciones a la cual en la relación lineal le corresponde un η no nulo. Supóngase que sea por ejemplo $\eta_2 \neq 0$, número al cual le corresponde la función f_2. Entonces por **[3]** se tiene que:

$$f_2 = -\frac{\eta_1}{\eta_2} f_1 - \frac{\eta_4}{\eta_2} f_4 \qquad \forall x_1, x_2, x_3$$

Se dirá que en este caso f_2 es una combinación lineal de f_1 y f_4.
Asimismo, si fuera $\eta_1 \neq 0$ se tendría que:

$$f_1 = -\frac{\eta_2}{\eta_1} f_2 - \frac{\eta_4}{\eta_1} f_4 \qquad \forall x_1, x_2, x_3$$

resultando entonces que: f_1 es una combinación lineal de f_2 y f_4.
Evidentemente, dada una relación del tipo de la **[3]**, toda función a la cual **no** le corresponda un η nulo es combinación lineal de las restantes funciones.

SEL XVII

<u>Ecuaciones redundantes en un sistema de ecuaciones lineales</u>

En un sistema de ecuaciones lineales una cierta ecuación será llamada redundante cuando todas las soluciones comunes a las restantes ecuaciones del sistema sean también soluciones de dicha ecuación.
Es entonces evidente que el conjunto de verdad de un sistema no variará cuando de dicho sistema se suprima una ecuación redundante.

SEL XVIII

SEL XVIII.1

Teorema

Sea un sistema de ecuaciones lineales S y su correspondiente conjunto de funciones C. Se demostrará a continuación que si existe una relación lineal entre las funciones de C, entonces una, o más, de las ecuaciones de S serán redundantes.
Considérese de nuevo el sistema S, el conjunto C, y la relación lineal indicadas respectivamente en **[1]**, **[2]**, y **[3]** de SEL XVI. Supóngase que en **[3]** de SEL XVI sea $\eta_2 \neq 0$. Se tiene entonces que f_2 es la siguiente combinación lineal de f_1 y f_4:

$$f_2 = -\frac{\eta_1}{\eta_2} f_1 - \frac{\eta_4}{\eta_2} f_4 \qquad \textbf{[1]}$$

lo que explicitado (ver **[2]** de SEL XVI) toma el aspecto:

$$\overbrace{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - h_2}^{f_2} = -\frac{\eta_1}{\eta_2}\left(\overbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - h_1}^{f_1}\right) - \frac{\eta_4}{\eta_2}\left(\overbrace{a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 - h_4}^{f_4}\right) \qquad \textbf{[2]}$$

Sea $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \end{bmatrix}$ una solución común a las ecuaciones 1ª y 4ª de S, lo que implica que cuando x_1, x_2 y x_3 asuman respectivamente los valores α_1, α_2 y α_3, las funciones f_1 y f_4 se anulen. Esto determina (ver **[1]** y **[2]**), que cuando x_1, x_2 y x_3 asuman respectivamente los valores α_1, α_2 y α_3 la función f_2 también se anulará, lo que implica que $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \end{bmatrix}$ sea también una solución de la 2ª ecuación de S

En general:

Si una función f es combinación lineal de otras, entonces la ecuación correspondiente a la misma admite todas las soluciones que son comunes a las ecuaciones correspondientes a las funciones de las cuales f es combinación lineal **[3]**

Supóngase ahora que:

1º) f_2 sea una combinación lineal de f_1 y f_4. **[4]**

2º) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{bmatrix}$ sea una solución común a las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª de S. **[5]**

Como por **[5]** se tiene que $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{bmatrix}$, solución de las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª de S., es una solución de las ecuaciones 1ª y 4ª de S, se tiene entonces por **[3]** y por **[4]** que $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{bmatrix}$ es también una solución de la ecuación 2ª de S, lo que implica que $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 ,& \beta_2 ,& \beta_3 \end{bmatrix}$ sea una solución de todo el sistema S. Como lo antedicho es válido para toda solución común a las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª de S, se tiene entonces que *toda* solución a las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª de S es una solución de todo el sistema S.

Generalizando:

Si la función correspondiente a una cierta ecuación e_i de un sistema es combinación lineal de funciones correspondientes a otras ecuaciones del sistema, entonces todas las soluciones comunes a las restantes ecuaciones del sistema (todas las ecuaciones del sistema menos la e_i) serán también soluciones de la ecuación e_i, lo cual, según lo indicado en SEL XVII, implica que la ecuación e_i sea redundante. **[6]**

SEL XVIII.2

Por ejemplo, dado el caso:

$$\text{S:}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 1 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \text{C:}\begin{cases} f_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 1 \\ f_2 = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 - 1 \\ f_3 = 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + x_4 - 1 \\ f_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 0 \end{cases}$$

Puede verificarse que entre f_1 , f_2, f_3 y f_4 existe la relación lineal:

$$\begin{array}{cccc} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$1.f_1 + (-2)f_2 + 1.f_3 + 0f_4 = 0$$

(Además de esta relación lineal existen infinitas otras según se verá en SEL XIX, pero en todas ellas será $\eta_4 = 0$).
Se tiene que:

1º) Como $\eta_1 \neq 0$, f_1 es una combinación lineal de f_2, f_3 y f_4. Por lo tanto *toda* solución común a las ecuaciones 2ª, 3ª y 4ª es también solución de la primera.
Por lo tanto la ecuación 1ª de S es redundante con respecto a las ecuaciones 2ª, 3ª y 4ª, es decir que del sistema S puede eliminarse la ecuación 1ª sin alterar su conjunto de verdad.

2º) Como $\eta_2 \neq 0$, f_2 es una combinación lineal de f_1, f_3 y f_4. Por lo tanto *toda* solución común a las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª es también solución de la segunda.
Por lo tanto la ecuación 2ª de S es redundante con respecto a las ecuaciones 1ª, 3ª y 4ª, es decir que del sistema S puede eliminarse la ecuación 2ª sin alterar su conjunto de verdad.

3º) Como $\eta_3 \neq 0$, f_3 es una combinación lineal de f_1, f_2 y f_4. Por lo tanto *toda* solución común a las ecuaciones 1ª, 2ª y 4ª es también solución de la tercera.

Por lo tanto la ecuación 3ª de S es redundante con respecto a las ecuaciones 1ª, 2ª y 4ª, es decir que del sistema S puede eliminarse la ecuación 3ª sin alterar su conjunto de verdad.

4º) Como $\eta_4 = 0$, f_4 *no* es una combinación lineal de f_1, f_2 y f_3. Por lo tanto *no* puede afirmarse que *toda* solución común a las ecuaciones 1ª, 2ª y 3ª sea también solución de la 4ª.
Sin embargo, puede ocurrir que algunas soluciones comunes a las ecuaciones 1ª, 2ª y 3ª sean asimismo soluciones de la 4ª.

Así $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & ,-1 & ,1 & ,0 \end{bmatrix}$, solución común a las ecuaciones 1ª, 2ª y 3ª es también solución de la 4ª, y $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & ,-2 & ,1 & ,1 \end{bmatrix}$, otra solución común a las ecuaciones 1ª, 2ª y 3ª, no es solución de la 4ª.

Según se acaba de ver, del sistema S pueden eliminarse una cualquiera de las ecuaciones 1ª, 2ª ó 3ª sin alterar su conjunto de verdad.
Esto *no* implica que de S puedan eliminarse a la vez dos o tres de esas ecuaciones sin alterar su conjunto de verdad.
Una vez eliminada de S una ecuación redundante, se estará frente a un nuevo sistema, en el cual puede haber o no haber redundancias ulteriores.

SEL XVIII.3

Existen casos de redundancia múltiple. Por ejemplo sean:

$$S_1: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad C_1: \begin{cases} f_1' = x + y - 0 \\ f_2' = 2x + 3y - 1 \\ f_3' = 4x + 5y - 1 \\ f_4' = 5x + 7y - 2 \end{cases}$$

Entre f_1', f_2', f_3' y f_4' existe la relación lineal:

$$1(x + y - 0) + (-1)(2x + 3y - 1) + (-1)(4x + 5y - 1) + 1(5x + 7y - 2) = 0, \quad \forall x, y$$

Como $\eta_1' = 1$, $\eta_2' = (-1)$, $\eta_3' = (-1)$ y $\eta_4' = 1$, valores todos no nulos, todas las ecuaciones de S pueden ser consideradas como redundantes con respecto a las demás, pudiendo entonces eliminarse una cualquiera de ellas sin alterar el conjunto de verdad de S.
Eliminando de S a la ecuación $5x + 7y = 2$ queda:

$$S_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f_1'' = x + y - 0 \\ f_2'' = 2x + 3y - 1 \\ f_3'' = 4x + 5y - 1 \end{cases}$$

Entre f_1'', f_2'' y f_3'' existe la relación lineal:

$$2(x + y - 0) + 1(2x + 3y - 1) + (-1)(4x + 5y - 1) = 0 \qquad \forall x, y$$

Como $\eta_1'' = 2$, $\eta_2'' = 1$, y $\eta_3'' = (-1)$, todos no nulos, todas las ecuaciones de S_2 pueden ser consideradas como redundantes. Eliminando de S_2 a la ecuación $2x + 3y = 1$, queda:

$$S_3 : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \qquad C_3 : \begin{cases} f_1''' = 2x + 3y - 1 \\ f_2''' = 4x + 4y - 1 \end{cases}$$

no existiendo ninguna relación lineal entre f_1''' y f_2'''.

El conjunto de verdad de S_3 es $\begin{bmatrix} x & y \\ -1 , & 1 \end{bmatrix}$, el cual, según visto en b) de SEL VII, también es el conjunto de verdad de S_1 y S_2.

SEL XIX

<u>Investigación de las relaciones lineales existentes en un conjunto de funciones</u>

Se indicará el método a seguir en base a ejemplos, pero será evidente que dicho método es enteramente general.

SEL XIX.1

a. Sean:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z + v = 4 \\ x + y + z + 2v = 5 \\ x + 2y + 2z + 2v = 7 \\ x + 3y + 3z + 4v = 11 \\ x + 4y + 4z + 5v = 14 \end{cases} \leftrightarrow C : \begin{cases} f_1 = x + y + z + v - 4 \\ f_2 = x + y + z + 2v - 5 \\ f_3 = x + 2y + 2z + 2v - 7 \\ f_4 = x + 3y + 3z + 4v - 11 \\ f_5 = x + 4y + 4z + 5v - 14 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Para que exista una relación lineal entre las funciones de C, deben existir cinco números η_1, η_2, η_3, η_4 y η_5 no todos nulos tales que:

$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3 + \eta_4 f_4 + \eta_5 f_5 = 0$ para cualquier valor que asuman *x, y, z, v.* **[2]**

Explicitando a **[2]** se obtiene:

$$\eta_1(x + y + z + v - 4) + \eta_2(x + y + z + 2v - 5) + \eta_3(x + 2y + 2z + 2v - 7) + \\ + \eta_4(x + 3y + 3z + 4v - 11) + \eta_5(x + 4y + 4z + 5v - 14) = 0$$

lo que puede ser puesto bajo la forma:

$$(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5)x + (\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 4\eta_5)y + (\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 4\eta_5)z + \\ + (\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4 + 5\eta_5)v - (4\eta_1 + 5\eta_2 + 7\eta_3 + 11\eta_4 + 14\eta_5) = 0 \qquad \textbf{[3]}$$

Como para que exista una relación lineal, esta expresión debe ser válida para cualquier valor que asuman *x, y, z* y *v,* se tiene que haciendo en ella $x = y = z = v = 0$, para que exista una relación lineal debe ser:

$$4\eta_1 + 5\eta_2 + 7\eta_3 + 11\eta_4 + 14\eta_5 = 0$$

Con lo que **[3]** toma el aspecto:

$$(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5)x + (\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 4\eta_5)y + (\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 4\eta_5)z + \\ + (\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4 + 5\eta_5)v = 0 \qquad \textbf{[5]}$$

Teniendo siempre en cuenta que para que exista una relación lineal la expresión **[5]** debe ser válida para cualquier valor que asuman *x, y, z* y *v,* se obtiene sucesivamente:
Haciendo en **[5]** $x = 1,\ \ y = z = v = 0$, resulta que debe ser:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 = 0 \qquad \textbf{[6]}$$

Haciendo en **[5]** $y = 1,\ \ x = z = v = 0$, resulta que debe ser:

$$\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 4\eta_5 = 0 \qquad \textbf{[7]}$$

Haciendo en **[5]** $z = 1,\ \ x = y = v = 0$, resulta que debe ser:

$$\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 4\eta_5 = 0 \qquad \textbf{[8]}$$

Haciendo en **[5]** $v = 1,\ \ x = y = z = 0$, resulta que debe ser:

$$\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + 4\eta_4 + 5\eta_5 = 0 \qquad \textbf{[9]}$$

Entonces, para que sea válida la expresión **[3]** para todo valor de *x, y, z* y *v,* se tiene que debe cumplirse lo indicado en **[4]**, **[6]**, **[7]**, **[8]** y **[9]** lo que implica que η_1, η_2, η_3, η_4 y η_5 sean soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \eta_1 & +\eta_2 & +\eta_3 & +\eta_4 & +\eta_5 & =0 \\ \eta_1 & +\eta_2 & +2\eta_3 & +3\eta_4 & +4\eta_5 & =0 \\ \eta_1 & +\eta_2 & +2\eta_3 & +3\eta_4 & +4\eta_5 & =0 \\ \eta_1 & +2\eta_2 & +2\eta_3 & +4\eta_4 & +5\eta_5 & =0 \\ 4\eta_1 & +5\eta_2 & +7\eta_3 & +11\eta_4 & +14\eta_5 & =0 \end{cases} \qquad \textbf{[10]}$$

Este es un sistema de ecuaciones homogéneas en el cual las incógnitas son η_1, η_2, η_3, η_4 y η_5. Resolviendo por el método de Gauss resultan las infinitas soluciones:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ 2\alpha + 3\beta & -\alpha - \beta & -2\alpha - 3\beta & \alpha & \beta \end{bmatrix};\ \alpha \text{ y } \beta \text{ arbitrarias} \qquad \textbf{[11]}$$

lo que implica que existen infinitas relaciones lineales entre las funciones del conjunto C indicado en **[1]**.
Por ejemplo, dos de estas infinitas relaciones lineales son:

1º) Haciendo en **[11]** $\alpha = \beta = 1$, se obtiene:

$$\eta_1 = 5 \qquad \eta_2 = -2 \qquad \eta_3 = -5 \qquad \eta_4 = 1 \qquad \eta_5 = 1$$

2ª) Haciendo en **[11]** $\alpha = 1$, $\beta = 0$, se obtiene:

$$\eta_1 = 2 \qquad \eta_2 = -1 \qquad \eta_3 = -2 \qquad \eta_4 = 1 \qquad \eta_5 = 0$$

b. Observar lo siguiente:

1º	Los coeficientes de η_1, ..., η_5 en la	1ª	Ecuación de **[10]** son respectivamente iguales a los coeficientes de:	x	en las ecuaciones 1ª, ..., 5ª de **[1]**
2º	”	2ª	”	y	”
3º	”	3ª	”	z	”
4º	”	4ª	”	v	”
5º	Los coeficientes de η_1, ..., η_5 en la última ecuación de **[10]** son respectivamente iguales a los términos independientes de las ecuaciones 1ª, ..., 5ª de **[1]**.				

Como una situación análoga debe evidentemente presentarse con cualquier sistema de ecuaciones que se considere, se tiene pues una mecánica muy sencilla para hallar el sistema de ecuaciones relativo a los números η correspondientes a las relaciones lineales que pueda haber entre las funciones f derivadas de un sistema de ecuaciones cualesquiera.

SEL XIX.2

Sea:

$$\text{S: } \begin{cases} x - y + z - v = -1 \\ 2x + 3y + 2z + v = 2 \\ x + y - 2z + 2v = 3 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \text{C: } \begin{cases} f_1 = x - y + z - v + 1 \\ f_2 = 2x + 3y + 2z + v - 2 \\ f_3 = x + y - 2z + 2v - 3 \end{cases}$$

Procediendo tal como se ha indicado en SEL XIX.1 se llega a que para que exista una relación lineal entre las funciones de C deben existir tres números η_1, η_2 y η_3, no todos nulos y tales que:

$$\begin{cases} \eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 = 0 \\ -\eta_1 + 3\eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \eta_1 + 2\eta_2 - 2\eta_3 = 0 \\ -\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = 0 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones homogéneas cuya única solución es: $\left[\frac{\eta_1}{0}, \frac{\eta_2}{0}, \frac{\eta_3}{0}\right]$

Y el hecho de que todos estos η sean nulos implica que no existe ninguna relación lineal entre las funciones de C.

SEL XIX.3

a. Sea:

$$\text{S:}\begin{cases} x+2y+3z+v=1 \\ 4x+5y+6z+v=1 \\ 5x+4y+3z-v=0 \\ 8x+7y+6z-v=0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \text{C:}\begin{cases} f_1 = x+2y+3z+v-1 \\ f_2 = 4x+5y+6z+v-1 \\ f_3 = 5x+4y+3z-v-0 \\ f_4 = 8x+7y+6z-v-0 \end{cases} \qquad \textbf{[12]}$$

Procediendo tal como se ha indicado anteriormente se llega a que para que exista una relación lineal entre las funciones de C deben existir cuatro números η_1, η_2, η_3 y η_4 no todos nulos y tales que:

$$\begin{cases} \eta_1 + 4\eta_2 + 5\eta_3 + 8\eta_4 = 0 \\ 2\eta_1 + 5\eta_2 + 4\eta_3 + 7\eta_4 = 0 \\ 3\eta_1 + 6\eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4 = 0 \\ \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 - \eta_4 = 0 \\ \eta_1 + \eta_2 = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones homogéneas. Resolviéndolo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \text{ arbitrario.}$$

Con lo que resulta que existen infinitas relaciones lineales entre las funciones de C.

b. Notar lo siguiente:
Según puede verificarse fácilmente, un equivalente escalonado del sistema S indicado en **[12]** es:

$$S_E:\begin{cases} x+2y+3z+v=1 \\ \quad -3y-6z-3v=-3 \\ \qquad 0=1 \\ \qquad 0=1 \end{cases} \qquad \textbf{[13]}$$

Con lo que resulta que S no tiene ninguna solución.
Entonces:
Puede ocurrir que exista una relación lineal entre las funciones de un conjunto que corresponda a un sistema que no tenga solución.

SEL XIX.4

Observar que dado un conjunto C de funciones correspondientes a un sistema S, entre las funciones de C o bien no existe ninguna relación lineal, o bien existen infinitas.

Esto surge de que los coeficientes η son incógnitas de un sistema de ecuaciones homogéneas, y estos sistemas o bien tienen la única solución $\begin{bmatrix} \eta_1 & ,..., & \eta_k \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$ (no existe ninguna relación lineal), o bien tienen infinitas soluciones (existen infinitas relaciones lineales).

Ejercicios y problemas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales

SEL 1 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Para cada uno de estos sistemas hacer un gráfico representando los conjuntos de verdad de cada una de sus ecuaciones y el conjunto de verdad del sistema.

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+8y=8 \\ \frac{3}{4}x+2y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-8y=8 \\ x-\frac{8}{5}y=2 \end{cases}$

SEL 2 El rey Magoya I mandó a uno de sus orfebres que le hiciera una corona de oro puro. Maliciando que el orfebre había puesto algo de plata en vez de oro puro consultó con Arquímedes para que lo sacara de la duda. Arquímedes primero pesó la corona en el aire y le dio 3,2 kg. Luego pesó la corona sumergida en el agua y le dio 3 kg.
¿Cuáles fueron las conclusiones de Arquímedes?
(Suponer que el peso específico del oro es 20 g/cm^3 y el de la plata es 10 g/cm^3).

SEL 3 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. En caso de que tengan infinitas soluciones, indicar la expresión general de las mismas y dos soluciones específicas.

a) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 4x+y+z=0 \\ -3x+2y-z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -6x+4y-7z=1 \\ -5x-2y+3z=-2 \\ 5x-4y+6z=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=1 \\ 2x+7y+12z=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=1 \\ 2x-5y+9z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y-5z=-5 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y-2z+5v=6 \\ 3x-3y-6z-2v=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x+i.y-z+6v=2 \\ (1-i)x+y+i.z-2(1-i)v=-2.i \\ -x+2y+4i.z-4v=-6.i \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y+2z-3v=2 \\ 2x+3y-5z+v=2 \\ 8x+11y-11z-3v=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=1 \\ 7x+8y+9z=1 \\ 5x+4y+3z=-1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-3y=1 \\ 3x-4y=1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-2y=1 \\ 4x-4y=1 \\ 5x-6y=2 \end{cases}$

$$\text{l)} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9=45 \\ 3x_7-2x_8=1 \\ 3x_4+4x_5+5x_6-2x_7+x_8-2x_9=9 \\ 6x_4+8x_5+10x_6-x_7-3x_9=20 \\ 2x_6+x_7+6x_8+2x_9=11 \\ 6x_6+3x_7+20x_8+5x_9=34 \end{cases}$$

m) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 5y + z = 0 \\ 7x + 8y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

SEL 4 Indicar cual es la recta de intersección de los planos:

Plano $\alpha : x + 2y + 3z = 2$ Plano $\beta : x - y + 2z = 1$

SEL 5 Indicar valores de α, β y *k* para que el siguiente sistema:
1º) Tenga una única solución
2º) No tenga ninguna solución
3º) Tenga infinitas soluciones

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ x + 2y = \alpha \\ 2x + 4y = \beta \end{cases}$$

SEL 6 Indicar valores de *k* para que el siguiente sistema:
1º) Tenga una única solución
2º) No tenga ninguna solución
3º) Tenga infinitas soluciones

$$\begin{cases} kx - 2y - 2z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x - 2y + kz = k \end{cases}$$

SEL 7 Tengo 23 monedas cuyo valor totaliza $1. Hay monedas de 1, 5 y 10 centavos. Si las monedas de 1 centavo fueran de 5 centavos, las de 5 fueran de 10 y las de 10 fueran de 1centavo tendría $1,35. ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?

SEL 8 La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º. ¿Cuánto mide cada ángulo si la suma de dos de ellos es igual al tercer ángulo y la diferencia de los dos mismos ángulos es igual a los 2/3 del tercer ángulo?

SEL 9 La ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Hallar los valores de *A*, *B* y *C* para que una circunferencia pase por los puntos (1,1), (-2,3) y (3,4).

SEL 10 Si los señores A, B y C hacen juntos cierto trabajo, este tomará $1\frac{1}{3}$ horas. Si trabajaran A y B tomaría $1\frac{5}{7}$ horas y si trabajaran B y C tomaría $2\frac{2}{5}$ horas. ¿Cuánto tiempo tomaría a A, B y C trabajando solos en hacer dicho trabajo?

SEL 11 Se sabe que la ecuación de un plano es $ax + by + cz = d$. Encontrar la ecuación del plano que pasa por (4,1,2), (3,2,1), y (-6,-1,-2).

SEL 12 Suponer que entre las funciones f_1, f_2, f_3 y f_4 correspondientes a un sistema de ecuaciones con tres incógnitas existe la relación lineal:

$$0f_1 + 3f_2 + 0f_3 + 0f_4 = 0$$

Indicar explícitamente a la función f_2.

SEL 13 Sean las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 correspondientes a un sistema de ecuaciones lineales.
Demostrar que si existe una relación lineal entre algunas de estas funciones, por ejemplo f_1, f_2 y f_5, entonces también existe una relación lineal entre las cinco funciones.

SEL 14 Demostrar que existe una relación lineal entre las funciones $f_1,\ldots,f_m$ correspondientes a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas si una de dichas ecuaciones es trivial $\left(0x_1 + \ldots + 0x_n = 0\right)$.

SEL 15 Hallar, si es posible, todas las relaciones lineales existentes entre los conjuntos de funciones correspondientes a los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 7z = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y = 5 \\ x + 4y = 6 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 2 \end{cases}$

DETERMINANTES NUMÉRICOS

DET.1

Definición

a. Sea la expresión:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad n \text{ filas y } n \text{ columnas} \qquad \textbf{[1]}$$

Esta expresión indica que Δ es el valor que asume una cierta función (a ser definida más abajo) de n^2 variables cuando dichas variables asumen respectivamente los valores a_{11}; a_{12};....; a_{nn} (números).
Expresiones alternativas de la **[1]**, usadas en otros textos, son:

$$\text{Det}\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \text{Det}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

b. A los números a_{ij} se los llamará **elementos** de Δ.

c. Se dice que un determinante es de orden n cuando tiene n filas y n columnas.

d. Para los determinantes de orden 1 se define que:

$$\left.\begin{array}{l} |a_{ij}| = a_{ij} \\ \\ \text{Así: } |7| = 7, \quad |-3| = -3, \quad |i| = i \end{array}\right\} \textbf{[2]}$$

e. Dado un determinante cualquiera, se define que:

<u>El cofactor del elemento que figura en su *i*-ésima fila y *j*-ésima columna es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante resultante de borrar en el determinante primitivo toda su fila *i* y toda su columna *j*.</u> **[3]**

Así, en el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & i & 3 & 4 \\ \pi & 2 & -3 & 5 \\ -4 & -1 & 6 & 7 \\ -7 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \qquad \textbf{[4]}$$

se tiene que:

$$Cof_{\Delta}(-4)=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} i & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix}, \qquad Cof_{\Delta}(i)=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \pi & -3 & 5 \\ -4 & 6 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$Cof_{\Delta}(0)=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -2 & i & 4 \\ \pi & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \end{vmatrix}, \qquad Cof_{\Delta}(8)=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -2 & i & 3 \\ \pi & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

En lo sucesivo el cofactor del elemento correspondiente a la fila i y la columna j de un determinante Δ se la denotará como:

$$Cof_{\Delta}(i,j)$$

f. Se define que:

<u>El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de todos los elementos de su primera fila multiplicados por sus respectivos cofactores</u>. **[5]**

Así en el caso del determinante indicado en **[4]** se tiene que:

$$\Delta=-2\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 6 & 7 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix}\right)+i\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \pi & -3 & 5 \\ -4 & 6 & 7 \\ -7 & 0 & 8 \end{vmatrix}\right)+3\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \pi & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \\ -7 & -5 & 8 \end{vmatrix}\right)+$$

$$+4\left((-1)^{1+4}\begin{vmatrix} \pi & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 6 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

g. Por **[2]** y por **[5]** se puede calcular el valor de cualquier determinante. Así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Por [5]}}{=} 1\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)+2\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right)+3\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Por [5]}}{=}$$

$$=\left[6\left((-1)^{1+1}|0|\right)+5\left((-1)^{1+2}|3|\right)\right]-2\left[5\left((-1)^{1+1}|0|\right)+5\left((-1)^{1+2}|-1|\right)\right]+$$

$$+3\left[5\left((-1)^{1+1}|3|\right)+6\left((-1)^{1+2}|-1|\right)\right]=$$

Por **[2]**

$$= [6|0| - 5|3|] - 2[5|0| - 5|-1|] + 3[5|3| - 6|-1|] =$$

$$= [6.0 - 5.3] - 2[5.0 - 5(-1)] + 3[5.3 - 6(-1)] = 38$$

h. Evidentemente, hallar el valor de un determinante según esta definición implica una gran cantidad de aritmética, sobre todo en el caso de determinantes de orden alto.
Se deja constancia de que existen métodos mucho más eficientes que el indicado en **g** para hallar el valor de un determinante. Dichos métodos serán indicados más adelante.

DET II

Consecuencias directas de la definición de determinante

a. Para el caso de determinantes de orden 2, la aplicación directa de la definición indica que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Para el caso particular de determinantes de orden 3, la aplicación directa de la definición indica que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \qquad \textbf{[2]}$$

c. Para el caso particular en que un determinante tenga únicamente ceros arriba de su diagonal principal, de la definición resulta que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn} \qquad \textbf{[3]}$$

En especial:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \textbf{[4]}$$

DET III

Teorema

a. Se probará que:
Es nulo todo determinante que tenga dos columnas <u>contiguas</u> iguales.

b. Mediante **[1]** y **[2]** de DET II es fácil verificar que lo antedicho es en efecto cierto para los determinantes de orden 2 y 3. Considérese ahora el caso del determinante de orden 4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & e & e & i \\ b & f & f & j \\ c & g & g & k \\ d & h & h & l \end{vmatrix}$$

Se tiene que:

$$\Delta = \underbrace{a\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} f & f & j \\ g & g & k \\ h & h & l \end{vmatrix}\right)}_{\substack{\text{Nulo por ser un} \\ \text{determinante de orden} \\ \text{3 con dos columnas} \\ \text{contiguas iguales}}} + \underbrace{e\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{vmatrix}\right) + e\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{vmatrix}\right)}_{\substack{\text{Igual valor absoluto} \\ \text{y signo contrario}}} + \underbrace{i\left((-1)^{1+4}\begin{vmatrix} b & f & f \\ c & g & g \\ d & h & h \end{vmatrix}\right)}_{\substack{\text{Nulo por ser un} \\ \text{determinante de orden} \\ \text{3 con dos columnas} \\ \text{contiguas iguales}}}$$

Como por el mismo procedimiento puede probarse que si lo indicado en **a** es válido para determinantes de orden *n* también lo es para determinantes de orden n+1, por el principio de inducción completa queda probado lo propuesto.

DET IV

Teorema

a. Se probará que:
La suma de dos determinantes Δ_1 y Δ_2 de igual orden que difieran únicamente en uno ó más elementos de una única columna cualquiera, llámesela *j*, es otro determinante Δ_{12} tal que:
1º) Salvo para la columna *j*, los elementos de Δ_{12} serán iguales a los correspondientes elementos (idénticos) de Δ_1 y Δ_2.
2º) Para la columna *j*, los elementos de Δ_{12} será iguales a la suma de los elementos correspondientes de Δ_1 y Δ_2.

b. Mediante **[1]** de DET II es fácil verificar que lo antedicho es en efecto válido para determinantes de orden 2. Considérese ahora el determinante de orden 3:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a & b_1 + b_2 & c \\ d & e_1 + e_2 & f \\ g & h_1 + h_2 & i \end{vmatrix}$$

Por ser válido lo indicado en **a** para determinantes de orden 2

Se tiene que:

$$\Delta_{12} = a\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e_1 + e_2 & f \\ h_1 + h_2 & i \end{vmatrix}\right) + (b_1 + b_2)\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e_1 + e_2 \\ g & h_1 + h_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= a\left[(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e_1 & f \\ h_1 & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e_2 & f \\ h_2 & i \end{vmatrix}\right] + b_1\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + b_2\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) +$$

$$+ c\left[(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e_1 \\ g & h_1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e_2 \\ g & h_2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= \left[a\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e_1 & f \\ h_1 & i \end{vmatrix}\right) + b_1\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e_1 \\ g & h_1 \end{vmatrix}\right)\right] +$$

$$+ \left[a\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e_2 & f \\ h_2 & i \end{vmatrix}\right) + b_2\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + c\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e_2 \\ g & h_2 \end{vmatrix}\right)\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b_1 & c \\ d & e_1 & f \\ g & h_1 & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 & c \\ d & e_2 & f \\ g & h_2 & g \end{vmatrix}$$

Como con el mismo procedimiento puede probarse que si lo indicado en **a** es válido para determinantes de orden n también lo es para determinantes de orden $n+1$, por el principio de inducción completa queda demostrado lo propuesto.

DET V

Teorema

a. Se demostrará que:
El valor de un determinante queda multiplicado por una constante si se multiplica por dicha constante a todos los elementos de una columna cualquiera.

b. Mediante **[1]** de DET II puede verificarse fácilmente que lo antedicho es en efecto válido para determinantes de orden 2. Sea ahora el determinante de orden 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \lambda b & c \\ d & \lambda e & f \\ g & \lambda h & i \end{vmatrix}, \qquad \lambda = \text{constante}$$

Se tiene que:

Por ser válido lo indicado en **a** para determinantes de orden 2

$$\Delta = a\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\lambda e & f\\ \lambda h & i\end{vmatrix}\right)+\lambda b\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}\right)+c\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix}d & \lambda e\\ g & \lambda h\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\lambda a\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}\right)+\lambda b\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}\right)+\lambda c\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}$$

Como con el mismo procedimiento puede probarse que si lo indicado en **a** es válido para determinantes de orden *n* también es válido para determinantes de orden *n+1*, mediante el principio de inducción completa queda probado lo propuesto.

DET VI

Teorema

a. Se demostrará que:
Si en un determinante se intercambian de lugar dos columnas cualesquiera, el determinante cambia de signo.

b. Supóngase en 1er lugar que las columnas sean contiguas. Sean:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\qquad \Delta'=\begin{vmatrix}a & c & b\\ d & f & e\\ g & i & h\end{vmatrix}$$

Se tiene entonces que:

Nulos por tener dos columnas contiguas iguales. Ver DET III

Ver DET IV

$$\Delta+\Delta'=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & c & b\\ d & f & e\\ g & i & h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & b\\ d & e & e\\ g & h & h\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & c & c\\ d & f & f\\ g & i & i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & c & b\\ d & f & e\\ g & i & h\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a & b & c+b\\ d & e & f+e\\ g & h & i+h\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & c & c+b\\ d & f & f+e\\ g & i & i+h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b+c & c+b\\ d & e+f & f+e\\ g & h+i & i+h\end{vmatrix}=0$$

Nulo por tener dos columnas contiguas iguales. Ver DET III

y por lo tanto se tiene que $\Delta = -\Delta'$
Evidentemente este razonamiento puede ser ampliado al caso de determinantes de cualquier orden.

c. Como el intercambio de dos columnas cualesquiera de un determinante puede ser desglosado en una cantidad impar de intercambios entre columnas contiguas, queda probado lo indicado en **a**.
Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} b & a & c & d \\ f & e & g & h \\ j & i & k & l \\ n & m & p & q \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} b & c & a & d \\ f & g & e & h \\ j & k & i & l \\ n & p & m & q \end{vmatrix} = (-1)^3 = \begin{vmatrix} b & c & d & a \\ f & g & h & e \\ j & k & l & i \\ n & p & q & m \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^4\begin{vmatrix} b & d & c & a \\ f & h & g & e \\ j & l & k & i \\ n & q & p & m \end{vmatrix} = (-1)^5\begin{vmatrix} d & b & c & a \\ h & f & g & e \\ l & j & k & i \\ q & n & p & m \end{vmatrix}$$

Determinante resultante de intercambiar las columnas 1ª y 4ª en el determinante primitivo

En general: el intercambio de dos columnas separadas por v columnas intermedias implica $v + (v+1) = 2v+1$ intercambios entre columnas contiguas, según es evidente.

DET VII

Teorema

a. Se demostrará que:
Un determinante con dos columnas cualesquiera iguales es nulo.

b. Sea un determinante Δ cuyas columnas *i* y *j* sean iguales. Al intercambiar dichas columnas se tiene que:
1º) Se obtiene el mismo determinante Δ.
2º) Por lo visto en DET VI se obtiene el determinante - Δ.
Lo que implica que sea:

$$\Delta = -\Delta$$

Lo cual sólo puede ocurrir cuando el determinante es nulo.

DET VIII

Teorema

a. Se demostrará que:
Si un determinante tiene una columna formada íntegramente por ceros, entonces dicho determinante es nulo.

b. En efecto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0\alpha & 3 \\ 4 & 0\beta & -2 \\ 3 & 0\gamma & 5 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 4 & \beta & -2 \\ 3 & \gamma & 5 \end{vmatrix} = 0$$

α, β y γ números cualesquiera

Ver DET V

DET IX

Teorema

a. Se demostrará que:
Un determinante no cambia de valor si a una de sus columnas se le suma otra (otras) multiplicadas por una constante (multiplicada cada una de ellas por una constante).

b. En efecto:

Nulos por tener dos columnas iguales

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{vmatrix} =$$

Ver DET V

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & c & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \alpha a \\ d & c & \alpha d \\ g & h & \alpha g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \beta b \\ d & e & \beta e \\ g & h & \beta h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c + \alpha a + \beta b \\ d & c & f + \alpha d + \beta c \\ g & h & i + \alpha g + \beta h \end{vmatrix}$$

Ver DET IV

Evidentemente, este razonamiento es válido para cualquier caso que pueda presentarse.

DET X

Teorema

a. El valor de un determinante no cambia cuando en él se intercambian ordenadamente filas por columnas.

b. Mediante **[1]** y **[2]** de DET II es fácil verificar lo antedicho para determinantes de orden 2 y 3.
Se probará que si el teorema es válido para determinantes de orden n - 2 y n - 1 también será válido para determinantes de orden n, lo cual determina la validez del teorema para cualquier n. En lo que sigue se hará la demostración para n = 4, pero será evidente que la demostración es extensible para el caso de cualquier n.
Sea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix} \qquad (n = 4)$$

Por ser válido el teorema para determinantes de orden 3

Se tiene que:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & p & q \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & p & q \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & q \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & p \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & i & m \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & i & m \\ f & j & n \\ h & l & q \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & i & m \\ f & j & n \\ g & k & p \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} - \left[be\begin{vmatrix} k & p \\ l & q \end{vmatrix} - bi\begin{vmatrix} g & p \\ h & q \end{vmatrix} + bm\begin{vmatrix} g & k \\ h & l \end{vmatrix}\right] + \left[ce\begin{vmatrix} j & n \\ l & q \end{vmatrix} - ci\begin{vmatrix} f & n \\ h & q \end{vmatrix} + cm\begin{vmatrix} f & j \\ h & l \end{vmatrix}\right] -$$

$$- \left[de\begin{vmatrix} j & n \\ k & p \end{vmatrix} - di\begin{vmatrix} f & n \\ g & p \end{vmatrix} + dm\begin{vmatrix} f & j \\ g & k \end{vmatrix}\right] =$$

$$\Delta = a\begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} - e\left[b\begin{vmatrix} k & p \\ l & q \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} j & n \\ l & q \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} j & n \\ k & p \end{vmatrix}\right] + +i\left[b\begin{vmatrix} g & p \\ h & q \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} f & n \\ h & q \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} f & n \\ g & p \end{vmatrix}\right] -$$

$$- m\left[b\begin{vmatrix} g & k \\ h & l \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} f & j \\ h & l \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} f & j \\ g & k \end{vmatrix}\right] =$$

Por ser válido el teorema para determinantes de orden n – 2 (4 – 2 = 2)

$$\Delta = a\begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} - e\left[b\begin{vmatrix} k & l \\ p & q \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} j & l \\ n & q \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} j & k \\ n & p \end{vmatrix}\right] +$$

$$+ i\left[b\begin{vmatrix} g & h \\ p & q \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} f & h \\ n & q \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} f & g \\ n & p \end{vmatrix}\right] - m\left[b\begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} f & h \\ j & l \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix}\right] =$$

$$= a\begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} - e\begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & p & q \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & p & q \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & j & l \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & p \\ h & l & q \end{vmatrix} - e\begin{vmatrix} b & j & n \\ c & k & p \\ d & l & q \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} b & f & n \\ c & g & p \\ d & h & q \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{vmatrix}$$

Por ser válido el teorema para determinantes de orden $n - 1$ $(4 - 1 = 3)$

Resumiendo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{vmatrix}$$

c. Observación importante:

Las propiedades deducidas en DET III, ..., DET IX, se han referido todas a las columnas de los determinantes. Sea ahora un determinante Δ cualquiera. Al intercambiar en él filas por columnas de forma ordenada se obtiene un determinante al cual se le llamará Δ^T. Evidentemente las propiedades antedichas son todas válidas para las columnas de Δ^T. Pero como las columnas de Δ^T son las filas de Δ, resulta entonces que todas las propiedades antedichas son asimismo válidas cuando se las refiere a las filas de Δ.
De ahí los enunciados de propiedades indicados en DET XI.

DET XI

<u>Recopilación de las propiedades elementales de los determinantes</u>

(Estas propiedades fueron demostradas en DET III, ..., DET X)

a. Es nulo cualquier determinante que tenga dos filas o columnas iguales.

b. La suma de dos determinantes Δ_1 y Δ_2 que difieran únicamente en uno o más elementos de su *i*-ésima fila (o columna) es otro determinante Δ_{12} tal que:

1º) Salvo para la *i*-ésima fila (o columna) los elementos de Δ_{12} serán iguales a los correspondientes elementos de Δ_1 y Δ_2.

2º) Para la *i*-ésima fila (o columna) los elementos de Δ_{12} serán iguales a la suma de los correspondientes elementos de Δ_1 y Δ_2.

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7+7 & 11+8 & 12+9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 14 & 19 & 21 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 21 \\ 2 & 6 & 10 & 22 \\ 3 & 7 & 11 & 23 \\ 4 & 8 & 12 & 24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 21 \\ 2 & 6 & 10 & 22 \\ 3 & 7 & 11 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 21+21 \\ 2 & 6 & 10 & 22+22 \\ 3 & 7 & 11 & 23-8 \\ 4 & 8 & 12 & 24+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 42 \\ 2 & 6 & 10 & 44 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 27 \end{vmatrix}$$

c. El valor de un determinante queda multiplicado por una constante λ si se multiplica por λ a una cualquiera de sus filas o columnas.

d. Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas cualesquiera o dos columnas cualesquiera, el determinante cambia de signo.

e. Un determinante que tenga una fila o una columna formada íntegramente por ceros es nulo.

f. El valor de un determinante "triangular" (todos ceros arriba o debajo de su diagonal principal) es igual al producto de todos los elementos de su diagonal principal.

g. El valor de un determinante no cambia si a una cualquiera de sus filas (columnas) se le suman otras filas (columnas) multiplicadas cada una de ellas por una constante.

h. El valor de un determinante no cambia si en él se intercambian ordenadamente filas por columnas, o viceversa.

DET XII

<u>Desarrollo de determinantes por el método de Laplace</u>

a. Se demostrará que:
El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de todos los elementos de una fila o columna <u>cualquiera</u> multiplicados por sus respectivos cofactores.

b. Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

Elíjase una fila cualquiera de este determinante, por ejemplo la 3ª.
Aplicando la propiedad **d** de DET XI, llévese "paso a paso" esta 3ª fila a la primera posición. Se tiene que:

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \\ m & n & p & q \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

y entonces, por la definición dada en **[5]** de DET I se tiene que:

$$\Delta=(-1)^2\left[i\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b & c & d\\ f & g & h\\ n & p & q\end{vmatrix}\right)+j\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & c & d\\ e & g & h\\ m & p & q\end{vmatrix}\right)+k\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a & b & d\\ e & f & h\\ m & n & q\end{vmatrix}\right)+l\left((-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a & b & c\\ e & f & g\\ m & n & p\end{vmatrix}\right)\right]=$$

$$\Delta=\left[i\left((-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b & c & d\\ f & g & h\\ n & p & q\end{vmatrix}\right)+j\left((-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & c & d\\ e & g & h\\ m & p & q\end{vmatrix}\right)+k\left((-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b & d\\ e & f & h\\ m & n & q\end{vmatrix}\right)+l\left((-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a & b & c\\ e & f & g\\ m & n & p\end{vmatrix}\right)\right]$$

Como los cofactores que figuran en esta última expresión son respectivamente los cofactores en Δ de *i, j*, *k* y *l* se tiene que:

$$\Delta=i.Cof_{\Delta}(3,1)+j.Cof_{\Delta}(3,2)+k.Cof_{\Delta}(3,3)+l.Cof_{\Delta}(3,4) \qquad \textbf{[1]}$$

Como idéntico trabajo podría hacerse considerando cualquier fila del determinante, queda demostrado lo indicado en **a** para el desarrollo de determinantes por filas según el método de Laplace.

c.

Si $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & p & q\end{vmatrix}$ y $\Delta^T=\begin{vmatrix} a & e & i & m\\ b & f & j & n\\ c & g & k & p\\ d & h & l & q\end{vmatrix}$ se tiene por **h** de DET XI que $\Delta=\Delta^T$

Elíjase una columna cualquiera de Δ, por ejemplo la 4ª. Esta cuarta columna de Δ es la 4ª fila de Δ^T.
Desarrollando según Laplace a Δ^T por su 4ª fila (ver **b**), se obtiene:

$$\Delta^T=d.Cof_{\Delta^T}(4,1)+h.Cof_{\Delta^T}(4,2)+l.Cof_{\Delta^T}(4,3)+q.Cof_{\Delta^T}(4,4) \qquad \textbf{[2]}$$

Considérese uno cualquiera de estos cofactores, por ejemplo $Cof_{\Delta^T}(4,3)$.
Se tiene que:

$$Cof_{\Delta^T}(4,3)=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} a & e & m\\ b & f & n\\ c & g & p\end{vmatrix}\underset{\uparrow}{=}(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a & b & c\\ e & f & g\\ m & n & p\end{vmatrix}\underset{\uparrow}{=}Cof_{\Delta}(3,4)$$

Por **h** de DET XI — Ver **[1]**

Como igualmente se podría demostrar que:

$$Cof_{\Delta^T}(4,1)=Cof_{\Delta}(1,4),\qquad Cof_{\Delta^T}(4,2)=Cof_{\Delta}(2,4),\qquad Cof_{\Delta^T}(4,3)=Cof_{\Delta}(3,4)$$

se tiene entonces por **[3]** y teniendo en cuenta que $\Delta=\Delta^T$, que:

$$\Delta=d.Cof_{\Delta}(1,4)+h.Cof_{\Delta}(2,4)+l.Cof_{\Delta}(3,4)+q.Cof_{\Delta}(4,4) \qquad \textbf{[3]}$$

y esto no es ni más ni menos que el desarrollo según Laplace de Δ por su 4ª columna.

Como idéntico trabajo podría hacerse eligiendo cualquier columna de cualquier determinante, queda también demostrado lo indicado en **a** para el desarrollo de determinantes por columnas según el método de Laplace.

d. Ejemplo numérico:
Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando según Laplace a este determinante por su 2ª fila:

$$\Delta = 5\left((-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right) + 6\left((-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) + 5\left((-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando todos estos determinantes por su 2ª columna se obtiene:

$$\Delta = -5\left[3\left((-1)^{1+2}|3|\right) + 0\left((-1)^{2+2}|2|\right)\right] + 6\left[3\left((-1)^{1+2}|-1|\right) + 0\left((-1)^{2+2}|1|\right)\right] + 5\left[2\left((-1)^{1+2}|-1|\right) + 3\left((-1)^{2+2}|1|\right)\right] =$$

$$= -5\left[3\left((-1)^{1+2}(3)\right) + 0\left((-1)^{2+2}(2)\right)\right] + 6\left[3\left((-1)^{1+2}(-1)\right) + 0\left((-1)^{2+2}1\right)\right] + 5\left[2\left((-1)^{1+2}(-1)\right) + 3\left((-1)^{2+2}1\right)\right] = 38$$

Comparar este resultado con el obtenido en **g** de DET I.

DET XIII

Teorema

a. Se demostrará que:
Multiplicando todos los elementos de una misma fila (columna) de un determinante por los cofactores de los elementos correspondientes de otra fila (columna), y sumando los resultados así obtenidos, se obtiene un resultado nulo.

b. Sea por ejemplo el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

Elíjase una fila o columna cualquiera, por ejemplo la 2ª fila. Multiplíquese cada uno de los elementos de dicha fila por los cofactores de los elementos correspondientes de otra fila, por ejemplo la 4ª, y súmense todos los resultados así obtenidos. Se tendrá que:

$$\Delta = \underbrace{e\left((-1)^{4+1}\begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}\right)}_{Cof_\Delta(4,1)} + \underbrace{f\left((-1)^{4+2}\begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix}\right)}_{Cof_\Delta(4,2)} + \underbrace{g\left((-1)^{4+3}\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}\right)}_{Cof_\Delta(4,3)} + \underbrace{h\left((-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}\right)}_{Cof_\Delta(4,4)} =$$

$$= \text{Desarrollo por 4ª fila de } \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Nulo por tener dos filas} \\ \text{iguales (ver } \mathbf{a} \text{ de DET XI)}}} = 0$$

Como la extensión de lo recién demostrado al caso general es obvia, queda probado lo indicado en **a**.

DET XIV

<u>Cálculo de determinantes usando propiedades de los mismos</u> (Gauss)

a. Dado un determinante, este método consiste en aplicar la propiedad enunciada en **g** de DET XI hasta hallar un determinante equivalente al primitivo, tal que en una de sus filas o columnas haya un único elemento no nulo, o que todos sus elementos sean nulos. En esta última eventualidad el valor del determinante será cero (ver DET XI).

Suponiendo que se haya obtenido una fila o columna en la cual hay un único elemento no nulo, desarrollando según Laplace a ese determinante equivalente por dicha fila o columna se obtendrá una expresión en la cual figurará un único nuevo determinante, cuyo orden será una unidad menor que el del determinante primitivo.

Repitiendo este proceso tantas veces como sea necesario, se llegará a calcular el valor del determinante primitivo.
El siguiente ejemplo ilustrará ampliamente lo antedicho.

b. Sea el determinante:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} -10 & 10 & -1 & 6 & 1 \\ 6 & -3 & 8 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & -1 & 10 & 8 \\ 14 & 10 & 15 & 9 & 8 \end{vmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

Multiplicando la 3ª fila de Δ_A por $-\dfrac{(-10)}{2}$ y sumando el resultado a la 1ª fila.

Multiplicando la 3ª fila de Δ_A por $-\dfrac{6}{2}$ y sumando el resultado a la 2ª fila.

Multiplicando la 3ª fila de Δ_A por $-\dfrac{(-4)}{2}$ y sumando el resultado a la 4ª fila.

Multiplicando la 3ª fila de Δ_A por $-\frac{14}{2}$ y sumando el resultado a la 5ª fila.

se obtiene:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 9 & 11 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & 12 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 15 & 9 & 11 & 6 \\ -6 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 12 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_B} = 2\Delta_B \qquad \textbf{[2]}$$

Desarrollando según Laplace
por la 4ª fila

Multiplicando la 4ª columna de Δ_B por $-\frac{3}{1}$ y sumando el resultado a la 1ª columna.

Multiplicando la 4ª columna de Δ_B por $-\frac{1}{1}$ y sumando el resultado a la 2ª columna.

Multiplicando la 4ª columna de Δ_B por $-\frac{2}{1}$ y sumando el resultado a la 3ª columna.

se obtiene:

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 & 6 \\ -18 & -2 & -5 & 4 \\ -21 & -7 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{4+4} \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -18 & -2 & -5 \\ -21 & -7 & -8 \end{vmatrix}}_{\Delta_C} = \Delta_C \qquad \textbf{[3]}$$

Desarrollando por Laplace
por la 1ª columna

Multiplicando la 3ª columna de Δ_C por $-\frac{(-3)}{(-1)}$ y sumando el resultado a la 1ª columna.

Multiplicando la 3ª columna de Δ_C por $-\frac{3}{(-1)}$ y sumando el resultado a la 2ª columna.

se obtiene:

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & -17 & -5 \\ 3 & -31 & -8 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -17 \\ 3 & -31 \end{vmatrix}}_{\Delta_D} = -\Delta_D \qquad \textbf{[4]}$$

Desarrollando según Laplace por
la 1ª columna

y por **[1]** de DET II:

Δ_D = (-3)(-31)-3(-17) = 144 **[5]**

Entonces, por **[2]**, **[3]**, **[4]** y **[5]** se tiene que:

$$\Delta_A = 2\Delta_B \Rightarrow \Delta_A = 2\Delta_C \Rightarrow \Delta_A = 2(-\Delta_D) = -2\Delta_D \Rightarrow \Delta_A = -2\cdot 144 = -288$$

c. Aplicación.
Determinante de Vandermonde.
Un determinante de Vandermonde de orden 4 tiene el siguiente aspecto:

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{[6]}$$

Sumando a la 4ª fila la 3ª multiplicada por (- a), y luego,
sumando a la 3ª fila la 2ª multiplicada por (- a), y luego,
sumando a la 2ª fila la 1ª multiplicada por (- a),
se obtiene que:

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando según Laplace por la 1ª columna

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}}_{V_3} \qquad \textbf{[7]}$$

Por lo indicado en **c** de DET XI

De manera análoga:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)(d-c) \qquad \textbf{[8]}$$

y por **[7]** y por **[8]** resulta que:

$$V_4 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \qquad \textbf{[9]}$$

d. Evidentemente, en el procedimiento de cálculo de determinantes ejemplificado en **b** y **c**, se está en total libertad de elegir en cada paso, la fila o la columna que multiplicada por una constante será sumada a otra fila o columna. Esta elección se efectúa casi siempre de manera tal de minimizar la aritmética involucrada.

e. Para el caso eventual de que el lector tenga la mala suerte de tener que calcular un determinante de orden 4 ó mayor por tracción a sangre (o con una calculadora de mano), se le hace notar que en dicha circunstancia el único método civilizado de cálculo es el descrito en este párrafo.

DET XV

<u>Diagonalización de un determinante</u>

Se ilustrará el procedimiento en base a un ejemplo.
Se tiene que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \left\{ \text{Multiplicando los elementos de la } 1^a \text{ fila sucesivamente por (-1), (-5) y (-4) y sumando los resultados así obtenidos respectivamente a los elementos de las filas } 2^a, 3^a \text{ y } 4^a \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \left\{ \text{Multiplicando los elementos de la } 2^a \text{ fila por (-1), y sumando los resultados así obtenidos respectivamente a los elementos de la fila } 3^a. \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \left\{ \text{Multiplicando los elementos de la } 3^a \text{ fila por (-1), y sumando los resultados así obtenidos respectivamente a los elementos de la fila } 4^a. \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \left\{ \text{Multiplicando los elementos de la } 1^a \text{ columna sucesivamente por (-1), (-1), (-1) y (-1) y sumando los resultados así obtenidos respectivamente a los elementos de las columnas } 2^a, 3^a \text{ y } 4^a. \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \left\{ \text{Multiplicando los elementos de la } 2^a \text{ columna sucesivamente por (-2) y (-3) y sumando los resultados así obtenidos respectivamente a los elementos de las columnas } 3^a \text{ y } 4^a. \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \left\{ \text{Multiplicando los elementos de la } 3^a \text{ columna sucesivamente por (-5/3) y sumando los resultados así obtenidos respectivamente a los elementos de la columna } 4^a \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad \longleftarrow \quad \text{Forma diagonalizada de } \Delta$$

<u>Teorema de Cramer</u>

DET XV.1

a. Sea un sistema S de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Se dirá que el determinante de este sistema es:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se demostrará que en el caso de que sea $\Delta_S \neq 0$, haciendo:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_S} \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_S} \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}}{\Delta_S} \qquad \textbf{[2]}$$

resulta que <u>la única solución del sistema S es</u>:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[3]}$$

b. Considérese el determinante:

Por ser iguales las filas 1ª y 2ª

$$\begin{vmatrix} h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante según Laplace por su 1ª fila se obtiene:

$$h_1\Delta_S - a_{11}\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} h_1 & a_{11} & a_{13} \\ h_2 & a_{21} & a_{23} \\ h_3 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} h_1 & a_{11} & a_{12} \\ h_2 & a_{21} & a_{22} \\ h_3 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Intercambiando las columnas 1ª y 2ª en el 2º determinante de esta expresión, e intercambiando sucesivamente la 1ª columna del 3º determinante con las columnas 2ª y 3ª del mismo, resulta:

$$h_1\Delta_S - a_{11}\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

y entonces, como $\Delta_S \neq 0$ se tiene que:

$$a_{11}\frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_S} + a_{12}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_S} + a_{13}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}}{\Delta_S} = h_1$$

resultando así que $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, tal como indicado en **a**, constituye una solución de la primera ecuación del sistema **[1]**.

c. De manera similar, considerando los determinantes:

$$\begin{vmatrix} h_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} h_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

puede demostrarse que $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, tal como indicado en **a**, constituye también una solución de las ecuaciones 2º y 3º de **[1]**.

d. Se demostrará ahora que $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ es la única solución del sistema **[1]**.

Supóngase que existiera ahora otra solución $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$. Sería entonces:

$$\beta_1\Delta_S = \beta_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} a_{11}\beta_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}\beta_1 & a_{22} & a_{32} \\ a_{31}\beta_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ver **a** de DET V

Sumando la 1ª columna de este último determinante la 2ª multiplicada por β_2 y la 3ª multiplicada por β_3 resulta:

$$\beta_1 \Delta_S = \beta_1 \begin{vmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\beta_3 & a_{22} & a_{32} \\ a_{31}\beta_1 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\beta_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{32} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por ser $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$ una solución del sistema **[1]**

y por lo tanto es:

$$\beta_1 \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_S} = \alpha_1$$

Como de manera similar puede probarse que:

$\beta_2 = \alpha_2$ y $\beta_3 = \alpha_3$

resulta que la solución $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$ es en realidad la misma $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$.
Queda probada así la unicidad de la solución de **[1]**.

e. Es evidente que estas demostraciones, efectuadas para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, pueden ser ampliadas para el caso general de *n* ecuaciones cuyo determinante no sea nulo.

DET XV.2

Ejemplo numérico.
Sea el sistema:

$$S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{[4]}$$

cuyo determinante es:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Entonces será:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-24}{-12} = 2\,, \qquad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-36}{-12} = 3\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-48}{-12} = 4\,, \qquad \alpha_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-12}{-12} = 1$$

y por lo tanto $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución del sistema **[4]**.

DET XV.3

Sea S un sistema cualquiera de tantas ecuaciones como incógnitas y sea Δ_S su determinante correspondiente. Por ejemplo:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases} \qquad \Delta_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{[5]}$$

Sea S_E un equivalente escalonado de S y sea Δ_S el determinante correspondiente a S_E.

$$S_E: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ \qquad\quad + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = h_2 \\ \qquad\qquad\qquad + b_{33}x_3 = h_3 \end{cases} \qquad \Delta_{S_E} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{[6]}$$

Como se ha obtenido a S_E en base a aplicar repetidamente el algoritmo consistente en sumar a una ecuación de un sistema, otra ecuación del mismo multiplicada por una constante, y a lo mejor, intercambiando de lugar dos ecuaciones del sistema; se tiene que Δ_{S_E} se obtiene en base a aplicar repetidamente el algoritmo consistente en sumar a una fila del determinante otra fila del mismo multiplicada por una constante, (lo que no altera el valor del determinante, ver **g** de DET XI), y a lo mejor intercambiando de lugar dos filas del determinante (lo que cambia su signo pero no su valor absoluto, ver **d** de DET XI).
Por lo tanto Δ_S y Δ_{S_E} tendrán el mismo valor absoluto y entonces:

Δ_S y Δ_{S_E} **serán ambos nulos, ó ambos no nulos.** **[7]**

Por lo tanto:
1°) Si $\Delta_S \neq 0$, el sistema S tendrá una única solución (ver DET XV.1) y por lo tanto (ver SEL XIII.3) será crameriano.

2°) En cambio, si $\Delta_S = 0$, se tendrá por **[7]** que también será $\Delta_{S_E} = 0$, lo que implica que existan uno o más ceros en las diagonales principales de Δ_{S_E} y de S_E. Entonces (ver **c** de SEL X) el sistema S no será crameriano, teniendo por lo tanto (ver observación 2ª de SEL XIII.3) o bien ninguna solución, o bien infinitas soluciones. **[8]**

Resumiendo:

<u>Un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas será (no será) crameriano si no es nulo (si es nulo) su determinante correspondiente</u>.

DET XV.4

Sea el caso particular de un sistema de tantas ecuaciones <u>homogéneas</u> como incógnitas. Por ejemplo:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{[9]}$$

Por lo indicado en **[8]**, se tiene que este sistema será o no crameriano según que sea $\Delta_S \neq 0$ o $\Delta_S = 0$.

Entonces:

1°) Si $\Delta_S \neq 0$, es decir que el sistema es crameriano, dicho sistema tendrá una única solución, la cual evidentemente es: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2°) Si $\Delta_S = 0$, el sistema no será crameriano pudiendo entonces tener ninguna o infinitas soluciones. Pero como por otra parte dicho sistema tiene por lo menos una solución, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resulta entonces que tiene infinitas soluciones.

Resumiendo:

Si $\Delta_S \neq 0$ el sistema tiene una única solución $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\Delta_S = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones, y por lo tanto tiene infinitas soluciones distintas de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **[10]**

DET XVI

<u>Teorema</u>

a. Para que un determinante sea nulo es necesario y suficiente que entre las filas o columnas del mismo exista una relación lineal.
<u>La existencia de una relación lineal entre las filas implica una relación lineal entre las columnas y viceversa.</u>

b. Se demostrará en primer lugar la suficiencia de la condición.

Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

y supóngase que entre sus columnas exista la relación lineal:

$$\begin{aligned} \eta_1 a_{11} + \eta_2 a_{12} + \eta_3 a_{13} &= 0 \\ \eta_1 a_{21} + \eta_2 a_{22} + \eta_3 a_{23} &= 0 \qquad \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3 \text{ no todos nulos.} \\ \eta_1 a_{31} + \eta_2 a_{32} + \eta_3 a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, se tiene que $\eta_2 \neq 0$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{11} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{13} \\ a_{22} &= -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{21} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{23} \\ a_{32} &= -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{31} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{33} \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \left[-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{11} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{13}\right] & a_{13} \\ a_{21} & \left[-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{21} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{23}\right] & a_{23} \\ a_{31} & \left[-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{31} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{33}\right] & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{Ver } \mathbf{b} \text{ de DET XI}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & -\left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & -\left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & -\left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{Ver } \mathbf{c} \text{ de DET XI}}{=}$$

$$= -\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Nulo por tener dos} \\ \text{columnas iguales}}} - \left(\frac{\eta_3}{\eta_2}\right) \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Nulo por tener dos} \\ \text{columnas iguales}}} = 0$$

Queda así demostrada la suficiencia de la condición.

c. Se demostrará a continuación la necesidad de dicha condición.
Supongamos ahora que se sepa únicamente que:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Sea el sistema de ecuaciones homogéneas correspondiente a este Δ_S:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo indicado en **[11]** de DET XV, por ser $\Delta_S = 0$ el sistema S tiene infinitas soluciones, y, por lo tanto, tiene infinitas soluciones distintas de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ es una de esas infinitas soluciones distintas de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tendrá que entre las columnas de Δ_S existe la relación lineal:

$$S = \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{Uno o más } \alpha'_S \text{ distintos de 0.}$$

Se hace notar que entre las columnas de Δ_S existen infinitas relaciones lineales ya que S tiene infinitas soluciones distintas de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. En **b** y **c** se demostró que para que un determinante sea nulo es necesario y suficiente que exista una relación lineal entre sus <u>columnas</u>.
Sea un determinante cualquiera Δ. Intercámbiense en él ordenadamente filas por columnas, obteniéndose así un determinante Δ^T cuyo valor será igual al de Δ (ver **h** de DET XI).
Tal como visto en **b** y **c**, para que este Δ^T sea nulo es necesario y suficiente que exista una relación lineal entre sus columnas. Como las columnas de Δ^T son las filas de Δ, se llega a la conclusión de que para que Δ sea nulo es necesario y suficiente que exista una relación lineal <u>entre sus filas</u>.

e. Evidentemente, de existir una relación lineal entre las columnas de un determinante, dicho determinante será nulo y entonces (ver **d**) también existiría una relación lineal entre sus filas.
A la recíproca, de existir una relación lineal entre las filas de un determinante, dicho determinante (ver **d**) será nulo, y entonces (ver **b** y **c**) también existirá una relación lineal entre sus columnas.
Queda así completamente probado lo enunciado en **a**.

DET XVII

Teorema

a. Sea un sistema de tantas ecuaciones homogéneas como incógnitas, cuyo determinante sea nulo.
Se demostrará que en este sistema por lo menos una ecuación es redundante.

b. Sea el sistema:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

Se tiene (ver SEL XVI), que a este sistema corresponde el siguiente conjunto de funciones:

$$S = \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ f_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - 0 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

Por ser $\Delta_S = 0$, entre sus filas existe una relación lineal (ver DET XVI), es decir que:

$$\begin{cases} \eta_1 a_{11} + \eta_2 a_{21} + \eta_3 a_{31} = 0 \\ \eta_1 a_{12} + \eta_2 a_{22} + \eta_3 a_{32} = 0 \\ \eta_1 a_{13} + \eta_2 a_{23} + \eta_3 a_{33} = 0 \end{cases} \qquad \eta_1, \eta_2, \eta_3 \text{ no todos nulos} \qquad \textbf{[3]}$$

Multiplicando a f_1, f_2 y f_3 respectivamente por η_1, η_2, η_3 y sumando los resultados así obtenidos se obtiene:

$$\begin{aligned} &\eta_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \eta_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \eta_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = \\ &= \underbrace{(\eta_1 a_{11} + \eta_2 a_{21} + \eta_3 a_{31})}_{= 0 \text{ por } \textbf{[3]}}x_1 + \underbrace{(\eta_1 a_{12} + \eta_2 a_{22} + \eta_3 a_{32})}_{= 0 \text{ por } \textbf{[3]}}x_2 + \underbrace{(\eta_1 a_{13} + \eta_2 a_{23} + \eta_3 a_{33})}_{= 0 \text{ por } \textbf{[3]}}x_3 = 0 \end{aligned}$$

Resumiendo:
Para cualquier valor que asuman x_1, x_2 y x_3 se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3 = (\eta_1 a_{11} + \eta_2 a_{21} + \eta_3 a_{31})x_1 + (\eta_1 a_{12} + \eta_2 a_{22} + \eta_3 a_{32})x_2 + \\ &\qquad + (\eta_1 a_{13} + \eta_2 a_{23} + \eta_3 a_{33})x_3 = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \text{siendo } \eta_1, \eta_2, \eta_3 \text{ no todos nulos} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[4]}$$

y por lo tanto (ver **a** de SEL XVI) entre f_1, f_2 y f_3 existe una relación lineal.
Entonces (ver **d** de SEL XVI) en el sistema S puede ser declarada como redundante a una cualquiera de las ecuaciones tales que su función correspondiente figure con un η no nulo en la expresión **[4]**.

DET XVIII

Producto de determinantes

a. Sean dos determinantes Δ_A y Δ_B ambos del mismo orden:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Se probará que:

$$\Delta_A \cdot \Delta_B = \begin{vmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \dots + a_{1n}b_{nn}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}) & \dots & (a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \dots + a_{2n}b_{nn}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1}) & (a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \dots + a_{nn}b_{n2}) & \dots & (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn}) \end{vmatrix}$$

Notar que el elemento de la fila *i* y la columna *j* de $\Delta_A \cdot \Delta_B$ es la suma de los elementos de la fila *i* de Δ_A multiplicados por los respectivos elementos de la columna *j* de Δ_B.

b. Por ejemplo, si se consideran los determinantes:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 10 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

y se calcula el valor de la manera clásica resulta:

$$\Delta_A = 0 \qquad \Delta_B = 144$$

por lo tanto es:

$$\Delta_A \cdot \Delta_B = 0 \times 144 = 0$$

Por otra parte, procediendo tal como indicado en **a** debe ser:

$$\Delta_A \cdot \Delta_B = \begin{vmatrix} 1.3 + 2.4 + 3.(-7) & 1.(-1) + 2.8 + 3.3 & 1.2 + 2.10 + 3.1 \\ 4.3 + 5.4 + 6.(-7) & 4.(-1) + 5.8 + 6.3 & 4.2 + 5.10 + 6.1 \\ 7.3 + 8.4 + 9.(-1) & 7.(-1) + 8.8 + 9.3 & 7.2 + 8.10 + 9.1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 24 & 25 \\ -10 & 54 & 64 \\ -10 & 84 & 103 \end{vmatrix}$$

lo cual es en efecto cierto ya que:

$$\begin{vmatrix} -10 & 24 & 25 \\ -10 & 54 & 64 \\ -10 & 84 & 103 \end{vmatrix} = -10(54.103 - 84.64) + 10(24.103 - 84.25) - 10(24.64 - 54.25) =$$

Desarrollando según
Laplace por la 1ª columna

$$= -10(186) + 10(372) - 10(186) = 0$$

En el apéndice A.DET.1 se probará lo enunciado en **a**.

Apéndice del capítulo sobre determinantes

A.DET I

A.DET I.1

a. Sean dos determinantes Δ_α y Δ_β, que no necesariamente sean del mismo orden. Por ejemplo:

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{(orden } m\text{)} \qquad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(orden } n\text{)} \qquad \textbf{[1]}$$

se demostrará que:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1m} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nm} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_{\alpha\beta}} = \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta \qquad \textbf{[2]}$$

Siendo cualesquiera los números $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1m}, \gamma_{n1}, \dots, \gamma_{nm}$.

b. Para demostrar lo indicado en **a** basta probar que:
1º) Lo enunciado en **a** es válido para todo Δ_α de orden 1 y un Δ_β de orden cualquiera.
2º) Si lo enunciado en **a** es válido para todo Δ_α de orden m y un Δ_β cualquiera, entonces también es válido para todo Δ_α de orden $m + 1$ y dicho Δ_β.

c. La validez de la 1ª condición indicada en **b** es evidente considerando que si por ejemplo son:

$$\Delta_\alpha = |a_{11}| \qquad \text{y} \qquad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

se tiene que:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \gamma_{11} & b_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |a_{11}| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta$$

Desarrollando según Laplace por la 1ª fila

d. Para demostrar la validez de la 2ª condición indicada en **b** consideremos los determinantes:

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

(en este caso es $m = 3$ y $n = 2$).
Para este caso se tiene que:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & b_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{Desarrollando según Laplace por la 1ª fila}}{=}$$

$$= a_{11}\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{13} & b_{11} & b_{12} \\ \gamma_{22} & \gamma_{23} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\right) + a_{12}\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 & 0 \\ \gamma_{11} & \gamma_{13} & b_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{23} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\right) +$$

$$+ a_{13}\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & b_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}\right)$$

y entonces, si es válido lo indicado en **a** para $m - 1$ (para $3 - 1 = 2$) se tiene que:

$$\Delta_{\alpha\beta} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left[a_{11}\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{12}\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\left((-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right)\right]}_{\text{Desarrollo según Laplace de } \Delta_\alpha \text{ por su 1ª fila}} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta$$

e. Resumiendo:
Si la fórmula $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta$ es válida para un Δ_α de orden 2, entonces, también es válida para un Δ_α de orden 3.

Evidentemente, el razonamiento empleado en **b**, **c** y **d** sirve también para demostrar que si la fórmula $\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha} \cdot \Delta_{\beta}$ es válida para un Δ_{α} de orden *m* (genérico), entonces también es válida para un Δ_{α} de orden $m + 1$.
Queda así probada la 2ª condición indicada en **b**.

A.DET I.2

a. Sean Δ_A y Δ_B dos determinantes del mismo orden:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Por lo visto en A.DET I.1 se tiene que:

$$\Delta_A \cdot \Delta_B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{[3]}$$

Si en este determinante:
Se multiplica la 1ª columna por b_{11} y se le suma el resultado a la 4ª columna
Se multiplica la 2ª columna por b_{21} y se le suma el resultado a la 4ª columna
Se multiplica la 3ª columna por b_{31} y se le suma el resultado a la 4ª columna
Se multiplica la 1ª columna por b_{12} y se le suma el resultado a la 5ª columna
Se multiplica la 2ª columna por b_{22} y se le suma el resultado a la 5ª columna
Se multiplica la 3ª columna por b_{32} y se le suma el resultado a la 5ª columna
Se multiplica la 1ª columna por b_{13} y se le suma el resultado a la 6ª columna
Se multiplica la 2ª columna por b_{23} y se le suma el resultado a la 6ª columna
Se multiplica la 3ª columna por b_{33} y se le suma el resultado a la 6ª columna
Se obtiene:

δ

$$\Delta_A \cdot \Delta_B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando consecutivamente 3 veces según Laplace por la última fila se obtiene:

$$\Delta_A \cdot \Delta_B = \underbrace{(-1)(-1)^{6+3}(-1)(-1)^{5+2}(-1)(-1)^{4+1}}_{=1} |\delta|$$

Resumiendo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Queda así demostrado lo indicado en **a** de DET XVIII para el caso de dos determinantes de orden 3.

Evidentemente, por el mismo procedimiento arriba indicado podrá efectuarse la misma demostración para el producto de dos determinantes de orden *n* (cualquiera).

Ejercicios y problemas sobre Determinantes

DET 1 Verificar el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -5 & 7 & -8 \\ 5 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 558$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 10 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 144$

c) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -264$

Hacer verificación adicional usando MATHEMATICA.

DET 2 Usando las propiedades de los determinantes, demostrar que:

a) $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ d) $2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 111 & 112 & 113 \end{vmatrix} = 0$

DET 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{vmatrix}$$

DET 4 Hallar las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

DET 5 Demostrar que:

Área de un triángulo con vértices en (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3) $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$

DET 6 Demostrar que la igualdad:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

constituye la ecuación de una curva de 2º grado que pasa por los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3).

DET 7 Usando las propiedades de los determinantes, demostrar que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+v \\ 1 & y & z & x+v \\ 1 & z & v & x+y \\ 1 & v & x & y+z \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} n & n+2 & n+4 \\ n+1 & n+3 & n+5 \\ n+6 & n+8 & n+10 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+b & a+2b \\ a(a+b) & (a+b)(a+2b) & (a+2b)(a+3b) \end{vmatrix} = 2b^3$

DET 8 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de los determinantes:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Verificar los resultados hallados usando MATHEMATICA.

DET 9 Hallar todas las relaciones lineales existentes entre las filas y columnas de los siguientes determinantes nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 111 & 112 & 113 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Verificar los resultados hallados usando MATHEMATICA.

DET 10 Hallar los determinantes que son el producto de los siguientes pares de determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Matrices

MAT I

Matrices numéricas

a. Una matriz numérica es un conjunto de $m \times n$ números dispuestos en m filas y n columnas, pudiendo m y n ser números naturales cualesquiera. Por ejemplo:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -i & \sqrt{2} & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 4 & 5 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} i \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

Con las matrices se opera de la manera que se irá definiendo en los párrafos subsiguientes, y por lo tanto estas reglas de operación forman parte de la definición de matriz.

b. Los números que constituyen una matriz serán llamados <u>elementos</u> de la misma.
<u>El elemento que está en la fila i y la columna j de una matriz será llamado elemento ij-ésimo de la misma</u>.
Así:
Elemento 2,3-ésimo de $A = 7$ (ver **[1]**)
Elemento 2,1-ésimo de $B = 3$ (ver **[1]**)
Elemento 1,2-ésimo de $C = 5$ (ver **[1]**)

c. Dada una matriz genérica de m filas y n columnas:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & - & - & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

dicha matriz puede ser simbolizada como:

$$\left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$$

donde a_{ij} es el término genérico (ij-ésimo) de la matriz, m es su cantidad de filas y n es su cantidad de columnas.
O también como:

$$A_{m \times n}$$

O sino simplemente con un símbolo global:

$$A$$

d. <u>Se dirá que una matriz de m filas y n columnas es de orden $m \times n$</u>.

e. La notación usada para las matrices es bastante anárquica. Así, según distintos textos la matriz A indicada en **[1]** puede también aparecer bajo cualquiera de las siguientes formas:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -i & \sqrt{2} & 7\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -i & \sqrt{2} & 7\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

MAT II

Otros tipos de matrices

Existen matrices en las cuales los elementos constitutivos son polinomios, vectores, funciones, etc. Por ejemplo:

$$P=\begin{Vmatrix}P_{11}(h) & P_{12}(h) & P_{13}(h)\\ P_{21}(h) & P_{22}(h) & P_{23}(h)\end{Vmatrix} \;;\; V=\begin{Vmatrix}\vec{v}_{11} & \vec{v}_{12}\\ \vec{v}_{21} & \vec{v}_{22}\\ \vec{v}_{31} & \vec{v}_{32}\end{Vmatrix} \;;\; F=\begin{Vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x)\end{Vmatrix}$$

Por el momento, y mientras no se especifique expresamente lo contrario, se trabajará exclusivamente con matrices numéricas, es decir matrices cuyos elementos son números.

MAT III

Matrices particulares

a. Matrices fila y matrices columna:
Son respectivamente las que tienen una sola fila y una sola columna. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix}2 & 3 & 1 & \pi\end{Vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{Vmatrix}i\\ -7\\ \sqrt{2}\end{Vmatrix}$$

b. Matrices nulas:
Son aquellas cuyos elementos son todos nulos. Por ejemplo:

$$O_{3\times 3}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix} \;;\; O_{3\times 2}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix} \;;\; O_{1\times 4}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

c. Matrices cuadradas:
Son las de orden $n \times n$, siendo n un número natural cualquiera. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 7 & 6 & 7\end{Vmatrix} \;;\; \begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix} \;;\; \begin{Vmatrix} i \end{Vmatrix}$$

Se llama diagonal principal de una matriz cuadrada a la diagonal que la cruza de "noroeste" a "sudoeste". Así definida, en la primera matriz del último ejemplo, la diagonal principal está compuesta por los elementos 2, 5, 7.

d. Matrices diagonales:
Son las matrices cuadradas en las cuales son nulos todos los elementos que no pertenecen a su diagonal principal. Los elementos que sí pertenecen a su diagonal principal pueden ser o no nulos. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} ; \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix} ; \quad \| \; i \; \|$$

e. Matrices unidad:
Son las matrices unidades cuya diagonal principal está compuesta íntegramente por números 1, siendo nulos todos sus restantes elementos. Por ejemplo:

$$I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} ; \quad I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} ; \quad I_n = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & - \\ - & - & - & - & 1 \end{Vmatrix}$$

El símbolo I_n indica a la matriz unidad de orden $n \times n$. Según se irá viendo más adelante, estas matrices unidad tienen particular importancia.

f. Matrices simétricas:
Son las matrices cuadradas en las cuales el elemento ij-ésimo es igual al elemento ji-ésimo, para todo i y j. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 4 \end{Vmatrix} ; \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 2 & 3 & i \\ \pi & i & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$$

g. Matrices triangulares:
Son las matrices cuadradas no simétricas cuyos elementos arriba o debajo de la diagonal principal son todos nulos. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix} 2 & \pi & e \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & i \end{Vmatrix} \qquad \text{(triangular superior)}$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \pi & 4 & 0 \\ e & 7 & 1+i & 0 \end{Vmatrix} \qquad \text{(triangular inferior)}$$

h. Matrices hermíticas:
Son las matrices cuadradas en las cuales el elemento ij-ésimo es el complejo conjugado del elemento ji-ésimo, para todo i y todo j tales que $i \neq j$. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2+i & 3 \\ 2-i & 1+i & i \\ 2 & -i & 1-i \end{Vmatrix} ; \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1-i & 1+i & -2i \\ 1+i & 2 & -3i & 3 \\ 1-i & 3i & 3 & 5 \\ 2i & 3 & 5 & i \end{Vmatrix}$$

i. Evidentemente, existen infinitas matrices que no pertenecen a ninguna de las categorías indicadas en **a, ..., h**.

MAT IV

Igualdad de matrices

a. Se define:
Las matrices A y B son iguales cuando y sólo cuando:

i) Ambas son del mismo orden (es decir que ambas tienen la misma cantidad de filas y columnas).
ii) El elemento ij-ésimo de A es igual al elemento ij-ésimo de B, para todo i y todo j.

[1]

Así, dadas las matrices:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \; ; \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \; ; \quad C = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Se tiene que $A = B$, $A \neq C$ y $B \neq C$.

b. Según la definición dada en **a**:

1º) Dos matrices son iguales cuando y sólo cuando son la misma matriz. Así, cuando se establezca que $A = B$, se tiene que A y B no son más que nombres distintos de una misma matriz.

2º) No puede existir igualdad entre matrices que sean de distinto orden, es decir que tengan distinta cantidad de filas y/o columnas.

MAT V

Suma y diferencia de matrices

a. Se define:

Dadas dos matrices <u>del mismo orden</u>:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n} \quad \text{y} \qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{m \times n}$$

Se tiene que:

1º) $A + B = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|_{m \times n}$

2º) $A - B = \left\| a_{ij} - b_{ij} \right\|_{m \times n}$

[1]

No se define la suma y resta entre matrices de distinto orden.

b. Por ejemplo, si:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix} \; ; \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & i \\ -2 & 3 \\ -i & \pi \end{Vmatrix} \; ; \quad C = \begin{Vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Se tiene que:

$$A + B = \begin{Vmatrix} 2 & 2+i \\ 1 & 7 \\ 5-i & 6+\pi \end{Vmatrix} \; ; \quad A - B = \begin{Vmatrix} 0 & 2-i \\ 5 & 1 \\ 5+i & 6-\pi \end{Vmatrix}$$

$A + C$, $A - C$, $B + C$, $B - C$, $C + A$, $C - A$, $C + B$ y $C - B$ no se definen.

c. De la definición dada en **a** surge que:

1º) Si $A + B = S$, entonces es $S - A = B$ y $S - B = A$
2º) Si $A - B = D$, entonces es $A = B + D$ **[2]**

d. Sean A, B y C matrices todas de orden $\underline{m \times n}$. Sea O la matriz nula de orden $\underline{m \times n}$. Entonces, según la definición dada en **a** se tiene que:

1º) $A + O = A$
2º) $A + B = B + A$
3º) $A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$
pudiendo entonces ponerse:
$A \pm B \pm C = A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$ **[3]**

MAT VI

<u>Producto de un número por una matriz</u>

a. Se define:

Dada una matriz $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$ y un número λ cualquiera, se tiene que:

$$\lambda A = A\lambda = \left\| \lambda a_{ij} \right\|_{m \times n}$$ **[1]**

Por ejemplo:

$$2\begin{Vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 4 \end{Vmatrix} 2 = \begin{Vmatrix} 14 & 8 & 6 \\ 12 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 18 \\ 0 & 14 & 8 \end{Vmatrix}$$

b. De lo definido en **a** y por la definición de suma de matrices (ver **a** de MAT V) se deduce fácilmente que:

1º) $(\lambda_1 \pm \lambda_2)\, A = A\, (\lambda_1 \pm \lambda_2) = \lambda_1 A \pm \lambda_2 A$
2º) $\lambda\, (A \pm B) = (A \pm B)\, \lambda = \lambda\, A \pm \lambda\, B$
3º) $(\lambda_1 \lambda_2)\, A = A\, (\lambda_1 \lambda_2) = \lambda_1 (\lambda_2 A) = \lambda_2 (\lambda_1 A)$

4º) $1.A = A.1 = A$
5º) $0A = A0 = 0$, matriz nula del mismo orden que A.

MAT VII

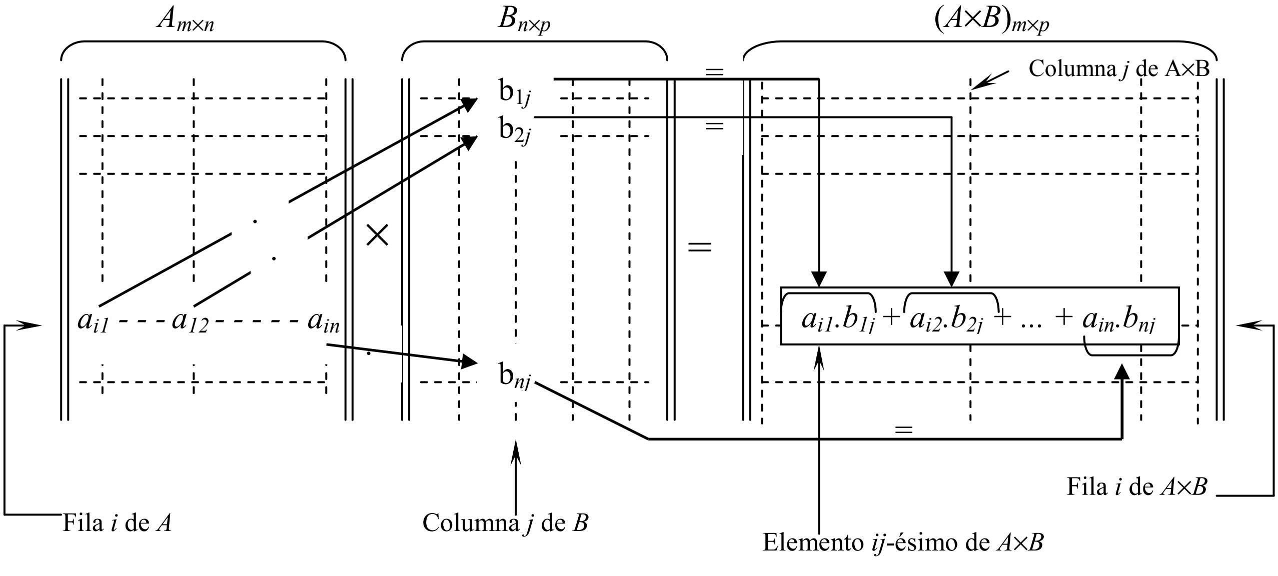
Producto matricial de dos matrices

a. Definición:
Sean dos matrices A y B tales que la cantidad de columnas de A sea igual a la cantidad de filas de B (pudiendo ser cualquiera la cantidad de filas de A y de columnas de B).
Cumplida esta condición y solo entonces se define que el producto matricial de A por B (en ese orden), simbólicamente $A \times B$, es una matriz de tantas filas como A y tantas columnas como B, y tal que su elemento ij-ésimo sea la suma de los productos de los elementos de la fila i de A multiplicados por los elementos correspondientes de la columna j de B. **[1]**
Así si:

$$A = \|a_{ij}\|_{m\times n} \quad \text{y} \quad B = \|b_{ij}\|_{n\times r}$$

(Mismo número)

se tiene que:



Elemento ij-ésimo de $A\times B = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ **[2]**

Notar la analogía existente entre el producto matricial y el producto de determinantes (ver DET XVIII).

b. Ejemplos:

i)

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32} \end{Vmatrix}$$

ii)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1.13 + 2.15 + 3.17 + 4.19 & 1.14 + 2.16 + 3.18 + 4.20 \\ 5.13 + 6.15 + 7.17 + 8.19 & 5.14 + 6.16 + 7.18 + 8.20 \\ 9.13 + 10.15 + 11.17 + 12.19 & 9.14 + 10.16 + 11.18 + 12.20 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 170 & 180 \\ 436 & 452 \\ 682 & 724 \end{Vmatrix}$$

iii)

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1.5 & 1.6 & 1.7 \\ 2.5 & 2.6 & 2.7 \\ 3.5 & 3.6 & 3.7 \\ 4.5 & 4.6 & 4.7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 14 \\ 15 & 18 & 21 \\ 20 & 24 & 28 \end{Vmatrix}$$

iv)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1.10 + 2.13 + 3.16 & 1.11 + 2.14 + 3.17 & 1.12 + 2.15 + 3.18 \\ 4.10 + 5.13 + 6.16 & 4.11 + 5.14 + 6.17 & 4.12 + 5.15 + 6.18 \\ 7.10 + 8.13 + 9.16 & 7.11 + 8.14 + 9.17 & 7.12 + 8.15 + 9.18 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 84 & 90 & 86 \\ 201 & 216 & 231 \\ 318 & 342 & 366 \end{Vmatrix}$$

v)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{Vmatrix}$$

c. Continuando con el tema de la anarquía en la notación matricial; al producto matricial, que acá se ha simbolizado como $A{\times}B$, en otros textos se lo indica como $A{\cdot}B$, o como AB.

MAT VIII

Consecuencias inmediatas de la definición de producto matricial

a. Es evidente que:

$$A_{m\times n} \times O_{n\times p} = O_{m\times p} \qquad \textbf{[1]}$$

$$O_{m\times n} \times B_{n\times p} = O_{m\times p} \qquad \textbf{[2]}$$

b. Puede verificarse fácilmente que si A es una matriz cuadrada de orden $n\times n$ y I_n es la matriz unidad de orden $n\times n$ se tiene que:

$$A_{n\times n} = A_{n\times n} \times I_n = I_n \times A_{n\times n} \qquad \textbf{[3]}$$

(Esta conclusión será muy utilizada en el futuro).

c. El producto matricial no es por lo general conmutativo (tener siempre esto bien presente). Para probar esto basta con dar un ejemplo. Así si:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix}$$

se tiene que:

$$A \times B = \begin{Vmatrix} 1.5+2.7 & 1.6+2.8 \\ 3.5+4.7 & 3.6+4.8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{Vmatrix}$$

$$B \times A = \begin{Vmatrix} 5.1+6.3 & 5.2+6.4 \\ 7.1+8.3 & 7.2+8.4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{Vmatrix}$$

y por lo tanto en este caso no es $A\times B = B\times A$.
Esta no conmutatividad no es una regla general, pudiendo existir pares de matrices cuyo producto matricial sí es conmutativo. Por ejemplo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 11 \end{Vmatrix}$$

MAT IX

Propiedad asociativa del producto matricial

a. Se probará a continuación que dadas las matrices:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m\times n} \qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{n\times p} \qquad C = \left\| c_{ij} \right\|_{p\times q}$$

Mismo número　　Mismo número

se tiene que:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Generalmente se simboliza:

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Por la definición de producto matricial (ver **b** de MAT VII) se tiene que:

Por **[2]** de SUM II

$$\text{Elemento } ij\text{-ésimo de } (A\times B)\times C = \sum_{l=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)}_{\substack{Elemento\, i,l-ésimo \\ de\, A\times B}} c_{lj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right) =$$

Por **[5]** de SUM II

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right) =$$

Por **[2]** de SUM II

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right)}_{\substack{Elemento\, k\, j-ésimo \\ de\, B\times C}} = \text{ Elemento } ij\text{-ésimo de A}\times\text{(B}\times\text{C)}$$

Resumiendo:

Elemento ij-ésimo de $(A\times B)\times C$ = Elemento ij-ésimo de $A\times(B\times C)$

Con lo que queda probado lo indicado en **a**.

b. Evidentemente, dadas las matrices indicadas en **a** se tiene que la matriz $A\times B\times C$ es de orden $m\times q$.

MAT X

<u>Propiedad distributiva del producto matricial con respecto a la suma de matrices</u>

a. Se probará que dadas las matrices:

$$\left.\begin{array}{l} A = \left\| a_{ij} \right\|_{m\times n} \qquad B_1 = \left\| b^1{}_{ij} \right\|_{n\times p} \qquad B_s = \left\| b^s{}_{ij} \right\|_{n\times p} \\ \text{se tiene que:} \\ A\times(B_1 + ... + B_s) = (A\times B_1) + ... + (A\times B_s) \end{array}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

b. Por la definición del producto matricial y de la suma de matrices se tiene que:

$$\text{Elemento } ij\text{-ésimo de } A\times(B_1 + ... + B_s) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{s} b^l{}_{kj}\right)}_{\substack{Elemento\, k,j\, de \\ B_1+...+B_s}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{s} a_{ik}b^l{}_{kj}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}^{l} \right)}_{Elemento\ i,j\ de\ A\times B_l} = \text{Elemento } i,j \text{ de } (A\times B_1) + ... + (A\times B_s)$$

Resumiendo:

Elemento ij-ésimo de $A\times(B_1 + ... + B_s)$ = Elemento i,j-ésimo de $(A\times B_1) + ... + (A\times B_s)$
Con lo que queda probado lo indicado en **a**.

c. Evidentemente, dadas las matrices indicadas en **a** se tiene que las matrices $A\times(B_1 + ... + B_s)$ y $(A\times B_1) + ... + (A\times B_s)$ son de orden $m\times p$.

MAT XI

Potencia *n*-ésima de una matriz cuadrada

a. Se define que, dada una matriz cuadrada A:

$$A^n = \underbrace{A\times A\times ...\times A}_{n\ factores} \qquad \textbf{[1]}$$

siendo n natural y $n \geq 1$.

b. Es inmediata la demostración de que:

$$A^{m+n} = A^m \times A^n \qquad \textbf{[2]}$$

siendo n y m naturales y $n, m \geq 1$.

MAT XII

Matrices transpuestas la una de la otra

a. Se define que, dada una matriz A, su transpuesta será una matriz A^T tal que las filas de A^T sean respectivamente iguales a las columnas de A.
Evidentemente:
1º. Si A es de orden $m\times n$, A^T es de orden $n\times m$.
2º. Si A^T es la transpuesta de A, entonces A es la transpuesta de A^T.
Resumiendo:

Las matrices A y A^T son transpuestas la una de la otra cuando y sólo cuando:

Mismo número

1º. $$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m\times n} \quad , \quad A^T = \left\| a_{ij}^T \right\|_{n\times m}$$

Mismo número

2º. Elemento ij-ésimo de A = Elemento ji-ésimo de A^T
Es decir que:

$$a_{ij} = a_{ji}^T$$

[1]

b. Ejemplos:

$$\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{Vmatrix}^T = \begin{Vmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{Vmatrix} \;,\; \begin{Vmatrix}1 & 2 & e\\0 & 3 & \pi\\i & 5 & 2\end{Vmatrix}^T = \begin{Vmatrix}1 & 0 & i\\2 & 3 & 5\\e & \pi & 2\end{Vmatrix} \;,\; \begin{Vmatrix}1 & 0 & 2\end{Vmatrix}^T = \begin{Vmatrix}1\\0\\2\end{Vmatrix}$$

MAT XIII

Transpuesta de un producto de matrices

a. Se demostrará que dadas las matrices:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m\times n} \qquad , \qquad B = \left\| b_{ij} \right\|_{n\times m} \tag{1}$$

Mismo número

Mismo número

Se tiene que:

$$(A\times B)^T = B^T \times A^T$$

b. Para empezar notar que:

1º. Si $A\times B$ es de orden $m\times m$ entonces $(A\times B)^{\mathrm{T}}$ también es de orden $m\times m$.

2º. Si B^{T} es de orden $m\times n$ y A^{T} es de orden $n\times m$, y por lo tanto $B^{\mathrm{T}}\times A^{\mathrm{T}}$ es de orden $m\times m$, es decir del mismo orden de $(A\times B)^{\mathrm{T}}$.

Por otra parte:

Elemento ij-ésimo de $(A\times B)^{\mathrm{T}}$ = Elemento ji-ésimo de $A\times B$ =

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^{T} a_{kj}^{T} = \text{Elemento } ij\text{-ésimo de } B^T \times A^T$$

Por ser $a_{jk} = a_{kj}^T$ y $b_{ki} = b_{ik}^T$ ver **[1]** de MAT XII

Resumiendo:

Elemento ij-ésimo de $(A\times B)^{\mathrm{T}}$ = Elemento ij-ésimo de $B^{\mathrm{T}}\times A^{\mathrm{T}}$

Con lo que queda probado lo indicado en **a.**

c. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_s$ todas cuadradas y del mismo orden.

Se probará por el principio de inducción completa que:

$$(A_1\times A_2\times\ldots\times A_s)^T = A_s{}^T \times\ldots\times A_2{}^T \times A_1{}^T \tag{2}$$

Sea $s = 2$. Entonces por **[1]** es:

$$(A_1 \times A_2)^T = A_2^T \times A_1^T \qquad [3]$$

Sea $s = k + 1$, $k > 2$ cualquiera. Se tiene que:

$$\left(A_1 \times A_2 \times ... A_k \times A_{k+1}\right)^T = \left[\left(A_1 \times A_2 \times ... A_k\right) \times A_{k+1}\right]^T \overset{\text{Por [1]}}{=}$$
$$= A_{k+1}^T \times \left(A_1 \times A_2 \times ... A_k\right)^T \underset{\text{Si [2] cierta para s = k}}{=} A_{k+1}^T \times \left(A_k^T \times ... \times A_2^T \times A_1^T\right) =$$
$$= A_{k+1}^T \times A_k^T \times ... \times A_2^T \times A_1^T \qquad [4]$$

Resulta así que:

1º. La fórmula **[2]** es válida para $s = 2$ (ver **[3]**)
2º. Si la fórmula **[2]** es válida para $s = k$, entonces es también válida para $s = k + 1$.

Queda así demostrada la validez de **[2]** para todo s.

MAT XIV

Producto matricial de una matriz cuadrada por su transpuesta

a. Se demostrará que:

El producto de una matriz cuadrada A por su transpuesta A^T da como resultado una matriz simétrica. **[1]**

b. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Se tiene que:

$$\text{Elemento } ij\text{-ésimo de } A \times A^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^T \underset{\text{Por ser } a_{ik} = a_{ki}^T \text{ y } a_{kj}^T = a_{jk}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} a_{ki}^T =$$
$$= \text{Elemento } ji\text{-ésimo de } A \times A^T$$

Con lo que queda demostrado lo indicado en **a.**

MAT XV

Determinante de una matriz. Matriz adjunta de otra

a. Dada una matriz cuadrada cualquiera, por ejemplo:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad [1]$$

se define que el determinante de la misma es:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

(Por favor, no confundir matrices con determinantes. A y Δ_A se corresponden y nada más. No existe ningún tipo de igualdad entre A y Δ_A).

b. Dada una matriz A, se dirá que su adjunta, simbolizada como *Adj A* es una matriz cuyo elemento *ij*-ésimo es el cofactor del elemento *ij*-ésimo de Δ_A.
Por ejemplo:

$$Adj\ A = \begin{Vmatrix} Cof_{\Delta_A}(1,1) & Cof_{\Delta_A}(1,2) & Cof_{\Delta_A}(1,3) \\ Cof_{\Delta_A}(2,1) & Cof_{\Delta_A}(2,2) & Cof_{\Delta_A}(2,3) \\ Cof_{\Delta_A}(3,1) & Cof_{\Delta_A}(3,2) & Cof_{\Delta_A}(3,3) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

c. Evidentemente, A y *Adj A* son del mismo orden.

MAT XVI

Teorema

a. Se demostrará que:
Si A es una matriz cuadrada de orden $n\times n$ e I es la matriz unidad, también de orden $n\times n$ se tiene que:

$$A\times(Adj\ A)^T = (Adj\ A)^T \times A = \Delta_A I \qquad \textbf{[1]}$$

b. Póngase:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= \text{Elemento } ij\text{-ésimo de } A \\ b_{ij} &= \text{Elemento } ij\text{-ésimo de } Adj\ A = Cof_{\Delta_A}(ij) \\ c_{ij} &= \text{Elemento } ij\text{-ésimo de } (Adj\ A)^T = bji = Cof_{\Delta_A}(ji) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[2]}$$

Entonces:

$$\text{Elemento } ij \text{ de } A\times(Adj\ A)^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}Cof_{\Delta_A}(jk)$$

Por lo tanto:

1º) Para $i = j$

$$\text{Elemento } i,i \text{ de } A\times(Adj\ A)^T = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} Cof_{\Delta_A}(ik)}_{\substack{\text{Desarrollo según Laplace} \\ \text{de } \Delta_A \text{ por su fila } i}} = \Delta_A \qquad [3]$$

2º) Para $i \neq j$

Ver DET XIII

$$\text{Elemento } i,j \text{ de } A\times(Adj\ A)^T = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik} Cof_{\Delta_A}(jk)}_{} = 0 \qquad [4]$$

Suma de los productos de los elementos de la fila *i* por los cofactores de los elementos de la fila *j*, siendo $i \neq j$

Explicitando, por ejemplo se obtendría:

$$A\times(Adj\ A)^T = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} Cof_{\Delta_A}(1,1) & Cof_{\Delta_A}(2,1) & Cof_{\Delta_A}(3,1) \\ Cof_{\Delta_A}(1,2) & Cof_{\Delta_A}(2,2) & Cof_{\Delta_A}(3,2) \\ Cof_{\Delta_A}(1,3) & Cof_{\Delta_A}(2,3) & Cof_{\Delta_A}(3,3) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \Delta_A & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_A & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_A \end{Vmatrix} = \Delta_A \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \Delta_A\ I_3$$

En general:

$$A\times(Adj\ A)^T = I\ \Delta_A \qquad [5]$$

c. Por otra parte:

$$\text{Elemento } i,j \text{ de } (Adj\ A)^T \times A = \sum_{k=1}^{n} Cof_{\Delta_A}(k,i) a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} Cof_{\Delta_A}(k,i) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} Cof_{\Delta_A}(k,i)$$

Por lo tanto:

1º) Para $j = i$

$$\text{Elemento } j,i \text{ de } (Adj\ A)^T \times A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} Cof_{\Delta_A}(k,j)}_{\substack{\textit{Desarrollo según Laplace} \\ \textit{de } \Delta_A \textit{ por su columna } j}} = \Delta_A$$

2º) Para $j \neq i$

Ver DET XIII

$$\text{Elemento } j,i \text{ de } (Adj\ A)^T \times A = \underbrace{\sum a_{kj} Cof_{\Delta_A}(k,i)}_{\substack{\textit{Suma de los productos de los} \\ \textit{elementos de la columna } j \textit{ de} \\ \Delta_A \textit{ por los cofactores de la} \\ \textit{columna } j,\ \textit{siendo } i\neq j}} = 0$$

Explicitando, por ejemplo se obtendría:

$$(Adj\ \ A)^T \times A = \begin{Vmatrix} Cof_{\Delta_A}(1,1) & Cof_{\Delta_A}(2,1) & Cof_{\Delta_A}(3,1) \\ Cof_{\Delta_A}(1,2) & Cof_{\Delta_A}(2,2) & Cof_{\Delta_A}(3,2) \\ Cof_{\Delta_A}(1,3) & Cof_{\Delta_A}(2,3) & Cof_{\Delta_A}(3,3) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \Delta_A & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_A & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_A \end{Vmatrix} = \Delta_A \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \Delta_A I_3$$

En general:

$$(Adj\ A)^{\mathrm{T}} \times A = I\,\Delta_A \qquad \textbf{[6]}$$

d. Por **[5]** y **[6]** queda probado lo indicado en **a**.

MAT XVII

<u>Matrices inversas</u>

MAT XVII. 1

a. Se define:

Dada una matriz <u>cuadrada</u> A de orden $n\times n$, se dice que la matriz B, también cuadrada y de orden $n\times n$ es una inversa de la matriz A cuando y solo cuando: **[1]**

$$A \times B = I_{n\times n}$$

<u>Se anticipa que existen matrices cuadradas que tienen inversa, y otras que no tienen inversa</u>.

b. Según se vio en MAT VII, dadas las matrices:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}$$

se tiene que:

$$A \times B = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

Por otra parte:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

y multiplicando estos dos determinantes tal como fue indicado en DET XVIII resulta que (ver **[2]**):

$$\Delta_A \times \Delta_B = \Delta_{A\times B} \qquad \textbf{[3]}$$

Evidentemente, esta conclusión, deducida en base de dos matrices de orden 3×3 es extensible al caso general de matrices de orden $n\times n$.

c. En lo sucesivo se denominará como singulares a aquellas matrices cuyo determinante sea nulo, y como no singulares a aquellas matrices cuyo determinante sea no nulo. **[4]**

Sea A una matriz singular, es decir que $\Delta_A = 0$.
Supóngase que B sea una matriz inversa de A. Entonces:

1º) Como por **[1]** es:

$$A\times B = I$$

se tiene que:

$$\Delta_{A\times B} = \Delta_I = 1 \qquad \textbf{[5]}$$

2º) Por **[3]** se tiene que:

$$\Delta_{A\times B} = \Delta_A \cdot \Delta_B = 0 \cdot \Delta_B = 0 \qquad \textbf{[6]}$$

Obteniéndose así una contradicción entre lo indicado en **[5]** y **[6]**. Como esta contradicción proviene de suponer que B es una inversa de A resulta entonces que:
Las matrices singulares no tienen inversa.

MAT XVII. 2

a. Sea A una matriz no singular, es decir tal que $\Delta_A \neq 0$. Por lo indicado en **[1]** de MAT XVI y por ser $\Delta_A \neq 0$ se tiene que:

$$A\times\frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A} = \frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A}\times A = I \qquad \textbf{[8]}$$

De esta expresión y de la definición de matriz inversa dada en **[1]** surge que:

1º) $$B = \frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A}$$ es una inversa de A **[9]**

2º) Si $A\times B = I$ entonces $B\times A = I$, es decir que B, la inversa de A indicada en **[1]** es tal que:

$$A\times B = B\times A = I \qquad \textbf{[10]}$$

MAT XVII. 3

Supóngase que la matriz A además de la inversa B indicada en **[9]**:

$$B = \frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A}$$

tenga otra inversa, a la que se llamará B'. Entonces se tendrá que:

$$\underbrace{B = B \times I}_{\substack{ver\ [3]\\ de\\ MAT\ VII}} \underbrace{= B \times (A \times B')}_{\substack{por\ ser\\ B'\ una\\ inversa\\ de\ A}} \underbrace{=}_{\substack{por\ propiedad\\ asociativa\ del\\ producto\\ matricial}} (B \times A) \times B' \underbrace{=}_{por\ [10]} I \times B' = B'$$

resultando así que:

$$B = B'$$

Por lo tanto:

$$\text{La única inversa de } A \text{ es } B = \frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A} \qquad \textbf{[11]}$$

MAT XVII. 4

Observaciones:

1º) Como dada una matriz A no singular existe siempre la matriz $B = \frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A}$ por ser $\Delta_A \neq 0$, la cual según lo visto en **[9]** y **[11]** resulta ser la única inversa de A; y teniendo en cuenta lo indicado en **[7]**; se tiene que:

Toda matriz no singular tiene inversa única.

y además: **[12]**

Toda matriz singular no tiene inversa.

2º) Evidentemente, si B es la inversa de A, entonces A es la inversa de B (ver **[10]**).

3º) En lo que sigue, si B es la inversa de A (y por lo tanto A es la inversa de B), este hecho se indicará como:

$$B = A^{-1} \qquad\qquad A = B^{-1} \qquad \textbf{[13]}$$

4º) Evidentemente si A tiene inversa se tiene que:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

MAT XVII. 5

Ejemplo. Supóngase que:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \quad , \qquad \Delta_A = 3$$

se tiene que:

$$B = A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^T}{\Delta_A} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}^T = \begin{Vmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Este método de hallar la inversa de una matriz es por lo general largo y pesado, sobre todo para matrices de orden alto. Bastante más eficiente es el método a ser indicado en MAT XVIII. Sin embargo, aún con este método la cantidad de aritmética involucrada es considerable.
Es por esto que, frente al problema consistente en hallar la inversa de una matriz, se recomienda el uso de un software adecuado (por ejemplo MATHEMATICA).

MAT XVIII

Método para hallar la matriz inversa de otra

a. Dada la matriz:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$$

supóngase que:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{Vmatrix}$$

donde los números x_1, x_2, y_1, y_2 son por el momento desconocidos. Debe entonces tenerse que:

$$A \times A^{-1} = I_2 \text{, es decir, } \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

por lo tanto debe ser:

$$\begin{Vmatrix} 6x_1 + 5y_1 & 6x_2 + 5y_2 \\ 5x_1 + 4y_1 & 5x_2 + 4y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Esta igualdad de matrices implica dos sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5y_1 = 1 \\ 5x_1 + 4y_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x_2 + 5y_2 = 0 \\ 5x_2 + 4y_2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de estos sistemas son:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -4 ,& 5 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 5 ,& -6 \end{bmatrix}$$

Resultando así que:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{Vmatrix}$$

b. Sea la matriz:

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 35 \end{Vmatrix}$$

y supóngase que:

$$B^{-1} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{Vmatrix}$$

Mediante un razonamiento análogo al indicado en **a** se obtienen los sistemas:

$$\begin{cases} x_1 + 3y_1 + 4z_1 = 1 \\ 2x_1 + 8y_1 + 6z_1 = 0 \\ 5x_1 + y_1 + 35z_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + 3y_2 + 4z_2 = 0 \\ 2x_2 + 8y_2 + 6z_2 = 1 \\ 5x_2 + y_2 + 35z_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + 3y_3 + 4z_3 = 0 \\ 2x_3 + 8y_3 + 6z_3 = 0 \\ 5x_3 + y_3 + 35z_3 = 1 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son respectivamente:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 137 & -20 & -19 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ -101/2 & 15/2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ -7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

teniéndose así que:

$$B^{-1} = \begin{Vmatrix} 137 & -101/2 & -7 \\ -20 & 15/2 & 1 \\ -19 & 7 & 1 \end{Vmatrix}$$

c. Sea la matriz:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$$

y supóngase que:

$$C^{-1} = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix}$$

Mediante un razonamiento análogo al indicado en **a** se obtienen los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 1 \\ 4x_1 + 5y_1 + 6z_1 = 0 \\ 7x_1 + 8y_1 + 9z_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{escalonado}]{\text{Hallando el equivalente}} \begin{cases} x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 1 \\ -3y_1 - 6z_1 = -4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0 \\ 4x_2 + 5y_2 + 6z_2 = 1 \\ 7x_2 + 8y_2 + 9z_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Hallando el equivalente escalonado}} \begin{cases} x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0 \\ \quad - 3y_2 - 6z_2 = 1 \\ \qquad\qquad 0 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + 2y_3 + 3z_3 = 0 \\ 4x_3 + 5y_3 + 6z_3 = 0 \\ 7x_3 + 8y_3 + 9z_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Hallando el equivalente escalonado}} \begin{cases} x_3 + 2y_3 + 3z_3 = 0 \\ \quad - 3y_3 - 6z_3 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 1 \end{cases}$$

Como, según es evidente, estos tres sistemas no tienen solución, resulta que no existe una matriz C^{-1} tal que $C \times C^{-1} = I_3$.
Por lo tanto, <u>la matriz C considerada no tiene inversa</u>.
Este resultado es evidentemente debido a que $\Delta_C = 0$ (lo cual puede verificarse fácilmente).

MAT XIX

<u>Teorema</u>

a. Se probará que si A y B son no singulares y del mismo orden se tiene:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \qquad \textbf{[1]}$$

b.

$$I_n \underset{\substack{\text{Por ser } A^{-1} \\ \text{la inversa} \\ \text{de } A}}{=} A \times A^{-1} \overset{\text{Ver [3] de MAT VIII}}{=} (A \times I_n) \times A^{-1} \underset{\substack{\text{Por ser } B^{-1} \\ \text{la inversa} \\ \text{de } B}}{=} \left[A \times (B \times B^{-1})\right] \times A^{-1} \underset{\substack{\text{Por propiedad} \\ \text{asociativa del} \\ \text{producto} \\ \text{matricial}}}{=} \left[(A \times B) \times B^{-1}\right] \times A^{-1} \underset{\substack{\text{Por propiedad} \\ \text{asociativa del} \\ \text{producto} \\ \text{matricial}}}{=} (A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1})$$

Resumiendo

$$(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = I_n$$

y entonces por la definición de matriz inversa (ver **[1]** de MAT XVII) resulta que:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

c. Sean las matrices no singulares $A_1, \ldots, A_k$, todas del mismo orden.
Usando el principio de inducción completa, y mediante una argumentación análoga a la seguida en **c** de MAT XIII, se demuestra fácilmente que:

$$(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k)^{-1} = A_k^{-1} \times \ldots \times A_2^{-1} \times A_1^{-1} \qquad \textbf{[2]}$$

MAT XX

Teorema

a. Se probará que si A es no singular se tiene que:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad \textbf{[1]}$$

b. En efecto:

Ver **[1]** de MAT XIII, y por ser $I_n^T = I_n$

$$A^{-1} \times A = I_n \Leftrightarrow (A^{-1} \times A)^T = I_n^T \Leftrightarrow A^T \times (A^{-1})^T = I_n$$

Como conclusión:

$$A^T \times (A^{-1})^T = I_n$$

y entonces por la definición de matriz inversa (ver **[1]** de MAT XVII) resulta que:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

MAT XXI

Resolución matricial de sistemas de tantas ecuaciones lineales como incógnitas, cuya matriz sea no singular

a. Sea el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

Evidentemente, este sistema puede ser escrito en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

Se dirá que la matriz de este sistema es:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[3]}$$

con lo que la fórmula **[2]** puede ser expresada como:

$$A \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Vmatrix}$$

<u>Suponiendo que la matriz *A* sea no singular</u> se tiene que:

$$A^{-1} \times \left(A \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \right) = A^{-1} \times \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Vmatrix}$$

y por lo tanto:

$$\underbrace{\left(A^{-1} \times A \right)}_{I_3} \times \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = A^{-1} \times \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Vmatrix}$$

y por lo tanto:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = A^{-1} \times \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Vmatrix}$$

y esta expresión da la solución del sistema.

b. Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

La matriz de este sistema es:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

cuya inversa es:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3/8 & 1/8 \\ -2/8 & 2/8 \end{Vmatrix}$$

y entonces resulta que:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3/8 & 1/8 \\ -2/8 & 2/8 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

Por lo tanto la solución del sistema considerado es $\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

MAT XXII

Matrices ortogonales

a. Se dirá que:

Una matriz A es ortogonal cuando sea $A^T = A^{-1}$ **[1]**

Evidentemente, toda matriz ortogonal debe ser <u>cuadrada</u> ya que de lo contrario no existiría A^{-1}.

b. Por **[1]** se tiene que:

$$A \times A^T = A \times A^{-1} = I \qquad \textbf{[2]}$$

c. Se tiene que:

$$\left(A^T\right)^T \underset{\text{Por [1]}}{=} \left(A^{-1}\right)^T \underset{\text{Ver [1] de MAT XX}}{=} \left(A^T\right)^{-1}$$

y por lo tanto:

Si A es ortogonal, A^T también lo es, y por **[1]** se tiene que A^{-1} también lo es. **[3]**

d. Supóngase que A y B sean ortogonales y del mismo orden.
Entonces:

1º) $$(A \times B)^T \underset{\text{Ver [1] de MAT XIII}}{=} B^T \times A^T \underset{\text{Por [1]}}{=} B^{-1} \times A^{-1} \underset{\text{Ver [1] de MAT XIX}}{=} (A \times B)^{-1}$$

2º) $$(B \times A)^T = A^T \times B^T = A^{-1} \times B^{-1} = (B \times A)^{-1}$$

Es decir que:

Si A y B son ortogonales y del mismo orden entonces
$A \times B$ y $B \times A$ también son ortogonales y del mismo orden. **[4]**

e. Sea A una matriz ortogonal de orden $n \times n$. Entonces:

Elemento ij-ésimo de $A \times A^T =$ $$a_{i1}a_{1j}^T + a_{i2}a_{2j}^T + \ldots + a_{in}a_{nj}^T \overset{\text{Por ser } a_{ij}^T = a_{ji}}{=}$$

$$= a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{nj} \underset{\text{Por ser } A\times A^T = I_n \text{ ya que } A \text{ es ortogonal}}{=} \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Resumiendo:

Si A es ortogonal, entonces:

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+...+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1 & si\ i=j\\ 0 & si\ i\neq j\end{cases} \qquad \textbf{[5]}$$

En palabras y en el caso de matrices ortogonales:

1º) La suma de los cuadrados de los elementos de cada fila es igual a 1.
2º) La suma de los productos de los elementos de una fila cualquiera multiplicados por los correspondientes elementos de otra fila es igual a cero.

f. Como si A es ortogonal A^T también lo es, entre las filas de A^T se cumplirá lo indicado en **[5]**. Como las filas de A^T son las columnas de A resulta que:

Si A es ortogonal, entonces:

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+...+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}1 & si\ i=j\\ 0 & si\ i\neq j\end{cases} \qquad \textbf{[6]}$$

En palabras, en el caso de matrices ortogonales:

1º) La suma de los cuadrados de los elementos de cada columna es igual a 1.
2º) La suma de los productos de los elementos de una columna cualquiera multiplicados por los correspondientes elementos de otra columna es igual a cero.

Evidentemente, las condiciones indicadas en **e** y **f** son redundantes ya que de cumplirse una de ellas se cumple automáticamente la otra.

g. A la recíproca, toda matriz cuadrada A que cumpla con las condiciones indicadas en **e** (en **f**) es ortogonal ya que en ese caso es:

$$A\times A^T=A^T\times A=I$$

y por lo tanto es:

$$A^{-1}=A^T$$

h. A título de ejemplo se verificará la ortonormalidad de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{Vmatrix}$$

Como:

$(1/\sqrt{3})^2+(1/\sqrt{6})^2+(-1/\sqrt{2})^2=1$ (fila 1)

$(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})+(1/\sqrt{6})(-2/\sqrt{6})+(-1/\sqrt{2})(0)=0$ (filas 1 y 2)

$(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})+(1/\sqrt{6})(1/\sqrt{6})+(-1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2})=0$ (filas 1 y 3)

$(1/\sqrt{3})^2+(-2/\sqrt{6})^2+(0)^2=1$ (fila 2)

$(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})+(-2/\sqrt{6})(1/\sqrt{6})+(0)(1/\sqrt{2})=0$ (filas 2 y 3)

$(1/\sqrt{3})^2+(1/\sqrt{6})^2+(1/\sqrt{2})^2=1$ (fila 3)

Se tiene que la matriz considerada es en efecto ortogonal.
Otra verificación (redundante con la recién hecha) es la indicada a continuación:

$(1/\sqrt{3})^2+(1/\sqrt{3})^2+(1/\sqrt{3})^2=1$ (columna 1)

$(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{6})+(1/\sqrt{3})(-2/\sqrt{6})+(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{6})=0$ (columnas 1 y 2)

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)(0)+\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \qquad \text{(columnas 1 y 3)}$$
$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=1 \qquad \text{(columna 2)}$$
$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)(0)+\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \qquad \text{(columnas 2 y 3)}$$
$$\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(0)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1 \qquad \text{(columna 3)}$$

MAT XXIII

Aplicación a la teoría de los cuadripolos eléctricos

a. Sea una “caja negra” consistente en un circuito formado por inductancias y/o resistencias y/o capacitores y/o transformadores.
Supóngase que dicha “caja negra” tenga un par de terminales de entrada y un par de terminales de salida.
Sean las convenciones de sentidos positivos para las tensiones y las corrientes los indicados en la figura MAT XXIII.a.

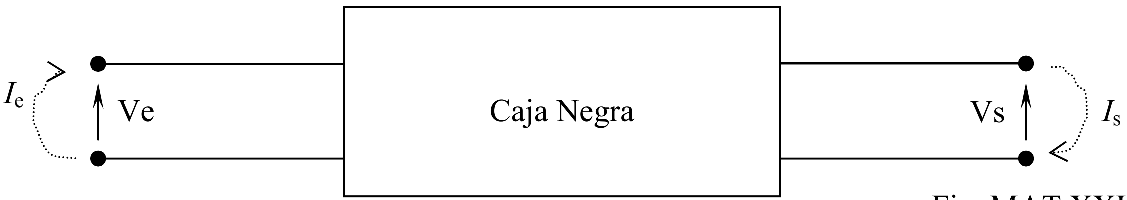


Fig. MAT XXIIIa

En la teoría de los circuitos eléctricos se demuestra que el funcionamiento de cualquier “caja negra” de este tipo puede ser indicado como:

$$\begin{Vmatrix} Ve \\ I_e \end{Vmatrix} = \underbrace{\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}}_{\text{Matriz \underline{no singular}}} \times \begin{Vmatrix} Vs \\ I_s \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

donde *a, b, c* y *d* son parámetros que dependen del circuito contenido en la caja.

b. A título de ejemplo, sea la “caja negra” indicada en la figura MAT XXIII b.

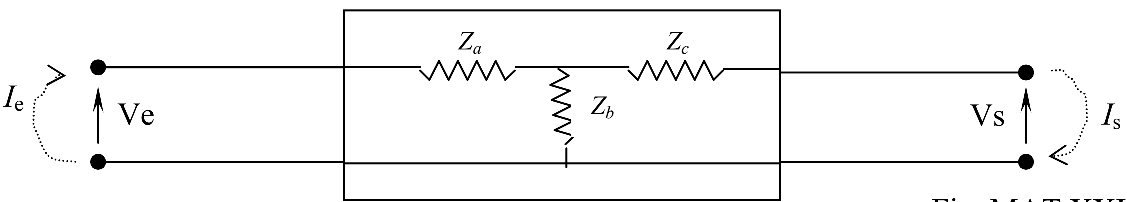


Fig. MAT XXIII b

Por el método de las ecuaciones de mallas se deduce que:

$$\begin{cases} Ve = (Z_a+Z_b)I_e - Z_b I_s & \textbf{[2]} \\ -Vs = \quad -Z_b I_e + (Z_b+Z_c)I_s & \textbf{[3]} \end{cases}$$

Despejando I_e de **[3]**:

$$I_e = \frac{1}{Z_b} Vs + \frac{Z_b + Z_c}{Z_b} I_s \qquad \textbf{[4]}$$

y reemplazando **[4]** en **[2]** se obtiene:

$$Ve = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b} Vs + \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_b} I_s \qquad \textbf{[5]}$$

Las expresiones **[4]** y **[5]** pueden ser expresadas en conjunto como:

$$\begin{Vmatrix} Ve \\ I_e \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{Z_a + Z_b}{Z_b} & \dfrac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_b} \\ \dfrac{1}{Z_b} & \dfrac{Z_b + Z_c}{Z_b} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} Vs \\ I_s \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[6]}$$

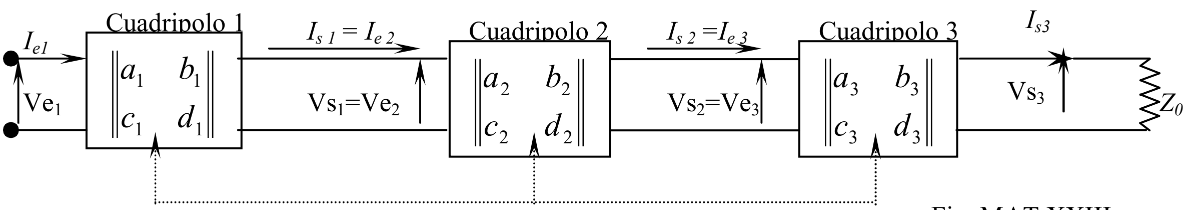
Comparando esta expresión **[6]** con la **[1]** resulta que para el ejemplo considerado es:

$$a = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b}, \qquad b = \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_b + Z_b Z_c}{Z_b}, \qquad c = \frac{1}{Z_b}, \qquad d = \frac{Z_b + Z_c}{Z_b}$$

c. Volviendo al caso general indicado en **a**, en el estudio del comportamiento en estado estacionario de la "caja negra" genérica, las magnitudes *Ve,* I_e, *Vs,* I_s, *a, b, c* y *d* son números complejos (expresados habitualmente en forma módulo-argumental), y por lo tanto los elementos de las matrices indicadas en **[1]** son números complejos.

d. Desde un punto de vista intuitivo, una de estas "cajas negras" puede ser considerada como un "mecanismo" que da una tensión y corriente de entrada $\begin{Vmatrix} Ve \\ I_e \end{Vmatrix}$ en función de una tensión y corriente de salida $\begin{Vmatrix} Vs \\ I_s \end{Vmatrix}$, estando el comportamiento de dicho "mecanismo" descrito por la matriz $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ correspondiente.

e. Considere ahora una cadena de tres cuadripolos ("cajas negras") conectados en cascada y rematada por una impedancia Z_0 (ver figura MAT XXIII c)



Matrices que describen los comportamientos de los cuadripolos correspondientes.

Fig. MAT XXIII c

Supóngase que interese conocer la tensión a aplicar a la entrada del 1[er] cuadripolo para que por la impedancia Z_0 circule una corriente I_{s3} predeterminada.

Como:
$Vs_1 = Ve_2$, $Vs_2 = Ve_3$, $Vs_3 = Z_0\, I_{s3}$ (Ley de Ohm)
$I_{s1} = I_{e2}$, $I_{s2} = I_{e3}$, I_{s3} = corriente predeterminada
evidentemente se tiene que:

$$\begin{Vmatrix} Ve_1 \\ I_{e1} \end{Vmatrix} = \left\{ \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \times \left[\begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} \times \left(\begin{Vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \overset{= Z_0 I_{s3}}{Vs_3} \\ I_{s3} \end{Vmatrix} \right) \right] \right\} \overset{\text{Por asociatividad del producto matricial}}{=}$$

$$= \left(\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{Vmatrix} \right) \times \begin{Vmatrix} Z_0 I_{s3} \\ I_{s3} \end{Vmatrix}$$

y por lo tanto:

$$\begin{Vmatrix} Ve_1 \\ I_{e1} \end{Vmatrix} = \left(\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{Vmatrix} \right) \times \left(I_{s3} \begin{Vmatrix} Z_0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right)$$

$$\begin{Vmatrix} Ve_1 \\ I_{e1} \end{Vmatrix} = I_s \left[\left(\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{Vmatrix} \right) \times \begin{Vmatrix} Z_0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right]$$

Esta es la expresión que da la tensión Ve_1 a aplicar a la entrada del 1er cuadripolo cuando se desee que por la impedancia Z_0 circule la corriente I_{s3}.
Esta expresión da además la corriente I_{e1} que suministra el generador conectado al 1er cuadripolo cuando por Z_0 circula la corriente I_{s3}.

f. Evidentemente, el conjunto de los tres cuadripolos indicados en la figura MAT XXV c puede ser considerado como un único cuadripolo cuyo comportamiento esté descrito por la matriz:

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{Vmatrix}$$

Nota: Lo visto en el presente ejercicio es el ancestro geológico del diseño de las líneas de transmisión eléctricas.

MAT XXIV

Autovectores y autovalores de una matriz. Definición

a. Sea una matriz cuadrada M de orden $n{\times}n$. La matriz M puede ser o no ser singular.

Se define:

La matriz columna de orden $n\times 1$ $V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Vmatrix}$ es un autovector de la matriz M cuando y solo cuando:

1º) $V \neq \underbrace{\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}}_{\text{matriz nula de orden } n\times 1}$

2º) Existe un número λ tal que:

$$M \times V = \lambda\, V$$

Al número λ se lo llamará autovalor correspondiente al autovector V.

b. A los autovectores se los llama también vectores propios, vectores característicos, vectores latentes o eigenvectores.
A los autovalores llama también valores propios, valores característicos, valores latentes o eigenvalores.

c. Se demostrará a continuación que si V es un autovector de M al cual corresponde el autovalor λ, entonces kV (donde k es un número cualquiera no nulo) es también un autovector de M, al cual corresponde el mismo autovalor λ.

En efecto, si

$$M \times V = \lambda\, V$$

se tiene que:

$$\mathrm{k}\,(M \times V) = \mathrm{k}\,(\lambda\, V)$$

y por lo tanto:

$$M \times (\mathrm{k}\, V) = \lambda\, (\mathrm{k}\, V)$$

quedando así demostrado lo propuesto.
Evidentemente, esto implica que si una matriz tiene algún autovector (lo que es siempre el caso, tal como se verá en **e** de MAT XXV), entonces tiene infinitos autovectores, ya que k es un número arbitrario.

MAT XXV

Método para hallar los autovectores y autovalores de una matriz

MAT XXV. 1

a. Sea la matriz $n\times n$:

$$M = \begin{Vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

Si se pretende que $V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Vmatrix}$ sea un autovector de M y que λ sea su correspondiente autovalor ha de tenerse que:

1º) $V \neq \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}$ **[2]**

2º) $M \times V = \lambda\ V$, de donde:

$M \times V = \lambda\ (I_n \times V) = \lambda\ I_n\ \times V$

lo que implica que deba ser:

$$(M - \lambda\ I_n) \times V = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[3]}$$

lo que expresado "in extenso" toma la forma:

$$\begin{Vmatrix} (m_{11} - \lambda) & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & (m_{nn} - \lambda) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[4]}$$

b. Se tiene que lo indicado en **[4]** no es más que un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas.
Si su determinante es no nulo, dicho sistema será crameriano y por lo tanto su única solución será $v_1 = ... = v_n = 0$, teniéndose así que:

$$V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}$$

lo que (ver **[2]**) <u>no</u> constituye un autovector de M.
Entonces, para que la solución de **[4]** determine autovectores de M ha de tenerse que:

$$\Delta_{(M - \lambda I_n)} = \begin{vmatrix} (m_{11} - \lambda) & \cdots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \cdots & (m_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{[5]}$$

Esta es una ecuación algebraica entera de grado n, cuya incógnita es λ.
Será en lo sucesivo llamada <u>ecuación característica de la matriz</u>.

c. Visto y considerando todo lo antedicho, para hallar los autovalores y autovectores de la matriz M, procédase como indicado a continuación:

1º) Resuélvase la ecuación característica del operador.
Las raíces de dicha ecuación serán los autovalores de la matriz.

2º) Reemplácese en **[4]** a λ por uno de estos autovalores. Se obtendrá así un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas que tendrá infinitas soluciones. Estas infinitas

soluciones determinan la familia de autovectores correspondientes al autovalor considerado.
Procediendo de igual manera con los restantes autovalores se obtendrán las restantes familias de autovectores.

d. Notar que la matriz M tendrá tantas familias infinitas de autovectores como valores distintos tengan las raíces de su ecuación característica.

e. Ejemplo.
Sea la matriz:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Su ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{3} \qquad\qquad \lambda_2 = 2-\sqrt{3}$$

Tal como arriba indicado, estos λ_1 y λ_2 son los autovalores de la matriz *M*.
Considérese el autovalor $\lambda_1 = 2+\sqrt{3}$:
A este autovalor le corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 1-(2+\sqrt{3}) & 2 \\ 1 & 3-(2+\sqrt{3}) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} \left[1-(2+\sqrt{3})\right] v_1^1 + 2v_2^1 = 0 \\ 1v_1^1 + \left[3-(2+\sqrt{3})\right] v_2^1 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$v_1^1 = (-1+\sqrt{3})k_1 \quad , \quad v_2^1 = k_1 \qquad k_1 = \text{constante arbitraria}$$

y por lo tanto al autovalor $\lambda_1 = 2+\sqrt{3}$ corresponde la familia infinita de autovectores:

$$V^1 = \begin{Vmatrix} k_1(-1+\sqrt{3}) \\ k_1 \end{Vmatrix}, \quad k_1 = \text{constante arbitraria no nula}$$

Considérese el autovalor $\lambda_2 = 2-\sqrt{3}$:
A este autovalor le corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 1-(2-\sqrt{3}) & 2 \\ 1 & 3-(2-\sqrt{3}) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} \left[1-(2-\sqrt{3})\right] v_1^2 + 2v_2^2 = 0 \\ 1v_1^2 + \left[3-(2-\sqrt{3})\right] v_2^2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$v_1^1 = (-1-\sqrt{3})k_2 \quad , \quad v_2^2 = k_2 \qquad k_2 = \text{constante arbitraria}$$

y por lo tanto al autovalor $\lambda_2 = 2-\sqrt{3}$ corresponde la familia infinita de autovectores:

$$V^2 = \begin{Vmatrix} k_2(-1-\sqrt{3}) \\ k_2 \end{Vmatrix}, \quad k_2 = \text{constante arbitraria no nula}$$

f. Ejemplo.

Sea la matriz:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

La ecuación característica de esta matriz es:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

Esta ecuación tiene una única raíz doble igual a 1 y por lo tanto existe un único autovalor $\lambda = 1$. <u>Notar que en este caso la ecuación característica es de grado 2 y suministra un único autovalor</u>.

A dicho autovalor $\lambda = 1$ corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 1-1 & -2 \\ 0 & 1-1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} 0v_1 - 2v_2 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es:

$v_1 = k$, constante arbitraria $\qquad v_2 = 0$

y por lo tanto al autovalor $\lambda = 1$ corresponde la familia infinita de autovectores (única):

$$V = \begin{Vmatrix} k \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad k = \text{constante arbitraria no nula}$$

g. Ejemplo.

$$M = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

La ecuación característica de esta matriz es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$$

cuyas raíces son:

$\lambda_1 = 1$ (doble) $\qquad$ y $\qquad \lambda_2 = 5$

Estas raíces son los autovalores de M.

Notar que en este caso la ecuación característica es de grado 3 y suministró solo dos autovalores.

Considérese el autovalor $\lambda_1 = 1$:

A este autovalor le corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 2-1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-1 & 1 \\ 1 & 2 & 2-1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} (2-1)v_1^1 + 2v_2^1 + v_3^1 = 0 \\ v_1^1 + (3-1)v_2^1 + v_3^1 = 0 \\ v_1^1 + 2v_2^1 + (2-1)v_3^1 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$v_1^1 = -2k_{1,1} - k_{1,2} \qquad v_2^1 = k_{1,1} \qquad v_3^1 = k_{1,2} \quad ; \qquad k_{1,1} \text{ y } k_{1,2} \text{ arbitrarios}$$

y por lo tanto al autovalor $\lambda_1 = 1$ le corresponde una familia "doblemente infinita" de autovectores:

$$V^1 = \begin{Vmatrix} -2k_{1,1} - k_{1,2} \\ k_{1,1} \\ k_{1,2} \end{Vmatrix} \quad , \qquad k_{1,1} \text{ y } k_{1,2} \text{ son constantes arbitrarias no ambas nulas}$$

Considérese ahora el autovalor $\lambda_2 = 5$:
A este autovalor le corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 2-5 & 2 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 2 & 2-5 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} (2-5)v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2 = 0 \\ v_1^2 + (3-5)v_2^2 + v_3^2 = 0 \\ v_1^2 + 2v_2^2 + (2-5)v_3^2 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = k_2 \quad ; \qquad k_2 = \text{contante arbitraria}$$

y por lo tanto al autovalor $\lambda_2 = 5$ le corresponde la familia infinita de autovectores:

$$V^2 = \begin{Vmatrix} k_2 \\ k_2 \\ k_2 \end{Vmatrix} \quad , \qquad k_2 = \text{constante arbitrarias no nula}$$

MAT XXVI

<u>Aplicación</u>

a. Sea el sistema mecánico indicado en la figura MAT XXVI a.

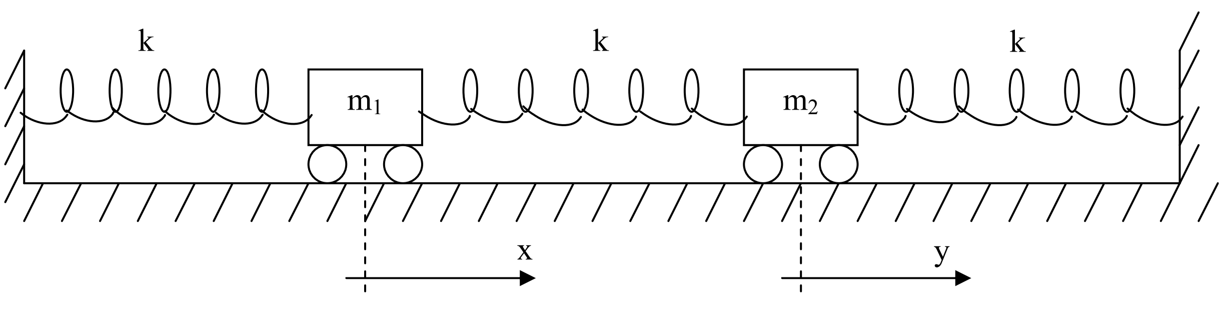


Fig. MAT XXVI a

Supóngase que:

1º) Las dos masas son exactamente iguales y pueden deslizarse sobre la base con rozamiento nulo.

2º) Los tres resortes indicados en la figura son iguales entre sí y perfectos. Al ser deformados (comprimidos o estirados) ejercerán sobre ambos extremos una fuerza igual a k veces la deformación experimentada.

3º) En la figura MAT XXVI a el sistema está en equilibrio estático (todo está en reposo, y los resortes tienen su longitud natural, es decir que no están ni comprimidos ni estirados).

El sistema considerado es <u>conservativo</u> ya que no hay pérdidas de energía (no hay rozamientos y los resortes son perfectos). Para este tipo de sistemas existen estados naturales de oscilación en los cuales las masas oscilan indefinidamente en forma sinusoidal alrededor de su posición de reposo.
Se pide hallar dichos estados naturales de oscilación para el sistema de la figura MAT XXVI a.

b. Supóngase que un cierto instante la posición de las masas sea la indicada en la figura MAT XXVIb .

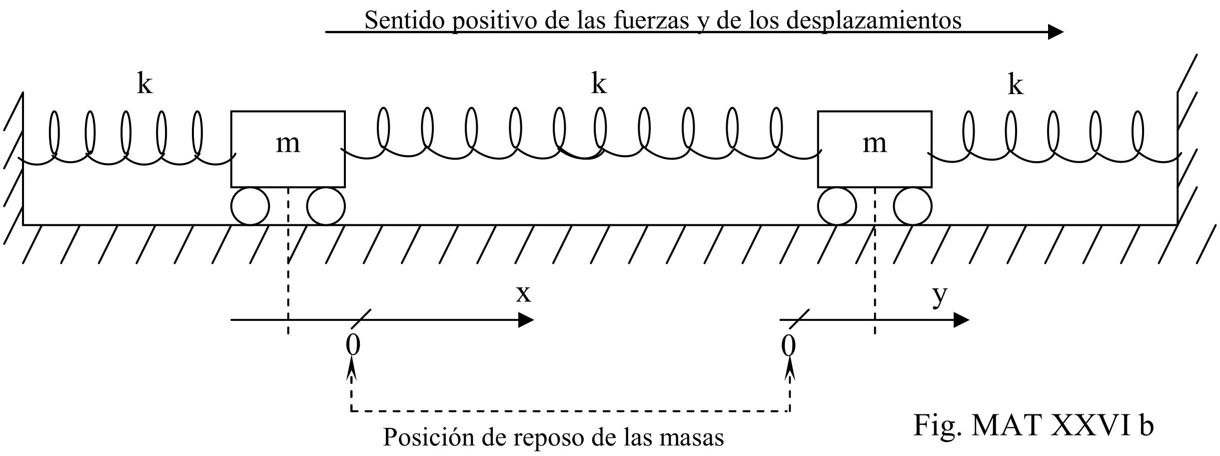


Fig. MAT XXVI b

Teniendo <u>muy en cuenta</u> el sentido que se tomó como positivo para las fuerzas y los desplazamientos se tiene que:

Fuerza ejercida por el extremo izquierdo del 1er resorte $= \mathrm{k}\, x$
Fuerza ejercida por el extremo derecho del 1er resorte $= -\mathrm{k}\, x$
Fuerza ejercida por el extremo izquierdo del 2do resorte $= \mathrm{k}\, (y - x)$
Fuerza ejercida por el extremo derecho del 2do resorte $= -\mathrm{k}\, (y - x)$
Fuerza ejercida por el extremo izquierdo del 3er resorte $= -\mathrm{k}\, y$
Fuerza ejercida por el extremo derecho del 3er resorte $= \mathrm{k}\, y$

Actúan sobre la 1ª masa

Actúan sobre la 2ª masa

Deformaciones

Entonces, como:

Fuerza = masa × aceleración

se tiene que:

Para la 1ª masa: $-\mathrm{k}\, x + \mathrm{k}(y - x) = \mathrm{m}\, \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Para la 2ª masa: $-\mathrm{k}(y - x) - \mathrm{k}\, y = \mathrm{m}\, \dfrac{d^2y}{dt^2}$

Resumiendo y reescribiendo estas expresiones resultan las ecuaciones diferenciales que gobiernan las oscilaciones del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{k}\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2x + y \\ \dfrac{m}{k}\dfrac{d^2y}{dt^2} = x - 2y \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

c. Considérese como posible solución de **[1]** a:

$\boldsymbol{x(t) = \mathbf{a}\ \mathbf{Cos}\ (\omega t)}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{y(t) = \mathbf{b}\ \mathbf{Cos}\ (\omega t)}$ **[2]**

donde por el momento *a, b* y ω son desconocidos.
Se tendría entonces que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a\ Cos(\omega\ t) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 b\ Cos(\omega\ t) \qquad \textbf{[3]}$$

Reemplazando **[2]** y **[3]** en **[1]** y simplificando se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega^2 m}{k} a = 2a - b \\ \dfrac{\omega^2 m}{k} b = -a + 2b \end{cases} \qquad \textbf{[4]}$$

Se han así obtenido las condiciones que deben cumplir *a, b y* ω para que **[2]** sea una solución de **[1]**.
Si para simplificar se usa la notación:

$$\lambda = \frac{\omega^2 m}{k}\text{, lo que implica que sea } \omega = \sqrt{\frac{k\lambda}{m}} \qquad \textbf{[5]}$$

se tiene que la expresión **[4]** puede ser puesta bajo la siguiente forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}}_{M} \times \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[6]}$$

Se tiene entonces (ver **a** de MAT XXV) que $\begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix}$ es un autovector de *M* al cual corresponde el autovalor λ.
Entonces, <u>conocidos los autovalores y los correspondientes autovectores de *M* se conocerán los valores de λ (y por lo tanto de ω, ver **[5]**), *a* y *b* que hacen que **[2]** sea en efecto una solución de **[1]**</u>.

d. Procediendo tal como indicado en **d** de MAT XXV se obtendrá en 1er lugar la ecuación característica de *M*:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad \textbf{[7]}$$

cuyas soluciones (autovalores de *M*) son:

$\lambda_1 = 3$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 = 1$ **[8]**

e. Al autovalor $\lambda_1 = 3$ corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir } \begin{cases} (2-3)a_1 - b_1 = 0 \\ -a_1 - (2-3)b_1 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$a_1 = -K_1$, $b_1 = K_1$, K_1 = constante arbitraria **[9]**

Entonces, por **[2]**, **[8]** y **[9]** se obtiene la siguiente solución de **[1]**:

$$x_1(t) = -K_1 Cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\ t\right) \quad , \quad y_1(t) = K_1 Cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\ t\right) \qquad \textbf{[10]}$$

Se hace notar que esta es una solución particular del sistema **[1]**.
Esta solución indica los movimientos de las masas m_1 y m_2 si se las lleva "a dedo" respectivamente a las posiciones $x = -K_1$ e $y = K_1$ y se las suelta de repente en el instante $t = 0$. Ver figura MAT XXVI c.

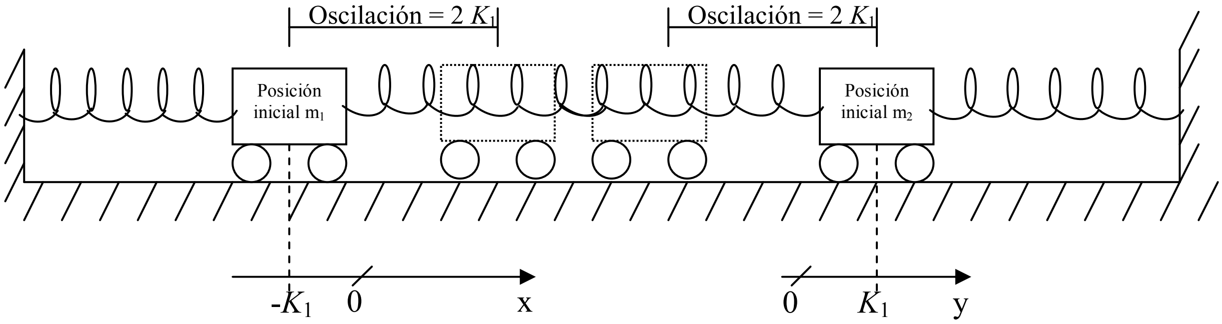


Fig. MAT XXVI c

f. Al autovalor $\lambda_2 = 1$ corresponde el sistema:

$$\begin{Vmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ es decir } \begin{cases} (2-1)a_2 - b_2 = 0 \\ -a_2 + (2-1)b_2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$a_2 = b_2 = K_2$ $\qquad$ K_2 = constante arbitraria **[11]**

Entonces, por **[2]**, **[8]** y **[11]** se obtiene la siguiente solución de **[1]**:

$$x_2(t) = K_2 Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \quad , \quad y_2(t) = K_2 Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \qquad \textbf{[12]}$$

Esta es otra solución particular de **[1]**. Describe los movimientos de las masas m_1 y m_2 si se las lleva "a dedo" respectivamente a las posiciones $x = K_2$ e $y = K_2$ y se las suelta de repente en el instante $t = 0$. Ver figura MAT XXVId.

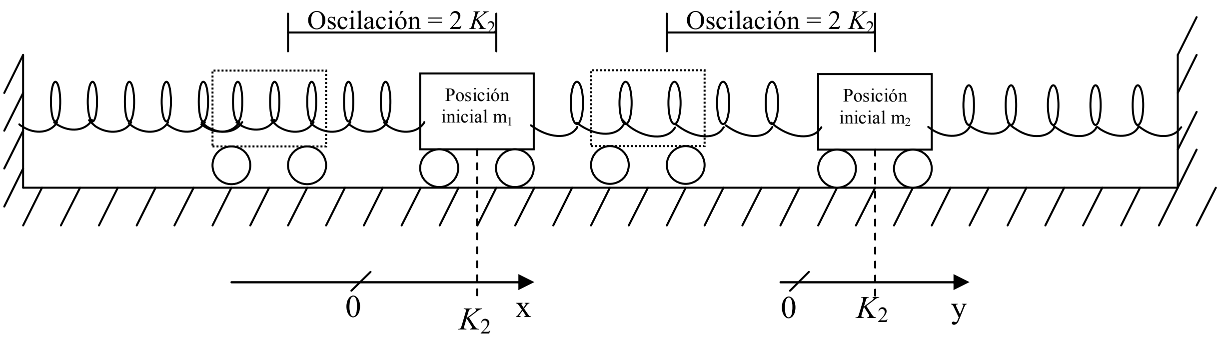


Fig. MAT XXVI d

g. Según visto en **[10]** y **[12]**, en los casos analizados en **e** y **f**, las masas m_1 y m_2 efectúan una oscilación completa en un tiempo T tal que

$$Cos\sqrt{\frac{\lambda k}{m}}\ T = Cos(2\pi)$$

($\lambda = 3$ en el caso **e** y $\lambda = 1$ en el caso **f**).
Es decir que:

$$\sqrt{\frac{\lambda k}{m}}\ T = 2\pi \qquad \textbf{[13]}$$

Como la frecuencia de oscilación de las masas (cantidad de oscilaciones completas efectuadas en 1 segundo) es:

$$f = \frac{1}{T}$$

y entonces por **[13]** se tiene que:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda k}{m}} \qquad \textbf{[14]}$$

resultando así que, según indicado en **[14]**:
<u>A cada autovalor λ corresponde una frecuencia natural de oscilación del sistema</u>.

Por otra parte si a un autovalor λ le corresponde los autovectores $\begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix}$ (por ejemplo en **e** al autovalor λ = 3 le corresponden los autovectores $\begin{Vmatrix} -K_1 \\ K_1 \end{Vmatrix}$), se tiene que 2*a* y 2*b* son las amplitudes con que oscilan las masas m_1 y m_2, ambas a la frecuencia $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k\lambda}{m}}$.

h. Para completar el estudio del sistema que se viene analizando, falta determinar como será el comportamiento del mismo cuando en el instante $t = 0$ las masas m_1 y m_2 estén respectivamente en las posiciones $x_1(0) = P_1$ y $y_1(0) = P_2$, <u>siendo P_1 y P_2 números completamente arbitrarios</u>.
En **[10]** y **[12]** se vio que $[x_1(t)\ , y_1(t)]$ y $[x_2(t)\ , y_2(t)]$ son soluciones particulares de **[1]**.
Entonces, otra solución de **[1]** será:

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \qquad \textbf{[15]}$$

y si se pretende que sean $x(0) = P_1$ y $y(0)=P_2$ ha de tenerse que:

$$\begin{cases} P_1 = x_1(0) + x_2(0) \overset{\text{ver [10] y [12]}}{=} -K_1 + K_2 \\ P_2 = y_1(0) + y_2(0) = K_1 + K_2 \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$K_1 = \frac{P_2 - P_1}{2} \qquad\qquad K_2 = \frac{P_1 + P_2}{2} \qquad \textbf{[16]}$$

y entonces por **[10], [12], [15]** y **[16]** resulta que el comportamiento de las masas m_1 y m_2 cuando sus posiciones iniciales son respectivamente P_1 y P_2 está determinado por las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -\frac{P_2 - P_1}{2} Cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\ t\right) + \frac{P_1 + P_2}{2} Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \\ y(t) &= \frac{P_2 - P_1}{2} Cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\ t\right) + \frac{P_1 + P_2}{2} Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[17]}$$

Apéndice del capítulo sobre matrices

A. MAT. I

Determinantes extraídos de una matriz

Sea una matriz cualquiera, por ejemplo:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{Vmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

Se dirá que un cierto determinante ha sido extraído de la matriz *A* cuando y solo cuando:

1º) Todos los elementos de una misma fila del determinante pertenezcan a una misma fila de la matriz.
2º) Todos los elementos de una misma columna del determinante pertenezcan a una misma fila de la matriz.

Por ejemplo, determinantes extraídos de la matriz *A* son:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{34} & a_{32} & a_{35} \\ a_{14} & a_{12} & a_{15} \\ a_{44} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{43} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{42} & a_{44} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{34} & a_{31} \\ a_{14} & a_{11} \end{vmatrix} \quad , \quad |a_{32}| \quad , \quad |a_{25}| \quad , etc.$$

A. MAT. II

Rango de una matriz y de su determinante correspondiente.

a El rango de una matriz y de su determinante correspondiente es el orden de los determinantes no **nulos** del mayor orden posible que puedan ser extraídos de la matriz..

Así, puede verificarse fácilmente que la matriz $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$ y el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ son de rango 2

b Sea un determinante Δ cualquiera de orden n , y sea Δ^1 su forma diagonalizada (ver DET XV).
Evidentemente será:

$$\Delta = \Delta^1 \qquad \text{y} \qquad \text{Orden de } \Delta = \text{Orden de } \Delta^1$$

Supóngase que en Δ^1 haya k elementos no nulos en su diagonal principal, siendo ceros los (n-k) restantes, lo que implica que Δ sea de rango k.

El hecho de Δ^1 que sea de rango k implica que de Δ pueda extraerse por lo menos un determinante no nulo de orden k x k..

Por otra parte, si de Δ pudiera extraerse un determinante no nulo de orden (k+1) $\times$ (k+1), se tendría que Δ^1 debería ser de rango k+1.

Lo antedicho implica que:

$$\text{Rango de } \Delta = \text{Rango de } \Delta^1$$

A. MAT. III

Teorema

Sean las matrices A y B, ambas cuadradas y de orden $n \times n$.
Sea B de rango n (es decir que B es no singular). Se demostrará que tanto $A \times B$ como $B \times A$ tienen el mismo rango de A, cualquiera sea éste.
Sean Δ_A y Δ_B los determinantes de las matrices A y B, respectivamente.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} V_{11} \neq 0 \\ V_{22} \neq 0 \end{matrix} \quad \text{Rango} = 2$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces será:

$$\Delta_A \times \Delta_B = \Delta_{A \times B} = \begin{vmatrix} V_{11}b_{11} & V_{11}b_{12} & V_{11}b_{13} & V_{11}b_{14} \\ V_{22}b_{21} & V_{22}b_{22} & V_{22}b_{23} & V_{22}b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ahora bien, evidentemente $\Delta_{A \times B}$ será de rango a lo sumo igual a 2, y por otra parte, si fuera de rango menor que 2 se tendría que serían nulos todos los determinantes de orden 2 que puedan extraerse de B, lo que implicaría que su determinante sea nulo y que por lo tanto que B sea no sea singular, lo cual es contra hipótesis

Por lo tanto:

Si $\Delta_B \neq 0$ entonces. Rango de $\Delta_{A \times B}$ = Rango de Δ_A

Resultando así que:

Si B es no singular entonces: Rango de $A \times B$ = Rango de A

Por un procedimiento similar puede probarse que; si B es no singular entonces:

Rango de $B \times A$ = Rango de A

Ejercicios y problemas sobre Cálculo Matricial

MAT 1 Dadas las matrices:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \end{Vmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

hallar (cuando sea posible):

a) $A + 2B$ b) $(A + 2B)^{\mathrm{T}}$ c) $A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ d) $A - 5B$

e) $3A - 2B$ f) $A \times 2B$ g) $(A + B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ h) $B \times A^{\mathrm{T}}$

i) $A^{\mathrm{T}} \times B$

MAT 2 Sea A de orden $m{\times}n$ y O la matriz nula de orden $m{\times}n$. Probar que si $\lambda\, A = 0$ entonces o bien es $\lambda = 0$ o bien es $A = O_{m\times n}$.

MAT 3 Sea A una matriz cuadrada. Probar que $A + A^{\mathrm{T}}$ es simétrica.

MAT 4 Sea la matriz elemental E_{ij} una matriz de orden $m{\times}n$ tal que el elemento $a_{ij} = 1$ y $a_{lk} = 0$, $\forall\ \ l \neq i,\ \ k \neq j$.

Se pide:

a) Indicar a la matriz $\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$ como una suma $aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$, donde a, b, c y d son números a determinar.

b) Demostrar que toda matriz de orden $m{\times}n$ puede ser indicada como $a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \ldots + a_{mn}E_{mn}$, donde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ son números.

MAT 5 Dadas las matrices:

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

Hallar, si posible:

a) $A{\times}B$ b) $B{\times}A$ c) $B{\times}A^{\mathrm{T}}$

MAT 6 Hallar el elemento 2,3-ésimo de los siguientes productos matriciales:

a) $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 6 & -3 & -2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 12 & -4 \end{Vmatrix}$ b) $\begin{Vmatrix} 11 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ -4 & 9 & 12 \\ 16 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$

c) $\begin{Vmatrix} 1 & -11 \\ 13 & 5 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 20 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & -3 \end{Vmatrix}$ d) $\begin{Vmatrix} 13 & 18 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 6 & -4 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & -1 & 18 \end{Vmatrix}$

MAT 7 a) Sea:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Se pide:
Hallar A^2 y A^3.

b) Indicar una matriz B tal que $B \neq O$, $B^2 \neq O$, $B^3 \neq O$ y $B^4 = O$.

MAT 8 Dadas las siguientes matrices, hallar (si posible) sus respectivas inversas:

a) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$

b) $B = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$

c) $C = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

MAT 9 Dadas las matrices:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Calcular: $(A + B)^2$ y $A^2 + 2(A \times B) + B^2$.

¿Qué conclusiones saca Ud.?

MAT 10 Demostrar que si A no es singular y $A \times B = A \times C$, entonces es $B = C$.

MAT 11 Probar que si existen $A + B$ y $A \times B$, entonces tanto A como B son cuadradas.

MAT 12 Demostrar que si A es cuadrada entonces $\left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k$.

MAT 13 Demostrar que si A es simétrica y no singular, entonces A^{-1} también lo es.

MAT 14 Hallar la inversa de la matriz:

$$\begin{Vmatrix} Cos\,\alpha & -Sen\,\alpha \\ Sen\,\alpha & Cos\,\alpha \end{Vmatrix}$$

MAT 15 Sea el enunciado:

"La suma de dos matrices no singulares es no singular"

Si este enunciado es cierto, probarlo.
Si es falso, dar un ejemplo que pruebe su falsedad.

MAT 16 Indicar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 11 & 12 & 13 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 4 \end{Vmatrix} \qquad C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

MAT 17 Verificar la ortonormalidad de las siguientes matrices

$$A = \begin{Vmatrix} 3/\sqrt{13} & 0 & 2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 0 & -3/\sqrt{13} \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$B = \begin{Vmatrix} 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} \\ -4/\sqrt{42} & 5/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$$

MAT 18 Demostrar que si λ es un autovalor de una matriz A, entonces $k\lambda$ es un autovalor de la matriz kA.

MAT 19 Indicar cuales son los autovalores de una matriz triangular.

MAT 20 Indicar los autovalores y autovectores de una matriz diagonal.

MAT 21 Demostrar que la siguiente matriz no tiene autovalores reales para $0 < \alpha < \pi$.

$$\begin{Vmatrix} Cos\alpha & -Sen\alpha \\ Sen\alpha & Cos\alpha \end{Vmatrix}$$

MAT 22 Demostrar que si una matriz A es cuadrada, A y su transpuesta A^T tienen la misma ecuación característica, lo que implica que tienen los mismos autovalores.

Probar mediante un ejemplo que, a pesar de tener los mismos autovalores, puede ser que A y A^T tengan distintos autovectores.

MAT 23 Sea λ un autovalor de A. Sea $B = A + kI$. Probar que $k + \lambda$ es un autovalor de B.

MAT 24 Probar que si λ es un autovalor de A, entonces λ^n es un autovalor de A^n. Comparar los autovectores correspondientes.

MAT 25 Sea una matriz A tal que $A^2 = I$. Indicar cuales son los posibles autovalores de A.

MAT 26 Sea A tal que $A^k = O$ (matriz nula) para un cierto k natural. Probar que $\lambda = 0$ es un autovalor de A.

MAT 27 Demostrar que si 0 es un autovalor de la matriz A entonces A es singular.

MAT 28 Demostrar que si A es singular, entonces 0 es un autovalor de la misma.

COMPLEMENTOS SOBRE POLINOMIOS E INTRODUCCIÓN A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

POL I

Generalidades

a. Se supone que el lector ya tiene un buen conocimiento básico de todo lo relativo a polinomios. A continuación se repasarán algunos puntos básicos (sobre todo para no referirse a otros libros y para uniformizar la notación), y se verán algunos tópicos adicionales sobre el tema que serán usados mas adelante en la resolución de ecuaciones algebraicas.

b. El tema de la resolución de ecuaciones algebraicas corresponde en realidad a un curso de cálculo numérico. En el presente capítulo se tratará de dar únicamente una sólida base algebraica para dicho tipo de curso.

c. Se llama polinomio entero en z de grado n a toda función que pueda ser puesta bajo la forma:

$$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

donde: **[1]**

1º) α_n, α_{n-1}, ..., α_0 son coeficientes conocidos, <u>reales</u> <u>y/o</u> <u>complejos</u>

2º) z es una variable compleja.

3º) n entero no negativo.

Así por ejemplo:

1º) $P_3(z) = 2z^3 + 3z^2 - 1 = 2z^3 + 3z^2 + 0z - 1$
es un polinomio entero en z de grado 3.

2º) $P_2(x) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 = x^2 + 0x - 1$
es un polinomio entero en x de grado 2.

d. Supóngase que un polinomio de grado 1 ó mayor sea igualado a 0. Se obtendrá:

$$P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \qquad \textbf{[2]}$$

donde a_n, a_{n-1}, ..., a_0 son coeficientes conocidos reales y/o complejos y donde z es una variable compleja.

Es fácil ver que para esta expresión **[2]** enuncie una verdad, los valores que pueda asumir la variable z no son cualesquiera.

Por ejemplo, sí en:

$$P_3(z) = 2z^3 + 3z^2 - 1 = 2z^3 + 3z^2 + 0z - 1 \qquad \textbf{[3]}$$

z asume el valor i se obtiene el enunciado falso:

$$-4 - 2i = 0$$

En cambio, si en **[3]** la variable z asume el valor -1 se obtiene el resultado cierto:

$-2 + 3 - 1 = 0$

e. Todo polinomio entero en z de grado $n \geq 1$ igualado a cero será llamado ecuación algebraica entera en z de grado n. La variable z del polinomio será llamada incógnita de la ecuación.
Se llamará raíz o solución de una ecuación algebraica entera a todo número (real o complejo) tal que la ecuación constituya un enunciado cierto cuando la incógnita asuma el valor de dicho número.
Así por ejemplo, según visto en **d** se tiene que -1 es una raíz de $P_3(z) = 0$ y que i no lo es.
Cuando un cierto número es raíz de una ecuación, se dice que satisface a la misma.

f. A los valores asumidos por z que anulan a un polinomio $P_n(z)$ se lo llamará ceros de dicho polinomio.
Evidentemente, todo cero de un polinomio $P_n(z)$ será una raíz de la ecuación $P_n(z) = 0$ y viceversa.
En lo que sigue se usarán indistintamente las expresiones "cero del polinomio $P_n(z)$" o "raíz de la ecuación $P_n(z) = 0$".

POL II

Polinomios idénticamente nulos

a. Se dice que un polinomio es idénticamente nulo cuando se anula para cualquier valor que asuma la variable, es decir que todo número real o complejo es un cero de dicho polinomio, o, lo que es lo mismo, que es una raíz de la ecuación correspondiente.
El hecho de que un polinomio $P_n(z)$ sea idénticamente nulo se indica como:

$$P_n(z) \equiv 0 \qquad \text{ó} \qquad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \equiv 0$$

b. Se demuestra en el Apéndice A.POL I que los coeficientes de todo polinomio idénticamente nulo son todos nulos.

POL III

Polinomios iguales

Se define que dos polinomios $P_n(z)$ y $P_m(z)$ son iguales cuando $P_n(z) = P_m(z)$ para cualquier valor que asuma z.
Sean dos polinomios $P_7(z)$ y $P_4(z)$ tales que:

$$P_7(z) = P_4(z)$$

Supóngase que en forma explícita dichos polinomios toman el aspecto:

$$P_7(z) = a_7 z^7 + a_6 z^6 + a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$
$$P_4(z) = \qquad\qquad\qquad\qquad b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

Evidentemente, si $P_7(z) = P_4(z)$ se tiene que $P_7(z) - P_4(z)$ debe ser idénticamente nulo.
Por lo tanto ha de ser:

$$P_7(z) - P_4(z) = a_7 z^7 + a_6 z^6 + a_5 z^5 + (a_4 - b_4) z^4 + (a_3 - b_3) z^3 + (a_2 - b_2) z^2 + \\ + (a_1 - b_1) z \; + (a_0 - b_0) \equiv 0$$

lo que según visto en POL II determina que sean:

$a_7 = 0$, $a_6 = 0$, $a_5 = 0$, $a_4 = b_4$, $a_3 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$

lo que implica que si dos polinomios son iguales han de ser del mismo grado, y han de tener idénticos coeficientes para los términos de igual grado.

POL IV

Teorema del resto

a. Se probará que, para que un número γ (real o complejo) sea un cero del polinomio $P_n(z)$ (y por lo tanto sea una raíz de la ecuación $P_n(z) = 0$) es condición necesaria y suficiente que $(z - \gamma)$ divida exactamente a $P_n(z)$.

b. Se probará en primer lugar la suficiencia de la condición.
Si $(z - \gamma)$ divide exactamente a $P_n(z)$, existe un polinomio cuociente $Q(z)$ tal que:

$$P_n(z) = (z - \gamma)\, Q(z)$$

Cuando en esta expresión z asume el valor γ, su 2º miembro se anula, con lo que en efecto resulta que $P_n(\gamma) = 0$, lo que implica que γ sea un cero de $P_n(z)$.

c. Se probará la necesidad de la condición.
Al dividir a $P_n(z)$ por $(z - \gamma)$ (todavía no se sabe si $(z - \gamma)$ divide o no exactamente a $P_n(z)$) se obtiene un cuociente $Q(z)$ y un resto R que es una constante. Entonces será:

$$P_n(z) = (z - \gamma)\, Q(z) + R$$

Si γ es en efecto, un cero de $P_n(z)$ se tiene que:

$$\underbrace{P_n(\gamma)}_{=0} = \underbrace{(\gamma - \gamma)}_{=0} Q(\gamma) + R$$

Con lo que resulta que debe ser:

$$R = 0$$

habiéndose así probado que si γ es un cero de $P_n(z)$, se tiene que ($z - \gamma$) divide exactamente a $P_n(z)$ ya que el resto de dicha división es 0.

POL V

Teorema Fundamental del Álgebra

Este teorema dice que: Toda ecuación algebraica entera tiene por lo menos una raíz (real o compleja), lo que también puede ser enunciado estableciendo que:
Todo polinomio entero tiene por lo menos un cero (real o complejo) si su grado es mayor o igual que 1**.**
Este teorema es conocido con el nombre de *Teorema de D´Alembert*. La primera demostración del mismo fue hecha por Gauss. La demostración de Gauss, y muchas otras posteriores, pertenecen en realidad al dominio de las funciones de variable compleja. En el Apéndice A. POL II figura una de ellas, muy fácil a condición de tener una cierta familiaridad con el tema.
Existen también demostraciones puramente algebraicas (ver por ejemplo: A Kurosch – Curso de Algebra Superior, párrafo 55), pero son todas bastante difíciles y requieren bastante conocimientos previos.
Para eludir estos inconvenientes, lo mejor que puede hacer el lector por ahora es aceptar la palabra de honor que se le dá, de que el teorema es un efecto válido y seguir adelante.

POL VI

Consecuencias del Teorema Fundamental del Álgebra

POL VI.1

a. Sea el polinomio $P_n(z)$. El Teorema Fundamental del Álgebra indica que dicho polinomio tiene uno o más ceros. Sea γ_1 uno de dichos ceros. Por el teorema del resto resulta entonces que $P_n(z)$ es divisible exactamente por $z - \gamma_1$. Llamando $P_{n-1}(z)$ al polinomio cuociente, cuyo grado es $n - 1$, se tiene entonces que:

$$P_n(z) = (z - \gamma_1)P_{n-1}(z) \qquad \textbf{[1]}$$

De nuevo por el teorema fundamental del álgebra resulta que el polinomio $P_{n-1}(z)$ tiene uno o más ceros. Sea γ_2 uno de dichos ceros. De nuevo por el teorema del resto resulta que:

$$P_{n-1}(z) = (z - \gamma_2)P_{n-2}(z)$$

lo que reemplazando en **[1]** da:

$$P_n(z) = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2)P_{n-2}(z)$$

Continuando con el mismo procedimiento hasta obtener un polinomio cuociente P_0 de grado 0 (es decir una constante, a lo cual, según es evidente, se llega después de la n^a división), se obtiene:

$$P_n(z) = (z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_n)P_0, \quad P_0 = \text{constante} \tag{2}$$

b. Supóngase que la forma explícita de $P_n(z)$ sea:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{3}$$

Efectúense todas las operaciones indicadas en el 2º miembro de **[2]**. Lo que se obtendrá será de nuevo a $P_n(z)$ bajo la forma:

$$P_n(z) = P_0 z^n + \text{otros términos en } z \text{ de grado menor que } n \tag{4}$$

Comparando **[3]** con **[4]**, como $P_n(z) \equiv P_n(z)$ resulta entonces por lo visto en POL III que debe ser:

$$a_n = P_0$$

con lo que resulta que **[2]** toma la forma:

n paréntesis

$$P_n(z) = a_n(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_n) \tag{5}$$

c. Evidentemente, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ son n ceros del polinomio $P_n(z)$.
Se demostrará a continuación que además dichos números $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ son los <u>únicos</u> ceros de $P_n(z)$.
En efecto, todo número δ distinto de $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ es tal que (ver **[5]**):

$$P_n(\delta) = a_n \underline{(\delta-\gamma_1)}.\underline{(\delta-\gamma_2)}\ldots\underline{(\delta-\gamma_n)} \neq 0$$

No nulos por ser $\delta \neq \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$

lo que implica que δ no pueda ser un cero de $P_n(z)$.
A la expresión **[5]** se la llamará <u>forma factoreada del polinomio $P_n(z)$</u>**.**

d. Puede darse el caso de que, en la forma factoreada de $P_n(z)$ existan valores de γ que sean iguales entre sí. En este caso **[5]** tomará el aspecto:

$$P_n(z) = a_n(z-\gamma_1)^{n_1}.(z-\gamma_2)^{n_2}\ldots(z-\gamma_k)^{n_k}$$

donde:
1º) $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$, ..., $n_k \geq 1$
2º) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$
3º) $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ son todos los ceros distintos entre sí de $P_n(z)$.

[6]

e. Dado un polinomio $P_n(z)$ cuya forma factoreada sea, digamos, la indicada en **[6]**, se define:

γ_1 es un cero (raíz) de multiplicidad n_1 de $P_n(z)$ (de $P_n(z) = 0$)
γ_2 es un cero (raíz) de multiplicidad n_2 de $P_n(z)$ (de $P_n(z) = 0$)
....
γ_k es un cero (raíz) de multiplicidad n_k de $P_n(z)$ (de $P_n(z) = 0$)

Como:

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

se tiene entonces que un polinomio $P_n(z)$ de grado n tiene n ceros, si a todo cero de multiplicidad n_1 se lo cuenta por n_1 ceros**.**

POL VI.2

a. Se probará que si γ_1 es un cero de multiplicidad n_1 del polinomio $P_n(z)$, entonces dicho polinomio es divisible por $(z-\gamma_1)^{n_1}$ y no lo es por $(z-\gamma_1)^{n_1+1}$.

b. En efecto, si γ_1 es un cero de multiplicidad n_1 de $P_n(z)$, es decir que si $P_n(z)$ tiene la forma indicada en **[6]**, se tiene que poniendo:

$$Q(z) = a_n\left(z-\gamma_2\right)^{n_2} \ldots \left(z-\gamma_k\right)^{n_k} \qquad \textbf{[7]}$$

resulta:

$$P_n(z) = \left(z-\gamma_1\right)^{n_1} Q(z)$$

Entonces:

1º) Evidentemente**,** $P_n(z)$ es divisible exactamente por $\left(z-\gamma_1\right)^{n_1}$,

2º) Si $P_n(z)$ fuera divisible exactamente por $\left(z-\gamma_1\right)^{n_1+1}$, se tendría que $Q(z)$ sería divisible exactamente por $\left(z-\gamma_1\right)$, lo que por el teorema del resto implicaría que γ_1 fuera un cero de $Q(z)$, es decir que fuera $Q\left(\gamma_1\right) = 0$.

Esto no es cierto ya que (ver**[7]**):

$$Q\left(\gamma_1\right) = a_n\underline{\left(\gamma_1-\gamma_2\right)}^{n_2} \ldots\ldots \underline{\left(\gamma_1-\gamma_k\right)}^{n_k} \neq 0$$

No nulos por ser $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ todos distintos entre sí (ver **[6]**)

Es decir que $P_n(z)$ no es divisible exactamente por $\left(z-\gamma_1\right)^{n_1+1}$**.**

POL VI.3

Sea $S(z)$ un polinomio que sea un divisor exacto de $P_n(z)$. Existe entonces un polinomio cuociente Q(z) tal que:

$$P_n(z) = S(z)\,Q(z)$$

Suponiendo que γ sea un cero de $S(z)$ se tiene que:

$$P_n(\gamma) = S(\gamma)Q(\gamma) \underset{\uparrow}{=} 0$$

Por ser γ un cero de $S(z)$

Con lo que resulta que γ es también un cero de $P_n(z)$.

Como lo mismo ocurre con todos los otros ceros que pueda tener $S(z)$ se tiene que:

<u>Los ceros de todo polinomio $S(z)$ que sea un divisor exacto de $P_n(z)$ son también ceros de $P_n(z)$</u>**.** <u>Su multiplicidad en $S(z)$ será menor o igual que su multiplicidad en $P_n(z)$</u>**.**

POL VII

<u>Polinomios con ceros idénticos de la misma multiplicidad</u>

Sean $P_n(z)$ y $P_n^*(z)$ polinomio tal como enunciado. Poniéndolos en su forma factoreada resulta que:

$$\frac{P_n(z)}{P_n^*(z)} = \frac{a_n\left(z-\gamma_1\right)^{n_1}\left(z-\gamma_2\right)^{n_2}\,\ldots\ldots\left(z-\gamma_k\right)^{n_k}}{b_n\left(z-\gamma_1\right)^{n_1}\left(z-\gamma_2\right)^{n_2}\,\ldots\ldots\left(z-\gamma_k\right)^{n_k}} = \frac{a_n}{b_n}$$

Con lo que resulta que <u>dichos polinomios sólo pueden diferir en un factor de proporcionalidad</u>.

POL VIII

<u>Máximo común divisor de polinomios</u>

POL VIII. 1

a. <u>Se define que el polinomio $T(z)$ es un máximo común divisor (MCD) de los polinomios $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ cuando y sólo cuando</u>**:**

1º) <u>$T(z)$ divide exactamente a $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$</u>**.**

2º) <u>No existe ningún polinomio de grado superior al de $T(z)$ que divida exactamente a $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$</u>**.**

b. Supóngase que $T(z)$ sea un MCD de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$. Entonces, tal como enunciado en **a**, deben existir polinomios $Q_A(z)$, $Q_B(z),\ldots,Q_N(z)$ tales que:

$$A(z)=T(z)Q_A(z)\ ,\ B(z)=T(z)Q_B(z),\ldots,\ldots\ldots\ldots,N(z)=T(z)Q_N(z)$$

Sea una constante cualquiera $k \neq 0$. Se tiene que:

$$A(z)=kT(z)\left[\frac{1}{k}Q_A(z)\right],\ B(z)=kT(z)\left[\frac{1}{k}Q_B(z)\right],\ldots,N(z)=kT(z)\left[\frac{1}{k}Q_N(z)\right]$$

y entonces:

1º) El polinomio $k\,T(z)$ divide exactamente $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$.

2º) No existe ningún polinomio de grado superior al de $k\,T(z)$ que divida exactamente a $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$. Si existiera, como $k\,T(z)$ y $T(z)$ tienen el mismo grado se tendría que existiría un polinomio de grado superior al de $T(z)$ que divide exactamente a $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$, lo que implicaría que $T(z)$ no fuera un MCD de dichos polinomios, la cual es contra hipótesis.

Por lo tanto: Si $T(z)$ es un MCD de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$**,** se tiene que $k\,T(z)$ también lo es, siendo k una constante cualquiera no nula**.**
Es decir que la existencia de un MCD de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$, implica la existencia de infinitos MCD de dichos polinomios.

c. Supóngase que los polinomios $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$**,** tengan dos MCD, $T^1(z)$ y $T^2(z)$ (que deben ser del mismo grado ya que de lo contrario se tendría que el de menor grado no sería un MCD), tales que no tengan exactamente los mismos ceros. Por ejemplo, supóngase que:

$$T^1(z)=(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)^2(z-\gamma_3)$$

$$T^2(z)=(z-\gamma_4)^2(z-\gamma_2)\ (z-\gamma_3)$$

Esto implicaría que $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$**,** sean todos divisibles por:

$$(z-\gamma_1),\ (z-\gamma_2)^2,\ (z-\gamma_3)\ ,\ (z-\gamma_4)^2$$

lo que determinaría que $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$**,** sean todos divisibles por:

$$C(z)=(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)^2(z-\gamma_3)(z-\gamma_4)^2$$

Este divisor es de grado 6 con lo cual resultaría que $T^1(z)$ y $T^2(z)$ (ambos de grado 4) no sean MCD´S de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ lo cual es contra la hipótesis.
Por lo tanto, $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ no pueden tener dos MCD que tengan distintos ceros.

d. Supóngase que los polinomios $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ tengan dos MCD (del mismo grado) que tengan los mismos ceros, pero que dichos ceros no tengan la misma multiplicidad. Por ejemplo, supóngase que dichos MCD sea:

$$T^3(z) = (z-\gamma_1)(z-\gamma_2)^2(z-\gamma_3)^2$$

$$T^4(z) = (z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ (z-\gamma_3)^3$$

Esto implicaría que $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ sean todos divisible por:

$$(z-\gamma_1),\ (z-\gamma_2)^2,\ (z-\gamma_3)^3,$$

lo que determinaría que $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ sean todos divisibles por:

$$D(z) = (z-\gamma_1)(z-\gamma_2)^2(z-\gamma_3)^3$$

Este divisor es de grado 6 con lo cual resultaría que $T^3(z)$ y $T^4(z)$ (ambos de grado 5) no sean MCD´S de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$, lo cual es contra hipótesis.
Por lo tanto, $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ no pueden tener dos MCD con los mismos ceros, pero tales que su multiplicidad sea distinta.

e. Por lo visto en **b**, **c** y **d** se tiene entonces que:
1º) Si $T(z)$ es un MCD de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$**,** se tiene que $k\ T(z)$ también lo es, siendo k una constante cualquiera no nula.
2º) No existe ningún MCD de $A(z)$, $B(z)$, ..., $N(z)$ que no sea igual a $T(z)$ multiplicado por una constante.

POL VIII.2

Puede hallarse el MCD de dos polinomios por "tracción a sangre" mediante el método indicado en el Apéndice A.POL III.
Dicho método resulta a menudo de aplicación bastante engorrosa y pesada, por lo que se recomienda el uso de un software adecuado (por ej. MATHEMATICA) para resolver este tipo de problema.

POL VIII.3

Supóngase ahora que se desee hallar el MCD de varios polinomios, por ejemplo $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ y $D(z)$.

Se empezará por hallar el MCD de $A(z)$ y $B(z)$. Llámese $T^1(z)$ a dicho MCD.

A continuación hállese el MCD de $T^1(z)$ y $C(z)$. Llámese $T^2(z)$ a dicho MCD.

Por ultimo, hállese el MCD de $T^2(z)$ y $D(z)$. Llámese $T^3(z)$ a dicho MCD.

Evidentemente, este polinomio $T^3(z)$ será el MCD de los polinomios $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ y $D(z)$. Es obvio que este procedimiento es extensivo para hallar el MCD de cualquier cantidad de polinomios.

POL VIII.4

Si el MCD de dos polinomios $A(z)$ y $B(z)$, es una constante, se dirá que $A(z)$ y $B(z)$ son primos entre sí.

POL IX

Ceros múltiples de un polinomio entero (Raíces múltiples de una ecuación algebraica entera)

POL IX. 1

a. Sea un polinomio cuya forma factoreada es:

$$P_n(z) = a_n(z-\gamma_1)^{n_1}(z-\gamma_2)^{n_2}\dots(z-\gamma_k)^{n_k} \qquad \textbf{[1]}$$

Según definición, este polinomio tiene un cero γ_1 de multiplicidad n_1, un cero γ_2 de multiplicidad n_2, ..., y un cero γ_k de multiplicidad n_k.
Considérese el cero γ_1 de multiplicidad n_1. Póngase:

$$Q(z) = a_n(z-\gamma_2)^{n_2}\dots(z-\gamma_k)^{n_k} \qquad \textbf{[2]}$$

Evidentemente:

γ_1 no es un cero de $Q(z)$, es decir de $Q(\gamma_1) \neq 0$ **[3]**

Por **[1]** y **[2]** es:

$$P_n(z) = (z-\gamma_1)^{n_1}Q(z) \qquad \textbf{[4]}$$

Aplicando formalmente a **[4]** las fórmulas de la derivación resulta:

$$P'_n(z) = n_1(z-\gamma_1)^{n_1-1}Q(z) + (z-\gamma_1)^{n_1}Q'(z)$$

es decir que:

$$P'_n(z) = (z-\gamma_1)^{n_1-1}\left[n_1Q(z) + (z-\gamma_1)Q'(z)\right] \qquad \textbf{[5]}$$

Notar lo siguiente:
Como los coeficientes de $P_n(z)$ pueden ser reales o complejos y como z es una variable compleja, mientras no se haya definido a la derivación en el campo complejo no podrá decirse que la expresión de $P'_n(z)$ indicada en **[5]** sea en efecto la derivada funcional de

$P_n(z)$. Para evitar esta dificultad se considerará que $P_n'(z)$, $P_n''(z)$, etc., son simplemente polinomios obtenidos mediante el mecanismo usado para derivar polinomios en el campo real, y nada más.
No se considerará por el momento que $P_n'(z)$ y $P_n''(z)$, etc., sean derivadas en el verdadero sentido de la palabra (a pesar de que, una vez definida la derivación en el campo complejo, resulte que en efecto son derivadas con todas la de la ley).

b. Considérese la expresión **[5]**. Allí se tiene que:

1º) $P_n'(z)$ es divisible exactamente por $(z-\gamma_1)^{n-1}$

2º) $P_n'(z)$ **no** es divisible exactamente por $(z-\gamma_1)^n$ ya que de serlo se tendría (ver **[5]**) que:

$$n_1Q(z)+(z-\gamma_1)Q'(z)$$

sería divisible exactamente por $(z-\gamma_1)$, lo que por el teorema del resto determinaría que fuera:

$$n_1Q(\gamma_1)+\underbrace{(\gamma_1-\gamma_1)}_{=0}Q'(\gamma_1)=0$$

Es decir, que fuera $Q(\gamma_1)=0$, lo cual no ocurre, según lo indicado en **[3]**.
Entonces, por lo indicado en **a** de POL VI.2 resulta <u>que γ_1 es un cero de multiplicidad n - 1 de $P_n'(z)$.</u>
Como idéntico trabajo podría realizarse con todos los ceros múltiples de $P_n(z)$, se tiene que:

<u>Todos los ceros múltiples de $P_n(z)$ son también ceros de $P_n'(z)$, con una multiplicidad una unidad menor</u>. **[6]**

c. Se demostrará que:

<u>Ningún cero simple de $P_n(z)$ es cero de $P_n'(z)$</u> **[7]**

En efecto, si δ es un cero simple de $P_n(z)$ resulta que:

$$P_n(z)=(z-\delta)S(z) \qquad \textbf{[8]}$$

teniéndose que por ser δ un cero simple de $P_n(z)$ resulta que:

δ <u>no</u> es un cero de $S(z)$, es decir que $S(\delta)\neq 0$ **[9]**

"Derivando" a **[8]** se obtiene:

$$P_n'(z)=(z-\delta)S'(z)+S(z)$$

y entonces:

$$P'_n(\delta) = \underbrace{(\delta-\delta)}_{=0}S'(\delta) + S(\delta) \neq 0 \quad \longleftarrow \text{por } \mathbf{[9]}$$

quedando así probado lo propuesto.

d. Por **[6]** y **[7]** resulta que:

Los únicos ceros comunes de $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ son los ceros múltiples de $P_n(z)$. **[10]**

Por todo lo visto hasta ahora resulta que $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ en forma factoreada tomarán el siguiente aspecto:

$$P_n(z) = a_n \underbrace{(z-\gamma_1)^{n_1} \ldots (z-\gamma_i)^{n_i}}_{\text{Ceros múltiples de } P_n(z)} \underbrace{(z-\gamma_{i+1}) \ldots (z-\gamma_k)}_{\text{Ceros simples de } P_n(z)}$$

$$P'_n(z) = a_n (z-\gamma_1)^{n_1-1} \ldots (z-\gamma_i)^{n_i-1} (z-\delta_1) \ldots (z-\delta_l)$$

siendo $\gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_l$ todos distintos entre sí.

Como según visto en POL VI.3 se tiene que todo divisor exacto de $P_n(z)$ y de $P'_n(z)$ tiene como posibles ceros a $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$, resulta que el divisor común de $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ del mayor grado posible, es decir un MCD de $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ será:

$$T(z) = (z-\gamma_1)^{n_1-1} \ldots (z-\gamma_i)^{n_i-1} \text{ MCD de } P_n(z) \text{ y } P'_n(z)$$

Por lo tanto:

Los únicos ceros múltiples de un polinomio $P_n(z)$ son los ceros de un MCD de $P_n(z)$ y $P'_n(z)$, donde tendrán una multiplicidad una unidad menor que en $P_n(z)$.

e. La conclusión obtenida en **c** indica que si $P_n(z)$ tiene únicamente ceros simples, entonces $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ no tendrán ningún cero en común.

Por lo tanto, en este caso el MCD de $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ será una constante no nula, siendo entonces $P_n(z)$ y $P'_n(z)$ primos entre sí.

POL X

Ecuaciones binómicas

Son las que pueden ser expresadas bajo la forma:

$$z^n + az^m = 0 \text{ , siendo } n > m \text{ y } a \neq 0 \qquad \textbf{[1]}$$

Esta ecuación también puede ser puesta bajo la forma:

$$z^m\left(z^{n-m} + a\right) = 0 \qquad \textbf{[2]}$$

evidenciándose así que:

1º) 0 (cero) es una raíz de multiplicidad *m* de esta ecuación ya que el polinomio $z^m\left(z^{n-m} + a\right)$ es divisible exactamente por $(z-0)^m$ y no lo es por $(z-0)^{m+1}$

2º) Cada una de las raíces *n* - *m* del numero - *a* es una raíz de las ecuaciones **[1]** y **[2]** ya que en cuando en ellas *z* asuma uno cualquiera de dichos valores se obtendrá un enunciado cierto.

Por lo tanto, las ecuaciones **[1]** y **[2]** tienen una raíz de multiplicidad *m* (el número 0), y *n* - *m* raíces simples(las raíces *n* - *m* de - *a*)**.**

Observación importante

En este párrafo y en los que siguen la palabra "raíz" va asociada tanto a la frase "raíz de la ecuación tal" (valor de la variable que satisface a dicha ecuación) como la frase "raíz *k* del número tal" (número que elevado a la potencia *k* es igual a dicho numero).

Por favor no confundir aserrín con pan rallado.

POL XI

Ecuaciones algebraicas enteras de 2º grado

a. Son los que pueden ser puestas bajo la forma:

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a,\ b,\ c \neq 0 \qquad \textbf{[1]}$$

Esta ecuación puede tomar sucesivamente los siguientes aspectos:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[z^2 + 2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left[\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \qquad \textbf{[2]}$$

El número $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ tiene dos raíces cuadradas. <u>Elíjase una cualquiera de ellas</u> y desígnesela con el símbolo $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ (lo que implica que la otra raíz cuadrada de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ sea $-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$).

Entonces, por **[2]** resulta que la ecuación **[1]** también puede ser indicada de las siguientes maneras:

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2=0$$

$$\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]=0$$

$$\left[z-\left(-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right]\left[z-\left(-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right]=0 \qquad \textbf{[3]}$$

Por lo tanto:

1º) Si es $b^2-4ac=0$ se tiene por **[3]** que la ecuación **[1]** toma el aspecto:

$$\left[z-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2=0$$

Es decir que:

si es $b^2-4ac=0$ la ecuación **[1]** tiene una raíz doble igual a $-\frac{b}{2a}$ **[4]**

2º) Por **[3]** se tiene también que:

Si es si es $b^2-4ac\neq 0$, la ecuación **[1]** tiene dos raíces simples:

$$-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \text{y} \qquad -\frac{b}{2a}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

siendo $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ una <u>cualquiera</u> de las raíces cuadradas de $\frac{b^2-4ac}{2a}$ **[5]**

b. Por lo general, lo indicado en **[4]** y **[5]** se simboliza como:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1,\gamma_2 = \text{Raíces de la ecuación } \mathbf{[1]} = -\dfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \\ \text{donde el símbolo } \sqrt{b^2-4ac} \text{ indica a una cualquiera de las raíces} \\ \text{cuadradas de } b^2-4ac. \end{array}\right\} \quad \mathbf{[6]}$$

POL XII

<u>Ecuaciones bicuadradas</u>

a. Son las que pueden ser puestas bajo la forma:

$$az^4 + bz^2 + c = 0; \qquad a,\ b,\ c \neq 0 \qquad \mathbf{[1]}$$

lo que también puede ser indicado como:

$$a\left(z^2\right)^2 + b\left(z^2\right) + c = 0; \qquad a,\ b,\ c \neq 0 \qquad \mathbf{[2]}$$

expresión que constituye una ecuación entera en z^2 (además, de seguir siendo una ecuación bicuadrada en z).
Entonces, según indicado en **[3]** de POL XI, la expresión **[2]**, y por lo tanto la **[1]**, pueden ser puestas bajo la forma;

$$\left[z^2 - \left(-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right]\left[z^2 - \left(-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right] = 0 \qquad \mathbf{[3]}$$

donde $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ es el símbolo de una <u>cualquiera</u> de las raíces cuadradas de $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.
Poniendo:

$$\sqrt{-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \text{Una cualquiera de las raíces cuadradas de } \left(-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$$

$$\sqrt{-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \text{Una cualquiera de las raíces cuadradas de} \left(-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$$

resulta entonces por **[3]** que la ecuación **[1]** puede ser puesta sucesivamente bajo las siguientes formas:

$$\left[z^2-\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right)^2\right]\bullet\left[z^2-\left(\sqrt{-\frac{b}{4a^2}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right)^2\right]=0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[z-\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right)\right]\bullet\left[z-\left(-\sqrt{-\frac{b}{4a^2}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right)\right]\bullet\\
&\left[z-\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right)\right]\bullet\left[z-\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right)\right]=0
\end{aligned}\right\}\quad \mathbf{[4]}$$

Entonces:

1º) Si es $b^2-4ac=0$, se tiene entonces por **[4]** que la ecuación **[1]** tomará el aspecto:

$$\left[z-\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)\right]^2\bullet\left[z-\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)\right]^2=0$$

De donde resulta que:

Si es $b^2-4ac=0$, la ecuación **[1]** tendrá dos raíces dobles, iguales respectivamente a las raíces cuadradas $(-\frac{b}{2a})$. **[5]**

2º) Por **[4]** se tiene también que:

Si es $b^2-4ac\neq 0$, la ecuación **[1]** tendrá 4 raíces simples, iguales respectivamente a:

$$\sqrt{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\ ;-\sqrt{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\ ;\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\ ;-\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}$$

Siendo:

$\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ = Una cualquiera de las raíces cuadradas de $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\sqrt{-\dfrac{b}{2a}-\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}}$ = Una cualquiera de las raíces cuadradas de $-\dfrac{b}{2a}-\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\sqrt{-\dfrac{b}{2a}+\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}}$ = Una cualquiera de las raíces cuadradas de $-\dfrac{b}{2a}+\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$

[6]

b. Por lo general, lo indicado en **[5]** y **[6]** simboliza como:

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ = raíces de la ecuación **[1]** =

$$=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

donde:

$\sqrt{b^2-4ac}$ = Una cualquiera de las raíces cuadradas de b^2-4ac

$\sqrt{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ = Una cualquiera de las raíces cuadradas de $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\sqrt{\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ = Una cualquiera de las raíces cuadradas de $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

[7]

POL XIII

<u>Ecuaciones algebraicas de orden tercero y superior</u>

a. Para las ecuaciones algebraicas enteras <u>completas</u> de 3º y 4º grado:

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \ , \qquad a_3, a_2, a_1, a_0 \neq 0$$

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \, , \qquad a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \neq 0$$

existen fórmulas algebraicas que dan sus soluciones, pero su aplicación es lo suficientemente pesada como para ser preferible encarar su solución por métodos numéricos, que pueden ser tan precisos como se quiera.

b. En cuanto a la resolución de ecuaciones algebraicas enteras completas de grado superior al 4º, el noruego Niels Abel demostró que no pueden existir fórmulas algebraicas que den sus soluciones exactas. Sin embargo, existen casos particulares de ecuaciones de grado superior al 4º (ecuaciones no completas) para las cuales sí existen fórmulas que dan sus soluciones exactas (por ejemplo, el caso de las ecuaciones binómicas de cualquier grado).
Es decir que, en la mayoría de los casos, para ecuaciones de grado superior al 4º no hay más remedio que encarar su resolución por métodos numéricos,

c. En el Software MATHEMATICA u otro similar están incorporados los algoritmos de los antedichos métodos numéricos, los cuales permiten resolver fácilmente ecuaciones algebraicas enteras de cualquier grado (y con cualquier tipo de coeficientes, reales o complejos).

POL XIV

Desarrollo de cocientes de polinomios en fracciones parciales

POL XIV.1

Puede demostrarse (ver Apéndice A.POL IV) que:
Dados dos polinomios $F(z)$ y $H(z)$ tales que el grado de $F(z)$ sea menor que el grado $H(z)$, si la forma factoreada de $H(z)$ es:

$$H(z) = a_n (z - \gamma_1)^{n_1} (z - \gamma_2)^{n_2} \ldots\ldots (z - \gamma_k)^{n_k}$$

Se tiene que el cociente de dichos polinomios puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}\frac{F(z)}{H(z)} &= \frac{b_1^1}{(z-\gamma_1)^{n_1}} + \frac{b_2^1}{(z-\gamma_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{b_{n_1}^1}{(z-\gamma_1)} + \\ &+ \frac{b_1^2}{(z-\gamma_2)^{n_2}} + \frac{b_2^2}{(z-\gamma_2)^{n_2-1}} + \ldots + \frac{b_{n_2}^2}{(z-\gamma_2)} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \frac{b_1^k}{(z-\gamma_k)^{n_k}} + \frac{b_2^k}{(z-\gamma_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{b_{n_k}^k}{(z-\gamma_k)}\end{aligned} \qquad \textbf{[1]}$$

teniéndose que uno o más cocientes b_j^i pueden eventualmente ser nulos.

POL XIV.2

Aplicación. Se desarrollará en fracciones parciales a:

$$\frac{F(z)}{H(z)} = \frac{2z^2+3z+5}{(z+1)^2(z+2)} \qquad \textbf{[2]}$$

Tal como indicado en **[1]**, existe un desarrollo de *F*(*z*) / *H*(*z*) que toma la forma:

$$\frac{F(z)}{H(z)} = \frac{b_1^1}{(z+1)^2} + \frac{b_2^1}{(z+1)} + \frac{b_1^2}{(z+2)} \qquad \textbf{[3]}$$

(donde por el momento b_1^1, b_2^1 y b_1^2 son desconocidos).
Reduciendo el 2º miembro de **[3]** a común denominador resulta:

$$\frac{F(z)}{H(z)} = \frac{b_1^1(z+2)+b_2^1(z+1)(z+2)+b_1^2(z+1)^2}{(z+1)^2(z+2)} = \frac{\left(b_2^1+b_1^2\right)z^2+\left(b_1^1+3b_2^1+2b_1^2\right)z+\left(2b_1^1+2b_2^1+b_1^2\right)}{(z+1)^2(z+2)}$$

Comparando esta expresión con la **[2]** resulta que debe tenerse que:

$$\begin{cases} b_2^1 + b_1^2 = 2 \\ b_1^1 + 3b_2^1 + 2b_1^2 = 3 \\ 2b_1^1 + 2b_3^1 + b_1^2 = 5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$$b_1^1 = 4 \qquad b_2^1 = -5 \qquad b_1^2 = 7$$

y reemplazando en **[3]** estos valores se obtiene el desarrollo de fracciones parciales buscado:

$$\frac{F(z)}{H(z)} = \frac{2z^2 + 3z + 5}{(z+1)^2(z+2)} = \frac{4}{(z+1)^2} - \frac{-5}{(z+1)} + \frac{7}{z+2}$$

POL XIV.3

Aplicación. Se desarrollará en fracciones parciales a:

$$\frac{P(z)}{H(z)} = \frac{z^3 + z^2 + z + 3}{z^2 - 1} \qquad \textbf{[4]}$$

En este caso el grado del numerador es superior al de denominador. Para obviar esta dificultad se divide a $P(z)$ por $\left(z^2 - 1\right)$, obteniéndose un cociente igual a $z+1$ y un resto igual a $2z+4$. Entonces.

$$\frac{P(z)}{H(z)} = (z+1) + \overbrace{\frac{2z+4}{z^2-1}}^{F(z)} \qquad \textbf{[5]}$$

Se procederá a continuación a desarrollar en fracciones parciales a:

$$\frac{F(z)}{H(z)} = \frac{2z+4}{(z+1)(z-1)} \qquad \textbf{[6]}$$

Según indicado en **[1]**, existe un desarrollo de $F(z) / H(z)$ que toma la forma:

$$\frac{F(z)}{H(z)} = \frac{b_1^1}{(z+1)} + \frac{b_1^2}{(z-1)} \qquad \textbf{[7]}$$

(Donde b_1^1 y b_2^1 son por el momento desconocidos).

Reduciendo a común denominador al 2º miembro de **[7]** resulta.

$$\frac{F(z)}{H(z)}=\frac{b_1^1(z-1)+b_1^2(z+1)}{(z+1)(z-1)}=\frac{\left(b_1^1+b_1^2\right)z+\left(-b_1^1+b_1^2\right)}{(z+1)(z-1)}$$

comparando esta expresión con la **[6]** resulta que debe tenerse que:

$$\begin{cases} b_1^1+b_1^2=2 \\ \\ -b_1^1+b_1^2=4 \end{cases}$$

resolviendo este sistema se obtiene:

$$b_1^1=-1 \qquad\qquad b_1^2=3$$

reemplazando estos valores en **[7]** resulta que:

$$\frac{F(z)}{H(z)}=\frac{-1}{(z+1)}+\frac{3}{(z-1)} \qquad \textbf{[8]}$$

y entonces, por **[5]**, **[6]** y **[8]** se obtiene:

$$\frac{P(z)}{H(z)}=\frac{z^3+z^2+z+3}{z^2-1}=(z+1)+\frac{-1}{(z+1)}+\frac{3}{(z-1)}$$

<u>Notar que en este ejemplo, se ha indicado el "modus operandi" a adoptar en el caso en que, se necesite el desarrollo en fracciones parciales de un cociente de polinomios, en el cual el grado del polinomio numerador sea igual o mayor que el del polinomio denominador</u>**.**

Nota: Para este tipo de problemas lo más indicado es el empleo del software MATHEMATICA.

POL XV

<u>Ceros complejos de polinomios con coeficientes reales</u>

a. Sea $P_n(z)$ un polinomio entero en z de grado n tal que todos sus coeficientes sean reales.

$$P_n(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2 z^2+a_1 z+a_0 \qquad \textbf{[1]}$$

Supóngase que γ sea un cero complejo de este polinomio. Entonces será

$$a_n\gamma^n+a_{n-1}\gamma^{n-1}+\ldots+a_2\gamma^2+a_1\gamma+a_0=0$$

y por lo tanto serán sucesivamente:

$$\overline{a_n\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \ldots + a_2\gamma^2 + a_1\gamma + a_0} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{a_n\gamma^n} + \overline{a_{n-1}\gamma^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2\gamma^2} + \overline{a_1\gamma} + \overline{a}_0 = 0$$

y como:

1º) $\overline{a_i} = a_i$ por ser todas las a_i reales

2º) $\overline{\gamma^k} = \left(\overline{\gamma}\right)^k$

resulta que:

$$a_n\left(\overline{\gamma}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{\gamma}\right)^{n-1} + \ldots + a_2\left(\overline{\gamma}\right)^2 + a_1\left(\overline{\gamma}\right) + a_0 = 0 \qquad \textbf{[2]}$$

de donde resulta que $\overline{\gamma}$ también es un cero de $P_n(z)$.

Es decir que si γ un cero complejo de un polinomio entero con coeficientes reales, se tiene que $\overline{\gamma}$ será otro cero complejo del mismo**.**

b. Sea $P_n(z)$ un polinomio con coeficientes reales que tenga un cero complejo γ de multiplicidad k. Entonces, por lo visto en **a** se tiene que $\overline{\gamma}$ también es un cero de $P_n(z)$, y entonces $P_n(z)$ es divisible por $(z-\gamma)\left(z-\overline{\gamma}\right)$, y como:

$$(z-\gamma)\left(z-\overline{\gamma}\right) = \left(z^2 - \gamma z - \overline{\gamma} z + \gamma\,\overline{\gamma}\right) = z^2 - \left(\gamma + \overline{\gamma}\right) z + \gamma\,\overline{\gamma} = z^2 - 2R(\gamma) + |\gamma|^2$$

se tiene que $(z-\gamma)\left(z-\overline{\gamma}\right)$ es un polinomio de grado 2 y coeficientes reales.

Entonces:

$$P_{n-2}(z) = \frac{P_n(z)}{(z-\gamma)\left(z-\overline{\gamma}\right)}$$

es un polinomio de grado ***n* - 2** y coeficientes reales.

Evidentemente, γ será un cero complejo de $P_{n-2}(z)$ de multiplicidad k - 1, y entonces $\overline{\gamma}$ también será un cero complejo de multiplicidad k - 1 de $P_{n-2}(z)$.

Aplicando a $P_{n-2}(z)$ el mismo razonamiento que se aplicó a $P_n(z)$ se obtendrá un polinomio $P_{n-4}(z)$ de grado n - 4 con coeficientes reales, en el cual γ y $\overline{\gamma}$.son ceros de multiplicidad k-1

Continúese con el mismo algoritmo hasta llegar a un polinomio $P_{n-2k}(z)$ del cual γ **no sea un cero.**

Si $\overline{\gamma}$ fuera un cero de $P_{n-2k}(z)$, entonces su conjugado γ también tendría que ser un cero de dicho polinomio, lo cual, según recién indicado, no ocurre.

Por lo tanto, tanto γ como $\overline{\gamma}$ han de ser ceros de multiplicidad k.

Resumiendo

Si un polinomio con coeficientes reales tiene un cero complejo de una cierta multiplicidad, su conjugado también será un cero de la misma multiplicidad de dicho polinomio.

Apéndices del capítulo sobre polinomios

A.POL I

a. Se demostrará que los coeficientes de todo polinomio idénticamente nulo son todos nulos**.**

b. Se efectuará dicha demostración mediante el principio de inducción completa, según el cual para probar lo propuesto basta probar que:

1º) Todo polinomio idénticamente nulo de grado 1 tiene todos sus coeficientes nulos**.**
Sea el polinomio:

$$P_1(z) = a_1 z + a_0 \equiv 0$$

Haciendo en él $z = 0$, resulta que debe ser $a_0 = 0$, y por lo tanto se tiene que:

$$P_1(z) = a_1 z \equiv 0$$

Haciendo ahora $z = 1$ resulta que también debe ser $a_1 = 0$.
Queda satisfecho este primer requisito del principio de inducción completa.

2º) Si todo polinomio idénticamente nulo de un cierto grado k debe tener todos sus coeficientes nulos, entonces ocurrirá lo propio con todo polinomio idénticamente nulo de grado $k + 1$**.**
Sea:

$$P_{k+1}(z) = a_{k+1} z^{k+1} + a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + ... + a_1 z + a_0 \equiv 0 \qquad \textbf{[1]}$$

Evidentemente, si $P_{k+1}(z) \equiv 0$, también será $P_{k+1}(2z) \equiv 0$. Por lo tanto:

$$P_{k+1}(2z) = 2^{k+1} a_{k+1} z^{k+1} + 2^k a_k z^k + 2^{k-1} a_{k-1} z^{k-1} + ... + 2a_1 z + a_0 \equiv 0 \qquad \textbf{[2]}$$

Como según es obvio que:
Multiplicando un polinomio idénticamente nulo por una constante se obtiene otro polinomio idénticamente nulo.
· Restando un polinomio idénticamente nulo de otro se obtiene un tercer polinomio idénticamente nulo.
se obtiene que multiplicando a **[1]** por 2^{k+1} y restándole luego **[2]** se obtiene:

$$\left(2^{k+1} - 2^k\right) a_k z^k + \left(2^{k+1} - 2^{k-1}\right) a_{k-1} z^{k-1} + ... + \left(2^{k+1} - 2\right) a_1 z + \left(2^{k+1} - 1\right) a_0 \equiv 0 \qquad \textbf{[3]}$$

Si, tal como supuesto, el polinomio idénticamente nulo de grado k indicado en **[3]** tiene todos sus coeficientes nulos, se tendrá entonces que:

$$\left(2^{k+1} - 2^k\right) a_k = 0 \ , \ \left(2^{k+1} - 2^{k-1}\right) a_{k-1} = 0 \ , ... , \ \left(2^{k+1} - 2\right) a_1 = 0 \ , \ \left(2^{k+1} - 1\right) a_0 = 0$$

lo que implica que sean:

$$a_k = a_{k-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$$

Remplazando este resultado en **[1]** se obtiene que:

$$P_{k+1}(z) = a_{k+1} z^{k+1} \equiv 0$$

y haciendo entonces $z = 1$ resulta que también debe ser $a_{k+1} = 0$ con lo que resulta que todos los coeficientes de $P_{k+1}(z) \equiv 0$ deben ser nulos.
Queda así verificado el 2º requisito del principio de inducción completa.
Por lo tanto, queda demostrado lo enunciado en **a**.

A.POL II

Teorema de Liouville (Este teorema y el Teorema Fundamental del Algebra pertenecen en realidad a la Teoría de las Funciones de Variables Complejas, tema que será visto por el lector en un feliz futuro).

A.POL II.1

a. Se demostrará que si $f(z)$ es analítica y $|f(z)|$ es acotada en el todo el plano complejo, entonces $f(z)$ es una constante.

b. Si $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, tomando un punto z_0 cualquiera y una circunferencia

$$C_0 = \{z / |z - z_0| = r_0\}$$

se tiene que:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

Si M es el valor máximo de $|f(z)|$ sobre C_0 resulta que:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} . \frac{M}{r_0^2} 2\pi . r_0 = \frac{M}{r_0} \qquad \textbf{[1]}$$

Ahora bien, si M es una cota superior de $|f(z)|$ en todo el plano complejo, entonces será:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r_0}$$

y como $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, entonces r_0, radio de la circunferencia C_0, puede ser tomado tan grande como se desee, resultando entonces que:

$$f'(z_0) = 0 \qquad \forall z_0$$

y entonces:

$$f(z) = constante$$

<u>Teorema Fundamental del Álgebra</u>

A.POL II.2

a. Se demostrará que todo polinomio de grado 1 o mayor:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad \textbf{[1]}$$

tiene por lo menos un cero.

b. Se demostrará este teorema por el absurdo.

Supóngase que $P_n(z)$ **no tenga ningún cero** **[2]**

lo que implica que sea:

$$|P_n(z)| > 0 \qquad \forall\, z$$

Sea m el extremo inferior de $|P_n(z)|$, $\forall\, z$. Si fuera $m = 0$ entonces $P_n(z)$ tendría uno o más ceros lo cual contradeciría lo supuesto en **[2]**.

Por lo tanto dicha suposición implica que:

$$m > 0$$

Sea:

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)} \qquad \textbf{[3]}$$

Entonces:

1°) Por ser $P_n(z)$ analítica en todo el plano z, entonces $f(z)$ será analítica donde $P_n(z) \neq 0$. Como se supuso que $P_n(z)$ no tiene ningún cero, resultaría entonces que:

$f(z)$ es analítica en todo el plano complejo. **[4]**

2°) $|f(z)| \leq \dfrac{1}{m}$ en todo el plano complejo, y entonces:

$|f(z)|$ es acotada en todo el plano complejo. **[5]**

Entonces, por **[4]** y **[5]** y por el teorema de Liouville resulta que $f(z)$ debería ser una constante, debiendo entonces (ver **[3]**) ser $P_n(z)$ también una constante, lo cual es evidentemente falso.

Como se llegó a esta conclusión falsa en base a lo supuesto en **[7]**, dicha suposición es falsa, y por lo tanto $P_n(z)$ **<u>tiene por lo menos un cero.</u>**

A.POL III

A.POL III.1

a. A continuación se demostrará como hallar un MCD de dos polinomios.
Sean A(z) y B(z) polinomios de grados n_1 y n_2 respectivamente. Supóngase que sea $n_1>n_2$.
Procédase como sigue:

1º) Divídase A(z) por B(z). Llámense $Q^1(z)$ y $R^1(z)$ a los polinomios cociente y resto de esta división. Evidentemente, el grado de $R^1(z)$ será inferior al de B(z).

2º) Divídase a B(z) por $R^1(z)$. Llámense $Q^2(z)$ y $R^2(z)$ a los polinomios cociente y resto de esta división. Evidentemente, el grado de $R^2(z)$ será inferior al de $R^1(z)$.

3º) Divídase $R^1(z)$ por $R^2(z)$. Llámense $Q^3(z)$ y $R^3(z)$ a los polinomios cociente y resto de esta división. Evidentemente, el grado de $R^3(z)$ será inferior al de $R^2(z)$.

4º) Divídase a $R^2(z)$ por $R^3(z)$. Llámense $Q^4(z)$ y $R^4(z)$ a los polinomios cociente y resto de esta división. Evidentemente, el grado de $R^4(z)$ será inferior al de $R^3(z)$.

Etc., etc.

Evidentemente el grado de los sucesivos polinomios resto que aparecen va disminuyendo, hasta que por fin se encuentra un polinomio resto de grado 0, es decir, una constante, **que puede o no ser nula**. En ese momento se considera terminado el proceso de divisiones sucesivas recién considerado.

Suponiendo que, por ejemplo, el 6° polinomio resto sea una constante, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{ll}
A(z)=B(z)Q^1(z)+R^1(z) & (1.1)\\
B(z)=R^1(z)Q^2(z)+R^2(z) & (1.2)\\
R^1(z)=R^2(z)Q^3(z)+R^3(z) & (1.3)\\
R^2(z)=R^3(z)Q^4(z)+R^4(z) & (1.4)\\
R^3(z)=R^4(z)Q^5(z)+R^5(z) & (1.5)\\
R^4(z)=R^5(z)Q^6(z)+R^6\ ,\ \ R^6=constante & (1.6)
\end{array}\right\}\ \textbf{[1]}$$

Estas expresiones también pueden ser puestas bajo la forma:

$$\left.\begin{array}{ll}
R^1(z)=A(z)-B(z)Q^1(z) & (2.1)\\
R^2(z)=B(z)-R^1(z)Q^2(z) & (2.2)\\
R^3(z)=R^1(z)-R^2(z)Q^3(z) & (2.3)\\
R^4(z)=R^2(z)-R^3(z)Q^4(z) & (2.4)\\
R^5(z)=R^3(z)-R^4(z)Q^5(z) & (2.5)\\
R^6=R^4(z)-R^5(z)Q^6(z)\ \ ,\ \ R^6=constante & (2.6)
\end{array}\right\}\ \textbf{[2]}$$

b. **Supóngase que haya resultado $R^6=0$.**
Entonces:

1°) Por (1.6) resulta que $R^5(z)$ es un divisor exacto de $R^4(z)$ (ya que en este caso es $R^4(z)=R^5(z)Q^6(z)$).

2°) Por ser $R^5(z)$ un divisor exacto de sí mismo y de $R^4(z)$, es un divisor exacto del 2° miembro de (1.5), y por lo tanto, es un divisor de $R^3(z)$.

3°) Por ser $R^5(z)$ un divisor exacto de $R^4(z)$ y de $R^3(z)$, es un divisor exacto de 2° miembro de (1.4), y por lo tanto, es un divisor exacto de $R^2(z)$.

Etc., etc.

Es evidente que continuando con el mismo procedimiento se acabará por demostrar que $R^5(z)$ es un divisor exacto de B(z) y también es un divisor exacto de A(z). Por lo tanto, se tiene que $R^5(z)$ **es un común divisor de** A(z) y B(z) (pero todavía no se sabe si es un MCD).
Por otra parte, si $T(z)$ es un MCD de A(z) y B(z) se tiene que:

1°) $T(z)$ divide exactamente a A(z) y B(z) por lo tanto es un divisor exacto del 2° miembro de (2.1), lo que implica que también sea un divisor exacto de $R^1(z)$.
2°) Por ser $T(z)$ un divisor exacto de B(z) y de $R^1(z)$, es un divisor exacto del 2°miembro de (2.2), lo que implica que también sea un divisor exacto de $R^2(z)$.
3°) Por ser $T(z)$ un divisor exacto de $R^1(z)$ y de $R^2(z)$, es un divisor exacto del 2°miembro de (2.3), lo que implica que también sea un divisor exacto de $R^3(z)$.
Etc., etc.

Es evidente que, continuando con el mismo procedimiento se llegará a demostrar que $T(z)$ **es un divisor exacto de** $R^5(z)$**.**
Entonces:

1°) Por ser $T(z)$ un divisor exacto de $R^5(z)$, se tiene que el grado de $T(z)$ es menor o igual que $R^5(z)$.
2°) Evidentemente, el grado de $T(z)$ no puede ser menor que el de $R^5(z)$ pues de lo contrario $T(z)$ no sería un MCD de A(z) y de B(z), ya que entonces existiría el polinomio $R^5(z)$ de grado superior al de $T(z)$ que, según se demostró más arriba, divide exactamente a A(z) y B(z).
3°) Como entonces $R^5(z)$ y $T(z)$ tienen el mismo grado y como $T(z)$ es un divisor de $R^5(z)$ se tiene que debe ser:

$$R^5(z) = kT(z) = k\,[\text{MCD de } A(z) \text{ y } B(Z)\,],\ \text{siendo } k \text{ una constante arbitraria.}$$

lo que según visto en **e** de POL VIII.1 implica que:

$R^5(z)$ **es un MCD de** A(z) **y** B(z)**.**

c. **Supóngase que haya resultado** $R^6 \neq 0$**.**
En este caso, por un procedimiento enteramente análogo al indicado en **b** se puede demostrar que $T(z)$, MCD de A(z) y B(z), es un divisor exacto de A(z), B(z), R^1(z), R^2(z),....., **y de** $R^6(z)$**.**
Por ser $T(z)$ un divisor exacto de $R^6(z)$, que es una constante, resulta que $T(z)$, MCD de $A(z)$ y B(z), será también una constante.
En este caso se dice que A(z) y B(z) son primos entre sí.

A.POL III.2

Ejemplo: Hallar el MCD de $A(z) = z^4 + 10z^3 + 37z^2 + 58z + 30$ y de $B(z) = z^3 + 6z^2 + 12z + 7$

$$\begin{array}{l|l}
\text{A(z)} = z^4 + 10z^3 + 37z^2 + 58z + 30 & z^3 + 6z^2 + 12z + 7 = B(z) \\
\underline{\quad z^4 + 6z^3 \ + 12z^2 \ + 7z \qquad} & \mathbf{z} + 4 = Q^1(z) \\
\qquad 4z^3 + 25z^2 \ + 51z + 30 & \\
\qquad \underline{4z^3 + 24z^2 \ + 48z + 28} & \\
\qquad\quad z^2 \ + 3z \ \ + 2 = R^1(z) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} B(z) = z^3 + 6z^2 + 12z + 7 & z^2 + 3z + 2 = R^1(z) \\ \underline{z^3 + 3z^2 + 2z} & z + 3 = Q^2(z) \\ \quad 3z^2 + 10z + 7 & \\ \quad \underline{3z^2 + 9z + 6} & \\ \qquad z + 1 = R^2(z) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} R^1(z) = z^2 + 3z + 2 & z + 1 = R^2(z) \\ \underline{z^2 + z} & z + 2 = Q^3(z) \\ \quad 2z + 2 & \\ \quad \underline{2z + 2} & \\ \quad 0 = R^3(z) & \end{array}$$

Por lo tanto (por ser $R^3 = 0$):
MCD de A(z) y $B(z) = kR^2(z) = k(z+1)$, siendo k una constante arbitraria.

A.POL III.3

Considérese el nuevo proceso de obtención de restos sucesivos indicado en A.POL III.1.
Supóngase que después de hallado un resto cualquiera, digamos el $R^3(z)$, se lo multiplica por una constante cualquiera α y se continúa el proceso usando $\alpha\, R^3(z)$ en vez de $R^3(z)$. En este caso las expresiones **[2]** tomarán el aspecto:

$$\begin{aligned} R^1(z) &= A(z) - B(z)Q^1(z) \\ R^2(z) &= B(z) - R^1(z)Q^2(z) \\ R^3(z) &= R^1(z) - R^2(z)Q^3(z) \\ R^4(z) &= R^2(z) - \left[\alpha R^3(z)\right]\left[\frac{Q^4(z)}{\alpha}\right] \\ \alpha R^5(z) &= \alpha R^3(z) - R^4(z)\left[\alpha Q^5(z)\right] \\ R^6 &= R^4(z) - \left[\alpha R^5(z)\right]\left[\frac{Q^6(z)}{\alpha}\right] \end{aligned}$$

El resultado será evidentemente que en vez de restos $R^3(z)$, $R^4(z)$, $R^5(z)$ y $R^6(z)$ se irán encontrando restos $\alpha\, R^3(z)$, $R^4(z)$, $\alpha\, R^5(z)$ y $R^6(z)$ (los mismos anteriores multiplicados por α, uno sí y uno no), lo cual no importa desde el punto de vista de la obtención de un MCD ya que si, por ejemplo, $R^5(z)$ es un MCD de $A(z)$ y $B(z)$, se tiene por lo visto en **b** de POL VIII.1 que $\alpha\, R^5(z)$ también lo es.
Evidentemente, lo mismo ocurrirá si se multiplica a A(z) o a B(z) por una constante cualquiera, o si se multiplican a A(z), B(z), R^1(z), R^2(z), ..., cada uno de ellos por una constante.
Este artificio permite muy a menudo simplificar la aritmética del proceso de hallar un MCD. Así por ejemplo, si se quiere hallar el MCD de:

$$A(z) = 18z^3 - 9z^2 - 2z + 1 \quad \text{y de} \quad B(z) = 6z^2 - 5z + 1$$

puede procederse tal como sigue:

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{A(z)} = 18\mathrm{z}^3 - 9\mathrm{z}^2 - 2\mathrm{z} + 1 & \lfloor 18\mathrm{z}^2 - 15\mathrm{z} + 3 = 3B(\mathrm{z}) \\
\underline{18\mathrm{z}^3 - 15\mathrm{z}^2 + 3z} & \mathbf{z} + \tfrac{1}{3} = Q^1(z) \\
6\mathrm{z}^2 - 5\mathrm{z} - 1 & \\
\underline{6\mathrm{z}^2 - 5\mathrm{z} - 1} & \\
0 = R^1 &
\end{array}
$$

y por lo tanto (por ser $R^1 = 0$):

$$\text{MCD de } A(\mathrm{z}) \text{ y } B(\mathrm{z}) = kB(z) = k(6z^2 + 5z + 1)$$

siendo k una constante cualquiera.

A.POL IV

A.POL IV.1

<u>Teorema</u>

a. Sea un cuociente de polinomios $\dfrac{F_1(z)}{(z-\gamma)^k\, V(z)}$, $k \geq 1$ tal que:

1°) Grado de $F_1(z)$ < Grado de $(z-\gamma)^k$ V(z) **[1]**

2°) γ no es un cero de $V(z)$ es decir que $V(\gamma) \neq 0$ **[2]**

Se demostrará que en estas condiciones existe un número b_1 y un polinomio $F_2(z)$ tales que:

1ª) $$\frac{F_1(z)}{(z-\gamma)^k\ \mathrm{V(z)}} = \frac{b_1}{(z-\gamma)^k} + \frac{F_2(z)}{(z-\gamma)^{k-1}\ \mathrm{V(z)}}$$ **[3]**

2º) Grado de $F_2(z)$ < Grado de $(z-\gamma)^{k-1} V(z)$ **[4]**

b. Póngase tentativamente:

$$b_1 = \frac{F_1(\gamma)}{V(\gamma)}$$ **[5]**

Notar que este número b_1 existe siempre ya que $V(\gamma) \neq 0$.
El polinomio $F_1(z) - b_1 V(z)$ tiene un cero igual a γ ya que:

$$F_1(\gamma) - b_1 V(\gamma) = F_1(\gamma) - \frac{F_1(\gamma)}{V(\gamma)} V(\gamma) = 0$$ **[6]**

Por **[5]**

y por lo tanto $F_1(z) - b_1 V(z)$ es divisible exactamente por $(z - \gamma)$. Llámese $F_2(z)$ al polinomio cociente. Entonces:

$$F_2(z) = \frac{F_1(z) - b_1 V(z)}{z - \gamma}$$ **[7]**

c. Se tiene que:

$$\frac{F_1(z)}{(z-\gamma)^k V(z)} - \frac{b_1}{(z-\gamma)k} = \frac{F_1(z)-b_1V(z)}{(z-\gamma)^k V(z)} = \frac{\dfrac{F_1(z)-b_1V(z)}{z-\gamma}}{(z-\gamma)^{k-1}V(z)} \underset{\text{Por [7]}}{=} \frac{F_2(z)}{(z-\gamma)^{k-1}V(z)} \quad \textbf{[8]}$$

y por lo tanto se obtiene:

$$\frac{F_1(z)}{(z-\gamma)^k V(z)} = \frac{b_1}{(z-\gamma)^k} + \frac{F_2(z)}{(z-\gamma)^{k-1}V(z)} \quad \textbf{[9]}$$

Con lo que resulta que se cumple lo indicado en **[3]**.

d. Si fuera:
Grado de $F_2(z) \geq$ grado de $(z-\gamma)^{k-1}V(z)$ **[10]**
sería:

Grado de $F_2(z)(z-\gamma) \geq$ grado de $(z-\gamma)^k V(z)$

es decir (ver **[7]**) :

Grado de $[F_1(z)-b_1V(z)] \geq$ grado de $(z-\gamma)^k V(z)$

lo que implicaría que fuera:
1°) Grado de $F_1(z) \geq$ Grado de $(z-\gamma)^k V(z)$, lo cual es imposible por hipótesis.
y / o
2°) Grado de $b_1V(z) \geq$ Grado de $(z-\gamma)^k V(z)$, lo cual es evidentemente imposible.

Se ha llegado pues a un absurdo que es el resultado de suponer cierta a la expresión **[10]**. Por lo tanto debe ser:

Grado de $F_2(z) <$ Grado de $(z-\gamma)^{k-1}V(z)$

Con lo que resulta que también se cumple lo indicado en **[4]**, quedando así demostrado totalmente el teorema.

A.POL IV.2

Desarrollo de cocientes de polinomios en fracciones parciales

a. Sea un cociente de polinomios $F_1(z)/H(z)$ tales que:

Grado de $F_1(z) <$ Grado de $H(z)$ **[1]**

Supónganse que por ejemplo sea:

$$H(z) = a_6(z-\gamma_1)^3(z-\gamma_2)^2(z-\gamma_3) \quad \textbf{[2]}$$

póngase:

$$V_1(z) = a_6 (z - \gamma_2)^2 (z - \gamma_3) \qquad \textbf{[3]}$$

resultando entonces que:

$$H(z) = (z - \gamma_1)^3 V_1(z) \qquad \textbf{[4]}$$

y por lo tanto es:

$$\frac{F_1(z)}{H(z)} = \frac{F_1(z)}{(z-\gamma_1)^3 V_1(z)}, \ \text{Grado de } F_1(z) < \text{Grado de } (z-\gamma_1)^3 V_1(z) \qquad \textbf{[5]}$$

Aplicando lo visto en A.Pol.IV.1 resulta entonces que existe un número b_1^1 y una función $F_2(z)$ tales que:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F_1(z)}{H(z)} = \frac{F_1(z)}{(z-\gamma_1)^3 V_1(z)} = \frac{b_1^1}{(z-\gamma_1)^3} + \frac{F_2(z)}{(z-\gamma_1)^2 V_1(z)} \\ &\text{Grado de } F_2(z) < \text{Grado de } (z-\gamma_1)^2 V_1(z) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[6]}$$

b. Por un razonamiento análogo al recién empleado también puede demostrarse que:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F_2(z)}{(\mathbf{z}-\boldsymbol{\gamma_1})^2 V_1(z)} = \frac{b_2^1}{(z-\gamma_1)^2} + \frac{F_3(z)}{(z-\gamma_1) V_1(z)} \\ &\text{Grado de } F_3(z) < \text{Grado de } (z-\gamma_1)\ V_1(z) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[7]}$$

y que:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F_3(z)}{(\mathrm{z}-\gamma_1) V_1(z)} = \frac{b_3^1}{(z-\gamma_1)} + \frac{F_4(z)}{V_1(z)} \\ &\text{Grado de } F_4(z) < \text{Grado de } V_1(z) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[8]}$$

y entonces por **[6]**, **[7]** y **[8]** resulta:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F_1(z)}{H(z)} = \frac{b_1^1}{(z-\gamma_1)^3} + \frac{b_2^1}{(z-\gamma_1)^2} + \frac{b_3^1}{(z-\gamma_1)} + \frac{F_4(z)}{V_1(z)} \\ &\text{Grado de } F_4(z) < \text{ Grado de } V_1(z) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[9]}$$

c. Póngase ahora:

$$V_2(z) = a_6(z-\gamma_3)$$

Resultando entonces (ver **[3]**):

$$V_1(z) = (z-\gamma_2)^2 V_2(z) \qquad \textbf{[10]}$$

siendo entonces:

$$\frac{F_4(z)}{V_1(z)} = \frac{F_4(z)}{(z-\gamma_2)^2 V_2(z)}, \text{ Grado de } F_4(z) < \text{Grado de} (z-\gamma_2)^2 V_2(z) \qquad \textbf{[11]}$$

Por un procedimiento enteramente análogo al empleado en **a**,**b** y **c** se obtendrá que:

$$\frac{F_4(z)}{V_1(z)} = \frac{b_1^2}{(z-\gamma_2)^2} + \frac{b_2^2}{(z-\gamma_2)} + \frac{F_6(z)}{V_2(z)} \qquad \textbf{[12]}$$

Grado de $F_6(z)$ < Grado de $V_2(z)$

d. Ahora bien, como $V_2(z) = a_6(z-\gamma_3)$, polinomio del primer grado, y como el grado de $F_6(z)$ debe ser menor que el de $V_2(z)$, resulta que $F_6(z)$ debe ser una constante. Llamando b' a dicha constante que resulta que:

$$\frac{F_6(z)}{V_2(z)} = \frac{b'}{a_6(z-\gamma_3)} = \frac{\overbrace{\frac{b'}{a_6}}^{b_1^3}}{(z-\gamma_3)} = \frac{b_1^3}{(z-.\gamma_3)} \qquad \textbf{[13]}$$

y entonces, por **[9]**, **[12]** y **[13]** resulta que:

$$\frac{F_1(z)}{H(z)} = \frac{b_1^1}{(z-\gamma_1)^3} + \frac{b_2^1}{(z-\gamma_1)^2} + \frac{b_3^1}{(z-\gamma_1)} + \frac{b_1^2}{(z-\gamma_2)^2} + \frac{b_2^2}{(z-\gamma_2)} + \frac{b_1^3}{(z-\gamma_3)} \qquad \textbf{[14]}$$

e. La demostración efectuada para el caso particular considerado puede evidentemente ser ampliada para cubrir el caso general, obteniéndose que:
Dados los polinomios $F(z)$ y $H(z)$ tales que el grado de $F(z)$ sea menor que el grado de $H(z)$, si la forma factoreada de $H(z)$ es:

$$H(z) = a_n(z-\gamma_1)^{n_1}(z-\gamma_2)^{n_2}...(z-\gamma_k)^{n_k}$$

se tiene que el cociente de dichos polinomios pueden ser expresado como:

$$\left.\begin{aligned}\frac{F(z)}{H(z)} &= \frac{b_1^1}{(z-\gamma_1)^{n_1}} + \frac{b_2^1}{(z-\gamma_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{b_{n_1}^1}{(z-\gamma_1)} + \\ &+ \frac{b_1^2}{(z-\gamma_2)^{n_2}} + \frac{b_2^2}{(z-\gamma_2)^{n_2-2}} + \ldots + \frac{b_{n_2}^2}{(z-\gamma_2)} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \frac{b_1^k}{(z-\gamma_k)^{n_k}} + \frac{b_2^k}{(z-\gamma_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{b_{n_k}^k}{(z-\gamma_k)}\end{aligned}\right\} \quad [15]$$

teniéndose que uno o más de los coeficientes b_j^i pueden eventualmente ser nulos.

A.POL V

Disquisiciones sobre los ceros reales de los polinomios enteros con coeficientes reales

a. Sea $P_n(z)$ un polinomio entero con coeficientes reales. Sean sus ceros reales $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$, cuya multiplicidad se supone igual a $n_1, n_2, ..., n_k$ respectivamente. Sean sus ceros complejos $(\gamma_1 + i\beta_1), (\gamma_1 - i\beta_1), (\gamma_2 + i\beta_2), (\gamma_2 - i\beta_2)$ etc., cuya multiplicidad se supone igual a $\eta_1, \eta_1, \eta_2, \eta_2$ etc., respectivamente.
Entonces en forma factoreada $P_n(z)$ tomará el aspecto:

$$\begin{aligned}P_n(z) &= a_n (z-\gamma_1)^{n_1}(z-\gamma_2)^{n_2}\ldots(z-\gamma_k)^{n_k}\left[z-(\alpha_1+i\beta_1)\right]^{\eta_1} \\ &\left[z-(\alpha_1+i\beta_1)\right]^{\eta_1}\left[z-(\alpha_2+i\beta_2)\right]^{\eta_2}\left[z-(\alpha_2+i\beta_2)\right]^{\eta_2}\ldots\end{aligned} \quad [1]$$

b. Póngase:

$$\begin{aligned}S(z) &= \left[z-(\alpha_1+i\beta_1)\right]^{\eta_1}\left[z-(\alpha_1-i\beta_1)\right]^{\eta_1}\left[z-(\alpha_2+i\beta_2)\right]^{\eta_2}\left[z-(\alpha_2-i\beta_2)\right]^{\eta_2}\ldots = \\ &= \left(\left[(z-\alpha_1)-i\beta_1\right]\left[(z-\alpha_1)+i\beta_1\right]\right)^{\eta_1}\left(\left[(z-\alpha_2)-i\beta_2\right]\left[(z-\alpha_2)+i\beta_2\right]\right)^{\eta_2}\ldots = \\ &= \left[(z-\alpha_1)^2+\beta^2{}_1\right]^{\eta_1}\left[(z-\alpha_2)^2+\beta^2{}_2\right]^{\eta_2}\ldots\end{aligned} \quad [2]$$

resultando entonces que:

Para todo valor real de z se tiene que $S(z)$ es real y positivo. **[3]**

c. Por **[1]** y **[2]** es:

$$P_n(z) = a_n (z-\gamma_1)^{n_1}(z-\gamma_2)^{n_2}\ldots(z-\gamma_{i-1})^{n_{i-1}}(z-\gamma_i)^{n_i}(z-\gamma_{i+1})^{n_{i+1}}\ldots(z-\gamma_k)^{n_k}\underset{\substack{\uparrow \\ >0,\ \text{ver } [2]}}{S(z)} \quad [4]$$

Supóngase que en esta expresión sean:

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{i-1} < \gamma_i < \gamma_{i+1} < \ldots < \gamma_k$$

(lo cual no hay ningún inconveniente en suponer ya que siempre es posible escribir la forma factoreada de un polinomio de manera tal que lo antedicho se cumpla.).
En **[4]** puede observarse que mientras z esté en el intervalo <u>real</u>:

$$\gamma_i < z < \gamma_{i+1}$$

el signo de $P_n(z)$ no cambiará ya que:

1°) a_n es una constante.
2°) $(z-\gamma_1),...,(z-\gamma_i)$ son todos positivos.
3°) $(z-\gamma_{i+1}),...,(z-\gamma_k)$ son todos negativos.
4°) $S(z) > 0$ (ver **[3]**).

d. Póngase:

$$P^*(z) = a_n(z-\gamma_1)^{n_1}(z-\gamma_2)^{n_2}...(z-\gamma_{i-1})^{n_{i-1}}(z-\gamma_{i+1})^{n_{i+1}}...(z-\gamma_k)^{n_k}S(z) \qquad \textbf{[5]}$$

(esta expresión es la **[4]** sin el factor $(z-\gamma_i)^{n_i}$)
Reemplazando **[5]** en **[4]**, resulta que:

$$P_n(z) = (z-\gamma_i)^{n_i}P^*(z) \qquad \textbf{[6]}$$

Supóngase ahora que z "recorra" de menor a mayor los valores **reales** entre γ_{i-1} y γ_{i+1}.
Como:
1°) Por un razonamiento similar al visto en **c** se tiene que $P^*(z)$ no cambia de signo cuando z efectúa el recorrido indicado.
2°) $(z-\gamma_i)^{n_i}$ cambia de o no de signo cuando z pasa por γ_i (valor intermedio entre γ_{i-1} y γ_{i+1}) según que n_i sea impar o par.
Resulta entonces por **[6]** que:

***$P_n(z)$* cambiará de signo cuando *z* pase por *γ_i* según que dicho cero sea de multiplicidad impar o par.**

e. Sean δ_1 y δ_2 dos números reales tales que $\delta_1 < \delta_2$ y tales que $P_n(\delta_1) \neq 0$ y $P_n(\delta_2) \neq 0$ es decir que ni δ_1, ni δ_2 sean ceros de $P_n(z)$.
Se tiene por lo visto en **d** que los signos de $P_n(\delta_1)$ y $P_n(\delta_2)$ serán opuestos sólo si entre δ_1 y δ_2 existe una cantidad impar de ceros reales de $P_n(z)$ de multiplicidad impar.

Ejercicios y problemas sobre Polinomios

POL 1 Sin efectuar ninguna división, probar que el polinomio $(z+1)^{2n} - z^{2n} - 2z - 1$ es divisible por $2(z+1)(z+\frac{1}{2})$

POL 2 Hallar el MCD de los siguientes pares de polinomios (usando algún método indicado en A.POL III y/o algún software).

a. $z^3 + 1$ y $z^2 + 1$
b. $x^3 - a^3$ y $x^2 - a^2$
c. $a^2y - ay^2$ y $ay + y^2$
d. $d^5 - 2d^4 - 8d^3 + 16d^2 + 16d - 32$ y $5d^4 - 8d^3 - 24d^2 + 32d + 16$
e. $z^4 + 5z^3 + 6z^2 - 4z - 8$ y $z^3 + 3z^2 - 4$

POL 3 Hallar el polinomio de grado mínimo y **coeficientes reales** cuyos ceros sean:

a. 4, -2, -1
b. 2, -1, i
c. 3, (1+i)

POL 4 Hallar los ceros múltiples de los siguientes polinomios:

a. $z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1$
b. $z^3 - 4z^2 - 3z + 18$
c. $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z + 12$
d. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

POL 5 Probar **sin hacer ninguna división** que $(z-1)^4$ divide exactamente a $P(z) = z^5 - 2z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 7z + 2$.

POL 6 Hallar los ceros de $P(x) = x^2 - (2 + i3)x - (1 - i3)$.

POL 7 Hallar los ceros de $P(z) = z^4 + 2z^3 + z^2 - 8z - 20$ sabiendo que uno de ellos es $-1+2i$.

POL 8 Escribir a $P(z) = 2z^3 - 8z^2 + 2z + 12$ en su forma factoreada sabiendo que uno de sus ceros es 3.

POL 9 Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $z^4 - 15z^2 - 16 = 0$
b. $4z^4 + 7z^2 - 2 = 0$
c. $z^4 - 4z^2 + 8 = 0$

POL 10 Desarrollar en fracciones parciales a los siguientes cocientes de polinomios:

a. $\dfrac{z+1}{z(z+2)}$

b. $\dfrac{s^2}{s(s+k)^2}$

c. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x(x-3)(x-4)}$

d. $\dfrac{2z-1}{z^2(z-1)}$

e. $\dfrac{1}{z^2(z^2+1)}$

POL 11 Sea $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, siendo n par. Demostrar que si a_0 y a_n tienen signos opuestos, entonces $P_n(z)$ tiene por lo menos un cero negativo y uno positivo. (Suponer que todos los coeficientes son reales).

Interpolación Algebraica

INT I

Enunciado del problema

Dados los n+1 puntos (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) del plano xy, se pide hallar un polinomio del menor grado posible tal que su gráfica pase por todos esos puntos, los cuales tienen valores de x todos distintos entre sí.

INT II

Solución general

a. Sea el conjunto de n+1 puntos del plano (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Sea el polinomio de grado n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + ... + a_n\ x^n \qquad \textbf{[1]}$$

cuyos coeficientes a_0, a_1, …..a_n son por el momento desconocidos.

Si se pretende que la gráfica del polinomio **[1]** pase por los n+1 puntos (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) ha de tenerse que:

$$\begin{cases} y_0 = P_n(x_0) = a_0 + a_1\ x_0 + a_2\ x_0{}^2 + ... + a_n\ x_0{}^n \\ y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1\ x_1 + a_2\ x_1{}^2 + ... + a_n\ x_1{}^n \\ y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1\ x_2 + a_2\ x_2{}^2 + ... + a_n\ x_2{}^n \\ . \\ . \\ y_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1\ x_n + a_2\ x_n{}^2 + ... + a_n\ x_n{}^n \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

Este es un sistema de n + 1 ecuaciones lineales. Como x_o; x_1; ……; x_n, son conocidos, sus coeficientes son x_i^k y sus incógnitas son: a_0, a_1, …..a_n

Su determinante es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & . & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & . & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & . & x_3^n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & . & x_n^n \end{vmatrix} \underset{\text{Intercambiando filas por columnas}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & . & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & . & x_n^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & . & x_n^3 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & x_3^n & . & x_n^n \end{vmatrix}$$

Este es un determinante de Vandermonde, cuyo valor es (ver DET XIV c):

$$\Delta=(x_1-x_0)(x_2-x_0)....(x_n-x_0)(x_2-x_1)(x_3-x_1)....(x_n-x_1).........(x_n-x_{n-1})$$

y como los valores x_o; x_1; ……; x_n son todos distintos entre sí resulta que $\Delta \neq 0$, lo que implica que el sistema **[2]** sea cramereano y que por lo tanto tenga una única solución.
Quedaría así determinados valores a_0, a_1, …..a_n que introducidos en **[1]** dan un polinomio cuya gráfica pasa por los puntos (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n).

Se hace notar que en la solución de **[1],** uno o más de los valores de a_0, a_1, …..a_n podría resultar nulo.

b. Ejemplo.
Sean los puntos (1 , 1); (2 , 3) y (3 , 5)
Sea el polinomio
$y=a_0+a_1\ x+a_2\ x^2$
El sistema de ecuaciones correspondientes es:

$$\begin{cases} 1=a_0+a_1\ 1+a_2\ 1^2 \\ 3=a_0+a_1\ 2+a_2\ 2^2 \\ 5=a_0+a_1\ 3+a_2\ 3^2 \end{cases}$$

cuyo determinante es:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)=2$$

y por lo tanto:

$$a_0=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&4\\5&3&9\end{vmatrix}=-1 \qquad a_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&5&9\end{vmatrix}=2 \qquad a_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{vmatrix}=0$$

es decir que una curva polinómica que pasa por (1 , 1); (2 , 3) y (3 , 5) es:

$$P_2=-1+2\ x+0\ x^2=-1+2\ x$$

c. <u>Se demostrará que por n+1 puntos arbitrarios del plano, tales que sus abscisas sean todas distintas entre sí, pasa una única curva polinómica de grado n o menor</u>.

Según se demostró en INT II, dados n+1 puntos cuyas abscisas sean todas distintas entre sí, por ellas pasa una curva polinómica $P_n(x)$ de grado n o menor, dada por la fórmula **[1]** de INT II a. Supóngase que exista otra curva polinómica $P^*_n(x)$ que también pase por los mismos puntos, a los que se indicará como: (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n). Evidentemente,

x_0; x_1; ……; x_n, serán ceros de $P^*_n(x) - P_n(x)$, resultando así por el teorema del resto (ver POL IV) que $P^*_n(x) - P_n(x)$ será divisible por:

$$Q(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)$$

Llamando $\varphi(x)$ al cuociente de $P^*_n(x) - P_n(x)$ y $Q(x)$ resulta:

$$P^*_n(x) = P_n(x) + Q(x) \quad \varphi(x) \qquad \textbf{[1]}$$

Ahora bien, como:

1º $Q(x)$ es de grado n (tiene n ceros)
2º $\varphi(x)$ es de grado 0 (es decir, es una constante) o mayor
3º $P_n(x)$ es de grado n o menor.

resulta por **[1]** que $P^*_n(x)$ es de grado n o mayor, con lo que se ha probado lo propuesto.

d. Salvo el caso de disponer de una computadora adecuadamente programada, si la cantidad de puntos es considerable, hallar una curva polinómica por el método recién indicado es una tarea muy pesada.
Métodos más fáciles son los indicados en los párrafos subsiguientes.

INT III

Fórmula Interpolatoria de Lagrange

a. Sean n+1 puntos (x_0 , y_0); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Sea el polinomio:

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)....(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)....(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)....(x_1-x_n)} + ... \\ ... + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)....(x_n-x_{n-1})} \end{aligned} \right\} \textbf{[1]}$$

Se tiene que:
1º Cada sumando de esta expresión es un polinomio entero en x de grado n. por lo tanto $P_n(x)$ es un polinomio entero en x de grado n o menor.
2º Es evidente que como $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se tiene que cuando en **[1]** x asume el valor x_i, $P_n(x_i)$ asumirá el valor y_i, es decir que $P_n(x_i) = y_i$.
Por lo tanto:
Dados los n+1 puntos (x_0 , y_0); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n), la gráfica del polinomio $P_n(x)$ dado en [1] pasa por dichos puntos.

b. Ejemplo

Sean los puntos (0 , 0); (1 , 1) y (2 , 8). Según **[1]** se tiene que el polinomio de grado 2 que pasa por dichos puntos es:

$$P_2(x) = 0\ \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 1\ \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 8\ \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} =$$

$$= 1\ \frac{x^2-2x}{-1} + 8\ \frac{x^2-x}{2} = 3\,x^2 - 2\,x$$

(Notar que se ha hecho pasar a la parábola (grado 2) $y = 3x^2 - 2x$ por tres puntos de la cúbica $y = x^3$)

INT IV

Interpolación por aproximaciones sucesivas

a. Sean n+1 puntos del plano (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Póngase:

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ + \text{..........} + c_{n-1}(x-x_0)(x-x_1)\text{.......}(x-x_{n-1}) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

Evidentemente, $P_n(x)$ es un polinomio de grado n ya que es la suma de n polinomios cuyos grados son respectivamente: 0, 1, 2, ……, n.

Se tratará ahora de hallar valores para los coeficientes c_0, c_1, c_2, ……, c_{n-1} de manera tal que $P_n(x)$ pase por los puntos dados.

El método para hallar dichos valores será explicado en base al siguiente ejemplo:

b. Sean los puntos (1 , 5); (2 , 11) y (3 , 21). En este caso la fórmula **[1]** tomará el aspecto:

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) \qquad \textbf{[2]}$$

Para que sea $P_2(x) = 5$ cuando x = 1, de **[2]** resulta que debe ser:

$$5 = c_0 + c_1(1-1) + c_2(1-1)(x-2) = c_0$$

con lo que **[2]** toma la forma:

$$P_2(x) = 5 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) \qquad \textbf{[3]}$$

Para que sea $P_2(x) = 11$ cuando x = 2, de **[3]** resulta que debe ser:

$$11 = 5 + c_1(2-1) + c_2(2-1)(2-2) = 5 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 6$$

con lo que **[3]** toma la forma:

$$P_2(x) = 5 + 6(x-1) + c_2(x-1)(x-2) \qquad \textbf{[4]}$$

Para que sea $P_2(x) = 21$ cuando $x = 3$, de **[4]** resulta que debe ser:

$$21 = 5 + 6(3-1) + c_2(3-1)(3-2) = 5 + 12 + c_2 2 \;\Rightarrow\; c_2 = 2$$

con lo que **[4]** toma la forma:

$$P_2(x) = 5 + 6(x-1) + 2(x-1)(x-2) = 3 + 2x^2 \qquad \textbf{[5]}$$

Por lo tanto el polinomio buscad es:

$$P_2(x) = 3 + 2x^2$$

Según visto en INT III, este es el <u>único</u> polinomio de grado 2 o menor que pasa por los puntos (1 , 5); (2 , 11) y (3 , 21).

INT V

<u>Interpolación por el método de Newton</u>

a. Sean los puntos del plano (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) tales que el intervalo entre sucesivos valores de x_i sea constante, es decir que:

$$x_{i+1} = x_i + h, \qquad h \text{ constante, } \forall i$$

Confecciónese la siguiente tabla:

x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$		
$x_1 = x_0 + h$	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	
		$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_2 = x_1 + h$	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	
		$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$		
$x_3 = x_2 + h$	y_3			
		.	.	
.	.	.	.	
.	.	.		
.	.	$\Delta^1 y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$		
$x_n = x_{n-1} + h$	y_n			

[1]

Sea el polinomio de grado *n*

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + c_n(x - x_0)(x - x_1).......(x - x_{n-1}) \qquad \textbf{[2]}$$

Si se pretende que la gráfica de este polinomio pase por los puntos (x_o , y_o); (x_1 , y_1); ……, (x_n , y_n) ha de tenerse que:

$$P_n(x_0) = y_0 = c_0$$
$$P_n(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$
$$P_n(x_2) = y_2 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

.

.

$$P_n(x_2) = y_n = c_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + ... + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})$$

De estas expresiones resulta que:

$$c_0 = y_0$$
$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta^1 y_0}{h}$$
$$c_2 = \frac{y_2 - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - 2\,h\,\frac{(y_1 - y_0)}{h}}{2\,h\,h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$

.

.

$$c_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$

y por lo tanto resulta que $P_n(x)$ debe tomar la forma:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ ..... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1).......(x - x_{n-1}) \qquad \textbf{[2]}$$

Esta es la fórmula interpolatoria de Newton.

b. Ejemplo

Sean los puntos (-1 , 3); (0 , 0); (1 , -1), (2 , 0) y (3 , 3)

En este caso la Tabla dada en **[1]** toma la forma

x	y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-1	3				
		0-3= -3			
0	0		-1-(-3)= 2		
		-1-0= -1		2-2= 0	
1	-1		1-(-1)= 2		0-0= 0
		0-(-1)= 1		2-2= 0	
2	0		3-1= 2		
		3-0= 3			
3	3				

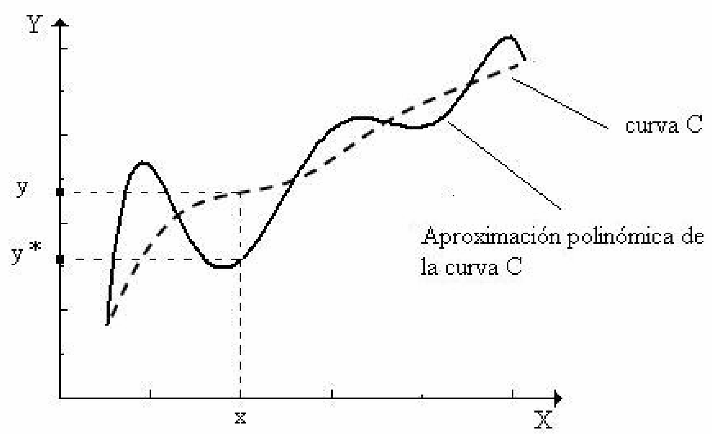
y por **[2]** se tiene que, siendo $h = x_{i+1} - x_i = 1$;

$$P_4(x) = 3 + \frac{-3}{1}(x+1) + \frac{2}{2!1}(x+1)(x-0) + \frac{0}{3!1}(x+1)(x-0)(x-1) + \frac{0}{4!1}(x+1)(x-0)(x-1)(x-2) =$$
$$= 3 - 3(x+1) + (x+1)x = x^2\text{-}2x$$

INT VI

<u>Prevención</u>

Estas interpolaciones algebraicas han de ser tomadas ligeramente a beneficio de inventario.
Se comentará un caso real:
En el proceso de cálculo de una central telefónica, en un cierto momento la cantidad de unos ciertos elementos, se calculaba en base a una cierta curva empírica.
En el proceso de computarizar dicho cálculo fue necesario meter a dicha curva en la programación. Para ello se tomaron una cierta cantidad de puntos de dicha curva y se halló el polinomio interpolatorio que pasara por dichos puntos. Dicho polinomio fue lo que se introdujo en la programación.
Al hacer correr el programa se obtuvo un resultado disparatado, totalmente reñido con la experiencia.
Una investigación de la causa condujo a que esta era debida a lo ilustrado (esquemáticamente) en la fig. INT VI a .



INT IV a

Allí se hace evidente que, es posible que para un cierto valor de x, la curva polinómica dé un valor erróneo y* en vez del valor verdadero y que daría la curva C.
Este es un buen ejemplo de que el uso ciego de herramientas matemáticas puede conducir a errores considerables.

Un ingeniero debe siempre preguntarse a cada paso si los resultados que va obteniendo son o no son razonables.

No hay substituto para el criterio humano!!!!

VECTORES LIBRES (VT)

VT I

Dirección y sentido de una recta en el espacio

a. Se define que dos rectas del espacio tienen una misma dirección cuando y sólo cuando son paralelas, es decir cuando son coplanares y no tienen ningún punto en común.
Por lo tanto, la dirección de una cierta recta es lo que dicha recta tiene en común con todas las demás rectas que le son paralelas.

b. Dada una cierta dirección, se tiene que un segmento de una recta que tenga dicha dirección puede ser recorrido de dos maneras distintas (según cual sea el extremo del segmento en que se inicie el recorrido). A cada una de esas maneras de recorrer dicho segmento se le asocia lo que se llamará un **sentido** de la dirección (notar que se dijo sentido de la dirección, y no del segmento o de la recta).
Por convención se dirá que los dos sentidos correspondientes a una misma dirección son **opuestos**.

VT II

Vectores libres

a. Se define un vector libre cuando se especifica:

1º. Un número no negativo llamado **módulo** del vector.
2º. Una dirección del espacio.
3º. Un sentido de dicha dirección.

[1]

Un vector libre puede ser representado por un segmento orientado (vulgo: “flecha”) tal que su longitud sea igual al módulo del vector, y tal que su dirección y sentido sean los especificados en la definición del vector.

b.

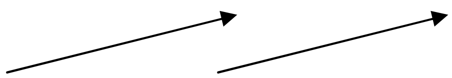


Fig. VT. II a

Los dos segmentos orientados indicados en la figura VT. II a no son mas que representaciones distintas de un mismo vector **libre** ya que ambos tienen la misma longitud, dirección y sentido.
Generalizando: Un vector libre tiene infinitas representaciones (los infinitos segmentos orientados del espacio que tienen una longitud igual al módulo del vector y que además tiene su dirección y sentido).

Dada una representación de un vector, se llamará extremo de la misma a la terminación de la representación hacia la cual apunta la flecha. Se llamará origen de la representación al extremo restante. **[2]**

VT III

Vectores axiles o deslizantes

a. Se define un vector axil cuando se especifica:

1º. Un número no negativo llamado **módulo** del vector.
2º. Una recta determinada llamada **recta de acción.**
3º. Uno de los sentidos de la dirección de la recta de acción.

[1]

Un vector axil puede ser representado por un segmento orientado ("flecha") colocado sobre la recta de acción, tal que su longitud sea igual al módulo del vector y tal que su sentido sea el especificado en la definición del mismo.

b.

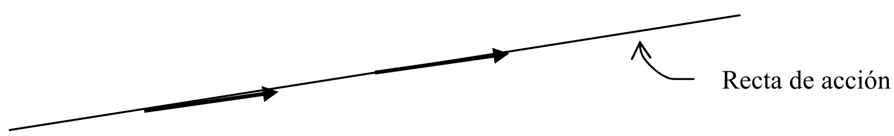


Fig. VT. III

Los dos segmentos orientados indicados en la fig. VT. III a no son más que representaciones distintas de un mismo vector axil ya que ambas están sobre la misma recta de acción y tiene la misma longitud y sentido.
Generalizando: Un vector axil tiene infinitas representaciones (todos los segmentos orientados de la recta de acción que tienen una longitud igual al módulo del vector y el sentido del mismo).

VT IV

Vectores fijos

Se define un vector fijo cuando se especifica:

1º. Un número no negativo llamado **módulo** del vector.
2º. Una dirección del espacio.
3º. Un sentido de dicha dirección.
4º. Un punto del espacio llamado **punto de aplicación**.

[1]

Un vector fijo puede ser representado por un segmento orientado ("flecha") tal que su longitud sea igual al módulo del vector, tal que su dirección y sentido sean los especificados en la definición del vector, y tal que el segmento se "inicie" en el punto de aplicación al recorrérselo en el sentido especificado en la definición del vector.

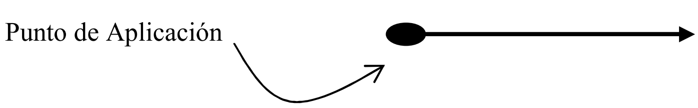


Fig. VT. IV. a

Evidentemente, a cada vector fijo le corresponde una única representación y viceversa (ver fig. VT. IV. a).

VT V

Aplicaciones

a. Existen numerosas magnitudes en el universo físico que quedan totalmente especificadas al enunciarse un número y una unidad (escala) de medida. Por ejemplo: 2 Hl, 3 Kg/dm^2, 4 Kw, 12 amperios, etc.
A este tipo de magnitudes se las llamará escalares.
En cambio, existen magnitudes tales como las indicadas a continuación, en las cuales el mero enunciado de un número y una unidad de medida no son suficientes para su especificación; pero que en cambio pueden ser caracterizadas por vectores.

b. Sea un cuerpo que ha sufrido una traslación tal como lo indicado en la fig. VT. V. a. Dicha traslación puede ser caracterizada por un vector libre tal que su módulo, dirección y sentido sean respectivamente iguales a la distancia, dirección y sentido correspondientes a la traslación que experimentó cada punto del cuerpo:

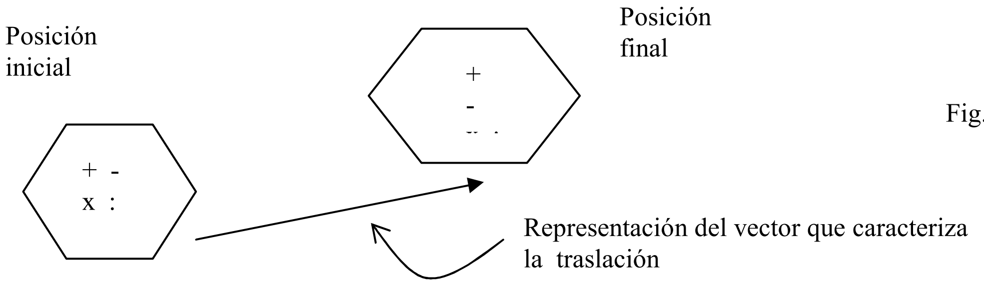
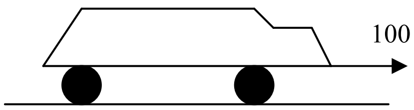


Fig. VT. V. a

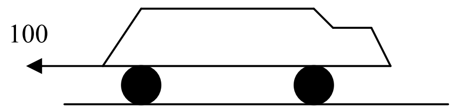
c. Sea un automóvil tal como el indicado en las figuras VT. V. b, c, d, e, f, g.

Fig. VT. V. b



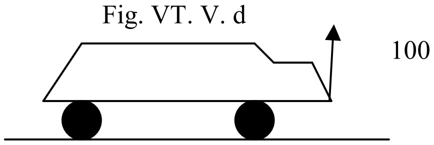
El auto se mueve
hacia adelante

Fig. VT. V. c



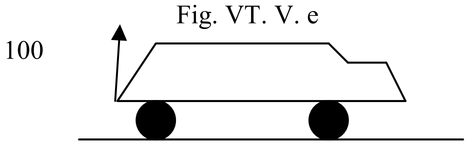
El auto se mueve
hacia atrás

Fig. VT. V. d



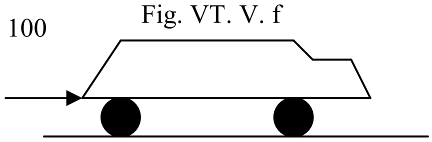
El auto no se mueve.
La trompa se levanta.
La cola se aplasta.

Fig. VT. V. e



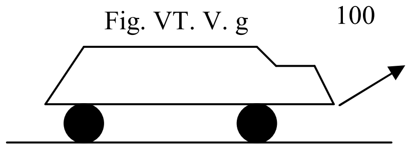
El auto no se mueve.
La cola se levanta.
La trompa se aplasta.

Fig. VT. V. f



El auto se mueve
hacia adelante

Fig. VT. V. g



El auto se mueve hacia delante.
La trompa se levanta.
La cola se aplasta.

Evidentemente, decir que sobre dicho automóvil se ejerce una fuerza de 100 kg no es suficiente ya que, según lo ilustrado en dichas figuras, los resultados obtenidos dependen de cómo se aplique dicha fuerza.

En mecánica se verifica que el efecto de una fuerza no varía si dicha fuerza se desplaza sobre una misma recta de acción (por ejemplo: tirar del auto con una fuerza de 100 kg, ver fig. VT. V. b, es equivalente a empujarlo con una fuerza de 100 Kg, ver fig. VT. V. f), pero que dicho efecto varía con cualquier otro cambio. Por lo tanto, una fuerza ejercida sobre un cuerpo puede ser completamente especificada por un vector axil.

d. Sea un mapa ubicado en la casa matriz de una empresa naviera. Supóngase que todos los días a las 8 de la mañana para cada barco de la empresa se indique sobre dicho mapa el estado del viaje: longitud, latitud, rumbo y velocidad en nudos.
Evidentemente, dicha caracterización del estado del viaje de un barco puede ser efectuada mediante un vector fijo tal como el indicado en la fig. VT. V. h.

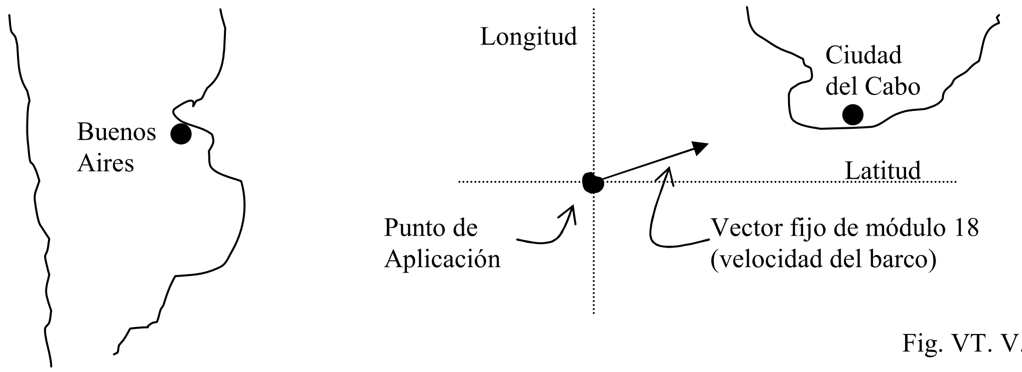


Fig. VT. V. h

e. Se hace notar que no todas las magnitudes que no son escalares pueden ser caracterizadas por vectores. Hay magnitudes no escalares que requieren caracterizaciones aún más elaboradas que las que suministran los vectores.

VT VI

Alcance del resto de este capítulo

a. La teoría de los vectores libres es la más sencilla, y presenta una analogía con la teoría de otros entes matemáticos que permite hacer generalizaciones muy valiosas.

b. La teoría de los vectores fijos en general, no presenta mayor interés. En cambio, la teoría de la familia de vectores fijos que tienen un mismo punto de aplicación puede ser fácilmente reducida a la teoría de los vectores libres. Esta familia particular de vectores fijos sí presenta interés práctico.

c. La teoría de los vectores axiles es bastante distinta (y bastante más complicada) que la teoría de los vectores libres. Desde un punto de vista funcional, el desarrollo de la teoría de los vectores axiles corresponde a un curso de mecánica o de estática, donde su aplicación a fondo es inmediata.

d. Por todo lo antedicho, en lo que resta de este capítulo se tratará únicamente con vectores libres, y cuando a continuación aparezca la palabra "vector" a secas ha de entenderse que se está hablando de un vector libre (salvo que se indique explícitamente que se trata de otro tipo de vector).

e. El lector se hará a sí mismo un señalado servicio a lo largo de su trayectoria profesional si al trabajar con vectores o leer algo sobre vectores determina desde el vamos si está tratando con vectores libres, axiles o fijos (cosa que casi todos los autores se cuidan muy bien de indicar).
No tener en cuenta esto puede conducir a sorpresas desagradables. Por ejemplo, dos vectores libres cualesquiera pueden siempre ser sumados, lo que no ocurre con los vectores fijos o axiles; y la suma de vectores libres es siempre asociativa, lo que no ocurre en el campo de los vectores axiles.

VT VII

Notación

Tanto los vectores como sus representaciones son indicados con símbolos $\vec{a}$, $\vec{b}$, etc.
A los módulos de dichos vectores se los indicará como $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, etc.

VT VIII

Vector nulo

Todo vector cuyo módulo sea cero será llamado vector nulo, y se lo simbolizará como $\vec{0}$. (Notar que esto es una ampliación de la definición dada en VT. II a).

VT IX

Igualdad de vectores

Se define que:

1º. Todos los vectores nulos son iguales entre sí.

2º. Un vector nulo no es nunca igual a un vector no nulo.

3º. Dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales cuando y sólo cuando tengan el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido; es decir cuando y sólo cuando los símbolos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no sean más que designaciones distintas de un mismo vector (ver VT. II a).

VT X

Vectores opuestos

Se define que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son opuestos cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección, y sentidos opuestos.
El hecho de que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son opuestos se simboliza como:

$$\vec{a} = -\vec{b} \qquad \text{ó} \qquad -\vec{a} = \vec{b}$$

VT XI

<u>Vectores unitarios o versores</u>

Se llama vector unitario o versor a todo vector cuyo módulo es igual a 1.
A un vector $\vec{a}$ que sea unitario (versor), a menudo se lo indica como $\hat{a}$ o $\breve{a}$.

VT XII

<u>Producto de un número real por un vector</u>

a. Si $\vec{a}$ es un cierto vector y λ es un número real, <u>se define</u> que:

1º. Si λ = 0, se tiene que $0\ \vec{a} = \vec{0}$, vector nulo.

2º. Si λ > 0, se tiene que $\lambda\ \vec{a}$ es un vector de la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, y módulo igual a λ veces el módulo de $\vec{a}$.

3º. Si λ < 0, se tiene que $\lambda\ \vec{a}$ es un vector de la misma dirección que $\vec{a}$, sentido opuesto al de $\vec{a}$, y módulo igual a $|\lambda|$ veces al módulo de $\vec{a}$ ($|\lambda|$ es el valor absoluto de λ).

Ver ejemplos en la fig. VT. XII a.

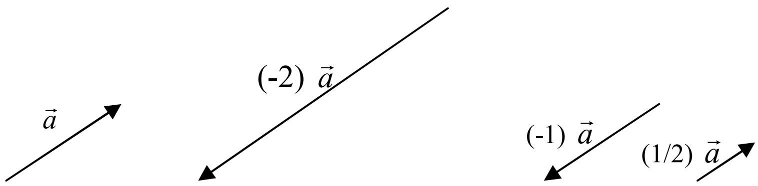


Fig. VT. XII a

b. Notar que el producto de un número real por un vector que se acaba de definir es una <u>nueva</u> operación, que no tiene nada que ver con el producto algebraico de dos números, a pesar de usarse el mismo símbolo (nada) para indicar a ambas.

c. Según la definición que se acaba de dar, y según la definición de vectores opuestos dada anteriormente se tiene que:

$-\vec{a}$ (vector opuesto de $\vec{a}$) = (-1) $\vec{a}$ **[1]**

d. Dado un vector $\vec{a}$ y dos números reales α y β, según lo definido en **a.** es:

$$\alpha\ (\beta\ \vec{a}) = (\alpha\ \beta)\ \vec{a}$$ **[2]**

Estos signos producto indican
<u>Productos de números por vectores</u>

Este signo producto indica el
<u>Producto entre dos números</u>

Operaciones distintas con la misma notación

e. Según la definición dada en **a.** es evidente que:

1º. $|\lambda\ \vec{a}\ | = |\lambda|\ |\ \vec{a}\ |$, para cualquier λ. **[3]**

2º. 1 $\vec{a} = \vec{a}$, para cualquier $\vec{a}$. **[4]**

3º. 0 $\vec{a} = \vec{0}$, para cualquier $\vec{a}$. **[5]**

4º. $\lambda\ \vec{0} = \vec{0}$, para cualquier λ. **[6]**

VT XIII

Suma de vectores

a. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos cualesquiera, se define que su suma es un vector indicado como $\vec{a} + \vec{b}$ que corresponde a una representación obtenida mediante la construcción indicada en la fig. VT. XIII a.

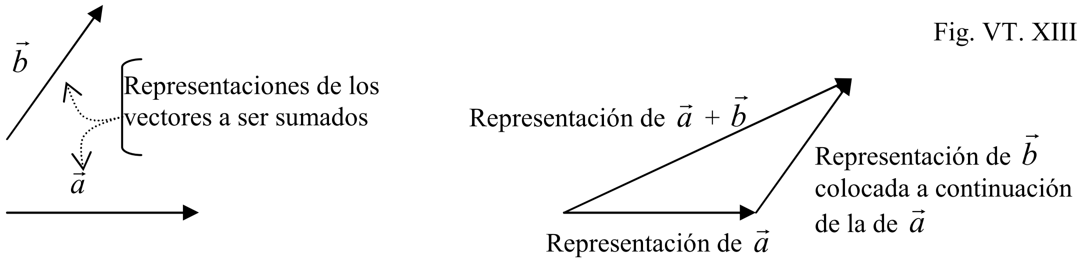


Fig. VT. XIII a

Notar que esta suma de vectores es una nueva operación definida entre nuevos entes. No tiene nada que ver con la suma de números de la aritmética corriente (a pesar de usarse el mismo signo + para indicar a ambas sumas).
Para completar la definición de suma de vectores falta agregar que:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad ; \quad \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

b. Evidentemente, una construcción alternativa a la indicada en la fig. VT. XIII a, es la indicada en la fig. VT. XIII b.

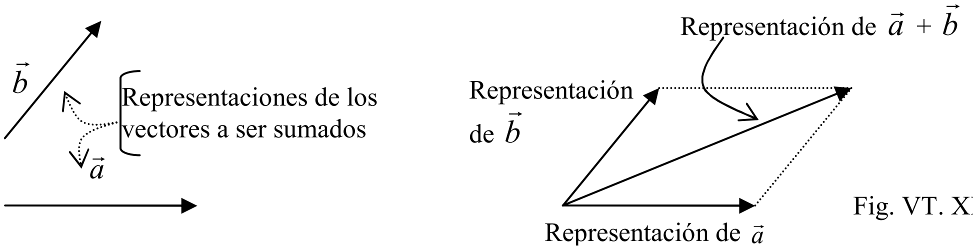


Fig. VT. XIII b

c. Propiedad conmutativa de la suma de vectores.
Se demuestra fácilmente que:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \textbf{[1]}$$

d. Propiedad asociativa de la suma de vectores.
Se demuestra fácilmente que:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \textbf{[2]}$$

e. En base a **[1]** y **[2]** se demuestra que:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (\vec{c} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = \qquad \textbf{[3]}$$
$$= (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{b} = \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a}) = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a} =$$
$$= (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} = \vec{b} + (\vec{c} + \vec{a}) = \vec{b} + (\vec{a} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{a}) + \vec{c}.$$

Al vector dado por cualquiera de los "miembros" de esta expresión se lo llamará $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

f. Evidentemente:

Vector opuesto de $\vec{a}$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \qquad \textbf{[4]}$$

Combinando las definiciones de producto de un número por un vector y de suma de vectores es fácil demostrar que:

1º. Si α, β, ..., η son números reales y $\vec{a}$ es un vector, se tiene que:

$$(\alpha + \beta + \ldots + \eta)\ \vec{a} = \alpha\ \vec{a} + \beta\ \vec{a} + \ldots + \eta\ \vec{a} \qquad \textbf{[5]}$$

Signo + que indica suma de números

Signo + que indica suma de vectores

2º. Si α es un número real y $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{n}$ son vectores, se tiene que:

$$\alpha\ (\vec{a}+\vec{b}+\ldots+\vec{n}) = \alpha\ \vec{a} + \alpha\ \vec{b} + \ldots + \alpha\ \vec{n} \qquad \textbf{[6]}$$

VT XIV

<u>Diferencia de vectores</u>

Se define que:

Vector opuesto de $\vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

VT XV

<u>"Ángulo" formado por dos vectores</u>

a. Sean dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Se define que el ángulo formado por dichos vectores es el ángulo menor o igual que π radianes (≤ 180º) que forman dos representaciones de los mismos que tengan un origen en común. (ver fig. VT. XV a).

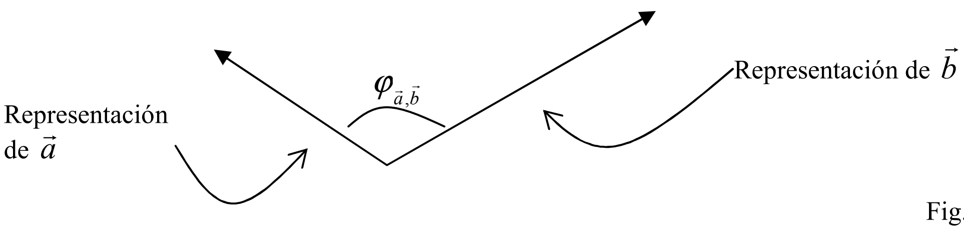


Fig. VT. XV a

b. Se hace notar que lo que se acaba de definir es el ángulo <u>formado por dos **vectores**</u> (entes definidos por un módulo, una dirección y un sentido), y <u>no solamente el de las dos representaciones de los mismos</u> que tengan un origen común.

c. Se dirá que dos vectores son perpendiculares cuando el ángulo que forman es igual a π/2 radianes (90º).
Se dirá que dos vectores son paralelos cuando el ángulo que forman es igual a cero. Evidentemente, dos vectores paralelos tienen la misma dirección y sentido.

VT XVI

Ternas ortogonales espaciales

Sea la terna de ejes ortogonales T1 indicada en la figura VT. XVI a, (se recalca que se trata de una terna de ejes y no de tres vectores).
Sea otra terna ortogonal cualquiera. Si trasladando y rotando esta última terna se llevan sus ejes x e y a coincidir respectivamente con los ejes x e y de la terna T1, ocurre una de las dos siguientes alternativas:

1º. Los ejes z de ambas ternas coinciden (caso de la terna T3 de la fig. VT. XVI b).
2º. Los ejes z de ambas ternas son opuestos (caso de la terna T2 de la fig. VT. XVI c).

Esto indica que toda terna ortogonal del espacio puede ser clasificada en dos categorías según cuál sea la posición de su eje z con respecto a sus ejes x e y.

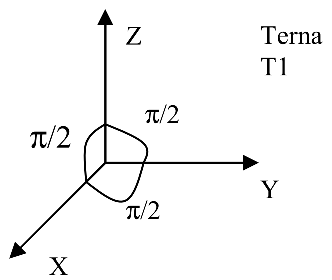


Fig. VT. XVI a

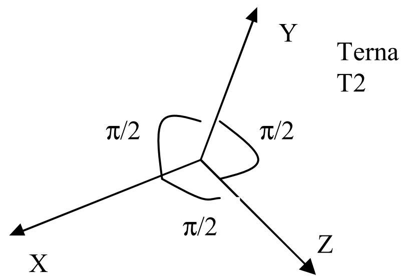


Fig. VT. XVI b

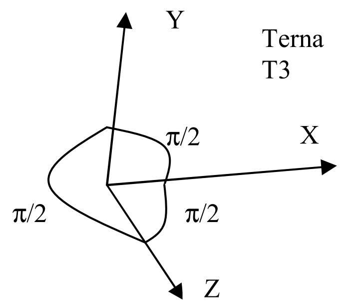


Fig. VT. XVI c

Esta clasificación se efectúa de la siguiente manera:

- Dada una terna, si extendiendo los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha puede hacérselos coincidir respectivamente con los ejes x, y, z de la terna, se dirá que dicha terna es derecha.

- En caso de que lo antedicho resulte imposible se dirá que la terna es izquierda. En este caso será posible extender los dedos pulgar, índice y medio de la mano izquierda y hacerlos coincidir respectivamente con los ejes x, y, z de la terna.

Existen otras convenciones (la del tirabuzón, la del observador, etc.) para definir cuando una terna es derecha y cuando es izquierda. En el fondo son todas equivalentes. Así que, cuestión de gustos!!.
Por razones obvias, conviene trabajar siempre con un mismo tipo de terna. En lo sucesivo, y de acuerdo al uso general, se trabajará siempre con ternas derechas.

VT XVII

Expresión cartesiana de un vector

a. Sean tres versores $\breve{i}, \breve{j}$ y $\breve{k}$ cuyas direcciones y sentidos coinciden respectivamente con la de los ejes x, y, z de una terna derecha de ejes ortogonales (ver fig. VT. XVII a).
Estos tres versores formarán lo que en lo sucesivo se llamará terna ortogonal derecha de versores.

b. Sea una terna ortogonal derecha de ejes x, y, z; y sea $\breve{i}, \breve{j}, \breve{k}$ la correspondiente terna ortogonal derecha de versores.
Sea un vector $\vec{a}$. Sea una representación de $\vec{a}$ tal que el origen de dicha representación coincida con el origen de la terna de ejes (ver fig. VT. XVII a).

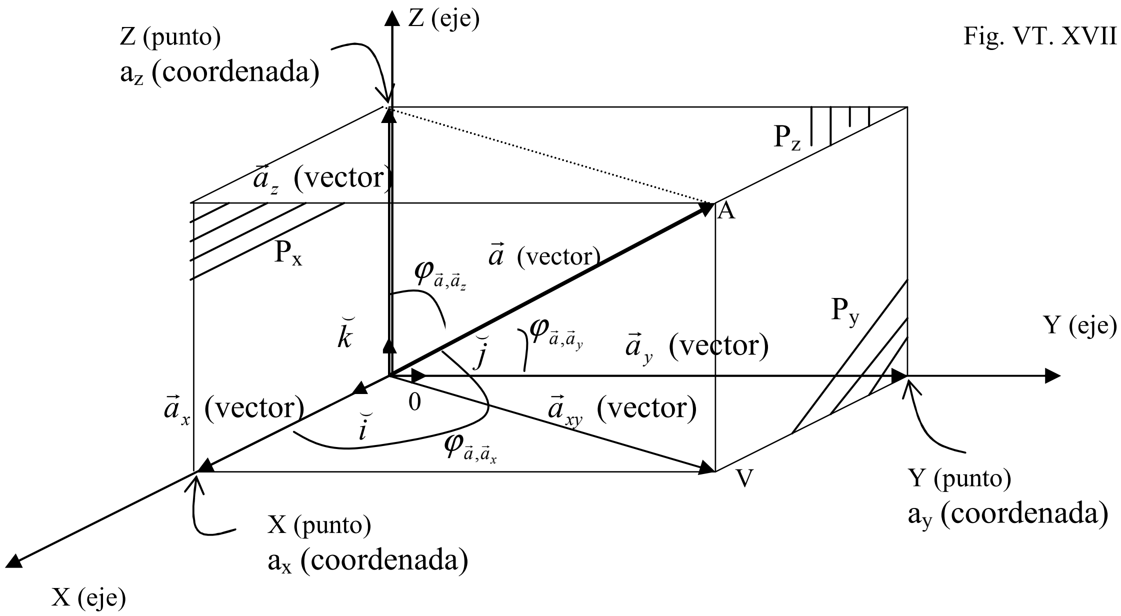


Fig. VT. XVII a

c. Por el punto A, extremo de la representación de $\vec{a}$, trácense planos P_x, P_y y Pz, perpendiculares respectivamente a los ejes x, y, z; es decir paralelos respectivamente a los planos yz, xz y xy.
Estos tres planos P_x, P_y y Pz, y los planos yz, xz y xy constituyen por construcción un paralelepípedo recto, siendo la representación de $\vec{a}$ una diagonal del mismo.

d. Sean los vectores $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ y $\vec{a}_z$ cuyas representaciones sean respectivamente los segmentos orientados $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$. Sea $\vec{a}_{xy}$ el vector representado por el segmento orientado $\overrightarrow{OV}$.
Por ser OXVYO un paralelogramo se tiene que:

$$\vec{a}_{xy} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \quad \textbf{[1]}$$

Igualmente, por ser OVAZO un paralelogramo se tiene que:

$$\vec{a} = \vec{a}_{xy} + \vec{a}_z \quad \textbf{[2]}$$

y entonces por **[1]** resulta que:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad \textbf{[3]}$$

Notar que por ser P_x, P_y y P_z perpendiculares respectivamente a los ejes x, y y z se tiene que <u>los puntos X, Y y Z no son mas que las proyecciones ortogonales del punto A sobre los ejes x, y y z respectivamente</u>.

e. Sean a_x, a_y y a_z respectivamente las coordenadas según x, y y z de estos puntos X,Y y Z. (Por favor, en lo sucesivo no confundir las <u>coordenadas</u> a_x, a_y y a_z con los <u>vectores</u> $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ y $\vec{a}_z$).
Por lo definido en VT XII (producto de un número real por un vector) se tiene entonces que:

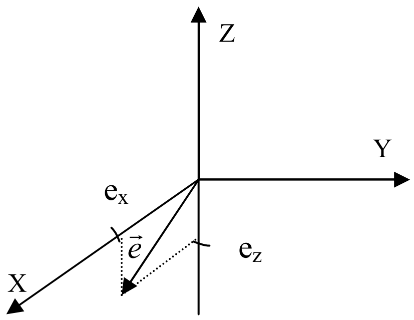
$\vec{a}_x = a_x \breve{i}$ $\vec{a}_y = a_y \breve{j}$ $\vec{a}_z = a_z \breve{k}$

lo que reemplazando en **[3]** indica que:

$$\vec{a} = a_x \breve{i} + a_y \breve{j} + a_z \breve{k}$$

donde a_x, a_y y a_z son las coordenadas según una terna derecha de ejes ortogonales del extremo de la representación de $\vec{a}$ cuyo origen coincide con el de la terna, y donde $\breve{i}, \breve{j}$ y $\breve{k}$ son versores cuya dirección y sentido son los de los ejes de la terna. **[4]**

Notar que a_x, a_y y a_z son números reales que, según los casos, pueden ser positivos, negativos o nulos (ver fig. VT. XVII b).



$e_x > 0$
$e_y = 0$
$e_z < 0$

Fig. VT. XVII b

f. La expresión **[4]** constituye la así llamada <u>expresión cartesiana del vector $\vec{a}$ en función de los versores $\breve{i}, \breve{j}$ y $\breve{k}$</u>.

Esta expresión cartesiana es la manera más "popular" de definir un vector. Considerar al respecto que si un Señor A deseara especificar un cierto vector al Señor B usando únicamente la definición básica de vector libre, se vería obligado a pasarle una representación del mismo, es decir una "flechita", que debería ser trasladada paralelamente a sí misma. En cambio, usando la expresión cartesiana, bastaría con que el Señor A especifique al Señor B tres números (a_x, a_y y a_z), previo acuerdo sobre una terna ortogonal convencional.

g. Módulo de un vector expresado en forma cartesiana.

Según el teorema de Pitágoras se tiene (ver fig. VT. XVII a) que:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{OZ}^2 = (\overline{OX}^2 + \overline{OY}^2) + \overline{OZ}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OY}^2 + \overline{OZ}^2$$

Es decir que:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

y por lo tanto:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \textbf{[5]}$$

h. Cosenos directores de un vector expresado en forma cartesiana. Se tiene (ver fig. VT. XVII a) que:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\varphi_{\vec{a},\breve{i}} &= \cos\varphi_{\vec{a},\vec{a}_x} = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\
\cos\varphi_{\vec{a},\breve{j}} &= \cos\varphi_{\vec{a},\vec{a}_y} = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\
\cos\varphi_{\vec{a},\breve{k}} &= \cos\varphi_{\vec{a},\vec{a}_z} = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[6]}$$

Estos tres cosenos $\cos\varphi_{\vec{a},\breve{i}}$, $\cos\varphi_{\vec{a},\breve{j}}$ y $\cos\varphi_{\vec{a},\breve{k}}$ son los así llamados <u>cosenos directores</u> del vector $\vec{a}$ según la terna considerada.
Evidentemente:

$$\cos^2\varphi_{\vec{a},\breve{i}} + \cos^2\varphi_{\vec{a},\breve{j}} + \cos^2\varphi_{\vec{a},\breve{k}} = \frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = 1 \quad \textbf{[7]}$$

Si de un vector $\vec{a}$ se especifica su módulo $|\vec{a}|$ y sus cosenos directores, el vector queda completamente especificado ya que:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k} = (|\vec{a}|\cos\varphi_{\vec{a},\breve{i}})\breve{i} + (|\vec{a}|\cos\varphi_{\vec{a},\breve{j}})\breve{j} + (|\vec{a}|\cos\varphi_{\vec{a},\breve{k}})\breve{k} = \\
&= |\vec{a}|\left[(\cos\varphi_{\vec{a},\breve{i}})\breve{i} + (\cos\varphi_{\vec{a},\breve{j}})\breve{j} + (\cos\varphi_{\vec{a},\breve{k}})\breve{k}\right]
\end{aligned} \quad \textbf{[8]}$$

i. Producto de un vector expresado en forma cartesiana por un número real.
Sean:
$\vec{a} = a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k}$ un vector cualquiera
λ = número real.
Es inmediata la demostración de que:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\breve{i} + (\lambda a_y)\breve{j} + (\lambda a_z)\breve{k} \quad \textbf{[9]}$$

j. Suma y resta de vectores expresados en forma cartesiana. Sean vectores cualquiera:

$$\vec{a} = a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k}$$
$$\vec{b} = b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}$$

Es muy fácil demostrar que:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b} &= (a_x+b_x)\breve{i} + (a_y+b_y)\breve{j} + (a_z+b_z)\breve{k}\\
\vec{a}-\vec{b} &= (a_x-b_x)\breve{i} + (a_y-b_y)\breve{j} + (a_z-b_z)\breve{k}
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[10]}$$

Generalizando, dados por ejemplo cuatro vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ se tiene que:

$$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}=(a_x+b_x-c_x-d_x)\breve{i}+(a_y+b_y-c_y-d_y)\breve{j}+(a_z+b_z-c_z-d_z)\breve{k} \qquad \textbf{[11]}$$

k. Combinando lo visto en **i.** y **j.** se tiene que dados cuatro vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ en forma cartesiana y cuatro números reales α, β, γ y δ se tiene que, por ejemplo:

$$\begin{aligned}&\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}-\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\\&(\alpha a_x-\beta b_x-\gamma c_x+\delta d_x)\breve{i}+(\alpha a_y-\beta b_y-\gamma c_y+\delta d_y)\breve{j}+(\alpha a_z-\beta b_z-\gamma c_z+\delta d_z)\breve{k}\end{aligned} \qquad \textbf{[12]}$$

VT XVIII

Proyección de un vector sobre otro

Fig. VT. XVIII a

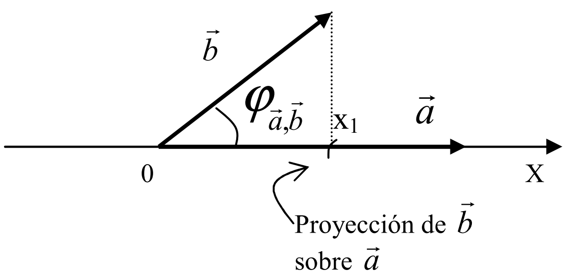
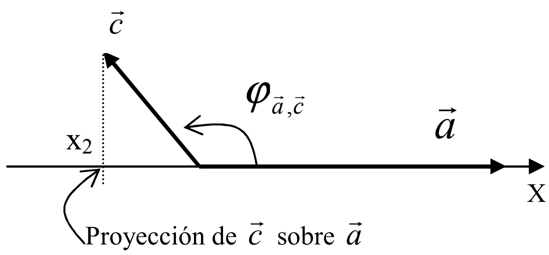


Fig. VT. XVIII b



Sean dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Sean representaciones de los mismos que tengan un origen común (ver fig. VT. XVIII a).
Dispóngase un eje x según la representación de $\vec{a}$. Elíjase como origen de coordenadas según este eje al origen común de las representaciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por el extremo de $\vec{b}$ trácese una perpendicular al eje x. La coordenada según x del punto de intersección de dicha perpendicular con el eje será llamada <u>proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$</u>**.** Notar que esta proyección es un <u>número</u> "a secas".
De manera similar podría definirse la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.
Notar que una proyección puede ser un número positivo (fig. VT. XVIII a), o negativo (fig. VT. XVIII b), o nulo ($\vec{a}$ y $\vec{b}$ perpendiculares).

Si $\varphi_{\vec{a},\vec{b}}$ es el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se tiene que:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = |\vec{b}|\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}}\\&\text{Proyección de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b} = |\vec{a}|\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}}\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{[1]}$$

VT XIX

<u>Producto escalar de dos vectores</u>

a. Se define:

1º. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos:

$$\vec{a}\ .\ \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}} \qquad \textbf{[1]}$$

Ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Producto escalar de $\vec{a}$ por $\vec{b}$

Módulo de $\vec{a}$

Módulo de $\vec{b}$

2º. Para $\vec{a}$ y/o $\vec{b}$ nulos:

$$\vec{a}\ .\vec{b}\ =\ 0$$

Se hace notar que <u>el producto escalar de dos vectores es siempre un **número real**</u> (que puede ser positivo, negativo o nulo).
Como primera consecuencia de esta definición se tiene que:
si $\vec{a} \neq 0$

$$\vec{a}.\vec{a}\ =\ |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos\ 0\ =\ |\vec{a}|^2\ >\ 0 \qquad \textbf{[2]}$$

y por lo tanto:
$|\vec{a}|$ = Raíz cuadrada positiva de $\vec{a}.\vec{a}$. **[3]**

b. Se tiene que:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = |\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{a}|.\ \text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}$$

Igualmente hubiera podido demostrarse que.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{b}|\ \text{Proyección de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}$$

c. Propiedades del producto escalar:

Puede demostrarse fácilmente que:

1º. $(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$, λ = número real **[4]**

2º. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (Propiedad conmutativa) **[5]**

3º. $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (ver apéndice A. VT. I y II) **[6]**

(Propiedad distributiva del producto escalar con respecto a la suma de vectores)

d. Producto escalar de dos vectores dados en forma cartesiana.

Si $\vec{a} = a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k}$; $\vec{b} = b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}$ puede demostrarse que (ver apéndice A. VT. III):

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \textbf{[7]}$$

e. Cálculo del ángulo formado por dos vectores.

Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dados en forma cartesiana.

Se tiene por **[1]** que:

Por **[7]** y por **[5]** de VT. XVII

$$\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad \textbf{[8]}$$

f. Perpendicularidad entre dos vectores.

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \frac{\pi}{2}$ (90º) y por lo tanto $\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0$, teniéndose así que sería (ver **[1]**):

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \qquad \textbf{[9]}$$

Esta es la condición de perpendicularidad de dos vectores.
Supóngase que, a título de ejercicio, se pidan hallar todos los vectores perpendiculares al vector:

$$\vec{a} = 2\breve{i} - 3\breve{j} + \breve{k}$$

Sea $\vec{w} = x\breve{i} + y\breve{j} + z\breve{k}$ un vector, por el momento desconocido, perpendicular al $\vec{a}$.
Entonces, por **[9]** debe ser:

$$\vec{a}.\vec{w} = 2x - 3y + 1z = 0$$

Dando valores arbitrarios a dos de las tres componentes x, y y z, queda determinada la 3ª. Se tiene pues una familia infinita de vectores perpendiculares al $\vec{a}$. Tomando por ejemplo x =1, y = 2 resulta:

2.1 - 3.2 + z = 0 $\Rightarrow$ z = 4

Y resulta así que uno de los infinitos vectores perpendiculares al $2\breve{i} - 3\breve{j} + \breve{k}$ es el vector $\breve{i} + 2\breve{j} + 4\breve{k}$.

VT XX

Producto vectorial de dos vectores

a. Se define:

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, el producto vectorial de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ (en ese orden) es **otro vector** indicado como $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tal que:

1º.

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| sen\varphi_{\vec{a},\vec{b}}$$

Ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Módulo de $\vec{b}$

Módulo de $\vec{a} \wedge \vec{b}$

Módulo de $\vec{a}$

2º. La dirección de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es perpendicular al plano determinado por representaciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que tengan un origen común.

3º. El sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ está dado por la siguiente regla de "la mano derecha". Sean representaciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que tengan un origen común. Extendiéndanse los dedos pulgar e índice de la mano derecha respectivamente sobre las representaciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Al poner el dedo medio perpendicular al pulgar y al índice, dicho dedo medio señalará el sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. **[1]**

(Nota: se postula que el ángulo formado por el pulgar y el índice no supera nunca los π radianes (180º)).

Ver figuras VT. XX a y VT. XX b.

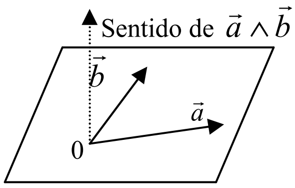


Fig. VT. XX a

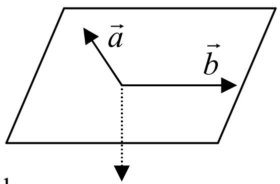


Fig. VT. XX b

4º. Se completa esta definición estableciendo que:

$$\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0} \qquad \vec{0} \wedge \vec{a} = \vec{0} \qquad \vec{0} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

b. De la definición dada en **[1]** surge inmediatamente que:

1º. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ **[2]**

2º. $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ (ya que $\text{sen}\,\varphi_{\vec{a},\vec{a}} = 0$) **[3]**

3º. Si $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0$ ó π (0º ó 180º) entonces es:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = 0 \text{ (ya que sen } \varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0 \text{)}$$

4º. $\lambda\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$ (ver apéndice A VT. IV) **[4]**

c. También puede probarse (ver apéndices A VT. V y VI) que:

1º. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \wedge \vec{c}) + (\vec{b} \wedge \vec{c})$ **[5]**

2º. $\vec{c} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} \wedge \vec{a}) + (\vec{c} \wedge \vec{b})$ **[6]**

d. Visualización geométrica de la magnitud del **módulo** $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$.

Esta visualización corresponde al módulo de un producto vectorial (que es un número) y no al vector que es el producto vectorial.

Sean representaciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que tengan un origen común (ver fig. VT. XXc).

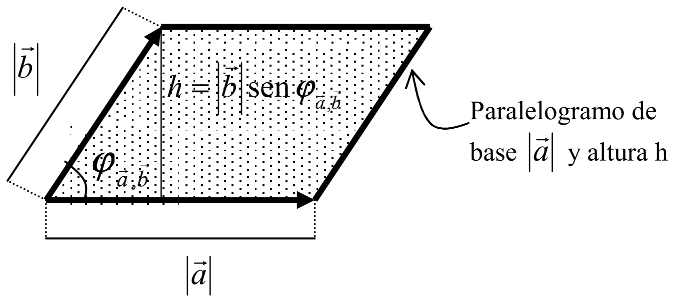


Fig. VT XX c

Evidentemente:

Área del paralelogramo sombreado = $|\vec{a}|.h = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen} \varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ **[7]**

Tener bien en cuenta que el paralelogramo **no es** $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ (y menos aún es $\vec{a} \wedge \vec{b}$). Sencillamente, el número que mide su área es igual al número $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$, y nada más.

e. Producto vectorial de dos vectores expresados en forma cartesiana.

Sean los vectores: $\vec{a} = a_x \breve{i} + a_y \breve{j} + a_z \breve{k}$, $\quad \vec{b} = b_x \breve{i} + b_y \breve{j} + b_z \breve{k}$.

Puede probarse (ver apéndice A VT. VII) que:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\breve{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\breve{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\breve{k} \qquad [8]$$

Esta fórmula puede ser expresada en forma mnemotécnica como:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad [9]$$

Notar que lo indicado en el 2º miembro de esta fórmula **[9]** no es en rigor un determinante ya que los elementos que allí figuran, son una mezcla de versores y números; teniéndose por otra parte que todos los elementos de un determinante deben ser exclusivamente números.

Sin embargo, aplicando la mecánica habitual del desarrollo de determinantes a **[9]** y tratando a $\breve{i}, \breve{j}$ y $\breve{k}$ como si fueran números, de esta fórmula **[9]** sale la **[8]**, que es la verdadera expresión del producto vectorial de dos vectores dados en forma cartesiana.

f. Vectores no nulos con una misma dirección.

Evidentemente, si dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen una misma dirección, entonces será $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0$ ó $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \pi$, lo que implica que sea:

$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen} \varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0$ es decir que sea: $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$

Entonces, según **[8]**, para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección ha de tenerse que:

$$a_y b_z - a_z b_y = 0 \qquad , \qquad a_x b_z - a_z b_x = 0 \qquad , \qquad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

lo que también puede indicarse como:

$$a_y b_z = a_z b_y \qquad , \qquad a_y b_x = a_x b_y \qquad , \qquad a_x b_z = a_z b_x \qquad \textbf{[10]}$$

g. Si <u>además de tener la misma dirección</u>, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido entonces es $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0$, lo que implica que sea:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$$, valor positivo.

Es decir que debe ser (ver **[7]** de VT. XIX):

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z > 0 \qquad (\vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ con el mismo sentido}) \qquad \textbf{[11]}$$

En cambio, si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tuvieran sentidos opuestos, sería $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \pi$, lo que implica que sea:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi = -|\vec{a}||\vec{b}|$$, valor negativo.

Es decir que debería ser:

$$a_x b_b + a_y b_y + a_z b_z \langle 0 \qquad (\vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ con sentidos opuestos}) \qquad \textbf{[12]}$$

VT XXI

<u>Producto doble mixto</u>

a. Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cualesquiera, el producto doble mixto de esos tres vectores <u>en el orden dado</u> es:

$$\underbrace{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}_{\text{Producto doble mixto de } \vec{a},\vec{b} \text{ y } \vec{c}\text{, en ese orden}} = \vec{a}\underset{\text{Producto escalar}}{.}(\vec{b} \overset{\text{Producto vectorial}}{\wedge} \vec{c}) \qquad \textbf{[1]}$$

Notar que el producto doble mixto $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ <u>es un número</u> ya que es el producto <u>escalar</u> de los vectores $\vec{a}$ y $(\vec{b} \wedge \vec{c})$.

b. En base a la fórmula **[4]** indicada mas abajo puede probarse que:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{a},\vec{b}) \qquad \textbf{[2]}$$

c. Visualización geométrica de la magnitud de $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Sean representaciones con un origen común de tres vectores cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (ver fig. VT. XXI a).

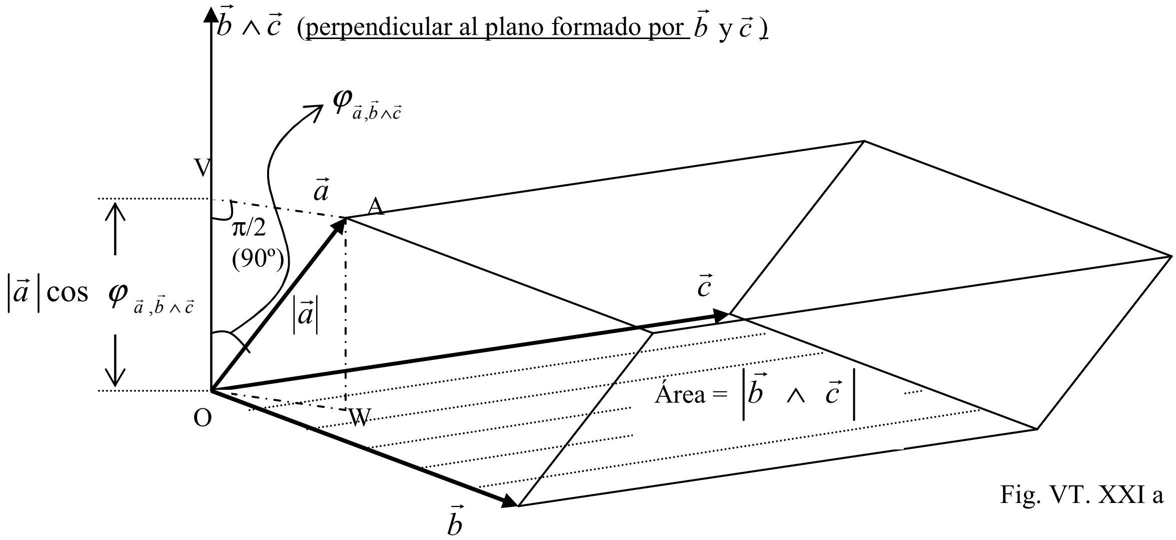


Fig. VT. XXI a

Por el extremo A del vector $\vec{a}$, trácese una perpendicular a la representación de $\vec{b} \wedge \vec{c}$ (o a su prolongación), y una perpendicular al plano determinado por las representaciones de $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Sean V y W los correspondientes puntos de intersección.

Como evidentemente el polígono OVAWO es un rectángulo, $\overline{AW} = \overline{OV}$ y como:

$$\overline{OV} = |\vec{a}|\cos\ \varphi_{\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c}}$$

Se tiene entonces que:

$\overline{AW} =$ altura del paralelepípedo de la fig. VT. XXI a = $|\vec{a}|\cos\ \varphi_{\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c}}$

Como por otra parte, según visto en VT. XX d la base de dicho paralelepípedo tiene un área igual a $|\vec{b} \wedge \vec{c}|$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Volumen del paralelepípedo = Área de su base} \bullet \text{ su altura =}\\ = |\vec{b} \wedge \vec{c}||\vec{a}|\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c}} = \vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\end{array}\right\} \quad \textbf{[3]}$$

Tener en cuenta que dicho paralelepípedo <u>no es</u> el producto doble mixto $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$; sino que <u>la medida de su volumen</u> resulta igual a la magnitud de $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, y nada más.

d. Producto doble mixto de tres vectores dados en forma cartesiana.

En base a lo ya visto es fácil probar que:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \quad \textbf{[4]}$$

Esta fórmula también puede ser puesta bajo la forma:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad \textbf{[5]}$$

En este caso, el 2º miembro de esta fórmula **[5]** es un verdadero determinante ya que todos sus elementos son números.

e. Para que tres vectores no nulos $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean tales que:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0 \qquad \textbf{[6]}$$

debe cumplirse por lo menos una de las siguientes condiciones:

1º. Debe ser $\vec{b} \wedge \vec{c} = 0$, lo que implica que sea $\left|\vec{b} \wedge \vec{c}\right| = 0$, lo que a su vez supone que sea:

$$|\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen} \varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0 \qquad \textbf{[7]}$$

Como $|\vec{a}| \neq 0 y |\vec{b}| \neq 0$ por ser $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, para que ocurra lo indicado en **[7]** debe ser $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 0 ó \varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \pi$, es decir que:

Para que sea $\vec{b} \wedge \vec{c} = 0$, los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ deben tener la misma dirección.

2º. Para que sea $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$ en el supuesto que sea $\vec{b} \wedge \vec{c} \neq 0$, ha de tenerse que:

$$|\vec{a}||\vec{b} \wedge \vec{c}| \cos \varphi_{\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c}} = 0 \qquad \textbf{[8]}$$

Como $|\vec{a}| \neq 0 y |\vec{b} \wedge \vec{c}| \neq 0$, para que ocurra lo indicado en **[8]** debe ser $\varphi_{\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c}} = \pi/2$.

Entonces, ha de tenerse que representaciones de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{b} \wedge \vec{c}$ que tengan un origen común han de ser tales la que representación de $\vec{a}$ sea perpendicular a la representación de $\vec{b} \wedge \vec{c}$. Pero como la representación de $\vec{b} \wedge \vec{c}$ es perpendicular a las representaciones de $\vec{b}$ y $\vec{c}$, se tiene entonces, que las representaciones de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ consideradas deben ser coplanares (ver fig. VT. XXI b).

Es decir que:

Para que sea $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$ siendo $\vec{b} \wedge \vec{c} \neq \vec{0}$, ha de tenerse que las direcciones de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ han de ser todas paralelas a un mismo plano.

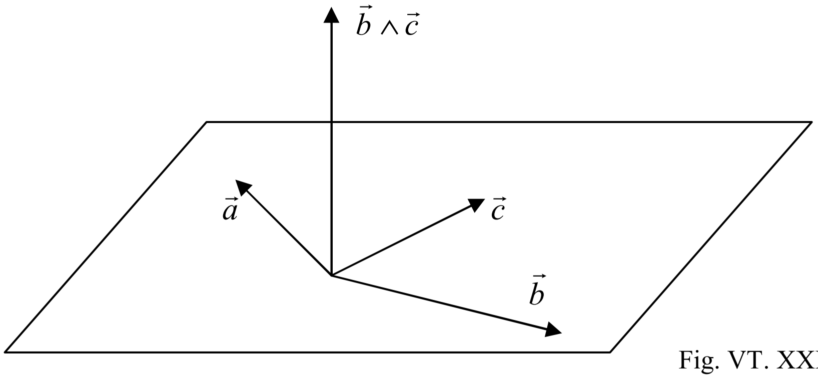


Fig. VT. XXI b

Apéndices del capítulo sobre vectores libres

A. VT I

Más sobre proyección de un vector sobre otro

Sean las representaciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ indicadas en trazo grueso en la figura A. VT. I a

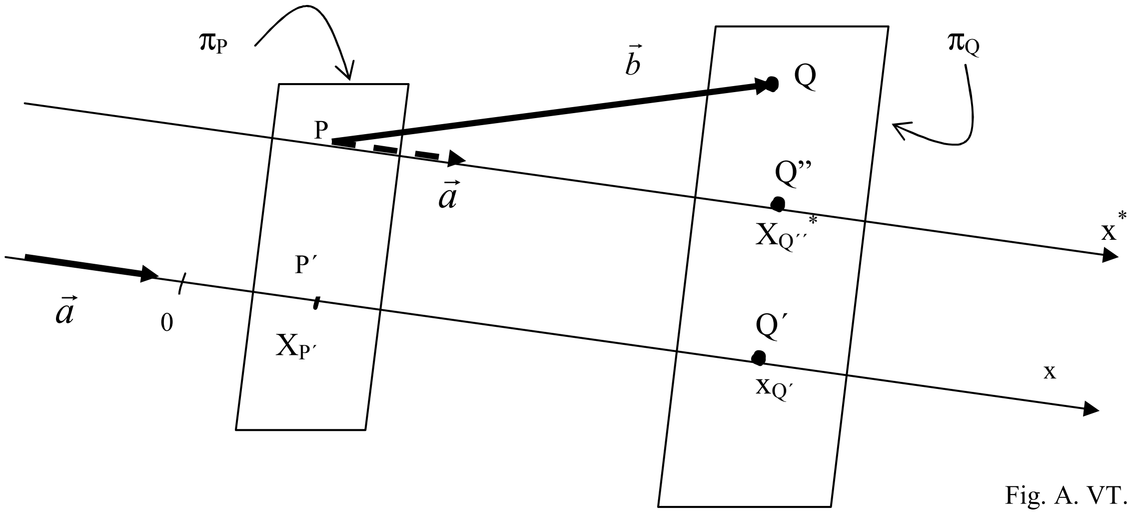


Fig. A. VT. I a

Sea un eje x según la representación de $\vec{a}$, con el mismo sentido de dicho vector. Elíjase un origen de coordenadas 0 arbitrario sobre dicho eje.
Sean respectivamente P y Q el origen y extremo de la representación de $\vec{b}$. Trácense por P y Q sendos planos perpendiculares al eje x y llámeselos π_p y π_Q. Llámese P´ y Q´ a los puntos de intersección de π_p y π_Q con el eje x. Sean $X_{p'}$ y $X_{Q'}$ las coordenadas según x de P´ y Q´.
Se demostrará a continuación que:

$$\text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = X_{Q'} - X_{p'} \qquad \textbf{[1]}$$

a. Trácese por P otro eje x^* paralelo al x, y que tenga el mismo sentido positivo. Sea P el origen de coordenadas de x^*.
Llámese Q´´ al punto de intersección de x^* con π_Q. Sea $x_{Q''}$ la coordenada de Q´´ según el eje x^*.
Sea otra representación de $\vec{a}$ que tenga su origen en P (representada en la figura A. VT. I a en trazo grueso punteado).
Como π_Q es perpendicular a x, también será perpendicular a x^* ya que por construcción x y x^* son paralelos. Entonces una perpendicular a x^* trazada por Q estará comprendida íntegramente en π_Q, y por lo tanto cortará al eje x^* en el punto Q”, intersección de x^* con π_Q.
Entonces, según la definición de proyección de un vector sobre otro dada en VT. XVIII se tiene que:

$$\text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = X_{Q''} \qquad \textbf{[2]}$$

b. Por otra parte, como:

1º. Longitud de $\overline{PQ''}$ = Longitud de $\overline{P'Q'}$
ya que se trata de segmentos de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos.

2º. Los ejes x y x^* tienen el mismo sentido.
resulta que:

$$X_{Q''} - 0 = X_{Q'} - X_{p'}$$

es decir que:

$X_{Q''} = X_{Q'} - X_{P'}$

entonces por **[2]** se tiene que:

Proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ = $X_{Q'} - X_{p'}$

que es lo que se pretendía demostrar.

A. VT II

Distributividad del producto escalar de vectores con respecto a la suma de vectores

a. Sean tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cuyas representaciones están indicadas en la figura A. VT. II a.

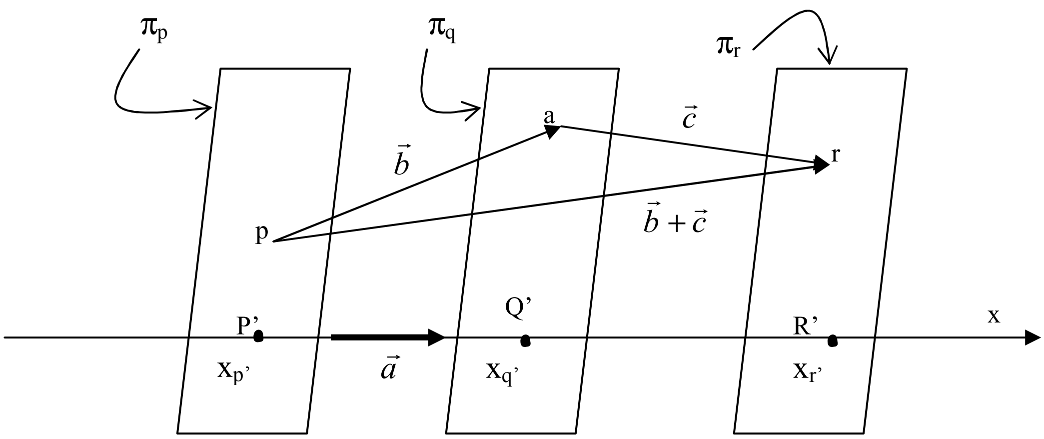


Fig. A. VT. II a

Por lo demostrado en A. VT. I se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Proyección de } \vec{b}+\vec{c} \text{ sobre } \vec{a} = x_{r'} - x_{p'} = (x_{r'} - x_{q'}) + (x_{q'} - x_{p'}) = \\ &\quad = \text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} + \text{Proyección de } \vec{c} \text{ sobre } \vec{a} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

b. Se tiene que:

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}| \,(\text{Proyección de } \vec{b}+\vec{c} \text{ sobre } \vec{a}) \overset{\text{Por [1]}}{=}$$
$$= |\vec{a}| \,[(\text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}) + (\text{Proyección de } \vec{c} \text{ sobre } \vec{a})] =$$

$$= |\vec{a}|\text{(Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}\text{)} + |\vec{a}|\text{(Proyección de } \vec{c} \text{ sobre } \vec{a}\text{)} =$$
$$= \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$$

Ver **b** de VT. XIX

Resumiendo:

$$\boxed{\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}}$$ **[2]**

Esta fórmula puede ser fácilmente amplificada. Así:

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}.\left[\vec{b} + (\vec{c} + \vec{d})\right] = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{d}$$

y, en general:

$$\boxed{\vec{a}.(\vec{b}_1 + ... + \vec{b}_n) = \vec{a}.\vec{b}_1 + ... + \vec{a}.\vec{b}_n}$$ **[3]**

A. VT III

<u>Producto escalar de vectores expresados en forma cartesiana</u>

a. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos en forma cartesiana con respecto a una misma terna derecha de versores ortogonales:

$$\vec{a} = a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k} \qquad ; \qquad \vec{b} = b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}$$ **[1]**

Se tiene que:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{a}.\vec{b} &= \vec{a}.(b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}) \overset{\text{Por [3] de A.VT. II}}{=} \vec{a}.(b_x\breve{i}) + \vec{a}.(b_y\breve{j}) + \vec{a}.(b_z\breve{k}) \overset{\text{Por [4] de VT. XIX}}{=} \\
&= b_x(\vec{a}.\breve{i}) + b_y(\vec{a}.\breve{j}) + b_z(\vec{a}.\breve{k}) = \\
&= b_x\left[(a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k}).\breve{i}\right] + b_y\left[(a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k}).\breve{j}\right] + \\
&\qquad + b_z\left[(a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k}).\breve{k}\right] \overset{\text{Por [3] de A.VT. II}}{=} \\
&= b_x\left[(a_x\breve{i}).\breve{i} + (a_y\breve{j}).\breve{i} + (a_z\breve{k}).\breve{i}\right] + \\
&\qquad + b_y\left[(a_x\breve{i}).\breve{j} + (a_y\breve{j}).\breve{j} + (a_z\breve{k}).\breve{j}\right] + \\
&\qquad\qquad + b_z\left[(a_x\breve{i}).\breve{k} + (a_y\breve{j}).\breve{k} + (a_z\breve{k}).\breve{k}\right] \overset{\text{Por [4] de VT. XIX}}{=} \\
&= b_x\left[a_x(\breve{i}.\breve{i}) + a_y(\breve{j}.\breve{i}) + a_z(\breve{k}.\breve{i})\right] + \\
&\qquad + b_y\left[a_x(\breve{i}.\breve{j}) + a_y(\breve{j}.\breve{j}) + a_z(\breve{k}.\breve{j})\right] + \\
&\qquad\qquad + b_z\left[a_x(\breve{i}.\breve{k}) + a_y(\breve{j}.\breve{k}) + a_z(\breve{k}.\breve{k})\right]
\end{aligned}\right\}\ \textbf{[2]}$$

Como por otra parte es:

1º. $\breve{i}.\breve{i} = |1||1|\cos 0 = 1; \quad \breve{j}.\breve{j} = 1; \quad \breve{k}.\breve{k} = 1$

2º. $\begin{aligned} &\breve{i}.\breve{j} = |1||1|\cos\pi/2 = 0 \\ &\breve{i}.\breve{k} = 0; \quad \breve{j}.\breve{i} = 0; \quad \breve{j}.\breve{k} = 0; \quad \breve{k}.\breve{i} = 0; \quad \breve{k}.\breve{j} = 0 \end{aligned}$

por **[2]** resulta que:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

A. VT IV

a. Se demostrará que:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b}) \\ &\lambda = \text{número real cualquiera} \end{aligned}\right\}\ \textbf{[1]}$$

b. <u>Sea λ > 0</u>. Entonces:

1º. $$|\lambda\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen}\varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}} \overset{\text{Ver [3] de VT. XII}}{=} |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen}\varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}}$$

y como $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}}$ por ser λ > 0, se tiene que:

Ver **[3]** de VT. XII

$$\left|\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = |\lambda|\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\varphi_{\vec{a},\vec{b}}}_{|\vec{a}\wedge\vec{b}|} = |\lambda|\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = \left|\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})\right|$$

Resumiendo:

Para $\lambda > 0$ es $\left|\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = \left|\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})\right|$ **[2]**

2º. Por tener $\vec{a}$ y $\lambda\vec{a}$ una misma dirección y sentido, y por ser $\lambda > 0$ resulta que:

Dirección de $\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}$ =Dirección de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ =Dirección de $\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})$ **[3]**

Sentido de $\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}$ =Sentido de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ =Sentido de $\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})$ **[4]**

Y entonces, por **[2],[3]** y **[4]** se tiene que:

Para $\lambda > 0$ es $\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \lambda\vec{a}\wedge\vec{b}$ **[5]**

c. <u>Sea $\lambda < 0$</u>; entonces:

Ver **[3]** de VT. XII

1º. $\left|\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}} = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}}$

y como (ver fig. A. VT. IV a) se tiene que por ser $\lambda < 1$ es:

$\varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}} = \pi - \varphi_{\vec{a},\vec{b}} \Rightarrow \text{sen}\,\varphi_{\lambda\vec{a},\vec{b}} = \text{sen}\,\varphi_{\vec{a},\vec{b}}$

se tiene entonces que:

Ver **[3]** de VT. XII

$$\left|\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = |\lambda|\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\varphi_{\vec{a},\vec{b}}}_{|\vec{a}\wedge\vec{b}|} = |\lambda|\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = \left|\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})\right|$$

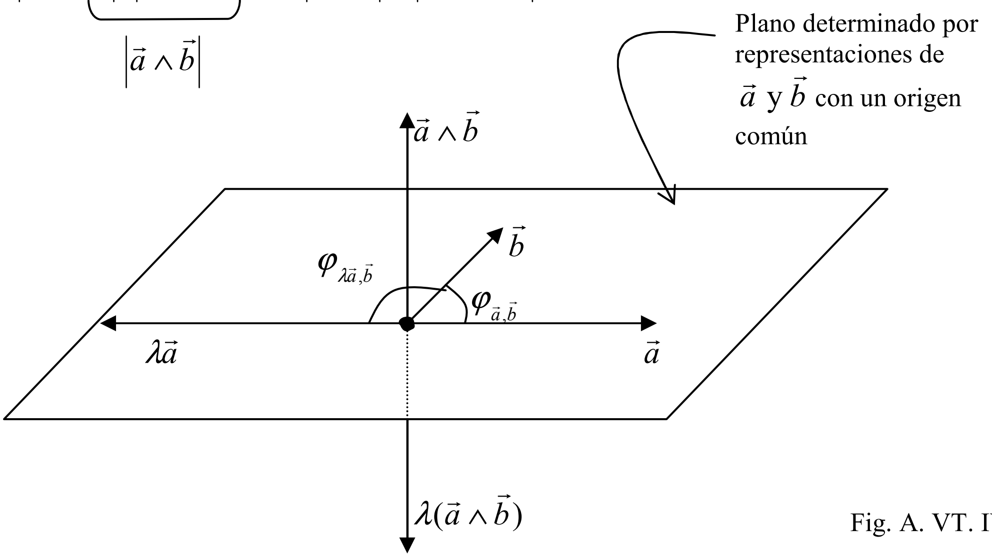


Fig. A. VT. IV a

Resumiendo:

Para $\lambda < 0$ es $\left|\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = \left|\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})\right|$ **[6]**

2º. Por tener $\vec{a}$ y $\lambda\vec{a}$ una misma dirección resulta que:

Dirección de $\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}$ =Dirección de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ =Dirección de $\lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})$ **[7]**

3º. Por ser $\lambda < 0$:

Sentido de $\lambda\vec{a}$ = Sentido opuesto al de $\vec{a}$
lo que implica que:
Sentido de $\lambda\vec{a} \wedge \vec{b}$ =Sentido opuesto al de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ **[8]**
y como λ < 0:
Sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ = Sentido opuesto al de $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$ **[9]**
y entonces, por **[8]** y **[9]** se tiene que:
Sentido de $\lambda\vec{a} \wedge \vec{b}$ = Sentido de $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$ **[10]**

Por lo tanto, por **[6]**, **[7]** y **[10]** resulta que:

Para λ<0 es $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \lambda\vec{a} \wedge \vec{b}$ **[11]**

d. Sea λ = 0, entonces:
$\lambda\vec{a} \wedge \vec{b} = 0\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \wedge \vec{b} = \vec{0}$
$\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$
y por lo tanto:
Para λ = 0 es $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \lambda\vec{a} \wedge \vec{b}$ **[12]**

e. Por **[5]**, **[11]** y **[12]**:

Para todo λ es $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \lambda\vec{a} \wedge \vec{b}$

f. De una manera análoga puede probarse que:

Para todo λ es $\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge \lambda\vec{b}$

Quedando así terminado de probar lo indicado en **[1]**.

A. VT V

Proyección de un vector sobre un plano

a. Sea un vector $\vec{a}$ y un plano Ω. Sean respectivamente P y Q el origen y extremo de una representación de $\vec{a}$. Trácense por P y Q perpendiculares a Ω. Sean P_1 y Q_1 respectivamente los puntos de intersección de dichas perpendiculares con el plano Ω. Sea $\vec{a}_1$ un vector tal que una de sus representaciones esté determinada por P_1 y Q_1 (ver fig. A. VT. V a). Se dirá que:

$\vec{a}_1$ = Vector proyección de $\vec{a}$ sobre Ω

Notar que al considerarse varias representaciones de $\vec{a}$, por el procedimiento recién indicado se obtendrán varias representaciones de un mismo vector proyección $\vec{a}_1$ (todas estas últimas representaciones tienen los mismos módulos, direcciones y sentidos).

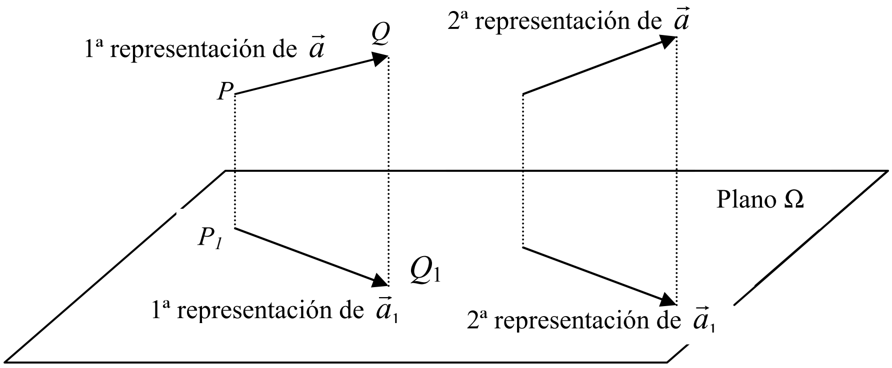


Fig. A. VT. V a

b. Sean los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ (ver figura A. VT. V b)

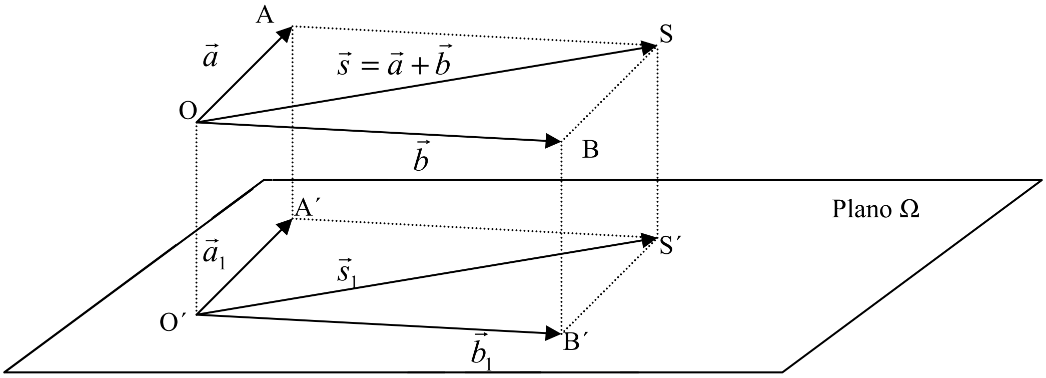


Fig. A. VT. V b

Sean $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ y $\vec{s}_1$ las proyecciones sobre el plano Ω de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{s}$ respectivamente.

Se tiene que si las rectas que contienen a los segmentos $\overline{O'A'}$ y $\overline{B'S'}$ no fueran paralelas se cortarían en un cierto punto α´. Este punto α´ sería la proyección sobre Ω de un punto α que sería la intersección de las rectas que contienen a los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{BS}$. Como por construcción es $\overline{OA}$ // $\overline{BS}$, dichos puntos α y α´ no pueden existir, teniéndose así que debe ser:

$$\overline{O'A'} \,//\, \overline{B'S'} \qquad \textbf{[1]}$$

Por motivos análogos debe tenerse que:

$$\overline{O'B'} \,//\, \overline{A'S'} \qquad \textbf{[2]}$$

Resultando entonces por **[1]** y **[2]** que:

$$\vec{s}_1 = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 \qquad \textbf{[3]}$$

Se ha pues demostrado que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Proyección de } \vec{a} \text{ sobre } \Omega + \text{Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \Omega = \\ \qquad = \text{Proyección de } (\vec{a}+\vec{b}) \text{ sobre } \Omega \end{array}\right\} \quad \textbf{[4]}$$

A. VT VI

<u>Distributividad del producto vectorial con respecto a la suma de vectores</u>

a. Se demostrará que:

1º. $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}=(\vec{a}\wedge\vec{c})+(\vec{b}\wedge\vec{c})$ **[1]**

2º. $\vec{c}\wedge(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{c}\wedge\vec{a})+(\vec{c}\wedge\vec{b})$ **[2]**

b. Se efectuará una demostración previa.
Sea un vector $\vec{a}$ y un versor $\breve{c}$ que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{c}$.
Sean representaciones de $\vec{a}$ y $\breve{c}$ con un origen común tal como las indicadas en la figura A. VT. VI a.
Sea un plano Ω perpendicular a $\breve{c}$ y que pase por el origen común de las antedichas representaciones de $\vec{a}$ y $\breve{c}$.

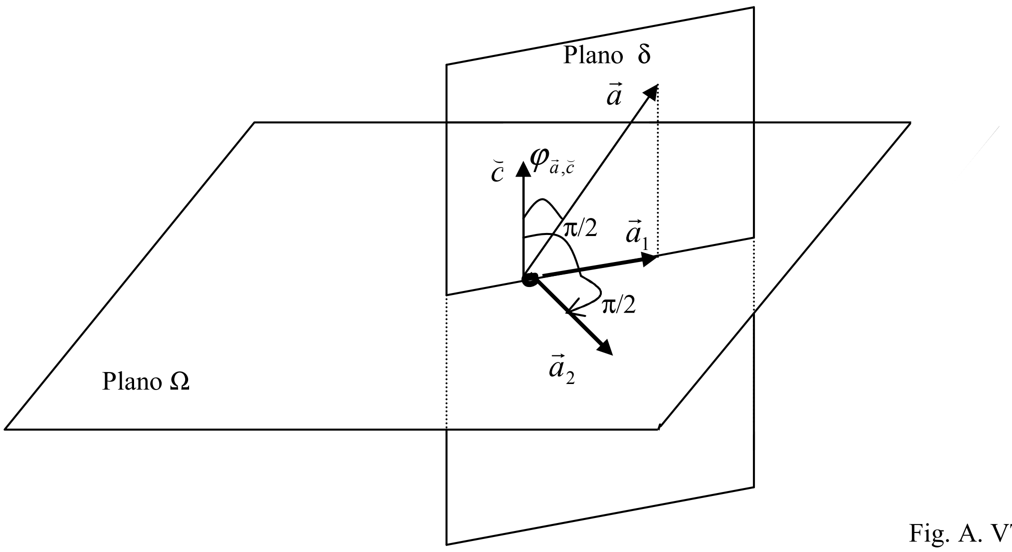


Fig. A. VT. VI a

Sea:
$\vec{a}_1$ = Proyección de $\vec{a}$ sobre Ω
Entonces se tiene que:

1º. $|\vec{a}\wedge\breve{c}|=|\vec{a}||\breve{c}|\operatorname{sen}\varphi_{\vec{a},\breve{c}}=|\vec{a}_1|=|\vec{a}_1||\breve{c}|\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}=|\vec{a}_1\wedge\breve{c}|$

Resumiendo:

$|\vec{a}\wedge\breve{c}|=|\vec{a}_1\wedge\breve{c}|$ **[3]**

2º. Como $\vec{a}$, $\vec{a}_1$ y $\breve{c}$ tienen representaciones coplanares (plano δ en la figura A. VT. VI a) se tiene que:

Dirección de $\vec{a}\wedge\breve{c}$ = Dirección de $\vec{a}_1\wedge\breve{c}$ **[4]**

3º. Como según la regla de la mano derecha es evidente que:

Sentido de $\vec{a} \wedge \breve{c}$ = Sentido de $\vec{a}_1 \wedge \breve{c}$ **[5]**

Entonces, por **[3], [4]** y **[5]** resulta que:

$$\vec{a}_2 = \vec{a} \wedge \breve{c} = \vec{a}_1 \wedge \breve{c} \qquad \textbf{[6]}$$

Puede observarse (ver figura A. VT. VI a) que se obtiene una representación de $\vec{a}_2 = \vec{a} \wedge \breve{c}$ rotando a la representación de $\vec{a}_1$ un ángulo igual a $\pi/2$ hacia la derecha sobre el plano Ω.

c. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\breve{c}$ vectores no nulos y tales que no tengan representaciones coplanares. Se tiene que (ver figura A. VT. VI b):

1º. Por ser $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, y por lo visto en A. VT. V resulta:

$$\vec{s}_1 = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 \qquad \textbf{[7]}$$

2º. Por ser la figura formada por las representaciones de $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ y $\vec{s}_2$ una rotación hacia la derecha sobre el plano Ω de la figura formada por las representaciones de $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ y $\vec{s}_1$, entonces por **[7]** es:

$$\vec{s}_2 = \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \qquad \textbf{[8]}$$

3º. Por lo visto en **b.** es:

$$\vec{a}_2 = \vec{a} \wedge \breve{c}; \quad \vec{b}_2 = \vec{b} \wedge \breve{c}; \quad \vec{s}_2 = \vec{s} \wedge \breve{c} \qquad \textbf{[9]}$$

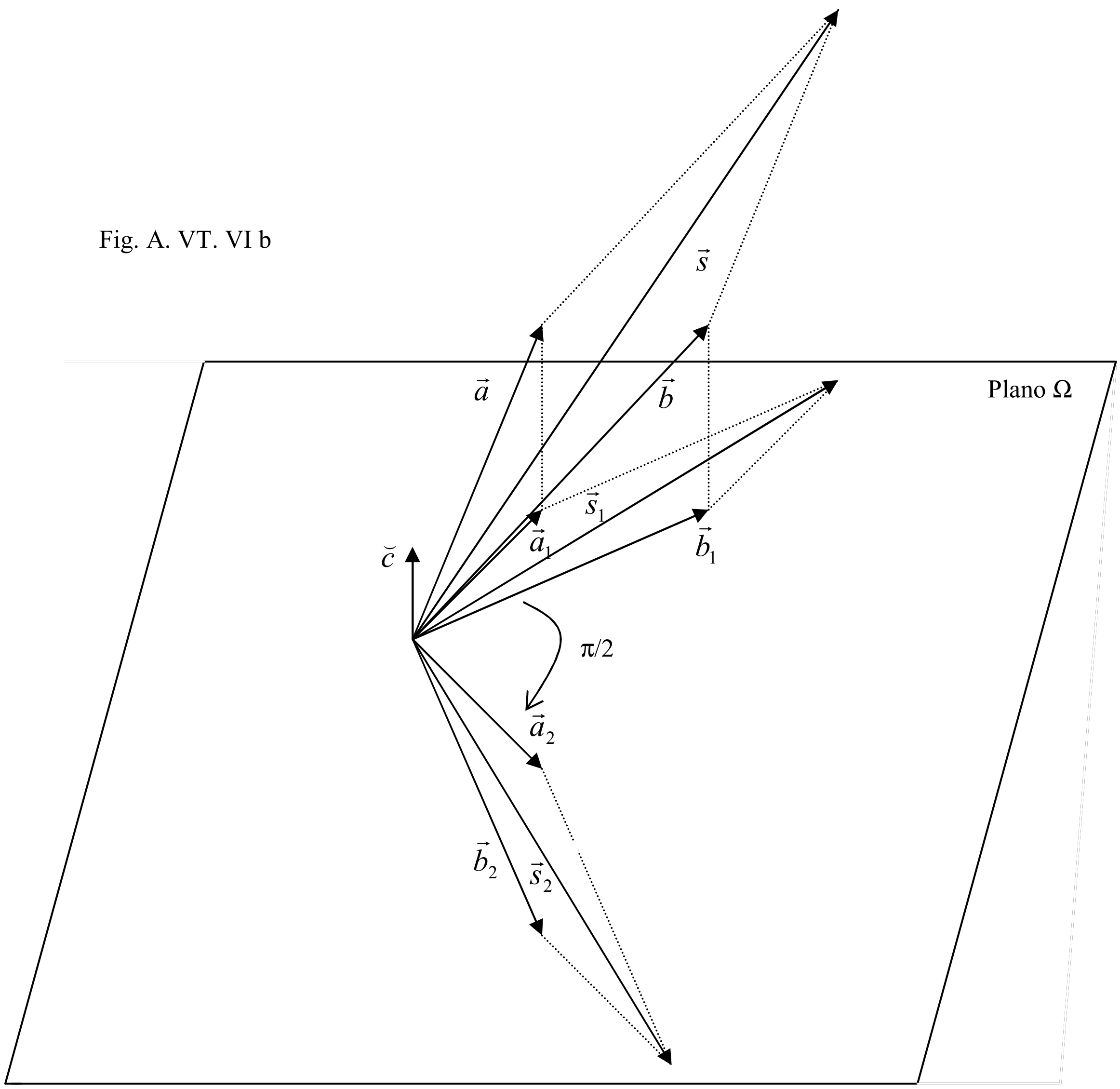
y entonces por **[8]** y **[9]** es:

$$\vec{s} \wedge \vec{c} = (\vec{a} \wedge \vec{c}) + (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

y como $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ resulta finalmente que:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \breve{c} = (\vec{a} \wedge \breve{c}) + (\vec{b} \wedge \breve{c}) \qquad \textbf{[10]}$$

Fig. A. VT. VI b



d. Por **[10]**:

$$|\vec{c}|\left[(\vec{a}+\vec{b})\wedge\breve{c}\right]=|\vec{c}|\left[(\vec{a}\wedge\breve{c})+(\vec{b}\wedge\breve{c})\right]=|\vec{c}|(\vec{a}\wedge\breve{c})+|\vec{c}|(\vec{b}\wedge\breve{c})$$

y por **[1]** de A. VT. IV resulta:

$$(\vec{a}+\vec{b})\wedge|\vec{c}|\breve{c}=(\vec{a}\wedge|\vec{c}|\breve{c})+(\vec{b}\wedge|\vec{c}|\breve{c})$$

y como:

$$\vec{c}=|\vec{c}|\breve{c}$$

se obtiene finalmente que:

Para vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ <u>que no tengan representaciones coplanares</u> es:

$$(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}=(\vec{a}\wedge\vec{c})+(\vec{b}\wedge\vec{c}) \qquad \textbf{[11]}$$

e. La demostración de que la fórmula **[1]** es válida cuando $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen representaciones coplanares y ninguno de ellos es nulo es bastante sencilla, y se deja a título de ejercicio.

Por otra parte, la verificación de la validez de **[1]** cuando uno o más de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean nulos es inmediata.

<u>Lo recién indicado y la fórmula **[11]** determinan que la fórmula **[1]** sea válida para $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cualesquiera.</u>

f. Se tiene que:

Ver **[2]** de VT XX   Por **[1]**

$$\vec{c}\wedge(\vec{a}+\vec{b}) = -\left[(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}\right] = -\left[(\vec{a}\wedge\vec{c})+(\vec{b}\wedge\vec{c})\right] =$$

$$= -(\vec{a}\wedge\vec{c})-(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{c}\wedge\vec{a})+(\vec{c}\wedge\vec{b})$$

Ver **[2]** de VT. XX

Resumiendo:

$$\vec{c}\wedge(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{c}\wedge\vec{a})+(\vec{c}\wedge\vec{b}) \qquad \textbf{[12]}$$

Quedando así demostrada la fórmula **[2]**.

A. VT VII

<u>Producto vectorial de vectores expresados en forma cartesiana</u>

a. Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos en forma cartesiana con respecto a una misma terna derecha de versores ortogonales:

$$\vec{a} = a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k} \qquad \textbf{[1]}$$

Se tiene que:

Ver **[5]** de VT. XX   Ver **[4]** de VT. XX

$$\begin{aligned}
\vec{a}\wedge\vec{b} &= (a_x\breve{i} + a_y\breve{j} + a_z\breve{k})\wedge\vec{b} = (a_x\breve{i}\wedge\vec{b})+(a_y\breve{j}\wedge\vec{b})+(a_z\breve{k}\wedge\vec{b}) = \\
&= a_x(\breve{i}\wedge\vec{b})+a_y(\breve{j}\wedge\vec{b})+a_z(\breve{k}\wedge\vec{b}) =
\end{aligned}$$

Ver **[6]** de VT. XX

$$\begin{aligned}
&= a_x\left[\breve{i}\wedge(b_x\breve{i}+b_y\breve{j}+b_z\breve{k})\right]+a_y\left[\breve{j}\wedge(b_x\breve{i}+b_y\breve{j}+b_z\breve{k})\right]+ \\
&\qquad + a_z\left[\breve{k}\wedge(b_x\breve{i}+b_y\breve{j}+b_z\breve{k})\right] =
\end{aligned}$$

Ver **[4]** de VT. XX

$$\begin{aligned}
&= a_x\left\{\left[\breve{i}\wedge(b_x\breve{i})\right]+\left[\breve{i}\wedge(b_y\breve{j})\right]+\left[\breve{i}\wedge(b_z\breve{k})\right]\right\}+ \\
&\qquad + a_y\left\{\left[\breve{j}\wedge(b_x\breve{i})\right]+\left[\breve{j}\wedge(b_y\breve{j})\right]+\left[\breve{j}\wedge(b_z\breve{k})\right]\right\}+ \\
&\qquad\qquad + a_z\left\{\left[\breve{k}\wedge(b_x\breve{i})\right]+\left[\breve{k}\wedge(b_y\breve{j})\right]+\left[\breve{k}\wedge(b_z\breve{k})\right]\right\} = \\
&= a_x\left\{\left[b_x(\breve{i}\wedge\breve{i})\right]+\left[b_y(\breve{i}\wedge\breve{j})\right]+\left[b_z(\breve{i}\wedge\breve{k})\right]\right\}+ \\
&\qquad + a_y\left\{\left[b_x(\breve{j}\wedge\breve{i})\right]+\left[b_y(\breve{j}\wedge\breve{j})\right]+\left[b_z(\breve{j}\wedge\breve{k})\right]\right\}+ \\
&\qquad\qquad + a_z\left\{\left[b_x(\breve{k}\wedge\breve{i})\right]+\left[b_y(\breve{k}\wedge\breve{j})\right]+\left[b_z(\breve{k}\wedge\breve{k})\right]\right\}
\end{aligned} \qquad \textbf{[2]}$$

b. Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}
\breve{i} \wedge \breve{i} = \vec{0}, \quad \breve{i} \wedge \breve{j} = \breve{k}, \quad \breve{i} \wedge \breve{k} = -\breve{j} \\
\breve{j} \wedge \breve{i} = -\breve{k}, \quad \breve{j} \wedge \breve{j} = \vec{0}, \quad \breve{j} \wedge \breve{k} = \breve{i} \\
\breve{k} \wedge \breve{i} = \breve{j}, \quad \breve{k} \wedge \breve{j} = -\breve{i}, \quad \breve{k} \wedge \breve{k} = \vec{0}
\end{array}\right\} \quad \textbf{[3]}$$

y entonces, por **[2]** y **[3]** resulta:

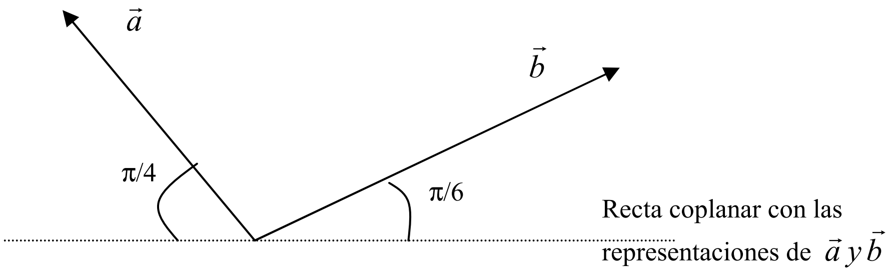
$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{b} &= a_x(b_x\vec{0} + b_y\breve{k} - b_z\breve{j}) + a_y(-b_x\breve{k} + b_y\vec{0} + b_z\breve{i}) + a_z(b_x\breve{j} - b_y\breve{i} + b_z\vec{0}) = \\
&= (a_yb_z - a_zb_y)\breve{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\breve{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\breve{k}
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\breve{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\breve{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\breve{k}$$

Ejercicios y problemas sobre Vectores

VT. 1 Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, y siendo $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, hallar $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.



VT. 2 Hallar el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$; $|\vec{a}+\vec{b}| = 2$ y $\varphi_{\vec{a},\vec{a}+\vec{b}} = \dfrac{\pi}{6}$.

VT. 3 Hallar el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ y $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{5}$.

VT. 4 Determinar los módulos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si $|\vec{a}+\vec{b}| = 2$; $\varphi_{\vec{a},\vec{a}+\vec{b}} = \pi/3$ y $\varphi_{\vec{b},\vec{a}+\vec{b}} = 1{,}308969$.

VT. 5 Un bote cruza un río de 1 km de ancho en dirección perpendicular a la corriente con una velocidad de 3 km/h. Llega a la orilla opuesta con un desplazamiento de 250m en el sentido de la corriente. Calcular la velocidad del bote y de la corriente con respecto a tierra.

VT. 6 Demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

VT. 7 Dados los vectores $\vec{a} = 2\breve{i} - 3\breve{j} + \breve{k}$ y $\vec{b} = 6\breve{i} + 2\breve{j} - 3\breve{k}$, hallar:

a) $\vec{a}+\vec{b}$
b) $\vec{a}-\vec{b}$
c) $4\vec{a}$
d) $3\vec{a}-2\vec{b}$
e) $|\vec{a}|$
f) Cosenos directores de $\vec{b}$
g) $\vec{a}.\vec{b}$
h) $\varphi_{\vec{a},\vec{b}}$
i) Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$
j) $\vec{a}\wedge\vec{b}$
k) $|\vec{a}\wedge\vec{b}|$
l) Versor de igual dirección y sentido que $\vec{a}$

VT. 8 Hallar un vector $\vec{a}$ tal que $|\vec{a}| = 6$ y $\vec{a} = \lambda\breve{i} + \lambda\breve{j} + \lambda\breve{k}$.

VT. 9 Hallar x tal que $\vec{a} = 3\breve{i} + 4\breve{j} + x\breve{k}; |\vec{a}| = 13$.

VT. 10 Hallar un vector $\vec{a}$ tal que $|\vec{a}| = 18$ y que sus cosenos directores sean respectivamente –4/9, 7/9 y 4/9.

VT. 11 Hallar x tal que $\vec{a} = \breve{i} + x\breve{j} - 2\breve{k}; \vec{b} = 3\breve{i} - 2\breve{j} + 4\breve{k}$ sean perpendiculares entre sí.

VT. 12 Hallar x tal que la proyección de $\vec{a} = 3\breve{i} + \breve{j} + x\breve{k}$ sobre $\vec{b} = -4\breve{i} + 4\breve{j} + 2\breve{k}$ sea igual a 2.

VT. 13 Hallar un versor perpendicular a los vectores
$\vec{a} = 2\breve{i} - \breve{j} + 5\breve{k}; \vec{b} = \breve{i} + 3\breve{j} - \breve{k}$

VT. 14 Hallar el área del triángulo cuyos vértices sean los puntos A(-2,1,1); B(1,-3,2) y C(-2,1,4).

VT. 15 Hallar los ángulos interiores y las tres alturas del triángulo definido en VT. 14.

VT. 16 Dados los vectores $\vec{a} = 2\breve{i} + 2\breve{j} - \breve{k}; \vec{b} = \breve{i} - 3\breve{j} + \breve{k}; \vec{c} = 4\breve{i} - \breve{j} - \breve{k}$, hallar:

a) $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$
b) $(\vec{a} \wedge \vec{c}).\vec{b}$
c) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$

VT. 17 Hallar x tal que las representaciones de los vectores $\vec{a} = \breve{i} + 2\breve{j} - \breve{k}$; $\vec{b} = 3\breve{i} + 0\breve{j} + \breve{k}$ y $\vec{c} = -2\breve{i} + x\breve{j} + \breve{k}$, sean todas paralelas a un mismo plano.

VT. 18 Sea un cubo de lado 1.

a) Hallar el ángulo que forman dos de sus diagonales internas.
b) Hallar el ángulo que forman dos diagonales consecutivas de sus caras.
c) Hallar el ángulo que forma una diagonal de una de sus caras y una consecutiva diagonal interna.

VT. 19 Dado un triángulo cuyos lados sean a, b y c, siendo los ángulos opuestos a los mismos α, β y γ respectivamente, mediante métodos vectoriales demostrar que:

a)

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\text{Cos}\gamma \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\text{Cos}\beta \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\text{Cos}\alpha \end{array}\right\} \quad \text{(Teoremas del Coseno)}$$

b)

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \quad \text{(Teorema del Seno)}$$

GEOMETRIA ANALITICA DE LA RECTA Y EL PLANO

GA I

Correspondencia entre vectores y puntos de un espacio euclídeo

Dado un espacio euclídeo tridimensional y fijado en el mismo un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal de origen O, a cada punto V del espacio le corresponde un único vector $\vec{v}$, tal que una de sus representaciones tenga su origen en O y su extremo en V. A la recíproca, a todo vector $\vec{v}$ le corresponde el punto del espacio determinado por el extremo de la representación de $\vec{v}$ cuyo origen sea O (ver figura GA. I a).

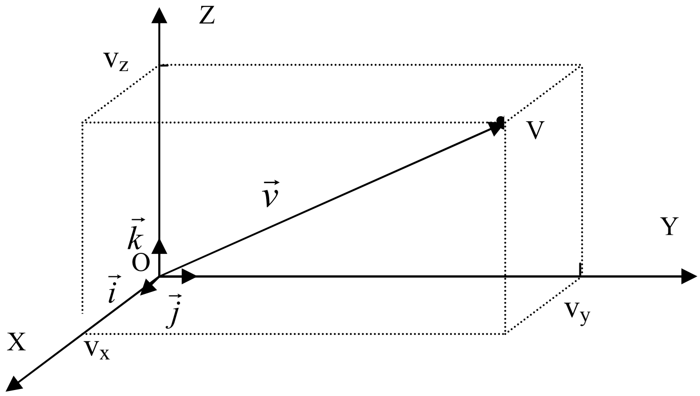


Fig. GA. I a

Esta correspondencia biunívoca permite usar a los puntos del espacio como vectores, y viceversa. Así, al vector $\vec{v}$ indicado en la figura GA. I a:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

le corresponde el punto del espacio V cuyas coordenadas son v_x, v_y y v_z, y viceversa.
Al vector $\vec{v}$ se lo llamará vector posición del punto V.

GA II

Ecuaciones vectorial y cartesiana de una recta determinada por uno de sus puntos y por su dirección

a. Sea W un punto de la recta en cuestión, y sea $\vec{a}$ un vector no nulo cualquiera que tenga la misma dirección que la recta.
Se tiene (ver fig. GA. II a) que, siendo λ un número real, el vector $\vec{v} = \vec{w} + \lambda\vec{a}$ será el vector posición de un punto de la recta.

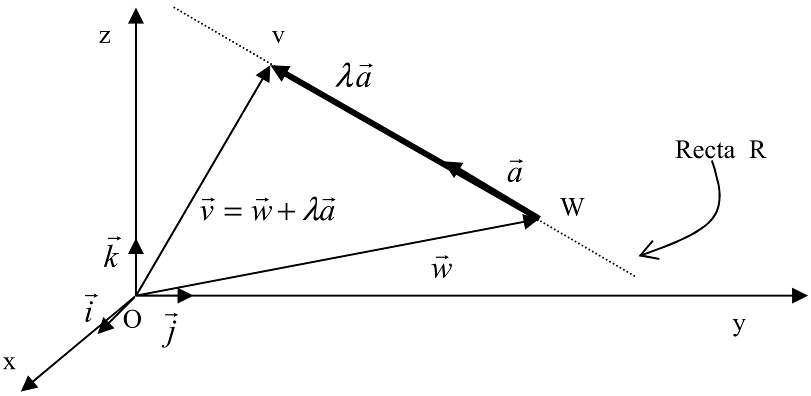


Fig. GA. II a

Evidentemente, haciendo variar a λ entre - ∞ e ∞, se tendrá que la expresión:

$$\vec{v} = \vec{w} + \lambda\vec{a} \qquad \textbf{[1]}$$

dará los vectores posición de <u>todos</u> los puntos de la recta.

A esta expresión **[1]** se la llamará <u>ecuación vectorial de la recta</u> determinada por el punto W y por la dirección del vector $\vec{a}$.

b. Supóngase ahora que las coordenadas del punto W sean w_x, w_y y w_z. Se tendrá entonces que el vector posición de W es:

$$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k} \qquad \textbf{[2]}$$

Supóngase que sea:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \textbf{[3]}$$

Entonces, poniendo:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \textbf{[4]}$$

por **[1]**, **[2]**, **[3]** y **[4]** resulta:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k} + \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

lo que implica que sea:

$$x = w_x + \lambda a_x \qquad y = w_y + \lambda a_y \qquad z = w_z + \lambda a_z \qquad \textbf{[5]}$$

c. Supóngase en primer lugar que sea <u>$a_x \neq 0$, $a_y \neq 0$ y $a_z \neq 0$</u>, es decir que el vector $\vec{a}$ no sea paralelo a ninguno de los tres planos xy, yz y xz. Despejando a λ de las tres expresiones **[5]** e igualando resulta:

$$\frac{x - w_x}{a_x} = \frac{y - w_y}{a_y} = \frac{z - w_z}{a_z} \qquad \textbf{[6]}$$

Esta es la <u>ecuación cartesiana de la recta</u> que pasa por (w_x , w_y , w_z) y cuya dirección es la del vector $\vec{a}$, el cual no es paralelo a ninguno de los planos xy, yz y xz.

Por ejemplo, a la recta que pasa por (1, 2, 3) y que tiene la dirección del vector $3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ le corresponde la ecuación cartesiana:

$$R_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

A la reciproca dada la ecuación:

$$R_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

se tiene que a la misma corresponde una recta que pasa por (-3, 1, 2) y que tiene la dirección del vector $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

d. Supóngase ahora que el vector $\vec{a}$, que tiene la misma dirección que la recta, sea ahora paralelo a <u>uno</u> de los planos xy, yz , xz, por ejemplo al xy. En este caso será:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + 0\vec{k} \qquad \textbf{[7]}$$

Entonces, por **[5]** resulta que es:

$$x = w_x + \lambda a_x \qquad y = w_y + \lambda a_y \qquad z = w_z \qquad \textbf{[8]}$$

Despejando a λ de las dos primeras ecuaciones e igualando resulta que:

$$\frac{x - w_x}{a_x} = \frac{y - w_y}{a_y}, \qquad z = w_z \qquad \textbf{[9]}$$

es la ecuación cartesiana de la recta que pasa por (w_x, w_y, w_z) y cuya dirección es la del vector $\vec{a}$, el cual es paralelo al plano xy (pero <u>no</u> es además paralelo al yz o al xz).
Por ejemplo, a la recta que pasa por (-1, 2 3) y tiene la dirección del vector $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ (vector paralelo al plano xz) le corresponde la ecuación:

$$R_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{z-3}{3}, \qquad y = 2$$

A la recíproca, dada la ecuación:

$$R_2 : x = -2, \qquad \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

Se tiene que a la misma corresponde una recta que pasa por el punto (-2, 5, -1) y cuya dirección es la del vector $3\vec{j} - 2\vec{k}$, el cual es paralelo al plano yz.

e. Supóngase ahora que el vector $\vec{a}$ que tiene la misma dirección que la recta sea paralelo a dos de los planos xy, yz, zx, es decir que sea paralelo a uno de los ejes x, y, z. Suponiendo que $\vec{a}$ sea paralelo al eje y se tendrá que:

$$\vec{a} = 0\vec{i} + a_y\vec{j} + 0\vec{k} \qquad \textbf{[10]}$$

Por **[5]** resulta entonces que:

$$x = w_x \qquad y = w_y + \lambda a_y \qquad z = w_z \qquad \textbf{[11]}$$

Como λ es un valor arbitrario, entonces y será también un valor arbitrario. Por lo tanto, la ecuación de una recta que pasa por (w_x, w_y, w_z) y es paralela al vector $\vec{a}$ es:

$$x = w_x \quad , \quad z = w_z \qquad (y = \text{arbitraria}) \qquad \textbf{[12]}$$

Por ejemplo, la recta que pasa por (-1, -2, 3) y es paralela al vector $2\vec{i}$ es:

R_1: y = -2 , z = 3 (x = arbitraria)

A la recíproca, dada la ecuación:

R_2: x = 2 , y = -3

Se tiene que la misma corresponde a una recta que pasa por (2, -3, cualquier cosa) y es paralela al vector $\vec{a} = \vec{k}$.

GA III

Ecuaciones vectorial y cartesiana de una recta determinada por dos de sus puntos

a. Sea W_1 y W_2 los dos puntos que determinan a la recta.

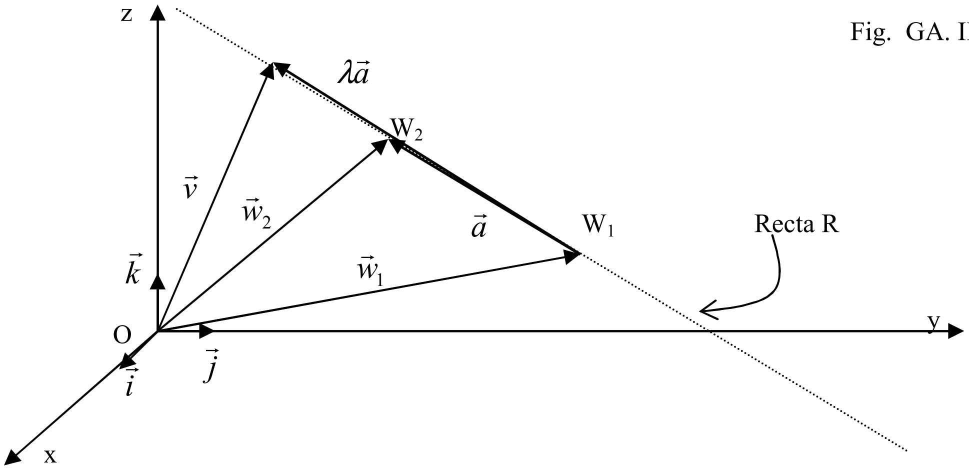


Fig. GA. III a

Evidentemente (ver fig. GA. III a):
1º. El vector $\vec{a} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$ tiene la misma dirección que la recta R.
2º. El punto W_1 (y el W_2) es un punto de la recta, resultando así que el problema queda reducido al tratado en el párrafo anterior, teniéndose que la ecuación vectorial de la recta que pasa por W_1 y W_2 es:

$$\vec{v} = \vec{w}_1 + \lambda(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \qquad \text{ó} \qquad \vec{v} = \vec{w}_2 + \lambda(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \qquad \textbf{[1]}$$

b. Por ejemplo, sea la recta determinada por los puntos $W_1(1, 2, 3)$ y $W_2(1, 4, 6)$. Como:

$$\vec{w}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{w}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

se tiene que:

$$\vec{w}_2 - \vec{w}_1 = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \text{(vector paralelo al plano yz)}$$

y entonces por **[1]** resulta que la ecuación vectorial de la recta será:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + \lambda(0\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \qquad \textbf{[2]}$$

lo que implica que sea:

$$x = 1 \quad , \qquad y = 2 + \lambda\, 2 \quad , \qquad z = 3 + \lambda\, 3 \qquad \textbf{[3]}$$

Despejando a λ de las igualdades 2ª y 3ª de **[3]** e igualando resulta:

$$x = 1 \ , \ \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

siendo esta expresión la ecuación de la recta que pasa por (1, 2, 3) y (1, 4, 6).

GA IV

Cosenos directores de una recta

a. Sea una recta R. Sea $\vec{a}$ un vector que tenga la misma dirección que la recta. Se dirá que los cosenos directores de $\vec{a}$ son cosenos directores de la recta R.
Ahora bien, como el vector - $\vec{a}$ también tiene la misma dirección que R, resulta entonces que la recta R tiene dos juegos de cosenos directores, siendo evidente que los valores de uno de estos juegos son los negativos de los respectivos valores del otro.

b. Entonces, si una recta R tiene la misma dirección que el vector:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

se tiene que los cosenos directores de la recta R serán:

$$\cos\alpha = \pm\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad \cos\beta = \pm\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad \cos\gamma = \pm\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad \textbf{[1]}$$

En esta expresión, los signos + corresponden a uno de los juegos de cosenos directores y los signos – corresponden al otro.

c. Por ejemplo, sea la recta ya considerada en **d.** de GA. II:

$$R_2 : x = -2, \quad \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

Según se vio, esta recta tiene la dirección del vector.

$$\vec{a} = 0\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

resultando así que los cosenos directores de R_2 son.

$$\cos\alpha = \pm 0 \qquad \cos\beta = \pm\frac{3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \pm 0{,}832 \qquad \cos\gamma = \pm\frac{-2}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \mp 0{,}554$$

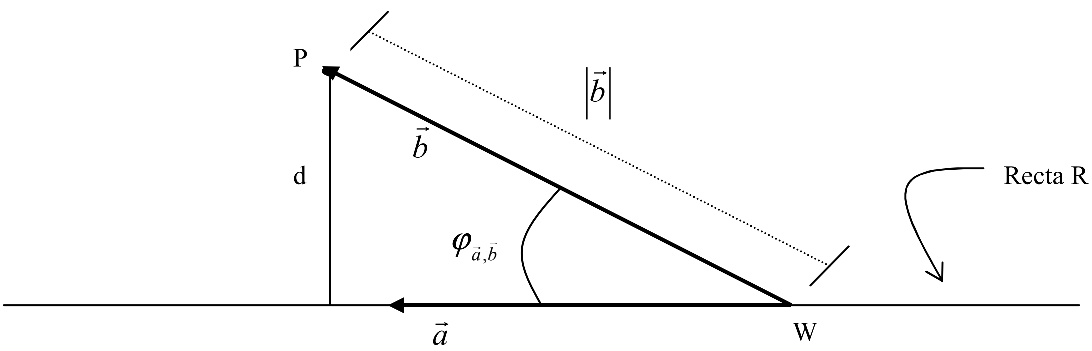
Entonces:
1^er^ juego de cosenos directores: 0; 0,832; -0,544
2^do^ juego de cosenos directores: 0; -0,832; 0,544

GA V

Distancia de un punto a una recta

a. Sea una recta R y un punto P exterior a la misma (ver fig. GA. V a).

Fig. GA. V a



Sea:
$\vec{a}$: vector cualquiera que tenga la misma dirección que R
$\vec{b}$: vector tal que una de sus representaciones tiene su origen en un punto cualquiera de la recta (se le designará como W) y su extremo en P.
Entonces, según es evidente:

d = distancia del punto P a la recta R =

$$=\left|\vec{b}\right| sen\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \frac{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| sen\varphi_{\vec{a},\vec{b}}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

Resumiendo:

d = distancia del punto P a la recta R $=\dfrac{\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ **[1]**

b. Por ejemplo:
Sea el punto P(1, 0, -1) y la recta $R: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$
Un punto de esta recta es evidentemente (1, 2, 3). Puede entonces ponerse:

$$\vec{b} = (1-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (-1-3)\vec{k} = 0\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Como un vector que tiene la misma dirección que la recta es evidentemente:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \qquad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29} \qquad \textbf{[2]}$$

se tiene entonces que:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} \qquad \left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = \sqrt{(-4)^2+8^2+(-4)^2} = \sqrt{96} \qquad \textbf{[3]}$$

resultando así por **[1], [2]** y **[3]** que:

d = distancia del punto P a la recta R $=\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{29}} = 1{,}819$

GA VI

Distancia entre dos rectas del espacio que no sean paralelas

a. Sean dos rectas del espacio R_1 y R_2. Sea una 3ª recta R_3 perpendicular a R_1 y R_2. Se define que la distancia entre las rectas R_1 y R_2 es la longitud del segmento de la recta R_3 comprendido entre R_1 y R_2 (ver fig. GA. VI a).

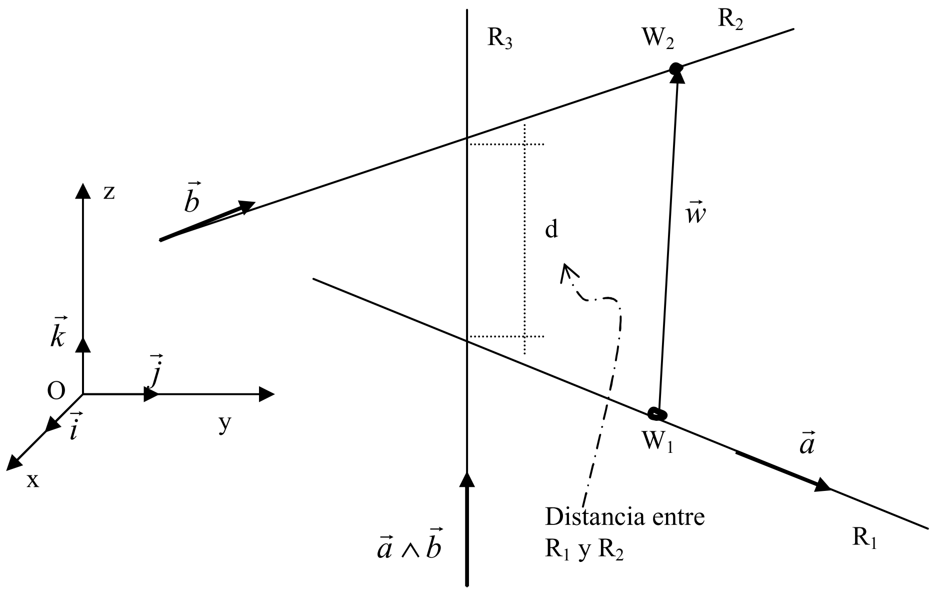


Fig. GA. VI a

$R_1 \perp R_3$

$R_2 \perp R_3$

Tómese un punto cualquiera W_1 de la recta R_1 y un punto cualquiera W_2 de la recta R_2. Sea un vector $\vec{w}$ tal que una de sus representaciones tenga su origen en W_1 y su extremo en W_2. Evidentemente:

d = distancia entre R_1 y R_2 =

= $|$Proyección de $\vec{w}$ sobre un vector que tenga la misma dirección que $R_3|$ **[1]**

Sea $\vec{a}$ un vector que tenga la misma dirección que R_1 y sea $\vec{b}$ un vector que tenga la misma dirección que R_2. Se tendrá entonces que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es perpendicular a R_1 y R_2, lo que implica que tenga la misma dirección que R_3.

Entonces, por **[1]** es:

d = distancia entre R_1 y R_2 = $|$Proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{a} \wedge \vec{b}\ |$ **[2]**

Por otra parte se tiene que:

$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{w} = \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ (Proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{a} \wedge \vec{b}$)

Es decir que:

$\left|(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{w}\right| = \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|\ |$Proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{a} \wedge \vec{b}\ |$ **[3]**

resultando así por **[2]** y **[3]** que:

d = distancia entre R_1 y R_2 $= \dfrac{\left|(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{w}\right|}{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|}$ **[4]**

$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ sería nulo si R_1 y R_2 fueran paralelas

b. Por ejemplo, sean las rectas:

$R_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z+1}{5}$ y $R_2 : \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$

Se puede tomar:

$W_1 = (3, -5, -1)$ $W_2 = (-1, 1, 3)$ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ $\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

Resultando entonces:

1º. $\vec{w} = (-1-3)\vec{i} + [1-(-5)]\vec{j} + [3-(-1)]\vec{k} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

2º.

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ -4 & 3 & -1\end{vmatrix}=-12\vec{i}-18\vec{j}-6\vec{k}\quad ;\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-18)^2+(-6)^2}=22{,}45\ \textbf{[5]}$$

3º. $\left|(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{w}\right|=\left|(-4)(-12)+6(-18)+4(-6)\right|=84$ **[6]**

y entonces por **[4], [5]** y **[6]** resulta que:

d = distancia entre R_1 y R_2 = $\dfrac{84}{22{,}45}=3{,}7416$

c. Evidentemente, para que dos rectas se corten es necesario y suficiente que su distancia sea nula. Por lo tanto (ver **[4]**), la condición de corte de dos rectas es:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{w}=0 \qquad \textbf{[7]}$$

lo que también puede expresarse como:

$$(\vec{w},\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}w_x & w_y & w_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0 \qquad \textbf{[8]}$$

d. Por ejemplo, se verificará si las rectas:

$$R_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{6} \quad \text{y} \quad R_2:\frac{x-3}{7}=\frac{y-5}{8}=\frac{z-7}{9}$$

se cortan o no.

Se puede tomar:

$W_1 = (2, 3, 4)$ $\quad$ $W_2 = (3, 5, 7)$ $\quad$ $\vec{a}=4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$ $\quad$ $\vec{b}=7\vec{i}+8\vec{j}+9\vec{k}$

De donde resulta que:

$$\vec{w}=(3-2)\vec{i}+(5-3)\vec{j}+(7-4)\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

y entonces, como:

$$(\vec{w},\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=0$$

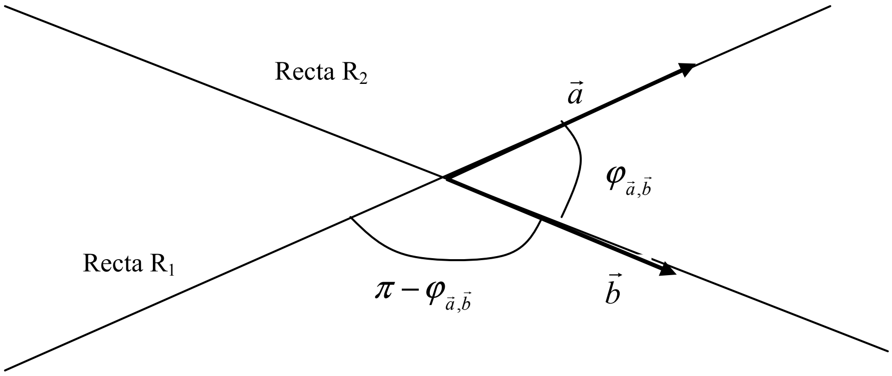
se tiene que las rectas R_1 y R_2 consideradas en efecto se cortan.

GA VII

Ángulo formado por dos rectas del espacio que se cortan

a. Previa verificación de que las rectas consideradas en efecto se cortan (ver GA. VI c), tómense sendos vectores que tengan las mismas direcciones que las rectas (ver fig. GA. VII a).

Fig. GA. VII a



Evidentemente uno de los ángulos formados por las rectas consideradas será el ángulo formado por los vectores respectivos:

$$\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = arc.\cos\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad , \qquad 0 \le \varphi_{\vec{a},\vec{b}} \le \pi \qquad \textbf{[1]}$$

Siendo el otro ángulo igual a $\pi - \varphi_{\vec{a},\vec{b}}$.

b. Por ejemplo, un ángulo formado por las rectas (que se cortan) R_1 y R_2 consideradas en **d** de GA. VI es (ver **[1]**):

$$\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = arc.\cos\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = arc.\cos\frac{4.7+5.8+6..9}{\sqrt{4^2+5^2+6^2}\sqrt{7^2+8^2+9^2}} =$$

$$= arc.\cos 0{,}998 = 0{,}063256$$

siendo entonces el otro ángulo formado por dichas rectas igual a:

$$\pi - \varphi_{\vec{a},\vec{b}} = 3{,}078334$$

GA VIII

Condición de paralelismo de dos rectas del espacio

a. Sean dos rectas del espacio R_1 y R_2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores que respectivamente tengan las mismas direcciones que R_1 y R_2. Evidentemente, estas rectas serán paralelas si sus correspondientes vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen una misma dirección. Sean por ejemplo:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

y según ya visto:

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen una misma dirección cuando y solo cuando:

$$a_xb_y = a_yb_x \quad , \quad a_zb_x = a_xb_z \quad , \quad a_yb_z = a_zb_y \qquad \textbf{[1]}$$

siendo entonces esta fórmula **[1]** la condición de paralelismo de R_1 y R_2.

b. Ejemplo. Sean:

$R_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{4}$ y $R_2 : \dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y+5}{6} = \dfrac{z+1}{8}$

Entonces puede tomarse:

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$

y como:

$$3.8 = 4.6 \quad , \quad 2.8 = 4.4 \quad , \quad 2.6 = 3.4$$

resulta entonces que R_1 y R_2 son en efecto paralelas.

GA IX

<u>Condición de perpendicularidad de dos rectas que se cortan en el espacio</u>

a. Sean dos rectas R_1 y R_2 <u>que se cortan en el espacio</u>. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores que respectivamente tengan las mismas direcciones que R_1 y R_2. Evidentemente R_1 y R_2 serán perpendiculares solo cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ lo sean. Sean:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

Según visto:

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares cuando y solo cuando $\vec{a}.\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$ **[1]**

siendo entonces esta fórmula **[1]** la condición de perpendicularidad de R_1 y R_2.

b. Sean las rectas:

$R_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$ y $R_2 : \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-6}{5} = \dfrac{z+6}{-7}$

Un punto de R_1 es $w_1(1, 1, 1)$ y un punto de R_2 es $w_2(5, 6, -6)$

Se tiene entonces.

$\vec{w} = (5-1)\vec{i} + (6-1)\vec{j} + (-6-1)\vec{k} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$

$(\vec{w}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$ es decir que R_1 y R_2 en efecto se cortan.

Resultando además que R_1 y R_2 son perpendiculares ya que (ver **[1]**):

$$\vec{a}.\vec{b} = 1.4 + 2.5 + 2(-7) = 0$$

GA X

Ecuación vectorial y cartesiana de un plano determinado por uno de sus puntos y por una recta perpendicular a él

a. Sea un punto P que pertenece al plano a determinar. Sea su vector posición:

$$\vec{p} = p_x\breve{i} + p_y\breve{j} + p_z\breve{k} \qquad \textbf{[1]}$$

Sea V un punto genérico del espacio. Sea su vector posición:

$$\vec{v} = x\breve{i} + y\breve{j} + z\breve{k} \qquad \textbf{[2]}$$

Sea un plano π que contiene al punto P. Evidentemente:

1º. Si V también pertenece a π, entonces el vector $\vec{v} - \vec{p}$ será paralelo a π.

2º. Si V no pertenece a π, entonces $\vec{v} - \vec{p}$ no será paralelo a π.

De lo que resulta que el plano π está compuesto por todos los puntos V tales que sus vectores posición $\vec{v}$ sean tales que $\vec{v} - \vec{p}$ sean paralelos a π.

b. Sea una recta R perpendicular a π:

$$R: \frac{x - w_x}{b_x} = \frac{y - w_y}{b_y} = \frac{z - w_z}{b_z} \qquad \textbf{[3]}$$

Un vector que tiene la misma dirección que R es evidentemente:

$$\vec{b} = b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}$$

Por ser $R \perp \pi$ se tiene que $\vec{b} \perp \pi$, y por lo tanto $\vec{b}$ es perpendicular a todos los vectores paralelos a π.

Entonces, por lo visto en **a.** se tiene que para todos los puntos V pertenecientes a π sus vectores posición $\vec{v}$ han de ser tales que.

$$\vec{b} \perp (\vec{v} - \vec{p})$$

es decir que han de ser tales que:

$$\vec{b}.(\vec{v} - \vec{p}) = 0$$

Esta es la ecuación vectorial del plano π perpendicular a R y que contiene al punto P. Esta ecuación también puede ser expresada como:

$$\vec{b}.\vec{v} = \vec{b}.\vec{p} = s \qquad \textbf{[4]}$$

c. De **[1], [2]** y **[4]** surge la ecuación cartesiana de dicho plano:

$$(b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}).(x\breve{i} + y\breve{j} + z\breve{k}) = (b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}).(p_x\breve{i} + p_y\breve{j} + p_z\breve{k})$$

es decir:

$$b_x x + b_y y + b_z z = b_x p_x + b_y p_y + b_z p_z = s \qquad \textbf{[5]}$$

d. Ejemplo:

Se pide hallar la ecuación cartesiana del plano π, que contiene al punto $P_1(1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta

$$R_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-4}$$

En este caso es:

$$\vec{b} = 2\breve{i} + 3\breve{j} - 4\breve{k}$$

$$\vec{p} = \breve{i} + 2\breve{j} - 3\breve{k}$$

y por lo tanto el plano π buscado tiene una ecuación cartesiana.

$$2x + 3y - 4z = 2.1 + 3.2 + (-4)(-3) = 26$$

e. Ejemplo:

Se pide hallar la ecuación cartesiana del plano π_2 que contiene al punto $P_2(1, 0, 2)$ y es perpendicular a la recta

$$R_2 : \frac{x-1}{2} = y \qquad , \qquad z = 1$$

En este caso es:

$$\vec{b} = 2\breve{i} + \breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\vec{p} = \breve{i} + 0\breve{j} + 2\breve{k}$$

y por lo tanto la ecuación cartesiana del plano π_2 es:

$$2x + y = 2.1 + 1.0 + 0.2 = 2 \quad , \qquad z = \text{arbitrario}$$

GA XI

<u>Ecuación cartesiana de un plano determinado por tres puntos no alineados</u>

a.

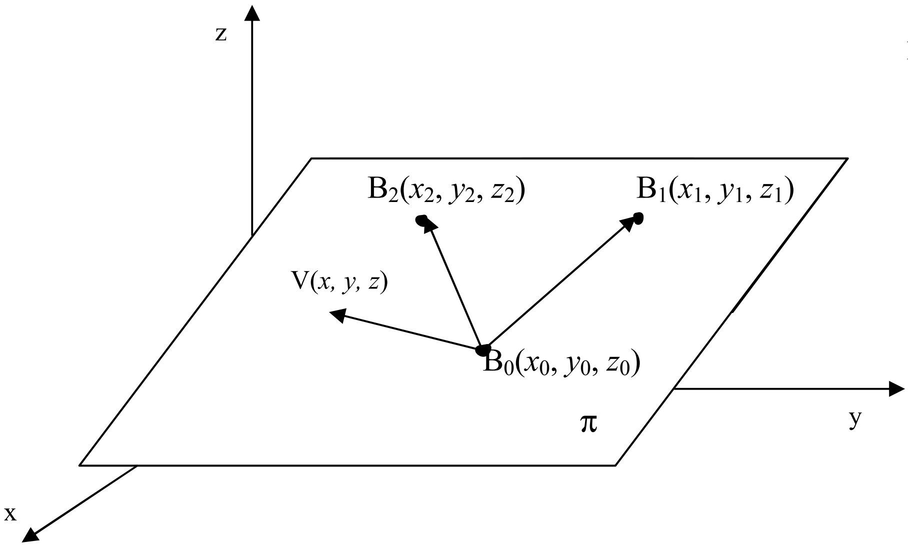


Fig. GA. XI a

Se trata de hallar el plano π determinado por los tres puntos no alineados $B_0(x_0, y_0, z_0)$, $B_1(x_1, y_1, z_1)$ y $B_2(x_2, y_2, z_2)$ indicados en la figura GA. XI a.

Sea $V(x, y, z)$ un punto genérico del plano π.

Sea $\vec{b}_1$ el vector tal que una de sus representaciones tenga su origen en B_0 y su extremo en B_1. Sea $\vec{b}_2$ el vector tal una de sus representaciones tenga su origen en B_0 y su extremo en B_2.

Sea V un punto <u>cualquiera</u> del plano π. Sea $\vec{v}$ el vector tal que una de sus representaciones tenga su origen en B_0 y su extremo en V.

Evidentemente, serán:

$$\left.\begin{aligned}\vec{b}_1 &= (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}\\ \vec{b}_2 &= (x_2 - x_0)\vec{i} + (y_2 - y_0)\vec{j} + (z_2 - z_0)\vec{k}\\ \vec{v} &= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

Como los puntos B_0, B_1, B_2 y V pertenecen todos al plano π, entonces las representaciones consideradas de $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{v}$ serán coplanares, lo que implica que sea:

$$\vec{v}.(\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2) = 0 \quad \textbf{[2]}$$

Como, a la recíproca, si V no perteneciera al plano π se tendría que sería $\vec{v}.(\vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2) \neq 0$, resulta así que **[2]** es la ecuación vectorial del plano π.

Entonces, por **[1]** y **[2]** resulta que la ecuación cartesiana del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \textbf{[3]}$$

b. Ejemplo.

Se hallará la ecuación cartesiana del plano determinado por B_0 (1, 0, 0), B_1 (0, 1, 0) y B_2(0, 0, 1).

Por **[3]** es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante se obtiene:

$$(x + y + z) = 1$$

c. Ejemplo.

Se hallará el plano determinado por el punto B_0(1, 1, 1) y la recta:

$$R: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-5}$$

Evidentemente, un punto de esta recta es B_1 (2,4,-1). Otro punto de la misma es (haciendo y = 3) B_2 (5, 3, -6). La ecuación cartesiana del plano determinado por el punto B_0 y la recta R es evidentemente el mismo determinado por B_0, B_1 y B_2.

Entonces (ver **[3]**) la ecuación de dicho plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 4-1 & -1-1 \\ 5-1 & 3-1 & -6-1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante y rearreglando se obtiene:

$$17\,x + y + 16\,z = 28$$

lo cual es la ecuación del plano buscado.

GA XII

<u>Distancia de un punto a un plano</u>

a. Sea Q un punto del espacio. Sea su vector posición:

$$\vec{q} = q_x\breve{i} + q_y\breve{j} + q_z\breve{k} \qquad \textbf{[1]}$$

Sea π el plano del espacio cuyas ecuaciones son:

$$\pi : \begin{cases} \vec{b}.\vec{v} = \vec{b}.\vec{p} = s & \text{ecuación vectorial} \quad \textbf{[2]} \\ b_X x + b_Y y + b_Z z = s & \text{ecuación cartesiana} \quad \textbf{[3]} \end{cases}$$

Se pide hallar la distancia de Q a π.

b. Sea $\vec{p}$ el vector posición de un punto P perteneciente al plano π.
Sea $\vec{r}$ el vector tal que una de sus representaciones tenga su origen en Q y su extremo en P (ver fig. GA. XII a y b). Evidentemente se tendrá que:

$$\vec{r} = \vec{p} - \vec{q} \qquad \textbf{[4]}$$

Sea una recta cualquiera perpendicular al plano π. Evidentemente, puede elegirse la perpendicular R que pasa por Q.
$\vec{b}$ será un vector cualquiera que tenga la misma dirección que R. y tal que su sentido "apunte " de Q al plano.

Sea S el punto en que R intercepta a π. Evidentemente:

d = distancia de Q a π = Longitud del segmento $\overline{QS}$ **[5]**

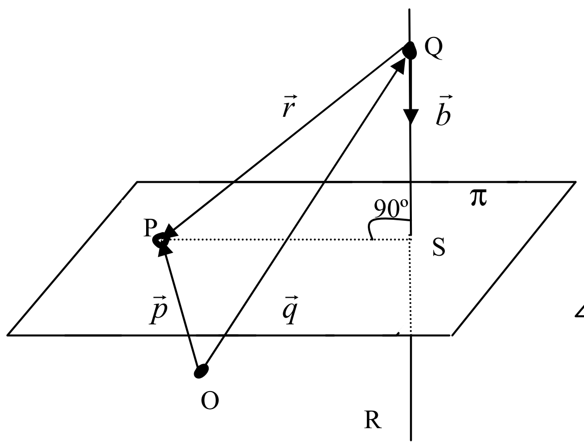


Fig. GA. XII a

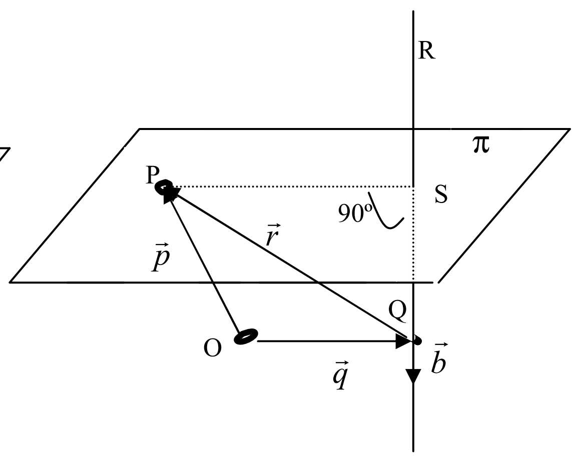


Fig. GA. XII b

Entonces, como (ver VT XVIII):

Longitud del segmento $\overline{QS}$ = $\left|\right.$Proyección de $\vec{r}$ sobre $\vec{b}$ $\left.\right|$ =

$$= \left| \|\vec{r}\| \cos\varphi_{\vec{r},\vec{b}} \right| = \left| \frac{|\vec{b}||\vec{r}|\cos\varphi_{\vec{r},\vec{b}}}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\vec{b}.\vec{r}}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\vec{b}.(\vec{p}-\vec{q})}{|\vec{b}|} \right| = \frac{|\vec{b}.\vec{p}-\vec{b}.\vec{q}|}{|\vec{b}|} = \frac{|s-\vec{b}.\vec{q}|}{|\vec{b}|}$$

Y entonces se tiene por **[5]** que:

$$d = \text{distancia de Q a } \pi = \frac{|s-\vec{b}.\vec{q}|}{|\vec{b}|} \qquad \textbf{[6]}$$

c. Ejemplo.

Se pide hallar la distancia del punto Q(-1, -2, -3) al plano π : $x + y + z = 2$.

Se tiene entonces que:

$\vec{b} = \breve{i} + \breve{j} + \breve{k}$, $\vec{q} = -\breve{i} - 2\breve{j} - 3\breve{k}$, s = 2

y por lo tanto

$$d = \text{distancia de Q a } \pi = \frac{|s-\vec{b}.\vec{q}|}{|\vec{b}|} = \frac{|2-(\breve{i}+\breve{j}+\breve{k}).(-\breve{i}-2\breve{j}-3\breve{k})|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{|2-[1.(-1)+1.(-2)+1.(-3)]|}{\sqrt{3}} = \frac{|2+6|}{\sqrt{3}} = 4{,}618802$$

d. Ejemplo.

Se pide hallar la distancia entre los planos paralelos:

π : $4x + 6y - 8z = 20$ π´ : $-6x - 9y + 12z = 24$

Para empezar, debe verificarse que π y π´ son en efecto paralelos.

Para que π y π´ sean paralelos, deben ser paralelos los vectores:

$\vec{b} = 4\breve{i} + 6\breve{j} - 8\breve{k}$ y $\vec{b}' = -6\breve{i} - 9\breve{j} + 12\breve{k}$

los cuales son perpendiculares respectivamente a π y π´.

Usando la condición de paralelismo entre vectores indicada en **[1]** de GA. VIII se obtiene:

6.12 = (-8).(-9) 4.12 = (-8).(-6) 4.(-9) = 6.(-6)

con lo que resulta que π y π´ son en efecto paralelos.

Una vez hecha esta verificación, elíjase un punto de π´ (o de π) y hállese su distancia a π (a π´). Esta distancia es la misma que media entre ambos planos.

Haciendo en la ecuación de π´ $x = y = 0$, resulta $z = 2$ y por lo tanto Q(0, 0, 2) es un punto de π´.

Entonces:

d = distancia entre π y π´ = distancia entre Q y π =

$$= \frac{|20-[4.0+6.0+(-8).2]|}{\sqrt{4^2+6^2+(-8)^2}} = \frac{|20+16|}{10{,}583} = 3{,}4016819$$

GA XIII

Problema

a. Sea un plano π.
Se pide hallar un plano π´ paralelo a π y tal que su distancia al origen sea dos unidades mayor que la distancia de π al origen.

b. Sea la ecuación cartesiana del plano π:

$$\pi : b_x\, x + b_y\, y + b_z\, z = s \qquad \textbf{[1]}$$

Como al origen corresponde el vector posición $\vec{0}$, por **[6]** de GA. XII se tiene que:

$$\text{d = distancia de } \pi \text{ al origen} = \frac{\left|s - \vec{b}.\vec{0}\right|}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{|s|}{\left|\vec{b}\right|} \qquad \textbf{[2]}$$

c. El plano π´ que es paralelo al π y que dista d + 2 del origen tendrá una ecuación cartesiana:

$$\pi' :: b_x\, x + b_y\, y + b_z\, z = s' \qquad \textbf{[3]}$$

En la cual s´ es todavía desconocido.
(Notar que los coeficientes b_x, b_y y b_z de **[3]** son los mismos de **[2]** ya que por ser π//π´ se tiene que ambos planos son perpendiculares a una misma recta R, y que en **[1]** se supuso que $\vec{b} = b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k}$ es un vector que tiene la misma dirección que R y que, y que por lo tanto es perpendicular tanto a π como a π´).
Por una argumentación similar a la seguida en **b.** se tiene que:

$$\text{d}' = \text{d} + 2 = \text{distancia de } \pi' \text{ al origen} = \frac{|s'|}{\left|\vec{b}\right|} \qquad \textbf{[4]}$$

Entonces, por **[2]** y **[4]** resulta que:

$$\frac{|s'|}{|s|} = \frac{d'}{d} = \frac{d+2}{d} = 1 + \frac{2}{d} \qquad \textbf{[5]}$$

d. De **[5]** resultan dos opciones para s´:

1ª. $s' = \left(1 + \dfrac{2}{d}\right)s$

2ª. $s' = -\left(1 + \dfrac{2}{d}\right)s$

Resulta así que existen dos planos π´ y $\pi^{*\prime}$ cuya distancia al origen es dos unidades mayor que la distancia de π al origen.
Las ecuaciones de esos dos planos están dadas por la expresión:

$$b_x x + b_y y + b_z z = \pm\left(1 + \frac{2}{d}\right)s \qquad \textbf{[6]}$$

Para verificar, por el mismo procedimiento indicado en **b.** se tiene que:

d´ = distancia de π´ ó π*´ al origen =

$$=\frac{\left|\pm\left(1+\frac{2}{d}\right)s\right|}{\left|\vec{b}\right|}=\left(1+\frac{2}{d}\right)\frac{|s|}{\left|\vec{b}\right|}=\left(1+\frac{2}{\mathrm{d}}\right)\mathrm{d}=\mathrm{d}+2$$

Por ser 1, 2 y d positivos

Por **[2]**

GA XIV

Ángulos formados por dos planos que se cortan. Paralelismo y perpendicularidad entre planos

a. Se define que los ángulos formados por dos planos que se cortan (es decir no paralelos) son los ángulos formados por rectas perpendiculares a dichos planos, y que tengan un punto común.

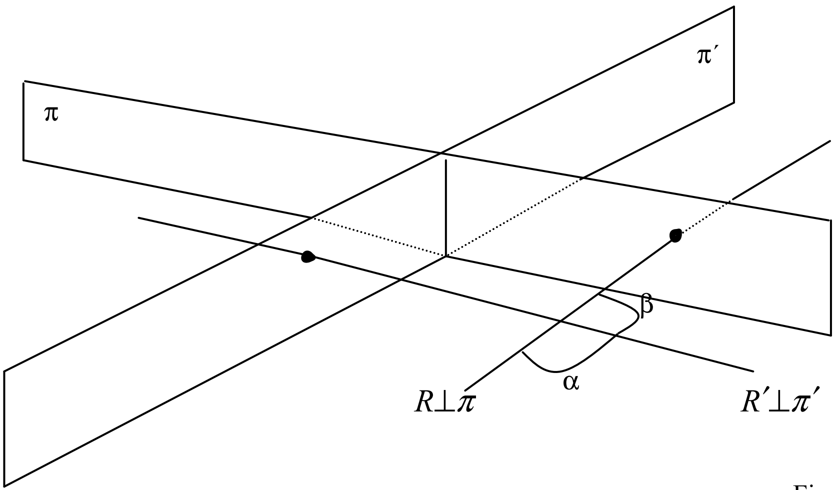


Fig. GA. XIV a

Evidentemente (ver Fig. GA. XVI a) será:

$$\alpha+\beta=\pi \qquad \textbf{[1]}$$

Sean los planos:

$$\pi : b_x\, x + b_y\, y + b_z\, z = s \qquad \text{y} \qquad \pi' : b'_x\, x + b'_y\, y + b'_z\, z = s' \qquad \textbf{[2]}$$

Se tiene (ver **[3]** y **[5]** de GA. X):

$\vec{b}$ = vector que tiene la misma dirección que R (siendo R ⊥ π) y que “apunta” a π =

$$= b_x\breve{i} + b_y\breve{j} + b_z\breve{k} \qquad \textbf{[3]}$$

$\vec{b}'$ = vector que tiene la misma dirección que R´ (siendo R´ ⊥ π´) y que
"apunta" a π =

$$= b'_x \breve{i} + b'_y \breve{j} + b'_z \breve{k}$$

El ángulo formado por $\vec{b}$ y $\vec{b}'$ es:

$$\varphi_{\vec{b},\vec{b}'} = arc.\cos\frac{\vec{b}.\vec{b}'}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{b}'\right|} = arc.\cos\frac{b_x b'_x + b_y b'_y + b_z b'_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\sqrt{b'^2_x + b'^2_y + b'^2_z}}; \qquad 0 \le \varphi_{\vec{b},\vec{b}'} \le \pi \qquad \textbf{[4]}$$

Evidentemente $\varphi_{\vec{b},\vec{b}'}$ será uno de los ángulos α o β formados por las rectas R y R´, perpendiculares respectivamente a los planos π y π´. El otro ángulo puede ser deducido inmediatamente mediante **[1]**.

b. Sean por ejemplo los planos:

$\pi : x + y + z = 1$ $\qquad\qquad$ $\pi' : 2\,x - y + 3\,z = 2$

Entonces serán:

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{b}' = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

y por **[4]** resulta que:

$$\varphi_{\vec{b},\vec{b}'} = arc.\cos\frac{1.2 + 1.(-1) + 1.3}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = 0{,}9056002$$

Este es uno de los ángulos formado por π y π´. El otro será igual a:

π - 0,9056002 = 2,2359924

Evidentemente, para que los planos π y π´ sean perpendiculares, es necesario y suficiente que los vectores $\vec{b}\, y\, \vec{b}'$ sean a su vez perpendiculares, es decir que (ver **[7]** y **[9]** de VT. XIX):

π y π´ son perpendiculares cuando y sólo cuando $\vec{b}.\vec{b}' = b_x b'_x + b_y b'_y + b_z b'_z = 0$ **[5]**

c. Evidentemente, para que los planos π y π´ sean paralelos, es necesario y suficiente que los vectores $\vec{b}$ y $\vec{b}'$ tengan una misma dirección, es decir que (ver **[10]** de VT. XX):

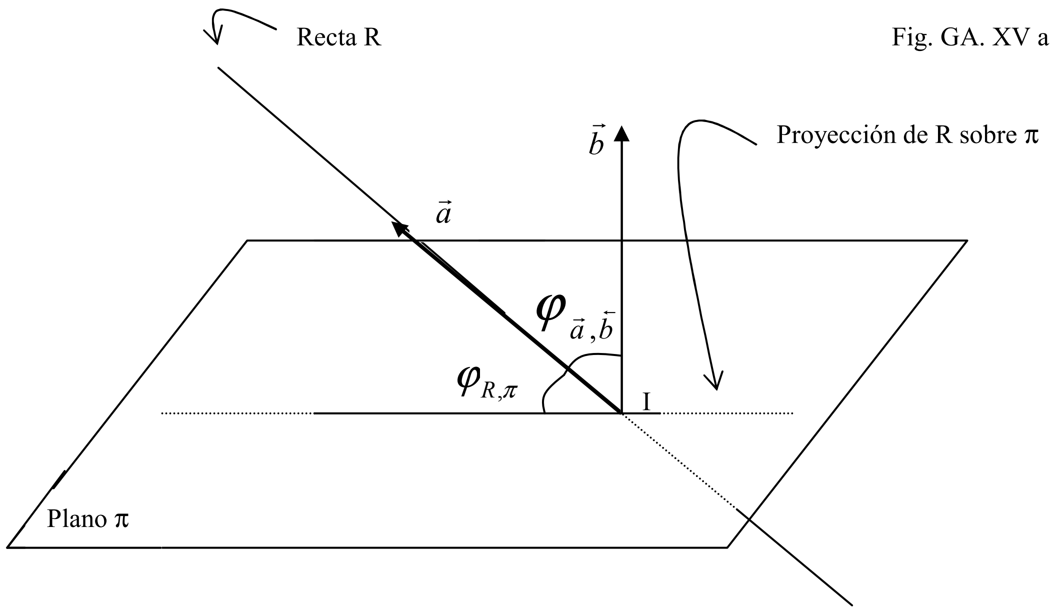
π y π´ son paralelos cuando y solo cuando:

$b_y\, b'_z = b_z\, b'_y$ $\qquad$, $\qquad$ $b_x\, b'_z = b_z\, b'_x$ $\qquad$, $\qquad$ $b_x\, b'_y = b_y\, b'_x$ **[6]**

GA XV

Ángulo formado por una recta y un plano

a. Se define que el ángulo $\varphi_{R,\pi}$ formado por la recta R y el plano π es el ángulo menor o igual que π/2 formado por la recta R y su proyección sobre el plano π (ver fig. GA. XV a).



Supóngase en primer lugar que los sentidos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean tales que representaciones de los mismos que tengan su origen en un mismo punto I del plano, y tengan extremos que <u>no</u> estén separados por el plano (caso de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la fig. GA. XV a):
Entonces:

Por ser $\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \dfrac{\pi}{2} - \varphi_{R,\pi}$

$$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}} = \operatorname{sen}\varphi_{R,\pi} \qquad \textbf{[1]}$$

Como en el presente caso es $0 \le \varphi_{\vec{a},\vec{b}} \le \pi/2$ se tiene que $\cos\varphi_{\vec{a},\vec{b}} \ge 0$, lo que implica que sea $\vec{a}.\vec{b} \ge 0$. Entonces por **[1]** se tiene que:

$$\varphi_{R,\pi} = arc.\operatorname{sen}\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \textbf{[2]}$$

b. Por ejemplo, sean la recta R y el plano π:

$R: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{-4}, z = 2$ $\qquad$ $\pi : 2x - y + z = 3$

Puede entonces tomarse:

$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ $\qquad$ $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $\qquad$ $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2{,}4495$

y entonces resulta que:

$$\varphi_{R,\pi} = arc.\text{sen}\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = arc.\text{sen}\frac{|3.2+(-4)(-1)|}{5\times 2,4495} = 0,9553$$

GA XVI

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre una recta y un plano

a. Sean la recta R y el plano π. Sea $\vec{a}$ un vector paralelo a la recta y sea $\vec{b}$ un vector perpendicular al plano. Evidentemente, para que R y π sean paralelos es necesario y suficiente que $\vec{a}$ sea perpendicular a $\vec{b}$, es decir que sea $\vec{a}.\vec{b} = 0$. Resumiendo:

R // π cuando y solo cuando $\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ **[1]**

b. Dadas la recta R´ y el plano π´, sea $\vec{a}'$ un vector paralelo a la recta y sea $\vec{b}'$ un vector perpendicular al plano. Evidentemente, para que sea R´⊥ π´ es necesario y suficiente que $\vec{a}'$ y $\vec{b}'$ tengan una misma dirección, es decir que sea $|\vec{a}' \wedge \vec{b}'| = 0$. Resumiendo, y teniendo en cuenta a **[10]** de VT. XX resulta que :

R´⊥ π´ cuando y solo cuando $a_x'b_z' = a_z'b_x'$; $a_x'b_y' = a_y'b_x'$; $a_z'b_y' = a_z'b_y'$ **[2]**

c. Ejemplo. Dados:

$R: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2}, z = 3$ $\quad$ π : x + y = 4

Puede tomarse:

$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$ $\quad$ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$

y como:

2.0 = 0.2 $\quad$ 2.0 = 0.2 $\quad$ 2.1 = 1.2

resulta entonces que es:

$$R \perp \pi$$

d. Ejemplo. Dados:

R : x = 1 ; y = 2 $\quad$ π : x + y = 4

Puede tomarse:

$\vec{a} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

y como:

$$\vec{a}.\vec{b} = 0.1 + 0.1 + 1.0 = 0$$

resulta entonces que es:

R // π

GA XVII

Intersección de dos rectas

a. Sean las rectas R y R´ cuyas ecuaciones vectoriales son:

$$R:\vec{v}=\vec{w}+\lambda\vec{a} \qquad\qquad R':\vec{v}\,'=\vec{w}\,'+\lambda'\vec{a}\,' \qquad \textbf{[1]}$$

Evidentemente, en el punto de intersección (si existe) se tiene que:

$$\vec{w}+\lambda\vec{a}=\vec{w}\,'+\lambda'\vec{a}\,' \qquad \textbf{[2]}$$

Poniendo:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}; \qquad \vec{a}\,'=a'_x\vec{i}+a'_y\vec{j}+a'_z\vec{k}$$
$$\vec{w}=w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}; \qquad \vec{w}\,'=w'_x\vec{i}+w'_y\vec{j}+w'_z\vec{k}$$

La expresión **[2]** toma el aspecto:

$$w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}+\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=w'_x\vec{i}+w'_y\vec{j}+w'_z\vec{k}+\lambda'(a'_x\vec{i}+a'_y\vec{j}+a'_z\vec{k})$$

lo que puede ser escrito como:

$$[(a_x\lambda-a'_x\lambda')-(w'_x-w_x)]\vec{i}+[(a_y\lambda-a'_y\lambda')-(w'_y-w_y)]\vec{j}+[(a_z\lambda-a'_z\lambda')-(w'_z-w_z)]\vec{k}=0$$

lo que implica que en el punto de intersección de las rectas debe tenerse que:

$$\begin{cases} a_x\lambda-a'_x\lambda'=w'_x-w_x \\ a_y\lambda-a'_y\lambda'=w'_y-w_y \\ a_z\lambda-a'_z\lambda'=w'_z-w_z \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, λ y λ'.
Pueden presentarse tres alternativas:
1º. El sistema no tiene solución. En este caso las rectas R_1 y R_2 no se cortan.
2º. El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso R_1 y R_2 son la misma recta.
3º. El sistema tiene una única solución. Sea (λ_I , λ'_I) dicha solución. En este caso al punto de intersección I le corresponde el vector posición $\vec{v}_I$ dado por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\vec{v}_I=\vec{w}+\lambda_I\vec{a} \qquad \text{ó} \qquad \vec{v}\,'_I=\vec{w}\,'+\lambda'_I\vec{a}\,' \qquad \textbf{[4]}$$

b. Ejemplo: Sean las rectas:

$$R:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-1}{-1} \qquad\qquad R':\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{2}$$

En este caso es:

$$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k} \qquad \vec{a}\,'=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \qquad \vec{w}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k} \qquad \vec{w}\,'=2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$$

y entonces en este caso la ecuación **[3]** toma el aspecto:

$$\begin{cases} 2\lambda - \lambda' = 2 - 3 = -1 \\ 3\lambda - \lambda' = 2 - 4 = -2 \\ -1\lambda - 2\lambda' = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

Este sistema tiene una única solución (λ , λ´) = (-1, -1), y por lo tanto el vector posición V_I del punto de intersección I es (ver **[4]**):

$$\vec{v}_I = \begin{cases} (3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) - (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \\ (2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \end{cases} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

Es decir que el punto de intersección es (1, 1, 2).

c. Ejemplo: Sean las rectas:

$$R: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{-1} \qquad R': \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{2}$$

En este caso es:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{a}' = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \qquad \vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} \qquad \vec{w}' = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

y entonces en este caso el sistema **[3]** toma el aspecto:

$$\begin{cases} 2\lambda - \lambda' = 2 - 3 = -1 \\ 3\lambda - \lambda' = 2 - 4 = -2 \\ -1\lambda - 2\lambda' = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Una (única) solución de las dos primeras ecuaciones de este sistema es (λ , λ´) = (-1 , -1). Como esta solución no satisface a la 3ª ecuación, entonces el sistema no tiene solución. Por lo tanto, las rectas R_1 y R_2 consideradas <u>no se cortan</u>.

d. Ejemplo. Sean las rectas:

$$R: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-1} \qquad R': \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-2}$$

En este caso es:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{a}' = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k} \qquad \vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 1\vec{k} \qquad \vec{w}' = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

y entonces en este caso el sistema **[3]** toma el aspecto:

$$\begin{cases} 2\lambda - 4\lambda' = 1 - 3 = -2 \\ 3\lambda - 6\lambda' = 1 - 4 = -3 \\ -1\lambda + 2\lambda' = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

En este sistema la 2ª ecuación es la 1ª multiplicada por 3/2 y la 3ª es la 1ª multiplicada por (-1/2). El sistema tiene pues infinitas soluciones, y por lo tanto R_1 y R_2 son la misma recta.

GA XVIII

Recta intersección de dos planos

a. Sean dos planos π y π´ cuyas ecuaciones vectoriales son respectivamente:

$$\pi : \vec{b}.\vec{v} = s \qquad\qquad \pi' : \vec{b}'.\vec{v}' = s' \qquad \textbf{[1]}$$

Sea P un punto de la recta intersección (si existe) de dichos planos. Sea $\vec{p}$ el vector posición de P. Evidentemente, será:

$$\begin{cases} \vec{b}.\vec{p} = s \\ \vec{b}'.\vec{p} = s' \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

Entonces, poniendo:

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \qquad \vec{b}' = b'_x\vec{i} + b'_y\vec{j} + b'_z\vec{k} \qquad \vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

la expresión **[2]** toma el aspecto:

$$\begin{cases} b_x x + b_y y + b_z z = s \\ b'_x x + b'_y y + b'_z z = s' \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

Pueden presentarse dos alternativas:
1º. El sistema no tiene solución. En este caso los planos π y π´ son paralelos.
2º. El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso cada solución corresponde a un punto de la recta de intersección.

b. Ejemplo. Sean dos planos:

π : x + 2y + 3z = 4 π´ : 4x + 5y + 6z = 3

En este caso es:

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \vec{b}' = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k} \qquad s = 4 \qquad s' = 3$$

y entonces en este caso el sistema **[3]** toma el aspecto:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x + 5y + 6z = 3 \end{cases}$$

Una solución de este sistema es $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \text{arbitrario} & -5 - 2x & 14/3 + x \end{pmatrix}$.

Despejando x se obtiene:

$$x = \frac{y+5}{2} = z - \frac{14}{3}$$

De donde resulta que la recta intersección es:

$$R_I : \frac{x-0}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z - \frac{14}{3}}{1}$$

c. Ejemplo. Sean los planos:

π : x + 2y + 3z = 1 π´ : 3x + 6y + 9z = 1

En este caso es:

$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ $\vec{b}' = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ s = s´ = 1

y entonces en este caso el sistema **[3]** toma el aspecto:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 6y + 9z = 1 \end{cases}$$

Multiplicando la primer ecuación de este sistema por tres y restando el resultado de la tercera se obtiene que 0 = -2, lo cual es imposible. Por lo tanto este sistema no tiene solución, y los planos π y π´ considerados son paralelos.

GA XIX

Intersección de una recta y un plano

a. Sean una recta R y un plano π cuyas ecuaciones vectoriales respectivas son:

$R : \vec{v} = \vec{w} + \lambda\vec{a}$ $\pi : \vec{b}.\vec{v}' = s$ **[1]**

Sea P el punto de intersección (si existe) entre la recta y el plano. Sea $\vec{p}$ el vector posición de P. Evidentemente será (ver **[1]**):

$\vec{p} = \vec{w} + \lambda_I\vec{a}$ $\vec{b}.\vec{p} = s$ **[2]**

es decir que será:

$\vec{b}.(\vec{w} + \lambda_I\vec{a}) = s$, es decir que $\vec{b}.\vec{w} + \lambda_I(\vec{b}.\vec{a}) = s$

De donde resulta que debe ser:

$$\lambda_I = \frac{s - \vec{b}.\vec{w}}{\vec{b}.\vec{a}}$$

y reemplazando este valor en la primera ecuación de **[2]** se obtiene el vector posición del punto de intersección:

$$\vec{p} = \vec{w} + \frac{s - \vec{b}.\vec{w}}{\vec{b}.\vec{a}}\vec{a} \qquad \textbf{[3]}$$

b. Ejemplo. Sean:

$$R: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-1} \qquad \pi : x + 2y + 3z = 4$$

En este caso es:

$\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad$ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$ $\quad$ $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad$ s = 4

y entonces por **[3]** resulta que:

$$\vec{p} = (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + \frac{4 - \left[(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}).(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})\right]}{(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}).(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})}(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

Teniéndose así que el punto de intersección de R y π es (-1, -2, 3).

c. Ejemplo. Sean:

R : x = 1, y = 2 $\qquad$ π : x + y = 4

En este caso es:

$\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad$ $\vec{a} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad$ s = 4

y entonces por **[3]** resulta que:

$$\vec{p} = (\vec{i} + 2\vec{j}) + \frac{4 - \left[(\vec{i} + \vec{j}).(\vec{i} + 2\vec{j})\right]}{(\vec{i} + \vec{j}).\vec{k}}\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{0}\vec{k}\text{, no existe.}$$

Por lo tanto R y π son paralelos.

Ejercicios y problemas sobre la Geometría Analítica de la Recta y el Plano

GA. 1 Hallar una recta que pase por (1, 2, 3) y que sea paralela a la recta $R: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1}; z = 5$

GA. 2 Sean las rectas:

$R_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{5} = \frac{z+3}{-6}$ y $R_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{6}$

Indicar:

1º. Si estas rectas se cortan.

2º. En caso afirmativo, si son perpendiculares.

GA. 3 Hallar la distancia entre las rectas paralelas.

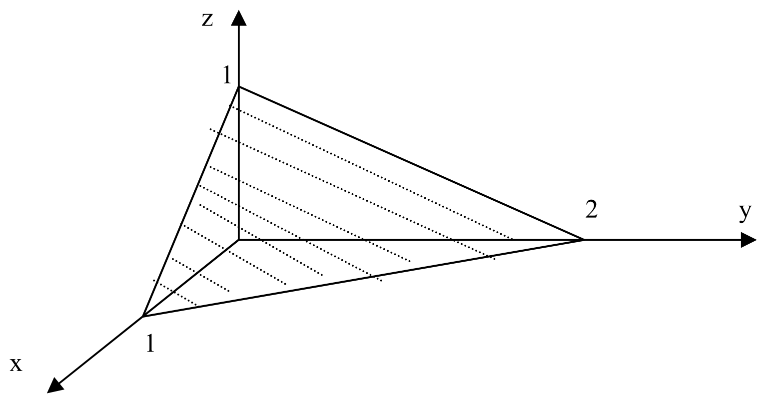
$R_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ y $R_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{8}$

GA. 4 Hallar la distancia entre las rectas:

$R_1 : x = 1, y = 2$ y $R_2 : y = 3, z = 4$

GA. 5 Indicar las ecuaciones cartesianas de las dos familias de rectas que disten 1 del origen y que sean perpendiculares al vector $\breve{i} + \breve{j} + \breve{k}$.

GA. 6 Hallar la ecuación cartesiana del plano indicado en la figura adjunta.



GA. 7 Indicar la ecuación cartesiana del plano perpendicular a la recta $R: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ y que contiene al punto (1, 1, 1).

GA. 8 Sean las rectas:

$R_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{4}$ y $R_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = z+3$

Se pide:

1º. Indicar "a golpe de vista" el punto en que se cortan estas rectas.

2º. Indicar la ecuación cartesiana del plano determinado por ellas.

GA. 9 Hallar las ecuaciones cartesianas de los dos planos paralelos al plano $\pi : 2x + 3y - 5z = 3$, y que disten dos unidades de él.

GA. 10 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2 , 3) y que es perpendicular al plano $2x + 3y - 5z = 3$.

GA. 11 Indicar la ecuación vectorial de una circunferencia que tenga su centro en (a , b) y tenga un radio r. A partir de dicha ecuación vectorial, hallar la ecuación cartesiana de la circunferencia.

GA. 12 Idem para una esfera de centro (a, b, c) y radio r.

GA. 13 Usando métodos vectoriales, determinar la ecuación cartesiana de la tangente a una circunferencia en un punto determinado de la misma.

GA. 14 Usando métodos vectoriales, determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a una esfera en un punto determinado de la misma.

INFINITOS

INF I

Aprendiendo a contar

a. Cuando el lector estaba en 1^{er} grado, la maestra le enseñó a recitar en forma sucesiva los números naturales: 1, 2, 3, ... Estos números constituyen un conjunto al que se llamará N. En dicho conjunto:

1º) A todo elemento le corresponde un elemento sucesor único que está definido por una ley que fue enunciada en su hora por la antedicha docente de primeras letras. Es decir que dado un número natural cualquiera se sabe siempre cual es el que sigue.

2º) No hay dos elementos de N que tengan el mismo sucesor.

3º) Hay un elemento único, el 1, que no es un sucesor de ninguno.

Es decir que queda perfectamente establecido un orden entre los elementos de N, existiendo un elemento inicial único, 1, y no existiendo ningún elemento que sea el último.

b. Una vez aprendida a conciencia la ley de sucesión del conjunto N, considérese el conjunto A indicado en la figura INF I.a.

$N = \{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow, ...\}$

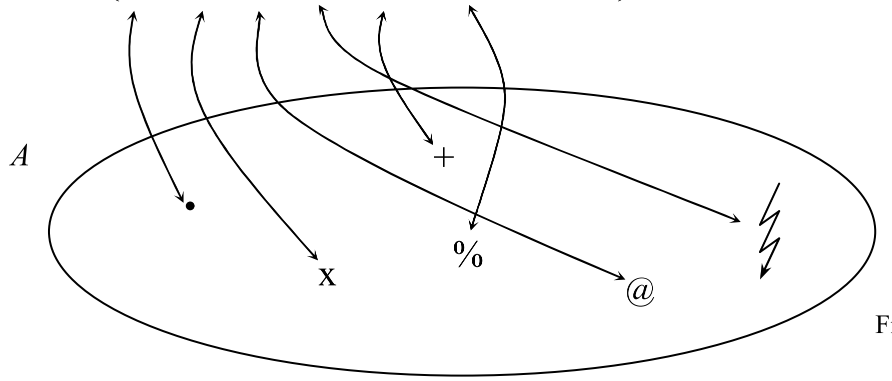


Fig. INF I.a

El <u>proceso de contar</u> los elementos del conjunto *A* se define tal como sigue:

1º) Tómese un elemento <u>cualquiera</u> de *A* y "decrétese" que está en correspondencia con el elemento 1 de N.

2º) A continuación tómese uno <u>cualquiera</u> de los <u>restantes</u> elementos de *A* (es decir un elemento de *A* para el cual todavía no se ha "decretado" una correspondencia) y "decrétese" que está en correspondencia con el elemento de N sucesor al anterior (con el 2).

3º) Continúese con el mismo mecanismo hasta que todos los elementos de *A* estén en correspondencia con un número natural.

El último elemento de N que se puso en correspondencia con un elemento de *A* (el 6) será llamado <u>cantidad de elementos de *A* o cardinalidad de *A*</u>.

c. Se hace notar que en vez del conjunto N de los números naturales podría contarse en base a cualquier conjunto que cumpla las condiciones 1^a, 2^a y 3^a enunciados en **a**. Así, podría contarse:

1º) En base a los símbolos:

a → b → c → aa → ab → ac → ba → bb → ....

cuya ley de sucesión es obvia.

2º) En base a las palabras:

RAZ → DWA → TRZY → ......

cuya ley de sucesión puede ser dada por cualquier niño polaco.

Etc.

Queda así evidenciado que el uso de los números naturales 1, 2, 3, ... en el proceso de contar es enteramente convencional.

INF II

Infinitos

Supóngase que mediante el procedimiento indicado en el párrafo anterior se intenten contar los puntos de un segmento de recta. Evidentemente, no podría individualizarse ningún número natural $\mathbf{n}^*$ por una parte y <u>todos</u> los puntos del segmento por otra. Por grande que se tome a $\mathbf{n}^*$ siempre sobrarán puntos (ver figura INF II.a).

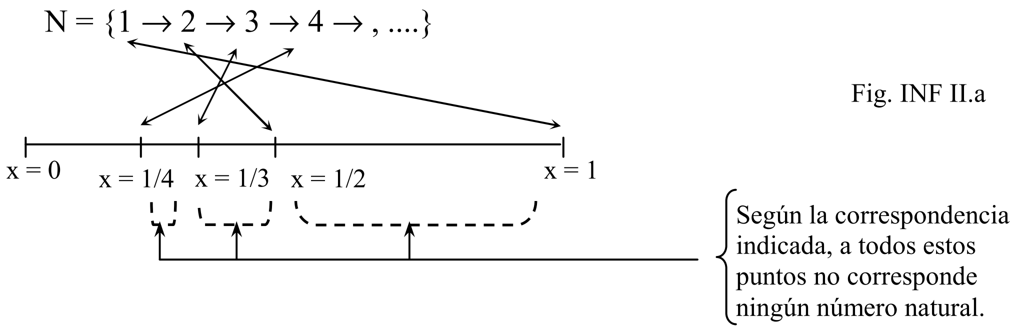


Fig. INF II.a

En este caso se dirá que <u>la cantidad de puntos del segmento es infinita y que el conjunto de puntos del segmento es infinito</u>.

Notar que <u>**la palabra infinito no denota ningún número**</u>. Constituye únicamente la confesión de un fracaso, ya que indica que no se puede realizar un proceso de conteo.

Por las dudas, se repetirá acá que para poder decir que se han contado los elementos de un conjunto es necesario indicar un resultado final consistente en un número natural específico (por ejemplo 3792345384).

INF III

Potencia de conjuntos

a. <u>Se define que dos conjuntos tienen la misma potencia cuando y sólo cuando puede establecerse **alguna** correspondencia uno a uno entre los elementos de ambos</u>.

b. <u>Se define que un conjunto *A* es de una potencia inferior a la de otro conjunto *B* cuando y sólo cuando</u>:

1º) <u>**No** puede establecerse una correspondencia uno a uno entre todos los elementos de *A* y todos los elementos de *B*</u>.

2º) <u>**Sí** puede establecerse una correspondencia uno a uno entre todos los elementos de *A* y parte de los elementos de *B*</u>.

c. En el caso de conjuntos finitos (conjuntos cuyos elementos pueden ser contados) es evidente que dos conjuntos tendrán igual potencia cuando y sólo cuando tengan igual cantidad de elementos (ver por ejemplo la figura INF III.a).

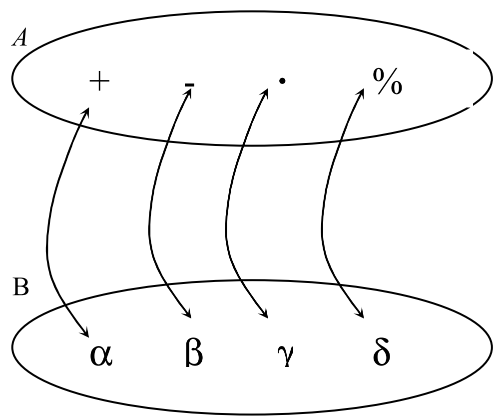


Fig. INF III.a

d. Sean ahora los conjuntos infinitos formados por los puntos de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ indicados en la figura INF III.b. Entre los elementos de dichos conjuntos puede establecerse la correspondencia uno a uno indicada en dicha figura, y por lo tanto <u>los conjuntos de puntos de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tienen igual potencia</u> (ver **a**).

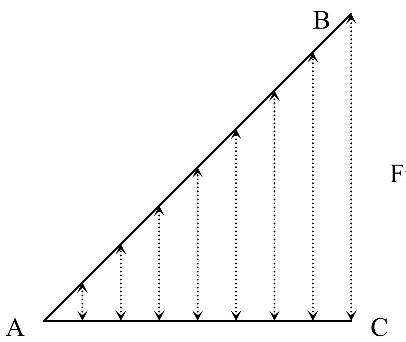


Fig. INF III.b

Correspondencia uno a uno entre todos los puntos de $\overline{AC}$ y todos los puntos de $\overline{AB}$.

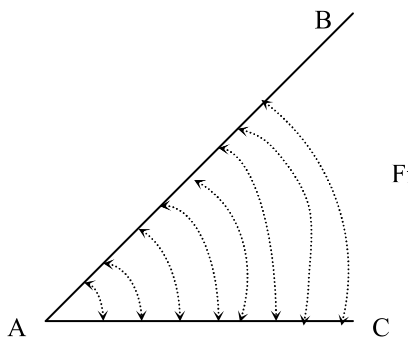


Fig. INF III.c

Correspondencia uno a uno entre todos los puntos de $\overline{AC}$ y parte de los puntos de $\overline{AB}$.

El hecho de que también pueda establecerse la correspondencia indicada en la figura INF III.c entre todos los puntos de $\overline{AC}$ y parte de los puntos de $\overline{AB}$ no altera el hecho de que ambos conjuntos de puntos tengan igual potencial (notar el "<u>alguna</u>" que figura en la definición dada en **a**).

INF IV

Comparación de infinitos

a. El concepto de potencia de un conjunto permite (hasta cierto punto) comparar infinitos. Si bien ya no será posible decir que “este infinito tiene más elementos que aquel otro infinito” ya que no se pueden contar sus elementos, se podrá decir, eso sí, que “tal infinito es de una potencia superior (o igual, o inferior) a la potencia de aquel otro infinito”, pero habrá que tener cuidado de **no** efectuar mentalmente la equivalencia **“Potencia ↔ Cardinalidad”** ya que se trata de conceptos totalmente distintos.

Así, si N es el conjunto de los números naturales y *P* es el conjunto de los números pares se tiene que puede establecerse la correspondencia:

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathrm{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ P = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & \ldots\} \end{array}$$

con lo que resulta que **N y *P* tienen la misma potencia**, a pesar de que en N figuran los elementos 1, 3, 5, ..., que no figuran en *P*. Tirando el rigor por la ventana, puede decirse que “tratándose de infinitos, el todo es tan grande como algunas de sus partes”.

b. A título ilustrativo se demostrará que, dado un cuadrado de 1 m de lado, la potencia del conjunto formado por todos sus puntos es igual a la potencia del conjunto formado por los puntos de uno de sus lados.

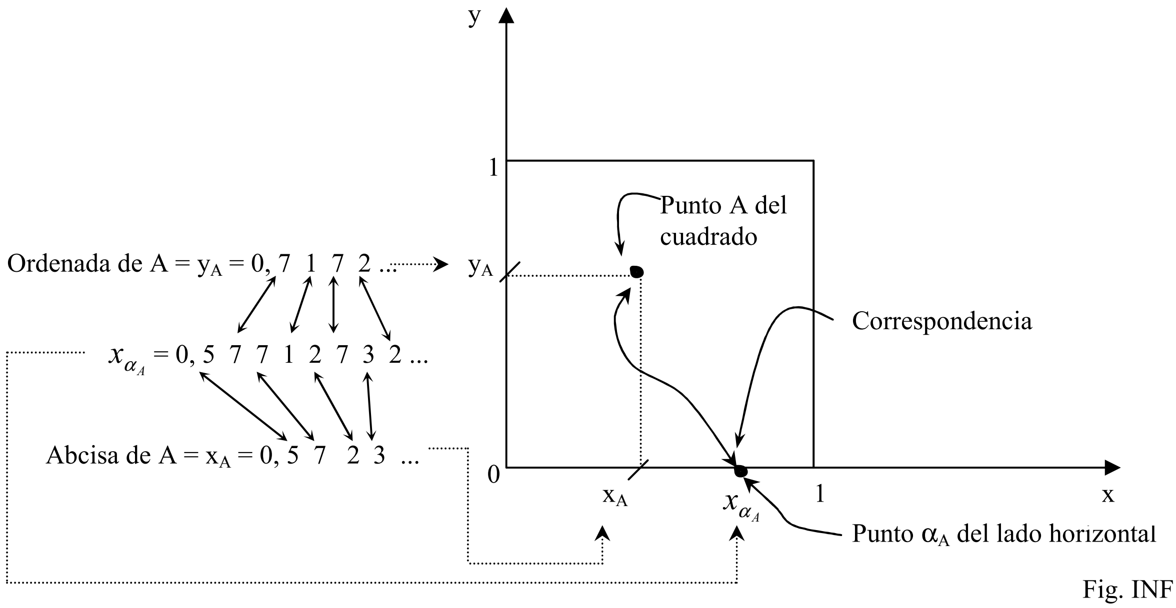


Fig. INF IV.a

La demostración es inmediata teniendo en cuenta la correspondencia ilustrada en la figura INF IV.a.

INF V

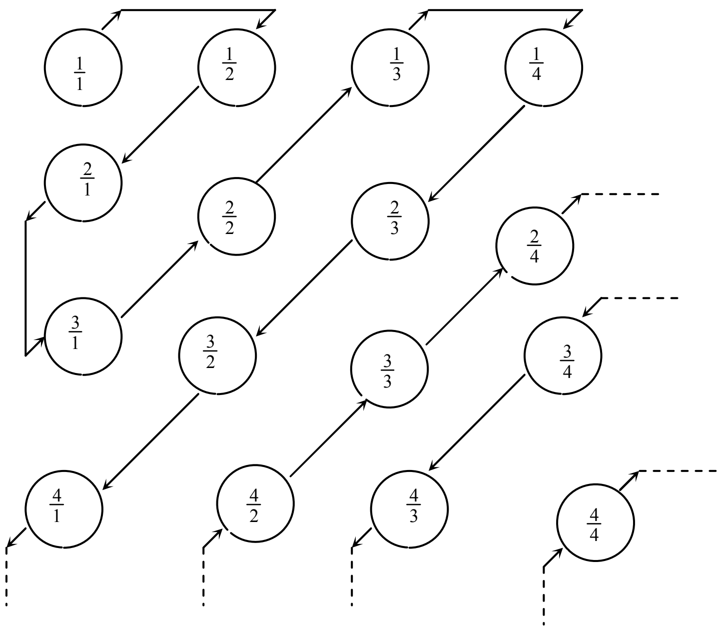
<u>Infinidades numerables</u>

Se dice que un conjunto es una infinidad numerable cuando tiene la misma potencia que el conjunto N de los números naturales.

INF VI

Se demostrará a continuación que <u>el conjunto de los números racionales es una infinidad numerable</u>.

a. Considérese el cuadro siguiente cuyo génesis es obvio. Trácese un camino tal como el indicado, que, partiendo de $1/1$ saltee todos los racionales iguales a algún otro que ya apareció antes (por ejemplo, se saltea a $2/2$, $3/3$, $4/4$, etc. por ser iguales a $1/1$, número que ya apareció previamente).



Evidentemente, en este cuadro aparecen todos los números racionales positivos ya que dado un racional positivo cualquiera, tarde o temprano el camino pasará por él.
Entonces, entre los naturales y los racionales positivos puede establecerse la correspondencia uno a uno.

n (natural) ↔ enésimo racional del camino indicado

Entonces, el conjunto de los racionales <u>positivos</u> es una infinidad numerable (ver INF V) ya que tiene la misma potencia del conjunto N de los números naturales.
Mediante una generalización obvia de lo arriba indicado puede demostrarse que el conjunto de <u>todos</u> los números racionales es también una infinidad numerable.

INF VII

Unión de infinidades numerables disjuntas

INF VII.1

Se demostrará que la unión de dos infinidades numerables disjuntas es otra infinidad numerable. En efecto, dadas las infinidades numerables disjuntas:

$$A = \{a_1, a_2, ...\} \qquad \text{y} \qquad B = \{b_1, b_2, ...\}$$

como puede establecerse la correspondencia

$$A \cup B = \{a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , ...\}$$

$$N = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , ...\}$$

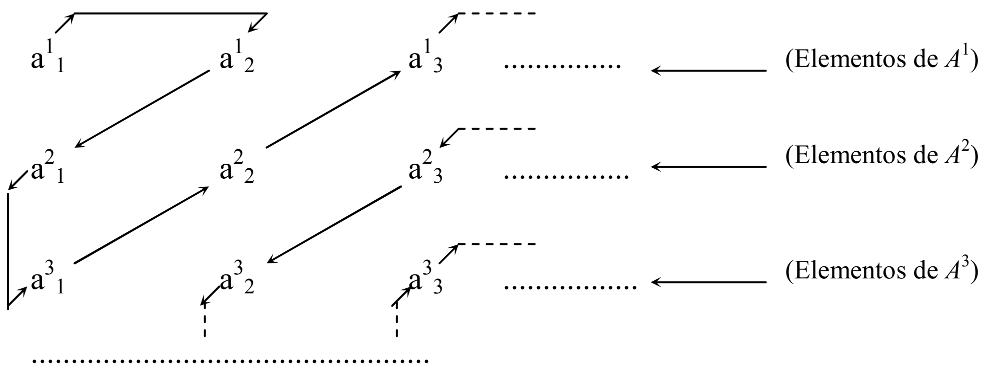
queda demostrado lo propuesto.

INF VII.2

Se demostrará a continuación que la unión de una infinidad numerable de infinidades numerables, todas disjuntas entre sí, es otra infinidad numerable.
Sean las infinidades numerables todas disjuntas entre sí:

$$A^1 = \{a^1{}_1 , a^1{}_2 , a^1{}_3 , ...\}, ... , A^i = \{a^i{}_1 , a^i{}_2 , a^i{}_3 , ...\}, ...$$

Considérese el cuadro adjunto cuyo génesis es obvio y el camino indicado en él.



En este cuadro están todos los elementos de todos los conjuntos A ya que dado un cierto $a^i{}_j$ cualquiera, basta recorrer lo suficiente el camino para encontrarlo.
Por lo tanto, a lo largo de dicho camino están todos los elementos de $A^1 \cup A^2 \cup .... \cup A^i \cup ....$
Entre dichos elementos y los números naturales puede establecerse la correspondencia uno a uno.

n (natural) $\leftrightarrow$ enésimo elemento $a^i{}_j$ del camino indicado.

Entonces, el conjunto $A^1 \cup A^2 \cup .... \cup A^i \cup ...$ es una infinidad numerable (ver INF V) ya que tiene la misma potencia del conjunto de los números naturales.

INF VIII

Infinidades no numerables

INF VIII.1

Se dirá que un conjunto es una infinidad no numerable cuando su potencia sea superior a la del conjunto de los números naturales.

INF VIII.2

a. Se probará a continuación que el conjunto de todos los puntos del segmento [0 , 1] constituye una infinidad no numerable.
Se demostrará dicha demostración por el absurdo.
Si los puntos del segmento [0 , 1] constituyeran una infinidad numerable, existiría una correspondencia uno a uno entre los elementos n del conjunto N de los naturales y los elementos r de [0 , 1] tal que pueda ser expresada por una tabla por el estilo de la indicada en la figura INF VIII.a.

$$\begin{array}{ccc} n \in N & & r \in [0\,,\,1] \\ 1 & \longleftrightarrow & r_1 \\ 2 & \longleftrightarrow & r_2 \\ 3 & \longleftrightarrow & r_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

Fig. INF VIII.a

Supóngase que sobre el segmento [0 , 1], cuya longitud es evidentemente 1, se marquen los puntos r_1, r_2, r_3, ... indicados en dicha tabla. Ver figura INF VIII.b.

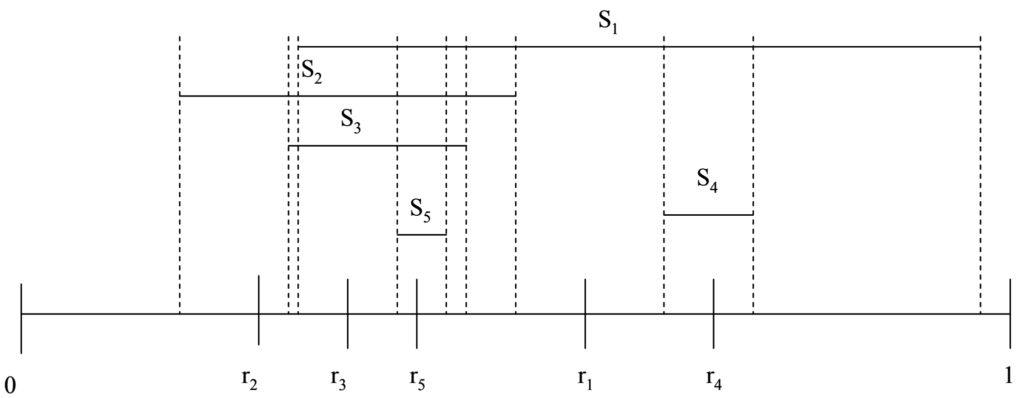


Fig. INF VIII.b

Sean “subsegmentos” S_1, S_2, S_3, ... $\subset$ [0 , 1] tales que respectivamente $r_1 \in S_1$, $r_2 \in S_2$, $r_3 \in S_3$, ..., y tales que sus longitudes respectivas sean:

$$l_{S_1} = \frac{\varepsilon}{2^1}\,,\; l_{S_2} = \frac{\varepsilon}{2^2}\,,\; l_{S_3} = \frac{\varepsilon}{2^3}\,, \ldots\ldots$$

siendo ε un número cualquiera tal que $0 < \varepsilon < 1$.
Sea:

$$S^* = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots..$$

el conjunto de todos los puntos de [0 , 1] que pertenecen a uno o más de los S_i.
Sea L^* la suma de las longitudes de la totalidad de los segmentos que componen a S^*.
Como S_1, S_2, S_3, ... no son disjuntos resulta que:

$$L^* \leq l_{S_1} + l_{S_2} + l_{S_3} + \ldots = \frac{\varepsilon}{2^1} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3}$$

y por una argumentación similar a la seguida en NR II **b** se tiene que:

$$L^* \leq \varepsilon$$

Ahora bien, según es evidente, todos los puntos r_i de la tabla indicada en la figura INF VIII.a pertenecen a S^*, y por lo tanto puede decirse que dichos puntos están agrupados dentro de un conjunto de segmentos cuya longitud total es L^*.
Pero como por otra parte $L^* \leq \varepsilon$, $\varepsilon < 1$ y la longitud de [0 , 1] es 1, se tiene que existen puntos de [0 , 1] que no pueden hacerse corresponder con ningún $n \in N$.
Como idéntico trabajo podría efectuarse con cualquier tabla de correspondencia que se pueda imaginar, resulta entonces que <u>no puede establecerse una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los puntos (números reales) del intervalo [0 , 1]</u>.

b. Por otra parte, puede establecerse la correspondencia:

$$\begin{array}{cccccccccc} N = \{1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & ....\} & \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & \\ \{\frac{1}{1} & , & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{3} & , & \frac{1}{4} & , & ....\} & \subset [0 , 1] \end{array}$$

con lo que resulta que <u>sí puede establecerse una correspondencia uno a uno entre los números naturales y parte de los reales del intervalo</u> [0 , 1].
Esta conclusión y la hallada en **a** determinan (ver **b** de INF III) que la potencia del conjunto N de los números naturales sea inferior a la potencia del conjunto [0 , 1].

INF VIII.3

De una manera similar a la indicada en INF VIII.2 puede probarse que:

1º) La potencia del conjunto de los números naturales es inferior a la potencia del conjunto de los números reales de un intervalo cualquiera no degenerado.

2º) La potencia del conjunto de los números naturales es inferior a la potencia del conjunto de todos los números reales.

INF IX

Se probará a continuación que <u>si de una infinidad no numerable se elimina una infinidad numerable de elementos, lo que queda sigue siendo una infinidad no numerable</u>.
Sea K una infinidad no numerable y sea D una infinidad numerable siendo $D \subset K$. Evidentemente, el resultado de eliminar D de K es $K' = K - D$ (ver figura INF IX.a) lo que implica que sea:

$$K = K' \cup D \qquad [1]$$

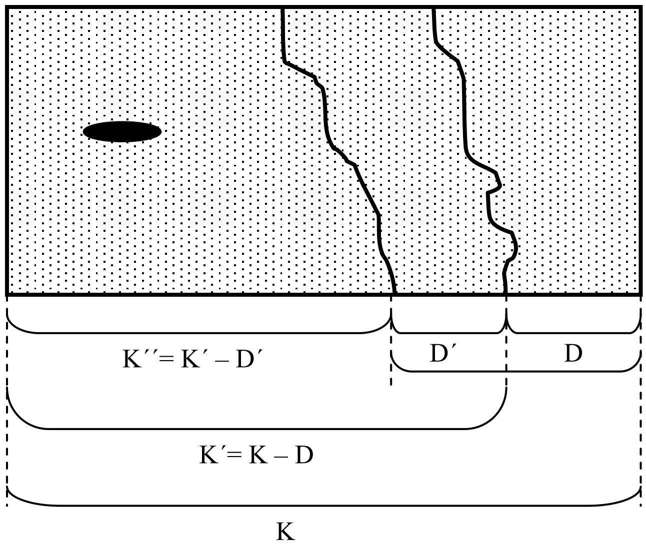


Fig. INF IX.a

Si K´ fuera un conjunto finito, como D es una infinidad numerable se tendría que K sería también una infinidad numerable (ya que, según puede verificarse fácilmente, la unión de una infinidad numerable con un conjunto finito es una infinidad numerable), lo cual es contra hipótesis.
Por lo tanto se tiene que K´ es un conjunto infinito.
De la infinidad K´ (que por el momento no se sabe si es o no numerable) puede extraerse una 2ª infinidad numerable D´. Evidentemente, el resultado de eliminar D´ de K´ es K´´ = K´ - D´ (ver figura INF IX.a), lo que implica que sea:

$$K' = K'' \cup D' \qquad \textbf{[2]}$$

Entonces, por **[1]** y **[2]** se tiene que:

$$K = (K'' \cup D') \cup D = K'' \cup (D' \cup D) \qquad \textbf{[3]}$$

Observando a **[3]** y **[2]**, resulta que entre los elementos de K y los elementos de K´ puede establecerse una correspondencia uno a uno ya que:

1°) Para empezar se tiene que los elementos de D´ ∪ D y los elementos de D´ pueden ser puestos en correspondencia uno a uno, ya que por ser D y D´ infinidades numerables disjuntas (ver figura INF IX.a), se tiene que D´ ∪ D es también una infinidad numerable (ver INF VII.1), y por lo tanto tiene la misma potencia que D´.

2°) Los elementos de K´´ pueden ser puestos en correspondencia con sí mismos.
Resulta así que K y K´ tienen la misma potencia, quedando así demostrado lo propuesto.

INF X

<u>Potencia del continuo</u>

Por lo visto en **d** de INF III resulta que todos los conjuntos, formados por los números comprendidos en un intervalo cerrado no degenerado cualquiera, tienen la misma potencia.
Según visto en INF VIII, dicha potencia es superior a la de una infinidad numerable. Será llamada en lo sucesivo <u>potencia del continuo</u>.

INF XI

Potencias superiores a la del continuo

a. Sean los números del intervalo [0 , 1]. Estos números forman un conjunto cuya potencia es la del continuo (ver INF X).
Sea el conjunto:

$$Z = \{\text{Todos los posibles subconjuntos de } [0\ ,\ 1]\} = \{Y_Z\}$$

Supóngase que existiera una correspondencia uno a uno entre los elementos de Z y los de [0 , 1]:

$$z \in [0\ ,\ 1] \longleftrightarrow Y_Z \in Z \qquad \textbf{[1]}$$

Sea un conjunto Y_0 formado de la siguiente manera:

Cada z del intervalo [0 , 1] figurará en Y_0 cuando y sólo cuando dicho z no figure en el Y_Z que le corresponde en la correspondencia uno a uno indicada en **[1]**. Este Y_0, que es un subconjunto de [0 , 1], será entonces distinto de todos los Y_Z considerados en **[1]**, con lo que resulta que dicha correspondencia no tiene en cuenta al Y_0 indicado.
Como idéntico trabajo podría realizarse para cualquier correspondencia del tipo de la **[1]** que pueda imaginarse, resulta entonces que no puede establecerse una correspondencia uno a uno entre los elementos de [0 , 1] y los elementos de Z.

b. Por otra parte, puede establecerse la correspondencia:

$$z \in [0\ ,\ 1] \longleftrightarrow \{z\} \in Z \qquad \textbf{[1]}$$

Siendo {z} un subconjunto de Z formado por el único elemento z.

con lo que resulta que sí puede establecerse una correspondencia uno a uno entre los elementos de [0 , 1] y parte de los elementos de Z.
Esta conclusión y la hallada en **a** determinan (ver **b** de INF III) que la potencia de Z sea superior a la potencia de [0 , 1], es decir que la potencia de Z sea superior a la potencia del continuo.

INF XII

Observación

Hasta el día de hoy se conocen sólo tres potencias de infinitos, pero no se ha demostrado que no existan otras (si el lector quiere tratar!!!). Estas potencias son, por orden creciente:

1°) Potencia del conjunto de los números naturales: **Infinidades numerabes**.

2°) Potencia del conjunto de números de un intervalo no degenerado. Potencia del continuo: **Infinidades no numerables**.

3°) Potencia del conjunto de los subconjuntos del conjunto de números reales de un intervalo no degenerado: **Infinidades no numerables**.

Estas potencias son a menudo llamadas respectivamente ALEF1, ALEF2 y ALEF3.

Por ejemplo:
1°) El conjunto de todos los puntos del plano constituye un infinito de potencia ALEF2.
2°) El conjunto de todas las curvas del plano constituye un infinito de potencia ALEF3.
3°) El conjunto de todos los números complejos con parte real e imaginaria enteras constituye un infinito de potencia ALEF1.

Uso del software MATHEMATICA 6.0 en el Álgebra

Soft I

Generalidades

a. La computación se ha hecho una herramienta indispensable en la **ingeniería práctica**. Cálculos que con métodos más elementales constituían verdaderas orgías aritméticas, requiriendo grandes cantidades de ingeniero-hora (horas caras), y presentando a cada paso la posibilidad de cometer un error; mediante la computación se han hecho ahora increíblemente rápidos y seguros.

b. MATHEMATICA es un software **interactivo** de computación diseñado para aplicaciones matemáticas, y también de otra naturaleza.
Su gama de aplicación es enorme, pero en estas páginas se considerará únicamente su uso en lo que se refiera al "Álgebra Práctica", que es lo que se ha venido desarrollando en el presente trabajo.

c. Para activar dicho software se empieza por hacer un doble clic sobre el ícono MATHEMATICA. A continuación, la computadora presentará una pantalla en blanco. El operador deberá teclear entonces el cálculo u operación cuyo resultado le interesa, por ejemplo 1+2. Automáticamente, el software ubicará lo tecleado en una posición predeterminada.
A continuación el operador deberá operar la tecla INTRO. Esto determina que:

A la izquierda de la operación o cálculo pedidos aparecerá la inscripción **In[1]:=**
A renglón seguido aparecerá la inscripción **Out[1]=** seguida por el resultado del cálculo u operación pedidos por el operador.

Lo que quedará en pantalla será pues:

In[1]:= 1+2

Out[1]= 3

Para un cálculo u operación ulterior se procederá igual que lo recién descrito.
La única diferencia será que aparecerán las inscripciones **In[2]:=** y **Out[2]=,** en vez de las **In[1]:=** y **Out[1]=** y así sucesivamente. Si después de una tanda de cálculos se desea iniciar otra, o terminar con la sesión, se deberá teclear **Exit[ ]** o **Quit,** seguido de INTRO
Una nueva tanda se iniciaría con **In[1]:=** y **Out[1]=**

Soft II

Símbolos

Suma	a+b
Diferencia	a-b
Producto	a b (“hueco” entre a y b) ó a*b
Cociente	a/b
Potencia	a ^ x
AND lógico	&&
OR lógico	||
Unidad imaginaria	I o bien ⅈ
Infinito	Infinity o bien ∞
π	Pi o bien π
e	E o bien ⅇ
Raíz cuadrada de x	Sqrt[x] o bien $\sqrt{\square}$
Logaritmo neperiano de x	Log[x]
Potencia x de e	Exp[x] o bien ⅇ^{x}
%	Resultado indicado en el último Out
%%	Resultado indicado en el penúltimo Out
% n ó Out[n]	Resultado del input de orden “n”
x -> a	La variable x asume el valor a de manera temporaria sólo para el input actual
x=a	La variable x asume el valor a de manera permanente

Existen aún otros símbolos, que serán explicados a medida de que aparezcan.

Soft III

Expresiones:

a. Sea:

In[1]:= f=x+1

Out[1]= 1+x

x+1 es una **expresión**. La letra f es el **nombre o representación global** de dicha expresión.

Un nombre o representación global puede tener uno o más símbolos puestos uno a continuación del otro. El primer símbolo debe ser siempre una letra, y todas las letras deben siempre ser minúsculas. Ejemplos de nombres posibles son:

f, f4, g21, b8v, zkb, etc

Sea:

In[2]:=gg={1,3,5,7}
Out[2]={1,3,5,7}

(1,3,5,7} es otra expresión cuya representación global es gg. Notar que la f indicada anteriormente representaba una función de x, mientras que esta gg es simplemente una lista de números que no son función de nada

A veces a una expresión no se le asigna ningún nombre. Por ejemplo:

In[3]:= (2^3)+4
Out[3]= 12

Prácticamente, todo lo que se escribe en MATHEMATICA es una expresión, salvo sus nombres o representaciones globales (ver Wolfram, página190).

b. Dadas una o más expresiones, puede manipulárselas de dos maneras distintas:

1) Indicando las manipulaciones a efectuarse sobre el nombre o nombres de la o las expresiones correspondientes. Por ejemplo:

In[4]:=f ^2 **(f fue definido en In[1])**

Out[4]= $(1+x)^2$

2) Indicando las manipulaciones a efectuar directamente sobre la expresión o expresiones indicadas "in extenso". Por ejemplo:

In[5]:=(1+x) ^2

Out[5]= $(1+x)^2$

c. Si se desea "olvidar" una expresión f previamente definida se pone:

In[6]:= Clear[f]

En este caso el programa no regresa un Out

d. Si se define en primer lugar:

In[7]:= h = x^2

Out[7]= x^2

y más adelante (no necesariamente inmediatamente después) se pone:

In[8]:= h = Log[x]

Out[8]=Log [x]

la letra h quedará designando a Log[x] (borrándose de la memoria la anterior definición de $h = x^2$).

Soft IV

a. MATHEMATICA trabaja en principio con números racionales en forma exacta, de manera tal que manipulaciones con números racionales dan siempre resultados que son números racionales exactos.

Puede sin embargo pedirse a MATHEMATICA que trabaje con aproximaciones decimales de números reales. Por ejemplo, haciendo:

In[9]:= (2/3-3/5) (5/2)

se obtiene:

Out[9]= $\frac{1}{6}$, número racional

Para pedir que se haga el mismo cálculo, pero trabajando en decimal se hará:

In[10]:= N[(2/3-3/5) (5/2)]

Out[10]= 0.166667

o sinó:

In[11]:= (2./3.-3./5.) (5./2.)

Out[11]= 0.1666667

Los puntos que figuran en **In[11]** son puntos decimales. En realidad, bastaría con que uno sólo de los números tenga un punto para que MATHEMATICA trabaje en decimal. Por ejemplo:

In[12]:=(2./3-3/5) (5/2)

Out[12]= 0.1666667

b. En el caso de números irracionales, es imposible representarlos en forma exacta con números racionales. Así, si se trata de hallar $\sqrt{2}$ (mediante el operador **Sqrt**) MATHEMATICA devuelve como resultado $\sqrt{2}$, ya que es la única manera de representar a dicho número en forma exacta.

In[13]:= Sqrt[2]

Out[13]= $\sqrt{2}$

Para hallar una aproximación decimal de $\sqrt{2}$ se pone:

In[14]:= N[Sqrt[2]]

Out[14]= 1.41421

Actuando con decimales, MATHEMATICA trabaja básicamente con 6 cifras pero si se necesita una precisión mayor, el operador puede pedir casi cualquier, precisión que desee Así si en el caso anterior se necesita una precisión de 12 cifras se hará

In [15]:=N[%%,12]

Out[15]=1.41421356237

o sinó:

In[16]:=N[Sqrt[2],12]

Out[16]= 1.41421356237

c. Sea una expresión que sea una función. Por ejemplo:

In[17]:= f= 1+x

Out[17]=1+x

y supóngase que interese conocer el valor que asume dicha función cuando la variable toma un cierto valor , por ejemplo 3. En este caso se debe hacer:

In[18]:= **f[x]/.x->3**
Out[18]= 4

Este procedimiento también puede ser usado en el caso de funciones de varias variables. Por ejemplo:

In[19]:= f[x,y]=1+x y

Out[19]= 1+x y

In[20]:= f[x,y]/.{x->2,y->3}

Out[20]= 7

En el caso de funciones irracionales se procede igual que lo arriba indicado. Por ejemplo:

In[21]:= f[x]=Log[x^2]
Out[21]= Log[x^2]

In[22]:= f[x]/.x->1.34

Out[22]= 0.585339

Soft V

Sumatorias

Para hallar el valor de la sumatoria $\sum_{i\min}^{i\max} a_i$, donde el parámetro i asume valores corridos se hace:

In[1]:=Sum[a(i),{i, i min ,i max}]

Out[1]= Resultado

Por ejemplo:

In[2]:=Sum[1/(4 i^2 -1),{i,1,30}]

Out[2]= $\frac{30}{61}$

Otro ejemplo:

In[3]:=Sum[(x^i)/i ,{i,3,5}]

Out[3]= $\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$

(Como en esta sumatoria figura una variable, no puede darse un valor numérico).

También pueden hallarse valores de sumatorias múltiples $\sum_{i\min}^{i\max}\sum_{j\min}^{j\max} a(i,j)$.

Por ejemplo:

In[4]:=Sum[(1+i)/(1+j),{i,1,2},{j,2,3}]

Out[4]= $\frac{35}{12}$

Soft VI

Combinatoria. Binomio de Newton. Fómula de Leibnitz

a. Para hallar el factorial de un entero no negativo se hace:

In[1]:= 8!

Out[1]= 40320

b. Para hallar el factorial de un número natural se hace:

In[2]:= Factorial[8]

Out[2]= 40320

c. Para hallar el valor del número combinatorio $\binom{m}{n}$ se hace:

In[3]:= Binomial[9,3]

Out[3]= 84

d. Para hallar todas las permutaciones simples de los elementos a , b y c se hace:

In[5]:=Permutations[{a,b,c}]
Out[5]= {{a,b,c},{a,c,b},{b,a,c},{b,c,a},{c,a,b},{c,b,a}}]

e. Ejemplos de desarrollos de Binomios de Newton son:

In[6]:= Expand[(x+y)^5] $(x+y)^5$

Out[6]= $x^5 + 5x^4\, y + 10x^3\, y^2 + 10x^2\, y^3 + 5x\, y^4 + y^5$

In[7]:= Expand[(2+5)^5] $(2+3)^5$

Out[7]= 16807

In[8]:= Expand[((x^(2/5))+(3 y^(-2)))^5] $(x^{2/5} + 3/y^2)^5$

Out[8]= $x^2 + \frac{243}{y^{10}} + \frac{405x^{2/5}}{y^8} + \frac{270x^{4/5}}{y^6} + \frac{90x^{6/5}}{y^4} + \frac{15x^{8/5}}{y^2}$ **.**

Ejemplos de desarrollos por Formula de Leibnitz son:

In[9]:=Expand[(a+b-c)^3) $(a+b+c)^3$

Out[9]=$a^3 + 3a^2\, b + 3a\, b^2 + b^3 - 3a^2\, c - 6a\, b\, c - 3b^2\, c + 3a\, c^2 + 3b\, c^2 - c^3$

In[10]:=Expand[(x+2*y+3*(z^2))^3] $(x+2y+3z^2)$

Out[10]=$x^3 + 6x^2\, y + 12x\, y^2 + 8\, y^3 + 9x^2\, z^2 + 36x\, y\, z^2 + 36y^2\, z^2 + 27x\, z^4 + 54y\, z^4 + 27z^6$

Soft VII

Complejos

a. Tratándose de operaciones con complejos, conviene siempre que MATHEMATICA trabaje en numérico. De ahí que al complejo (3+2i) se lo trate como indicado a continuación:

In[1]:= z =3.+2.I
Out[1]= 3.+2.ⅈ

Mathematica suministra los siguientes valores:

In[2]:= Re[z]

Out[2]= 3. (Parte real de z)

In[3]:= Im[z]

Out[3]= 2. (Parte imaginaria de z)

In[4]:= Abs[z]

Out[4]= 3.60555 (Valor absoluto de z)

In[5]:= Arg[z]

Out[5]= 0.588003 (Uno de los argumentos de z, en radianes)

Sean los complejos z1 y z2:

In[6]:= z1=2+3 I
Out[6]= 2.+3.ⅈ

In[7]:= z2=1-3I
Out[7]= 1.-3.ⅈ

Entonces:

In[8]:=z1+z2 ó **In[8]:=(**2.+3.I)+(1-3.I)
Out[8]=3

In[9]:=z1-z2 ó **In[9]:=(**2.+3.I)-(1.-3.I)
Out[9]=1+6 ⅈ

In[10]:=z1 z2 ó **In[10]:=(**2.+3.I) (1.-3.I)
Out[10]=11.-3ⅈ

In[11]:=z1/z2 ó **In[11]:=(**2.+3.I)/(1.-3.I)
Out[11]= $-\frac{7}{10}+\frac{9.i}{10}$

In[12]:=z1^3 ó **In[12]:=(**2.+3.I)^3 (Potencia 3 de z1)

Out[12]= -46+9ⅈ

b. Raíces n-ésimas (n natural) de números complejos
Si se hace

In[13]:= z^(1/3) ó **In[13]:=(**2.+3.I)^(1/3) (Raíz cúbica de z)
se obtiene:

Out[13]= $(2+3i)^{1/3}$

In[14]:=N[%]

Out[14]=1.45186 + 0.493404 ⅈ, y nada más.

Es decir que por este método se obtiene una sola de las tres raíces cúbicas de z.

Pueden obtenerse las tres raíces cúbicas de z =2+3I resolviendo la ecuación:

$z^3 - (2+3I)=0$

Se resuelve esta ecuación haciendo (ver capítulo sobre Polinomios):

In[15]:=NSolve[z^3-2-3I==0,z]
Out[15]={{z→-1.15323+1.01064 ⅈ},{z→-0.298628-1.50405ⅈ},
{z→1.45186+0.493409ⅈ}}

Lo que figura en **Out[15]** son las tres raíces de la ecuación $z^3 - (2+3I)=0$, y por lo tanto, las tres raíces cúbicas de z.

También se debe aclarar que el igual matemático es ==

c. Logaritmos de complejos

Por "tracción a sangre" (ver **NC XVI**) se obtiene que:

$\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\,(\frac{\pi}{4}+2\,k\,\pi) = 0.346574 + i\,(0.785398+2\,k\,\pi)$, con k un número entero.

y según MATHEMATICA resulta:

In[15]:=Log[1.+1.I]
Out[15]= 0.346574+0.785398 ⅈ

Es decir que MATHEMATICA da **uno sólo** de los infinitos logaritmos de (1+I). En este caso fue el correspondiente a k = 0.

Se tiene entonces que:

Log[1.+I.]. = 0.346574+ⅈ (0.785398+2πk)

Se hace notar que en ciertos casos el único logaritmo que suministra MATHEMATICA no es el correspondiente a k=0

d. Potencias complejas de complejos

Por "tracción a sangre" (ver **NC XVII**) se obtiene que:

$(1+i)^{(1-i)} = (2.8078794 + 1.317865\ i)\ e^{2\pi k}$

y según MATHEMATICA resulta:

In[16]:= (1.+1.I.)^(1.-1.I)
Out[16]= 2.80787+1.31787 ⅈ

Es decir que también en este caso MATHEMATICA da uno solo de los infinitos valores de $(1+i)^{(1-i)}$

Soft VIII

Sistemas de ecuaciones lineales

a. En general, un sistema de ecuaciones lineales, tal como el indicado a continuación:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}v = h_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}v = h_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}v = h_3 \end{cases}$$

según la convención de MATHEMATICA se escribe como:

$\{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}v==h_1, a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}v==h_2, a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}v==h_3\},\{x,y,z,v\}$

b. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales según el método **Reduce**.

Sea el sistema (crameriano).

$$\begin{cases} 1x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+10z=2 \end{cases}$$

Para resolver este sistema por el método recién indicado se hace:

In[1]:= Reduce[{1 .x+2. y+3. z = =1 , 4. x+5. y+6. z = = 0 , 7. x+8. y+10. z = = 2}, {x,y,z}]

Out[1]= x= = 1.33333 && y= =-4.66667 && z= =3.

c. Otro ejemplo:

$$\begin{cases} \pi\ x + \sqrt{2}\ y = 1 \\ e\ \ x\ \ +4^{1/3}\ y = 0 \end{cases}$$

Se hace:

In[2]:= NSolve[{Pi x+Sqrt[2] y==1,E x+4^(1/3) y==0},{x,y}]
Out[2]={{x→1.38912,y→-2.37875}}

d. Se hace notar que:

El método **Reduce** sirve para sistemas con cualquier cantidad de ecuaciones con cualquier cantidad de incógnitas

Si el sistema considerado tiene infinitas soluciones en el **Out** correspondiente algunas de las incógnitas saldrán indicadas en función de otra (u otras), la cual (las cuales) asume (asumen) valores arbitrarios.

Si el sistema considerado no tiene ninguna solución, saldrá

Out[ ]= False

e. Ejemplos:

1) Sea el sistema (que tiene infinitas soluciones):

$$\begin{cases} x+2y+3z = 1 \\ 4x+5y+6z =1 \\ 7x+8y+9z =1 \end{cases}$$

Se hace:

In[3]:=Reduce[{1 x+2y+3z==1 , 4x+5y+6z==1,7x+8y+9z ==1},{x,y,z}]

Out[3]= y= = -1-2x && z= =1+x.

2) Sea el sistema (que tiene infinitas soluciones):

$$\begin{cases} 1x+2y+3z+4v = 1 \\ 2x+3y+4z+5v = 0 \end{cases}$$

Se hace:

In[4]:=Reduce [{1 x+2 y+3 z+4 v==1 , 2x+y+4 z+5 v== 0},{x,y,z,v}]

Out[4]=z= = -5.-3x+6y && v= =4+2x-5y.

3) Sea el sistema (que no tiene ninguna solución):

$$\begin{cases} x+2y+3z+1v = 1 \\ 4x+5y+6z+1v = 0 \\ 7x+8y+9z+1v = 0 \end{cases}$$

Se hace:

In[5]:= Reduce [{1 x+2 y+3 z+1v == 1 , 4 x+5 y+6 z +1 v==0 ,
7 x+8 y+9 z+1 v==0 } , {x,y,z,v}]

Out[5]=False

4) Sea el sistema (que tiene solución única):

$$\begin{cases} x+ y = 2 \\ 2 x+3 y = 5 \end{cases}$$

Se hace:

In[6]:=Reduce[{x+y==2 , 2 x+3 y== 5},{x,y}]

Out[6]:=x==1 && y==1

5) Sea el sistema (que no tiene ninguna solución):

$$\begin{cases} x+ y = 2 \\ 2x+3y = 5 \\ 0{,}3x+0{,}4y = 0 \end{cases}$$

Se hace:

In[7]:=Reduce [{x+y==2 , 2 x+3 y==5 , 0.3 x+0.4 y==0} ,{x,y}]

Out[7]=False

6) Sea el sistema (que tiene infinitas soluciones):

$$\begin{cases} x+2y+3z = 1 \\ 0{,}4x+0{,}5y+0{,}6z = 0 \\ 7x+8y+9z = 1 \\ 6x+6y+6z = 0 \end{cases}$$

Se hace:

In[8]:=Reduce[{x+2 y+3 z ==1 , 0.4 x+0.5 y+0.6 z == 0.1 , 7 x+8 y+9 z ==1 ,
6 x+6 y+6 z ==0},{x,y,z}]

Out[8] = y= = -1.-2.x && z ==1.+1.x

f. Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, además del método **Reduce** existe el método **LinearSolve**, pero como es menos eficiente que el **Reduce**, se lo omitirá.

Soft IX

Matrices. Determinantes. Autovectores y autovalores

a. Notación:

La matriz $m = \begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{Vmatrix}$ en MATHEMATICA se indica como:

m = {{a,b,c,d} ,{e,f ,g,h} ,{i,j,k,l}}

La excepción la constituyen las matrices fila y columna.

Tanto la matriz $\|b\|$ como la matriz $\|a \quad b \quad c\|$ se indicarán como {a,b,c}

Una matriz indicada según MATHEMATICA puede pasarse a la forma clásica haciendo:

In[1]:=MatrixForm[{{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}]

Out[1]= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

b. Operaciones con matrices

Dadas las matrices**:**

In[2]:= p ={{a,b,c},{d e,f}}
Out[2] ={{a,b,c},{d,e,f}}

In[3]:= q ={{1,2,3},{4,5,6}}}
Out[3] = {{1,2,3},{4,5,6}}

se tiene que:

In[4]:=p+q ó **In[4]:=**[{{a,b,c},{d,e,f}}+{{1,2,3},{4,5,6}}] (Suma de matrices)

Out[4]= {{1+a, 2+b, 3+c},{4+d, 5+e, 6+f}}

In[5]:= k p ó **In[5]:=** k {{a,b,c},{d,e,f}}(Producto de un número por una matriz)

Out[5] = {{a k, b k, c k},{d k, e k, f k}}

En MATHEMATICA el producto matricial se simboliza con un punto, (**.** **)**

Sea la matriz p (3X3):

In[6]:= p = {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}
Out[6] = {{a,b,c },{d,e,f},{g,h,i}}

y la matriz q (3X2)

In[7]:= q = {{1,4},{2,5},{3,6}}
Out[7]= {{1,4},{2,5},{3,6}}

Se tiene entonces que:

In[8]:= p . q ó **In[8]:=** {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}**.** {{1,4},{2,5},{3,6}}
Out[8] = {{a+2 b+3 c, 4 a+5 b+6 c},{d+2 e+3 f, 4 d+5 e+6 f},
{g+2 h+3 i, 4 g+5 h+6 i}}

c. Rango de una matriz.

Supóngase que se desee hallar el rango de la matriz:

m= {{1,2,3,1},{4,5,6,1},{7,8,9,1},{6,6,6,0}}

En primer lugar se hace:

In[9]:= NullSpace [m]

Out[9]= {{1,-1,0,1},{1,-2,1,0}}

Entonces, como la matriz m tiene 4 filas y la matriz **Out[9]** tiene 2, resulta que:

Rango de m= 4-2 =2 (véase A. MAT. II)

d. Determinante de una matriz cuadrada

A la matriz m={{1,3,4},{2,8,6},{5,1,35}} corresponde el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 35 \end{vmatrix}$

cuyo valor se obtiene haciendo:

In[10]:= Det[m] o **In[10]:=**Det [{{1,3,4},{2,8,6},{5,1,35}}]
Out[10]= 2

e. Inversa de una matriz cuadrada.

1) Para hallar la inversa de la matriz m arriba indicada se hace:

In[11]:= Inverse[m] ó **In[11]:=** Inverse [{{1,3,4},{2,8,6}{5,1,35}}]
Out[11]= {{137,-101/2,-7},{-20,15/2,1},{-19,7,1}}

In[12]:= MatrixForm [%]

Out[12]= $\begin{pmatrix} 137 & \frac{-101}{2} & -7 \\ -20 & \frac{15}{2} & 1 \\ -19 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2) Supóngase ahora que se trate de hallar la inversa de una matriz singular:

In [13]:= Inverse[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]
Inverse::sing:Matrix{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}is singular
Out[13]= Inverse [{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]

3) En caso de que todos los números de una matriz sean racionales y/o irracionales con simbolización propia, MATHEMATICA dará siempre la inversa exacta de la matriz.

En cambio, si la matriz contiene uno o más números decimales, entonces MATHEMATICA dará una aproximación de su inversa.

Por ejemplo, sea:

In[14]:= m={{3.1416,2.7172},{1,2}}

Out[14] ={{3.1416,2.7172},{1,2}}

In[15]:= Inverse[m]
Out[15]={{0.560852,-0.761974},{-0.280426,0.880987}}

Multiplicando a esta matriz m por su inversa debería obtenerse la matiz unitaria. En realidad se obtiene:

In[16]:= %.m
Out[16] = {{1.,0.},{-1.11022×10^{-16},1.}}
Puede suprimirse este pequeño error haciendo:

In[17]:= Chop[%]

Out[17]= {{1. 0}{0 1.}}

La orden Chop reemplaza por ceros a todos los números menores que 10^{-10}.

4) Según se dijo, cuando se trata de hallar la inversa de una matriz conviene siempre usar números racionales y/o irracionales con una simbolización propia.

Pero a veces esto no resulta práctico. Por ejemplo:

In[18]:= Inverse[{{2 , Log[2]},{3,Pi}}]

Out[18]= $\left\{\left\{\frac{\pi}{2\pi-3\text{Log}[2]},-\frac{\text{Log}[2]}{2\pi-3\text{Log}[2]}\right\},\left\{-\frac{3}{2\pi-3\text{Log}[2]},\frac{2}{2\pi-3\text{Log}[2]}\right\}\right\}$

Como a menudo es poco conveniente trabajar con expresiones tan “frondosas” como ésta, en estos casos no hay más remedio que pasar a decimal:

In[19]:=N[%]

Out[19] ={{0.0747332, -1.164888},{-0.71365, 0.475766}}

f. Autovalores y autovectores de una matriz cuadrada.

En MATHEMATICA (y muy a menudo en la matemática general), a los autovalores se los llama **eigenvalores** y a los autovectores se los llama eigenvectores.

Siguen a continuación ejemplos de los casos típicos más comunes.

1) Sea la matriz:

m = {{1,1/2},{2,1}}

Se tiene que haciendo:

In[20]:=Eigenvalues[m] ó **In[20]** := Eigenvalues[{{1,1/2},{2,1}}]

Out[20]={2,0}

In[21]:=Eigenvectors[m] ó **In[21]:=**Eigenvectors[{{1,1/2},{2,1}}]

Out[21]= {{1/2,1},{-1/2,1}}

resulta que:

Los autovalores de la matriz son 2 y 0. Al autovalor 2 le corresponde el autovector

$\text{k}\left\{\frac{1}{2},1\right\}=\text{k}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ y al autovalor 0 le corresponde el autovector $\text{k}'\left\{-\frac{1}{2},1\right\}=\text{k}'\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

siendo k y k´ constantes arbitrarias.

Se podría sintetizar todo lo anterior haciendo:

In[22]:=Eigensystem[m] ó **In[22]** :=Eigensystem[{{1,1/2},{2,1}}]

Out[22]= {{2, 0},{{1/2, 1},{-1/2, 1}}}

Evidentemente, en esta expresión la matriz {2,0} da los autovalores del caso y la matriz {{1/2,1},{-1/2,1}} da sus correspondientes autovectores.

2) Sea la matriz :

m= {{1,2},{0,1}}

Se hace:

In[23]:= Eigensystem[{{1,2},{0,1}}]
Out[23]={{1,1} {{1,0},{0,0}}

En este caso existe un único autovalor, 1 (raíz doble de la ecuación característica de la matriz), a la cual corresponde el autovector k {1,0}. En cambio, k´{0,0} no cuenta como autovector.

3) Sea la matriz:

m={{1,2,3 },{2,4,6},{ 3,6,9}}}

Se hace:

In[24]:=Eigensystem[{{1,2,3},{2,4,6},{3,6,9}}]
Out[24]= {{14,0,0},{{-3,0,1},{-2,1,0},{1,2,3}}}

En este caso la matriz tiene como autovalores a 0 (raíz doble de la ecuación característica de la matriz) y a 14 (raíz simple de dicha ecuación).

Los autovectores correspondientes al autovalor 0 son:

k{-3,0,1} y k´{-2,1,0}

y el autovector correspondiente al autovector 14 es:

k´´{1,2,3}

4) Sea la matriz:

m={{E,1/2},{2,1}}

Si se hace

In[25]:=Eigensystem[{{E,1/2},{2,1}}]

Out[25]=

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}\ (1+\mathrm{e}+\sqrt{5\text{-}2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2}\,)\ ,\ \frac{1}{2}\ (1+\mathrm{e}-\sqrt{5\text{-}2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2}\,)\right\},\left\{\left\{\frac{1}{4}\ (\text{-}1+\mathrm{e}+\sqrt{5\text{-}2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2}\,)\ ,1\right\},\left\{\frac{1}{4}\ (\text{-}1+\mathrm{e}-\sqrt{5\text{-}2\mathrm{e}+\mathrm{e}^2}\,)\ ,1\right\}\right\}\right\}$$

Si se desea pasar este resultado a decimal se hace:

In[26]:=N[%]

Out[26]={{3.17752,0,540762},{{1.08876,1.},{-0.229619,1.}}}

Si “de movida” se hubiera deseado este resultado se hubiera hecho:

In[27]:= N[Eigensystem[{E,1/2},{2,1}}]

Out[27]={{3.17752,0.542762],{{1.08876,1.},{-0.229619,1.}}}

Soft X

Polinomios

a. Ceros de polinomios.

Para hallar los ceros de un polinomio la “panacea” es el método indicado a continuación:

Sea por ejemplo el polinomio (cuyos coeficientes son reales y/o complejos):

$P(x)=x^5+(1+2i)x^2-5$

Haciendo:

In[1]:=NSolve[x^5+(1+2 I) x^2-5==0,x]
Out[1]={{x→-1.3483-0.781947ⅈ},{x→-0.95239+0.65271ⅈ},
{x→0.392625+1.54093 ⅈ},{x→0.640883 -1.19942 ⅈ},{x→1.26718 -0.212266 ⅈ}}

Este **Out[1]** da los 5 ceros del polinomio .

Se dará otro ejemplo. Sea el polinomio:

$P(x)= x^3+ex^2+e^2x+e^3$

Haciendo:

In[2]:= NSolve[x^3+E x^2-E^2 x-E^3==0,x]
Out[2]={{x→-2.71828},{x→-2.71828},{x→2.71828}}

Notar que en **Out[2]** figura tres veces el cero -2.71828. Esto implica que dicho cero sea un cero triple del polinomio considerado

Un tercer ejemplo. Sea el polinomio:

$P(x)= 2x^2+\text{Log }(3)x+\sqrt{5}$

y supóngase que ahora se quieran obtener los ceros de este polinomio con 12 cifras significativas.

En este caso se hará:

In[3]:=NSolve[2 x^2+Log[3] x-Sqrt[5]==0 ,x,12]

Out[3]={{x→-1.36711281916},{x→0.81780667483}}

b. Pasaje de un polinomio a su forma factorizada.

Sea el polinomio :

$p(x)= x^5+9x^4+31x^3+51x^2+40x.+12$

Hágase:

In[4]:=q=x^5+9. x^4+31. x^3+51. x^2+40. x+12.
Out[4]= $12.+40.x+51.x^2+31.x^3+9.x^4+x^5$

In[5]:=NSolve[q= = 0,x]

Out[5]= {{x $\rightarrow$ -3.},{x $\rightarrow$ -2.},{x $\rightarrow$ -2.},{x$\rightarrow$ -1.},{x$\rightarrow$ -1.},{x $\rightarrow$ -1..}}

In[6]:=a=x/.%
Out[6]={-3.,-2.,-2.,-1.,-1.}

In[7]:=Product[(x-a[[i]]),{i,1,5}]
Out[7]= (1.+x)(1.+x)(2.+x)(2.+x)(3.+x)

Con lo que resulta que la forma factorizada requerida es:

p(x)= (x+1)(x+1)(x+2)(x+2)(x+3)

c. Máximo común divisor de polinomios.

Sean los polinomios:

$p= x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

$q = -x^3 - 4x^2 - x + 6$

Para hallar el MCD de estos polinomios se hace:

In[8]:= p= x^4+x^3-3 x^2-x+2
Out[8]=$2 - x - 3x^2 + x^3 + x^4$

In[9]:=q=-x^3-4 x^2-x+6
Out[9]=$6 - x - 4x^2 - x^3$

In[10]:= PolynomialGCD[p,q]
Out[10] =$-2 + x + x^2$

También, hubiera podido hacerse:

In[11]:=PolinomialGCD[x^4+x^3-3 x^2-x+2 , -x^3-4 x^2-x+6]
Out[11]=$-2 + x + x^2$

d. Ceros múltiples de un polinomio

Dado un polinomio cualquiera, p, se obtendrá su derivada haciendo D[p ,x]. El MCD de p y su derivada es un polinomio cuyos ceros son todos los ceros múltiples de p con multiplicidad una unidad menor.

Por lo tanto, para hallar los ceros múltiples del polinomio:

$p=x^6 + 10x^5 + 40x^4 + 82x^3 + 91x^2. + 52x + 12$

ha de hacerse:

In[12]:=p=x^6+10 x^5+40x^4+82 x^3+91 x^2+52 x+ 12
Out[12]= $12+52 x+91 x^2+82 x^3+40 x^4+10 x^5+x^6$

In[13]:= PolynomialGCD[p,D[p,x]]
Out[13]= $2+5 x+4 x^2+x^3$

In[14]:=NSolve[%==0,x]
Out[14]={{{x→-2.},{x→-1.},{x→-1.}}

In[15]:= a=x/.%

Out[15]={-2.,-1.,-1.}

Con lo que resulta que p tiene a -2 como cero doble y a -1 como cero triple.

e. Cuocientes de polinomios.

Sean los polinomios:

$a=x^5$-3x+2 y **$b=4x^2$-3x+8**

El polinomio cuociente de a/b se halla haciendo:

In[16]:=PolynomialQuotient[a,b,x] ó PolynomialQuotient[x^5-3 x+2,4 x^2-3 x+8,x]

Out[16= $-\frac{165}{256}-\frac{23\ x}{64}+\frac{3\ x^2}{16}+\frac{x^3}{4}$

y el resto de dicha operación viene dado por:

In[17]:=PolynomialRemainder[a,b,x] ó PolynomialRemainder[x^5-3 x+2,4 x^2-3 x+8,x]

Out[17= $\frac{229}{32}-\frac{527\ x}{256}$

f. Desarrollo en fracciones parciales de cuocientes de polinomios

Dados dos polinomios p y q, el comando **Apart[p/q]** produce el desarrollo de p/q en fracciones parciales.

Se hace notar que a veces se hacen necesarias manipulaciones adicionales.

Se darán a continuación varios ejemplos:

1) **In[18]:= p=x-5**
Out[18]=-5+x

In[19]:=q=x^5+9 x^4+31 x^3+51 x^2+40 x+12
Out[19]=$12+40\ x+51\ x^2+31\ x^3+9\ x^4+x^5$

In[20]:=Apart[p/q]

Out[20]= $-\frac{3}{(1+x)^2}+\frac{8}{(1+x)}-\frac{7}{(2+x)^2}-\frac{6}{(2+x)}-\frac{2}{(3+x)}$

In[21]:=p=2 x^6+3 x^2-4

Out[21]= $-4+3\ x^2+2\ x^6$

In[22]:= q=x^5+9 x^4+31 x^3+51 x^2+40 x+12
Out[22]=$12+40\ x+51\ x^2+31\ x^3+9\ x^4+x^5$

In[23]:=Apart[p/q]

Out[23]= $-18+2x+\frac{1}{2(1+x)^2}-\frac{41}{4(1+x)}+\frac{136}{(2+x)^2}-\frac{260}{(2+x)}+\frac{1481}{4(3+x)}$

2) A veces el procedimiento directo recién indicado no funciona. Por ejemplo sean:

In[24]:= p=79 x-32
Out[24]= -32+79 x

In[25]:=q=x^2-3 x+1
Out[25]=$1-3\,x+x^2$

In[26]:=Apart[p/q]
Out[26]= $\frac{-32+79x}{1-3x+x^2}$

y esto no constituye un desarrollo en fracciones parciales. Además, no es nada nuevo. Este resultado se obtendría directamente haciendo p/q. En estos casos (y otros similares) lo que debe hacerse es presentar a q en forma factorizada.

Por las dudas, conviene siempre presentar a q en forma factorizada

Para factorizar a q se hace:

In[27]:= NSolve[q==0,x]
Out[27]={{x→0.381966},{x→2.61803}}

In[28]:= a=x/.%
Out[28]={0.381966, 2.61803}

In[29]:=Product[(x-a[[i]]),{i,1,2}]
Out[29]= (-2.61803+x) (-0.381966+x)

In[30]:=q=%
Out[30]= (-2.61803+x) (-0.381966+x)

Este **Out[30]** constituye la forma factorizada de q.
Entonces:

In[31]:=Apart[p/q]
Out[31]=$\frac{78.184}{-2.61803+1.x}+\frac{0.816024}{-0.381966+1.x}$

Este **Out[31]** constituye el desarrollo en fracciones parciales de p/q.

3) Sean los polinomios:

$p = 2x^3 + 2x^2 + 2x-2$ y $q = x^4 + 2x^2 +1$

Se hace:

In[32]:=p=2 x^3+2 x^2+2 x-2

Out[32]=$-2+2\,x+2\,x^2+2\,x^3$

In[33]:= q=x^4+2 x^2+1
Out[33] = $1+2\ x^2+x^4$

In[34]:= Apart[p/q]
Out[34]= $-\dfrac{4}{(1+x^2)^2}+\dfrac{2\ (1+x)}{(1+x^2)}$

y como este **Out[34]** no constituye un desarrollo en fracciones parciales, se empezará por factorizar a q.

In[35]:=NSolve[q==0,x]
Out[35]=$\{\{x\to-3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ\},\{x\to-3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ\},$
$\{x\to3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ\},\{x\to3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ\}\}$

In[36]:= a=x/.%
Out[36]=$\{-3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ, -3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ,$
$3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ, 3.98606\times10^{-9}+1ⅈ\}$

In[37]:= Product[(x-a[[i]]),{i,1,4}]
Out[37]= $((-3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ)+x)\ ((-3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ)+x)$
$((3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ)+x)\ ((3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ)+x)$

In[38]:= q=%
Out[38]= $((-3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ)+x)\ ((-3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ)+x)$
$((3.98606\times10^{-9}-1.\ ⅈ)+x)\ ((3.98606\times10^{-9}+1.\ ⅈ)+x)$

Despreciando todos los valores del orden de 10^{-9}, queda:

In[39]:= q =(x-I) (x+I) (x-I) (x+I)
Out[39]= $(-ⅈ+x)^2\ (ⅈ+x)^2$

In[40]:= Apart[p/q]
Out[40]= $\dfrac{1}{(-i+x)^2}+\dfrac{1}{(-i+x)}+\dfrac{1}{(i+x)^2}+\dfrac{1}{(i+x)}$

Este **Out[40]** constituye el desarrollo en fracciones parciales de p/q .