

Linealización Alternativa del Modelo Atmosférico para Estimación de Altitud con Filtro de Kalman

Claudio J. Paz, Julio H. Toloza and Luis R. Canali

Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería, Universidad Tecnológica Nacional

{cpaz, jtoloza, lcanali}@frc.utn.edu.ar

Abstract—In this work, an alternative method to estimate the altitude of a flying vehicle using a barometer is presented. This problem is usually solved by means of the extended Kalman filter given the non linear model of pressure in terms of altitude. The method presented here consist in the approximation of the non-linear model to a first order polynomial before take off. After this linearization a traditional Kalman filter is used thus avoiding the use of Taylor expansion. With this changes execution time of filter iteration decreases twelvefold ($12\times$) with no precision losses.

Resumen— En este trabajo se presenta un método alternativo para estimar la altitud de un vehículo volador usando un barómetro. Para resolver este problema en general se usan filtros extendidos de Kalman (EKF) ya que el modelo para determinar la altura a partir de la presión no es lineal. El método propuesto en este trabajo consiste en linealizar este modelo utilizando una aproximación a un polinomio de grado uno previo al despegue, y luego usar un filtro de Kalman lineal durante el vuelo. De esta manera se evita calcular los primeros términos de la serie de Taylor en cada paso como lo hace el EKF. Con esta variante se lograron reducciones en el tiempo de cómputo del filtro de más de doce veces ($12\times$) sin perder precisión en la estimación.

I. INTRODUCCIÓN

La estimación del estado de un vehículo volador es necesaria para poder utilizar un sistema de control y de esta manera lograr algún tipo de autonomía. Los vehículos aéreos no tripulados, o UAV por sus siglas en inglés, cuentan con computadoras de a bordo llamadas auto-pilotos que controlan distintos parámetros del vuelo. En cuadrícópteros o multicópteros es importante mantener el plano de propulsión paralelo al suelo para poder mantener la sustentación. En estos casos la computadora de a bordo debe tener como prioridad estimar los ángulos de orientación respecto del suelo para mantenerse estable, estos ángulos son conocidos como *roll* y *pitch* (el ángulo restante que define la orientación, llamado *yaw*, no es necesario para la sustentación). En la actualidad hay distintos tipos de auto-pilotos comerciales que tienen gran variedad de características que los diferencian, pero tienen como objetivo común facilitar el vuelo de un multicóptero a los usuarios menos expertos. Algunos simplemente controlan los ángulos antes mencionados mientras que otros también pueden mantener constante la distancia al suelo. Para estimar la altitud, los sistemas que controlan a los UAV en general usan sonares para vuelos de baja altura, como el AR.Drone de la compañía Parrot [1] y barómetros cuando se supera su rango de funcionamiento, generalmente para vuelos al aire libre [2].

La estimación de la altitud generalmente se realiza en conjunto con la velocidad vertical obtenida a partir de la integración de la aceleración en el eje z mediante la fusión del barómetro con un acelerómetro con un filtro de Kalman

extendido (EKF) [3], [4]. Sin embargo, es necesario calcular previamente la orientación del vehículo para obtener la aceleración en el eje vertical a partir de un acelerómetro.

En este trabajo se presenta un método alternativo para estimar la altitud de un vehículo usando solamente un barómetro. Se utiliza un filtro de Kalman tradicional con un vector de estados de dimensión única, mientras que la presión obtenida por el barómetro se utiliza en el vector de observación. A diferencia del filtro de Kalman extendido, en donde la linealización se produce en cada paso alrededor del último estado estimado, en este caso se realiza una aproximación lineal

En la Sección II se introducen los formalismos que derivan en el filtro de Kalman y su versión extendida. En la Sección III se describe el modelo ISA 1979 utilizado en el EKF y cuya ecuación principal es linealizada en la Sección IV. Finalmente en la Sección V se muestran las implementaciones puestas a prueba y los resultados obtenidos, y se concluye en la Sección VI.

II. FILTROS BAYESIANOS

Un sistema, planta o proceso se puede modelar por una sucesión de variables de estado $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathbb{R}^n$ donde n es la dimensión del vector de estados del sistema y con k representando la sucesión de instantes temporales. La evolución de estas variables de estado de un instante de tiempo a otro se pueden modelar con

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (1)$$

donde la función de transición del sistema $f_k(\cdot)$ depende del instante k , y \mathbf{w}_{k-1} es un ruido blanco con media cero y parámetros conocidos, esto es

$$E\{\mathbf{w}_{k-1}\} = 0 \quad \text{y} \quad E\{\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T\} = Q_{k-1} \quad (2)$$

donde $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ y $Q_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

En general, el estado del sistema no puede ser observado de forma directa sino a través de mediciones parciales y posiblemente perturbadas por ruido de diversas fuentes. Se puede describir esta situación modelando la relación entre el estado del sistema y la sucesión de observaciones $\{\mathbf{z}_k : k \in \mathbb{N}_0\} \in \mathbb{R}^m$ con

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (3)$$

donde la función de observación $h_k(\cdot)$ también depende del instante k , por ejemplo en sistemas con sensores de múltiples tasas de muestreo [5]. El ruido \mathbf{v}_k también es ruido blanco con media cero y covarianza conocida

$$E\{\mathbf{v}_{k-1}\} = 0 \quad \text{y} \quad E\{\mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}^T\} = R_{k-1} \quad (4)$$

donde $\mathbf{v}_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ y $R_{k-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ siendo m la dimensión del vector de observación.

La estimación de la función densidad de probabilidad (o pdf por las siglas de *probability density function*) buscada, $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$, se realiza en dos pasos llamados *predicción del estado* y *actualización de la observación*. En el primero se predice el estado en el instante k a partir del estado estimado en el instante previo por medio de la ecuación Chapman-Kolmogorov

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (5)$$

donde

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) p(\mathbf{w}_{k-1}) d\mathbf{w}_{k-1} \quad (6)$$

es llamada *densidad de probabilidad de transición* con

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) = \delta(\mathbf{x}_k - f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})) \quad (7)$$

determinada a partir de (1).

El segundo paso consiste en actualizar la pdf estimada a priori (5) mediante la identidad de Bayes

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \quad (8)$$

en donde $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ es llamada verosimilitud y se calcula a partir de (3) como

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \int \delta(\mathbf{z}_k - h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)) p(\mathbf{v}_k) d\mathbf{v}_k \quad (9)$$

y donde $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{k-1})$ se llama factor de normalización o evidencia, y está dado por

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (10)$$

Se llaman filtros bayesianos a los algoritmos secuenciales que, suponiendo conocido el modelo de un sistema, incluyendo el modelo de cada sensor disponible y una parametrización del ruido que puede afectar a la planta y a las mediciones, puede determinar el estado del sistema $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ dadas todas las lecturas de los sensores hasta el tiempo k utilizando recursivamente la ecuación de predicción

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (11)$$

y luego la ecuación de actualización

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \quad (12)$$

II-A. Filtro de Kalman

Si se asume un sistema lineal, esto es, si $f_k(\cdot)$ y $h_k(\cdot)$ pueden representarse con matrices F_k y H_k respectivamente, y además \mathbf{w}_{k-1} y \mathbf{v}_k pueden considerarse ruido aditivo, se puede escribir el modelo del sistema dado por (1) y (3) como

$$\mathbf{x}_k = F_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (13)$$

$$\mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (14)$$

donde, para $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada matriz de transición de estado y para $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es

llamada matriz de observación. Además se asume que el vector de estados del sistema es una variable aleatoria \mathbf{x} que puede ser representada con una función normal multivariada con media $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ y matriz de covarianza $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la cual se considera definida positiva. Con todo esto, la estimación secuencial bayesiana dada por las ecuaciones (11) y (12) es conocida como *Filtro de Kalman* [6] y cuya solución es cerrada para estas condiciones.

Recordando que

$$Q_k = E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} \quad \text{y} \quad R_k = E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} \quad (15)$$

son las matrices de covarianza de los ruidos gaussianos \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k , se puede escribir que

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_k; 0, Q_k) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_k; 0, R_k) \quad (16)$$

Si se supone que el estado estimado en $k-1$ es conocido, de distribución gaussiana con media $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ y covarianza P_{k-1} , se puede demostrar que la ecuación de predicción del estado (11) queda

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k^-, P_k^-) \quad (17)$$

donde

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (18)$$

$$P_k^- = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_{k-1} \quad (19)$$

son el estado a priori y su matriz de covarianza a priori obtenidos en la etapa de predicción del filtro de Kalman.

Siguiendo el mismo razonamiento, la ecuación de actualización (12) se puede escribir como

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \mathbf{x}_k, R_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k^-, P_k^-)}{\mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \hat{\mathbf{x}}_k^-, S_k)} \quad (20)$$

con $S_k = H_k P_k^- H_k^T + R_k$.

Se puede demostrar que la expresión (20) es una distribución normal de la forma

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k, P_k) \quad (21)$$

donde la media $\hat{\mathbf{x}}_k$ y la covarianza P_k del estado estimado se pueden encontrar haciendo

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (22)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (23)$$

con

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (24)$$

la llamada *ganancia de Kalman*.

II-B. Filtro de Kalman Extendido

El filtro de Kalman Extendido (EKF) es una variante del filtro descrito en la sección anterior, que puede ser utilizado para estimar el estado de un sistema en donde las funciones f_k y h_k no son lineales. El proceso de filtrado es similar, con la diferencia que para determinar la matriz de covarianza P_k^- debe utilizarse una matriz F_k formada a partir de la linealización de la función de transición f_k alrededor del estado $\hat{\mathbf{x}}_k$ para el tiempo k . Esto se lleva a cabo representando a la función f_k en una serie de Taylor.

Se puede hacer una demostración semejante a la de la sección anterior y obtener las ecuaciones usadas en el EKF. Estas son, para la etapa de *predicción*

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (25)$$

$$P_k^- = \hat{F}_k P_{k-1} \hat{F}_k^T + Q_{k-1}, \quad (26)$$

mientras que para la etapa de *actualización* las ecuaciones son

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k(z_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (27)$$

$$P_k = (I - K_k \hat{H}_k) P_k^- (I - K_k \hat{H}_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (28)$$

con

$$K_k = P_{k-1}^- \hat{H}_k^T (\hat{H}_k P_{k-1}^- \hat{H}_k^T + R_k)^{-1} \quad (29)$$

donde

$$\hat{F}_k = \left. \frac{\partial f_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad \text{y} \quad \hat{H}_k = \left. \frac{\partial h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad (30)$$

son los Jacobianos de las funciones $f_k(\cdot)$ y $h_k(\cdot)$.

III. MODELO ISA 1976

El ISA, *International Standard Atmosphere*, es un modelo que describe como varía la temperatura, densidad y viscosidad de la atmósfera de la Tierra en un determinado rango de alturas. Dependiendo de la capa de la atmósfera de la que se trate, en la Tabla I se pueden ver las constantes que la modelan.

TABLA I
PARÁMETROS DEL MODELO ISA79

Índice (b)	Límite inferior [m]	Presión [Pa]	Temperatura [K]	Gradiente [K/m]
0	0	101325.00	288.15	-0.0065
1	11.000	22632.10	216.65	0.0
2	20.000	5474.89	216.65	0.001
3	32.000	868.02	228.65	0.0028
4	47.000	110.91	270.65	0.0
5	51.000	66.94	270.65	-0.0028
6	71.000	3.96	214.65	-0.002

La troposfera es la capa de la atmósfera en contacto con la superficie terrestre y se extiende hasta los 11000m por lo que es la capa de interés para los vehículos voladores. Se puede aproximar la relación entre la altitud y la presión atmosférica con la fórmula barométrica

$$p = p_b \left[\frac{T_b}{T_b + L_b(h - h_b)} \right]^{\frac{g_b M}{R^* L_b}} \quad (31)$$

en donde

$$g_b = \text{gravedad estándar} = 9.80665 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

$$M = \text{masa molar del aire} = 0.0289644 \text{ [Kg} \cdot \text{mol}^{-1}]$$

$$R^* = \text{cte. universal de los gases} = 8.3 \text{ [N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$$

$$L_b = \text{gradiente adiabático estándar} \text{ [K} \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$P_b = \text{presión estática} \text{ [Pa]}$$

$$T_b = \text{temperatura estándar} \text{ [K]}$$

$$h_b = \text{límite inferior de la capa} \text{ [m]} .$$

Para el caso de la troposfera hay que reemplazar los valores con subíndice b con los valores correspondientes al

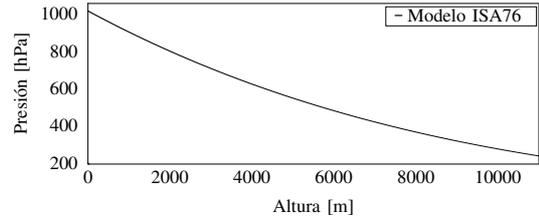


Fig. 1: Curva del modelo atmosférico ISA 1976 para la troposfera.

índice 0 de la Tabla I por lo que (31) se puede reescribir en forma simplificada como

$$p(h) = 101325 [1 - 2.2557 \times 10^{-5} h]^{5.25594} \quad (32)$$

la cual es mostrada en la Fig. 1.

IV. PROYECCIÓN DE FUNCIONES A ESPACIOS DE POLINOMIOS

En la República Argentina, los vehículos aéreos están regulados por la Administración Nacional de Aviación Civil (ANAC) la cual se refiere a los vehículos aéreos no tripulados como (VANT). Según la regulación actual, Resolución 527/2015, para VANT con peso menor a 10Kg se pueden diferenciar tres casos de altura máxima permitida:

- 122m (400ft) en espacios aéreos segregados, es decir espacios destinados al vuelo de VANT,
- 43m (122ft) en espacios aéreos controlados, es decir espacios dentro de un radio de 5km de un aeródromo,
- 10m (33ft) para VANT no registrados siempre que su operación sea a más de 30m de personal ajeno a la tripulación.

Si en la Fig. 1 se considera solo el rango permitido de vuelo (122m) la curva se puede aproximar por una función lineal del tipo

$$\tilde{p}(h) = \alpha + \beta h \quad (33)$$

con el objetivo de minimizar el tiempo de computo.

Para determinar cual es la función lineal que mejor se aproxima, se parte de que (32) pertenece al espacio euclídeo de funciones continuas con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_A^B f(x)g(x)dx \quad (34)$$

con $[A, B]$ el rango de interés, y con el subespacio $\mathcal{P} = \{\text{polinomios de grado} \leq 1\}$ con base estándar $\{1, h\}$ en el cual se realizará la proyección ortogonal de la función $p(h)$ resultando en

$$\tilde{p}(h) = \text{proy}_{\mathcal{P}}[p(h)] \quad (35)$$

la que por definición es la mejor aproximación a $p(h)$.

Para realizar la proyección ortogonal sobre \mathcal{P} , se necesita una base ortogonal $\{p_1, p_2\}$, por lo que primero se debe ortogonalizar la base estándar. Dada la base $\{1, h\}$, por medio del método de Gram-Schmidt se obtienen

$$p_1 = 1 \quad \text{y} \quad p_2 = h - \text{proy}_{p_1}(h) \quad (36)$$

siendo

$$\text{proy}_{p_1}(h) = \frac{\langle p_1, h \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} \cdot p_1 \quad (37)$$

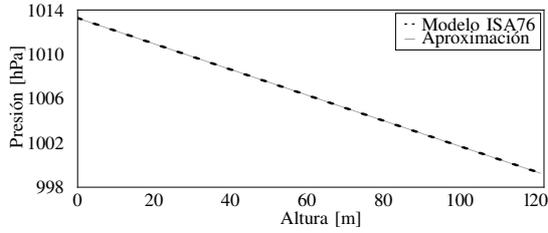


Fig. 2: Comparación entre el modelo ISA 1976 y la aproximación calculada para el rango $[0, 122]$.

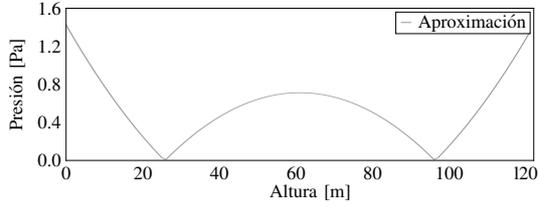


Fig. 3: Error absoluto entre el modelo y la aproximación en el rango calculado.

por lo que la nueva base ortogonal del subespacio \mathcal{P} para el rango $[0, 122]$ será $\{1, h - 61\}$.

Luego, utilizando la base ortogonal de \mathcal{P} la proyección de $p(h)$ se obtiene con

$$\tilde{p}(h) = \text{proy}_{\mathcal{P}}[p(h)] = \text{proy}_{p_1}[p(h)] + \text{proy}_{p_2}[p(h)] \quad (38)$$

donde para $p(h)$ dada por (32) para el rango $[0, 122]$ proyectada sobre cada elemento de la base es

$$\text{proy}_{p_1}[p(h)] = \frac{\langle p_1, p(h) \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} \cdot p_1 = 100595.0667 \quad (39)$$

$$\text{proy}_{p_2}[p(h)] = \frac{\langle p_2, p(h) \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} \cdot p_2 = -11.9427(h - 61) \quad (40)$$

con lo que

$$\tilde{p}(h) = 101323.5747 - 11.9427h \quad (41)$$

es la proyección buscada para el rango $[0, 122]$.

La Fig. 2 se representa la curva del modelo original en puntos negros y la recta obtenida por la aproximación en gris. En la Fig. 3 se muestra el valor absoluto del error $|p(h) - \tilde{p}(h)|$ donde se puede ver que éste nunca es mayor que 1.5Pa.

Para los casos en donde el vuelo se encuentre dentro de las cotas mencionadas anteriormente, se pueden calcular nuevas bases ortogonales para estos rangos y la proyección para cada caso y de esta manera aumentar la precisión de la aproximación.

En la Tabla II se muestra los distintos valores calculados para los rangos $[0, 122]$, $[0, 43]$ y $[0, 10]$. Para casos donde el terreno no se encuentre a nivel del mar, las bases y los coeficientes deberán ser recalculados.

TABLA II
APROX. PARA DISTINTOS RANGOS DE VUELO

Rango	Aproximación $\tilde{p}(h)$
$[0, 122]$	$101323.5747 - 11.9427h$
$[0, 43]$	$101324.8225 - 11.9881h$
$[0, 10]$	$101324.9910 - 12.0072h$

V. IMPLEMENTACIONES Y RESULTADOS

En las aplicaciones comerciales es usual encontrar algoritmos que determinan la altura directamente a partir de (32) poniendo a la altura como función de la presión como sigue

$$h = 44330.77 \left[1 - \left(\frac{p}{101325} \right)^{\frac{1}{5.25594}} \right], \quad (42)$$

esto se puede encontrar incluso en los manuales provistos por los fabricantes de barómetros.

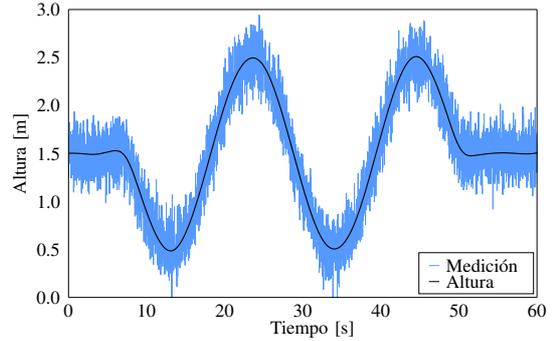


Fig. 4: Simulación de cambio de altura de un UAV. En negro se puede ver el valor verdadero de la altura mientras que en azul el valor obtenido a partir de la Ec. (42).

En la Fig. 4 se puede ver la simulación del cambio de altura de un UAV entre 50 centímetros y 2.5 metros durante aproximadamente 60 segundos. En trazo negro se muestra la simulación de la altura. Las lecturas del barómetro son obtenidas a partir del modelo ISA al que se le agrega ruido gaussiano con desviación estándar de 2Pa, parámetro obtenido de la hoja de datos del barómetro Bosh BMP180. En la simulación, se utilizan estas lecturas del barómetro directamente a través de (42) y se obtiene como resultado el trazo en azul. En la Fig. 5 se muestra el error absoluto resultante de la conversión directa donde se pueden ver picos de error en la altura de hasta 0.6m.

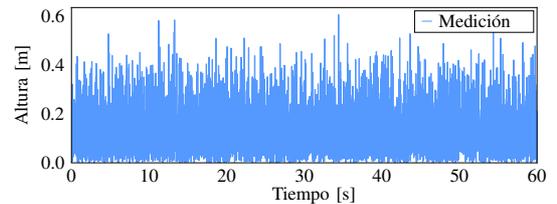


Fig. 5: Error en altura resultante de utilizar las mediciones del barómetro directamente en el modelo ISA

V-A. EKF con modelo ISA Vs. KF de proyección

Debido al error mostrado en la Fig. 5 las aplicaciones más maduras para estimar la altura implementan algún tipo de filtrado siendo el filtro de Kalman el más utilizado. La falta de linealidad evidente en (42) hace que en este caso el filtro implementado sea un EKF. En esta sección se compara la implementación de un filtro extendido de Kalman usando como ecuación de observación a (32), con la versión lineal de un filtro de Kalman usando como ecuación de observación la propuesta en (38).

Para el caso de un UAV en una misión de reconocimiento o simplemente en vuelo estacionario, se considera que la altura del vehículo cambia muy lentamente, o se mantiene constante con respecto a la velocidad de muestreo del barómetro, se puede decir entonces que

$$\dot{p}_z = 0 \quad (43)$$

por lo que

$$p_{z_k} = p_{z_{k-1}} \quad (44)$$

es la discretización por Euler de la función continua.

Dado que el filtro de Kalman planteado consiste en un vector de estados unidimensional, se puede expresar el estado simplemente por un escalar

$$x = p_z \quad (45)$$

siendo p_z la altura de vuelo del UAV. Se considera además que la lectura disponible z_k es la medición de presión proveniente del barómetro. En adelante se utilizará el subíndice p para referirse a ecuaciones provenientes del enfoque de proyección a polinomios, mientras que para referirse al modelo ISA sin linealizar se utilizara el subíndice i .

Por lo dicho en las secciones anteriores, en la etapa de predicción de ambos filtros, la estimación a priori del estado del sistema será

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1} \quad (46)$$

mientras que la varianza del estado a priori será

$$\sigma_k^{2-} = \sigma_{k-1}^2 + \sigma_p^2 \quad (47)$$

con σ_p^2 la varianza estimada del proceso.

Para el filtro de Kalman propuesto, en la etapa de actualización se utiliza como ecuación de observación la aproximación dada por (38). Por ejemplo, para el rango $[0, 10]$ según la Tabla II la predicción de la observación queda

$$\hat{z}_{pk} = 101324.9910 + H_p \hat{x}_k^- \quad (48)$$

con

$$H_p = -12.0072 \quad (49)$$

describiendo la relación lineal entre el estado y la predicción.

Para el caso del filtro de Kalman extendido, la etapa de actualización utiliza como ecuación de observación (32) quedando

$$\hat{z}_{ik} = 101325 \left[1 - 2.2557 \times 10^{-5} \hat{x}_k^- \right]^{5.25594} \quad (50)$$

En este caso, para encontrar H_i se utiliza el Jacobiano de (50) según (30) que resulta en

$$H_i = -12.0129 \left[1 - 2.2557 \times 10^{-5} \hat{x}_k^- \right]^{4.25594} \quad (51)$$

Para ambos casos, la ganancia de Kalman es un escalar dado por

$$k_k = \frac{\sigma_k^{2-} H}{H^2 \sigma_k^{2-} + \sigma_b^2} \quad (52)$$

con H igual a H_p o H_i dependiendo del filtro utilizado y siendo σ_b la varianza del ruido del barómetro.

Una vez obtenida la ganancia de Kalman, se calcula el error en la estimación x_e con

$$x_e = k_k(z_b - \hat{z}_b) \quad (53)$$

y finalmente se corrige la estimación del estado

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + x_e \quad (54)$$

y la varianza del estado

$$\sigma_k^2 = \sigma_k^{2-} (1 - k_k H) \quad (55)$$

donde nuevamente H depende del caso bajo análisis.

V-B. Análisis de exactitud en la estimación

En la Fig. 6 se muestra la estimación de altura realizada por ambos filtros, KF y EKF. La línea de trazo rojo muestra la estimación realizada usando el modelo previamente linealizado lo que posibilita de usar el KF, mientras que la línea de trazo verdes muestra el resultado de aplicar la linealización alrededor del estado predicho previamente (EKF). Se puede ver en la figura que ambos filtros tienen respuestas semejantes al estimar la altura a partir de la presión atmosférica. Incluso inicializando el filtro en cero, como el caso de la figura, el filtro converge rápidamente al valor de referencia.

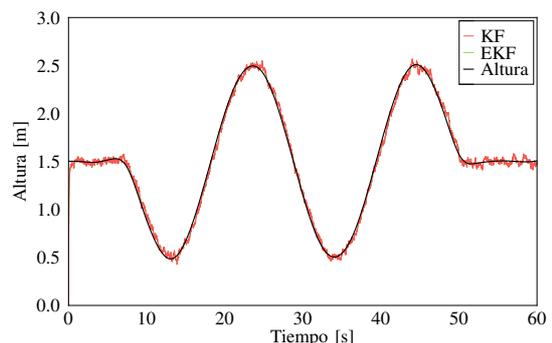


Fig. 6: Comparación entre el EKF original y el KF propuesto. Se muestran ambas gráficas completamente superpuestas.

En la Fig. 7 se muestra el error absoluto de cada versión del filtro mostrada. Se puede ver que ambos están por debajo de la resolución posible con el barómetro empleado.

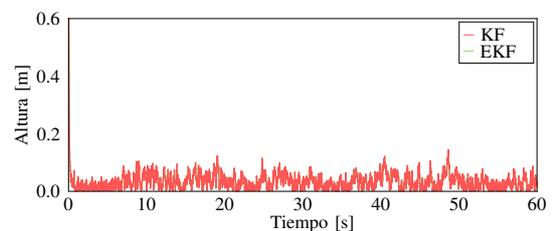


Fig. 7: Error absoluto en la estimación de la altura. En verde se muestra el error del modelo ISA mientras que en rojo se muestra el error del modelo propuesto. Se muestran ambos trazos completamente superpuestos.

Se puede ver, tanto en la Fig. 6 como en la Fig. 7 que el resultado de ambos filtros está superpuesto, y son indistinguibles entre ellos.

V-C. Análisis de velocidad de ejecución

Tanto el filtro de Kalman como su versión extendida fueron implementados en lenguaje C y embebidos en auto-piloto del QA3 el cual no tiene gran capacidad de procesamiento y solo puede llevar a cabo un número limitado de tareas.

El procesador central es un microcontrolador LPC1769 basado en un ARM Cortex-M3 con capacidad de funcionar a frecuencias de hasta 120MHz. Además cuenta con gran cantidad de periféricos útiles para ser utilizado como procesador central en un auto-piloto. La mayor dificultad que tiene este microcontrolador es que no cuenta con una unidad de punto flotante (FPU por *Floating Point Unit*). Esto significa que todas las operaciones de números de punto flotante se realizan por software y no por hardware como la mayoría de los procesadores de gama más alta. La diferencia es que cuando estas operaciones se realizan mediante módulos de hardware simplemente tardan un ciclo de reloj para su resolución, mientras que cuando se realizan por software pueden tardar decenas de ciclos.

Los valores de presión utilizados para la evaluación fueron obtenidos con el barómetro BMP180 a una altura fija. El microcontrolador lee estos valores directamente a través del puerto I²C y se ejecutan los filtros embebidos. Para realizar el análisis de velocidad de ejecución, se utilizó un temporizador no utilizado en el LPC1769.

En la Fig. 8 se muestran los resultados de la evaluación de velocidad de ejecución las cuales se representan en barras mostrando el tiempo empleado. El largo de las barras representan el tiempo medio de ejecución, mientras que en azul se muestran las desviaciones estándar obtenidas. Arriba, nuevamente en rojo, se muestra el resultado alcanzado por el modelo propuesto, mientras que abajo, en verde, se muestra la implementación del modelo original. Puede verse que el modelo propuesto supera en más de diez veces la velocidad de ejecución del modelo ISA. La figura también muestra

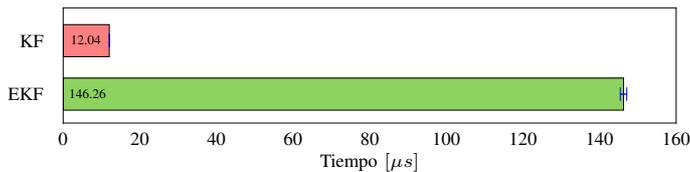


Fig. 8: Comparación de tiempo de cálculo entre el EKF original y el KF propuesto.

que el tiempo de ejecución del modelo propuesto es muy estable. En la Tabla III se pueden ver los valores medios, las desviaciones estándar para ambos casos, junto con la aceleración alcanzada en la ejecución después del cambio de modelo.

TABLA III
TIEMPOS DE COMPUTO. KF Vs. EKF

Filtro	Tiempo [μs]	Desviación [μs]	Aceleración
KF	12.0386	0.0229	12.148×
EKF	146.2574	0.8502	-

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un método alternativo para linealizar la ecuación de observación en un filtro de Kalman. En lugar de linealizar el modelo atmosférico ISA para cada valor de altura estimado, se realiza una linealización para el rango previsto en la planificación del vuelo previo al despegue.

Se determinó en primera instancia que linealizar la ecuación del modelo atmosférico ISA tiene un error por debajo de 2Pa, valor que es menor que la resolución de la mayoría de los barómetros MEMS comerciales. Además, se comprobó luego que no hay diferencias apreciables en la estimación de la altura utilizando un filtro EKF con el modelo ISA o utilizando un KF con la aproximación propuesta.

Sin embargo, se observó un notable aumento en la velocidad de ejecución del algoritmo propuesto, ya que las operaciones realizadas en el KF son simples productos y sumas entre escalares, mientras que en el EKF hay potencias de números racionales que, además, deben ser recalculadas en cada paso, no solo en la predicción de la observación sino también en el cálculo del Jacobiano.

Como punto negativo, el proceso de linealizar el modelo debe hacerse previo al despegue teniendo en cuenta el rango permitido para el vuelo planificado. Si bien no es parte de este trabajo, este proceso toma menos de un segundo en la arquitectura utilizada.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor se financia con el programa de becas de la Universidad Tecnológica Nacional. Este trabajo se enmarca dentro del proyecto UTI3832TC *Estimación eficiente de la posición y orientación en tiempo real de vehículos aéreos no tripulados*.

REFERENCIAS

- [1] *The Navigation and Control Technology Inside the AR.Drone Micro UAV*, Milano, Italy, 2011.
- [2] H. Nakanishi, S. Kanata, and T. Sawaragi, "Measurement model of barometer in ground effect of unmanned helicopter and its application to estimate terrain clearance," in *SSRR, 2011 IEEE International Symposium on*, Nov 2011, pp. 232–237.
- [3] Y. Son and S. Oh, "A barometer-imu fusion method for vertical velocity and height estimation," in *SENSORS, 2015 IEEE*, Nov 2015, pp. 1–4.
- [4] H. Liu, M. Liu, X. Wei, Q. J. Song, Y. J. Ge, and F. L. Wang, "Auto altitude holding of quadrotor uavs with kalman filter based vertical velocity estimation," in *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2014 11th World Congress on*, June 2014, pp. 4765–4770.
- [5] B. P. Gibbs, *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook*. Wiley, 2011.
- [6] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. Series D, pp. 35–45, 1960.