CAPITULO III

DERIVACIÓN APROXIMADA

$$12h^2\nabla^2= \begin{array}{ccccc} & & -1 & & \\ & & 16 & & \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ & & 16 & & \\ & & -1 & & \end{array} +h^2O(h^4)$$

EXORDIO

En aplicaciones de ciencia e ingeniería resulta necesario aproximar numéricamente el valor de derivadas de distinto orden.

En física, una tabla de valores espacio –tiempo dará velocidades aproximadas si, a través de esos valores, se puede aproximar la derivada primera. Algo similar ocurre para calcular aproximadamente la aceleración del movimiento.

Estimar el error en una aproximación polinómica de grado n requiere el cálculo aproximado de una derivada de orden n+1. Este cálculo puede ser necesario al comienzo, en el medio o al final de una tabla de valores. Los casos son similares pero su tratamiento es hacia delante en un caso, centrado en el otro y hacia atrás en el último.

Estos ejemplos simples no oscurecen la más importante utilización de las aproximaciones numéricas a las derivadas.

Esa posición la ocupa, sin lugar a dudas, su aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales para resolver el problema de valores iniciales y/o de contorno mediante métodos numéricos.

Las técnicas desarrolladas para hacerlo, requieren de las aproximaciones a las derivadas para obtener soluciones de ecuaciones diferenciales mediante métodos explícitos o implícitos.

Un capítulo de esta serie estará dedicado al tema.

En este trabajo se presentan esas aproximaciones mediante diferencias finitas.

Se hace un uso importante de métodos simbólicos que simplifican notablemente los procedimientos teóricos correspondientes, con posibles o casi seguros ruidos para algún purista.

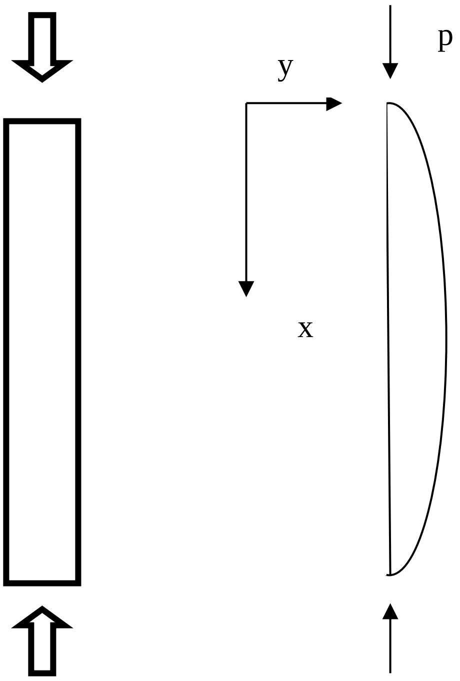
CASOS

Pandeo

Una pieza prismática sometida a compresión axial, si está constituida por un material perfectamente homogéneo e isótropo y la carga está perfectamente centrada y, cabe aclarar, el prisma que constituye la pieza es geométricamente perfecto, solamente soporta tensiones de compresión.

Sin embargo, los prismas geométricamente perfectos sólo existen en los textos de geometría; los materiales nunca son perfectamente homogéneos y casi nunca son isótropos y es muy difícil que las cargas estén perfectamente centradas.

Todo eso, junto hace que, aparte de los esfuerzos de compresión existan elementos de imperfección que generan esfuerzos de flexión que, llegados a cierto límite pueden generar el colapso de la pieza.



El modelo matemático del fenómeno es la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{py}{EJ}$$

Con las condiciones $y(0) = 0$ e $y(l) = 0$, siendo l la longitud de la pieza.

Esta ecuación resuelta por medios analíticos da las denominadas cargas críticas de pandeo, que son las cargas que provocan el colapso de la pieza según distintas configuraciones de rotura, correspondientes a las denominadas autofunciones $sen\left(\sqrt{\frac{P_k}{EJ}}\,l\right) = 0$ o sea $\sqrt{\frac{p_k}{EJ}}\,l = k\pi$

$$P_k = \frac{k^2\pi^2\,EJ}{L^2}$$

donde k identifica la carga crítica 1; 2, 3; …, E es el módulo de elasticidad del material de la pieza; J es el momento de inercia con respecto al eje perpendicular a la configuración de deformación y L es la longitud de la pieza.

Naturalmente, la carga correspondiente a K=1 es la más peligrosa porque es la primera en alcanzarse. El valor de dicha carga es $P_1 = 9.8696\ \frac{E\,J}{L^2}$

A continuación, se aplica al problema en estudio una aproximación a la derivada segunda mediante diferencias centrales, cuya expresión puede encontrarse en esta publicación.

$$h^2D^2 = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$$

Se toma $h = \frac{L}{2}$, con lo que resulta

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{pL^2}{4EJ}y_1$$

Por ser y_0 e y_2 los extremos de la pieza, valen cero puesto que no tienen desplazamiento alguno. Queda en consecuencia una ecuación en y_1 punto central de la pieza.

Dado que y_1 no debe ser nulo, se despeja de la ecuación resultante el valor de P que anula la expresión. Resulta así

$$P_1 = 8\ \frac{E\,J}{L^2}$$

Compárese este valor con el exacto antes consignado y se podrá apreciar cómo una aproximación extremadamente grosera da valores coherentes con dicho valor.

Dando un paso más en busca de una mejor aproximación, se toma ahora $h = \frac{L}{4}$ y se aplica a cada punto pivote el operador antes consignado.

Resulta el sistema

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = -\frac{PL^2}{16\,E\,J}\,y_1$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = -\frac{PL^2}{16\,E\,J}\,y_2$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = -\frac{PL^2}{16\,E\,J}\,y_3$$

La matriz de este sistema es

$$\begin{bmatrix} -2+\dfrac{PL^2}{16\,E\,J} & 1 & 0 \\ 1 & -2+\dfrac{PL^2}{16\,E\,J} & 1 \\ 0 & 1 & -2+\dfrac{PL^2}{16\,E\,J} \end{bmatrix}$$

Su determinante vale

$$\frac{-16384\,E^3J^3 + 2560\,E^2J^2L^2P - 96EJL^4P^2 + L^6P^3}{4096\,E^3J^3}$$

Calculando los valores de P que anulan dicho determinante (necesario para resolver un problema homogéneo), resultan los valores

$$P_1 = \frac{-16\left(-2+\sqrt{2}\right)EJ}{L^2} = 9.3725\,\frac{EJ}{L^2}$$

$$P_2 = 32\,\frac{E\,J}{L^2}$$

$$P_3 = \frac{16\left(2+\sqrt{2}\right)EJ}{L^2} = 54{,}6274\,\frac{E\,J}{L^2}$$

Obsérvese que los dos primeros valores aproximan los valores de las dos primeras cargas críticas, con significativas mejoras para la primera, con defecto para la segunda y un error, por defecto, importante, para la tercera.

Cabe preguntarse en este momento cual es la importancia del cálculo numérico puesto que la fórmula $P_k = \frac{k^2\pi^2 EJ}{L^2}$ antes consignada da los valores exactos de las distintas cargas críticas.

La respuesta es sencilla. En muchos casos la ecuación que modela el fenómeno del pandeo es

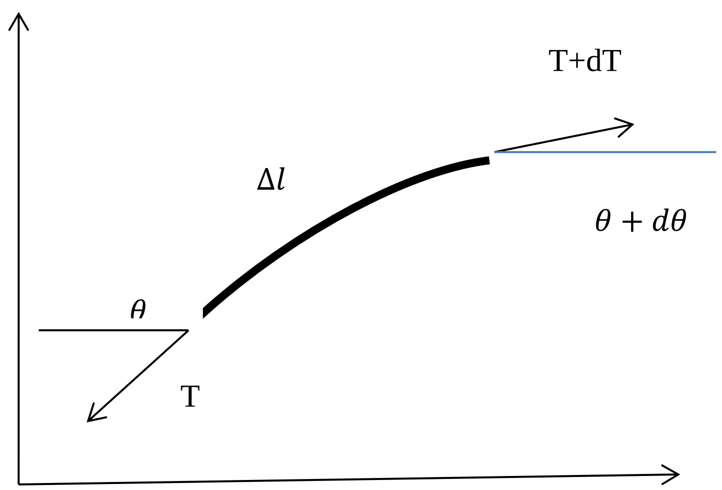
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{py}{EJ(x)}$$

Esta ecuación corresponde a una pieza de geometría variable razón por la cual su correspondiente momento de inercia no es constante a lo largo del eje de la pieza. Salvo excepciones este tipo de ecuación diferencial NO tiene solución exacta, motivo por el cual **solamente** con los recursos del cálculo numérico pueden hallarse, en forma aproximada, las cargas críticas de pandeo correspondientes a ese tipo de piezas.

Obsérvese que la aplicación de la aproximación de la derivada utilizada ha llevado a sistema de ecuaciones lineales y autovalores –cuyos respectivos capítulos son posteriores al presente- , lo que sin duda alguna hace constar la unidad de toda la matemática.

Cuerda Vibrante

Se supone una cuerda sin resistencia a la flexión, sujetada por sus extremos, de longitud l, sometida a una tensión T. Dicha cuerda tiene una densidad lineal γ y una sección transversal S. No hay movimiento longitudinal, la cuerda se mueve verticalmente según la función $y = u(x,t)$



Planteando equilibrio según el eje x se tiene

$$-Tcos(\theta) + (T + dT)\cos(\theta + d\theta) = 0$$

$$-Tcos(\theta) + Tcos(\theta) + dTcos(\theta + d\theta) = 0$$

Simplificando y teniendo en cuenta que $\theta \neq 0$ porque en caso contrario no habría movimiento, resulta que, necesariamente debe ser $dT = 0$ lo que significa que la tensión T es constante en toda la cuerda.

Tratando ahora el movimiento según el eje y, aplicando la archiconocida expresión de Newton $F = m\,a$ resulta

$$-Tsen(\theta) + Tsen(\theta + d\theta) = \gamma \Delta l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Para movimientos pequeños con relación a la longitud de la cuerda, puede considerarse $\Delta l = \Delta x$ y, por la misma razón puede tomarse, en lugar de la función seno, su infinitésimo equivalente, la función tangente. Resulta así

$$-Ttg(\theta) + Ttg(\theta + d\theta) = \gamma \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Tomando ahora en cuenta la interpretación geométrica de la derivada, puede escribirse

$$T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}_{x+\Delta x} - T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}_{x} = \gamma \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Y de esta última

$$T\left[\frac{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}_{x+\Delta x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}_{x}}{\Delta x}\right] = \gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Haciendo $\Delta x \to 0$ resulta finalmente

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

ecuación en derivadas parciales que modela el sistema "cuerda vibrante". Las condiciones de contorno son $u(0,t) = u(l,t) = 0$ correspondientes a los extremos sujetos de la cuerda. Además debe ser $u(x,0) = f(x)$ deformación inicial de la cuerda y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$ velocidad inicial de la cuerda. Normalmente se toma $g(x) = 0$

La ecuación anterior suele escribirse

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

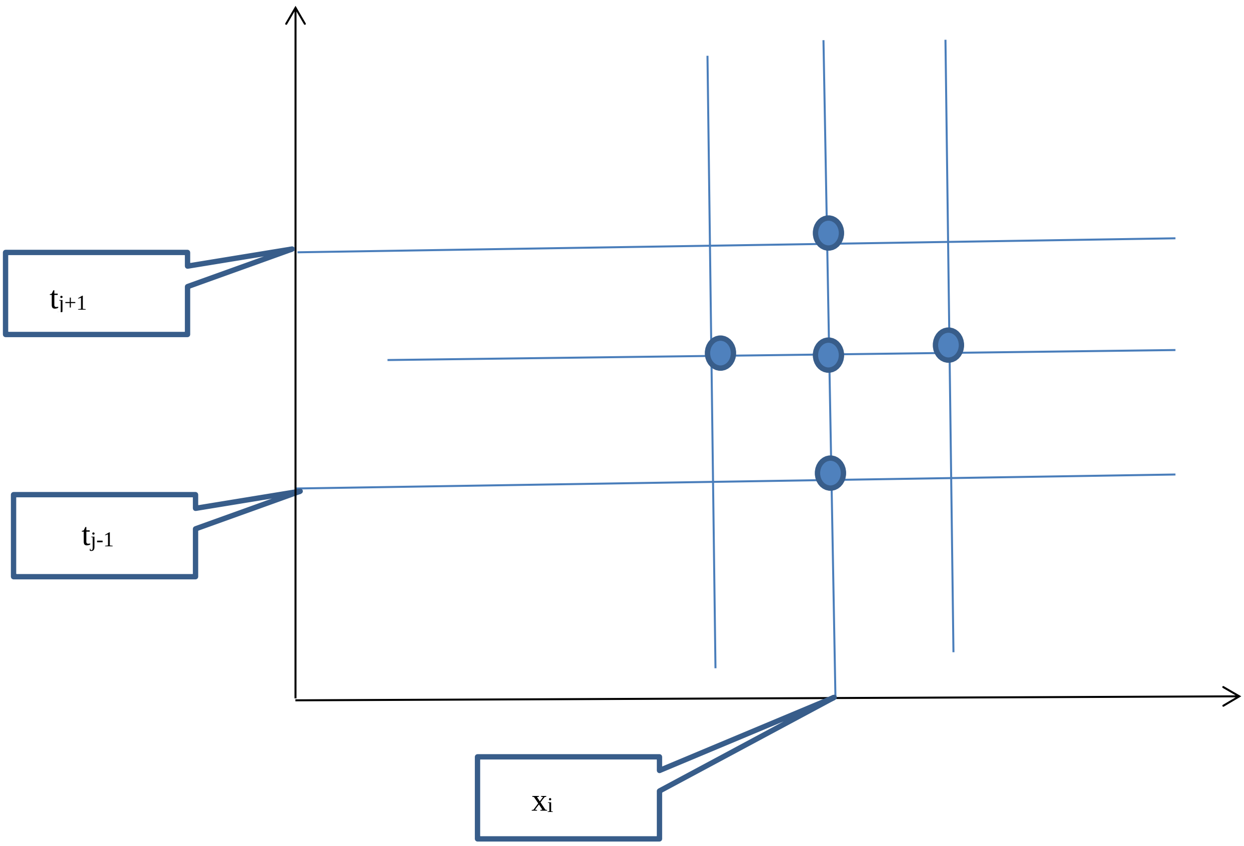
Para la solución numérica del problema de la cuerda vibrante se aproximan las derivadas segundas mediante operadores centrales. Resulta así, adoptando intervalos espaciales iguales a $h = \frac{l}{n}$ y temporales iguales a $k\ seg$.

$$\frac{u(x_{i-1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i+1},t_j)}{h^2} = \frac{\gamma}{T}\frac{u(x_i,t_{j-1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j+1})}{k^2}$$

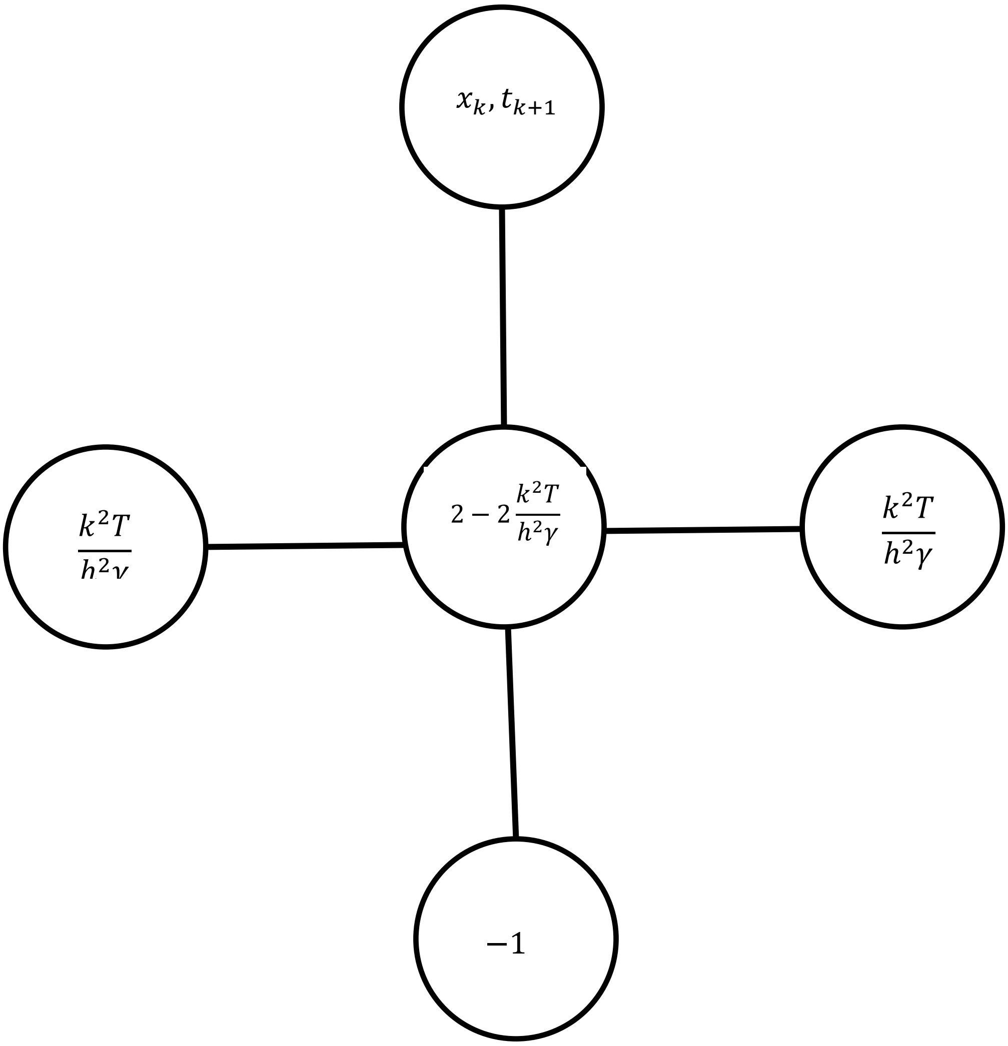
de donde, despejando $u(x_i,t_{j+1})$, es decir la ordenada de la cuerda en movimiento, en el punto considerado x_i y en el tiempo siguiente al actual, de forma tal que la solución vaya evolucionando en el tiempo.

Resulta

$$u(x_i,t_{j+1}) = \frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}u(x_{i-1},t_j) + \left(2 - 2\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}\right)u(x_i,t_j) + \frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}u(x_{i+1},t_j) - u(x_i,t_{j-1})$$



Con la siguiente "molécula" de cálculo, aplicada en cada uno de los puntos de la red construida.



Se presentan varios problemas.

De acuerdo a la expresión anterior y al esquema agregado es necesario conocer los valores correspondientes a dos tiempos sucesivos. Obsérvese que los tres primeros términos de la expresión anterior corresponden al tiempo "j" mientras que el último, sustractivo, lo hace al tiempo "j-1".

Entonces, siendo el tiempo 0 (cero) el correspondiente a la deformación inicial de la cuerda, $u(x,0) = f(x)$ se puede calcular $u(x,1)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor

$$\mathrm{u}(\mathrm{x_i}, 1) = \mathrm{u}(\mathrm{x_i}, 0) + \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x_i}, \mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} \mathrm{k} + \mathrm{O}(\mathrm{k}^2)$$

pero $u(x_i,0)=f(x_i)$ y $\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}=g(x_i)$ es la velocidad inicial de la cuerda, puede entonces escribirse

$$u(x_i,1)=f(x_i)+g(x_i)k+O(k^2)$$

Obviamente esta aproximación tiene un error que puede ir incrementándose a lo largo del cálculo, razón por la cual, si la deformación inicial lo permite, puede ajustarse un poco la aproximación de la segunda fila mediante un desarrollo de Taylor de tres términos.

$$u(x_i,1)=u(x_i,0)+\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial t^2}k^2+O(k^3)$$

Tomando en cuenta la ecuación diferencial de la cuerda vibrante, puede escribirse

$$u(x_i,1)=f(x_i)+g(x_i)k+\frac{1}{2}\frac{T}{\gamma}\frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial x^2}k^2+O(k^3)$$

Aproximando la derivada segunda mediante diferencias finitas centrales será

$$u(x_i,1)=f(x_i)+g(x_i)k+\frac{1}{2}\frac{T}{\gamma}\left[\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}\right]k^2+O(k^3)$$

Y, de esta última

$$u(x_i,1)=f(x_i)\left(1-\frac{T}{\gamma}\frac{k^2}{h^2}\right)+g(x_i)k+\frac{1}{2}\frac{T}{\gamma}\frac{k^2}{h^2}\left[f(x_{i+1})+f(x_{i-1})\right]$$

Conociendo entonces las dos filas necesarias para la continuación del cálculo, puede aplicarse la fórmula

$$u(x_i,t_{j+1})=\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}u(x_{i-1},t_j)+\left(2-2\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}\right)u(x_i,t_j)+\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}u(x_{i+1},t_j)-u(x_i,t_{j-1})$$

Y determinar mediante la misma valores sucesivos de posición de la cuerda para $t=2,3,4,\ldots..$ para cada abscisa

Aquí aparece un segundo problema. Según han demostrado Courant, Friedrich y Lewy en Über die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik; Mathematische Annalen, 1928, para que el cálculo sea estable, es decir para que los errores cometidos en un paso no se amplifiquen a niveles inaceptables debe ser

$$\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma} \leq 1$$

El tercer problema es que la solución correcta ocurre para $C = 1$; la solución es inestable para $C > 1$ y va perdiendo estabilidad cuando, siendo $C < 1$, se aleja de este valor.

Esto trae como consecuencia que dados T y γ y calculado $h = \frac{L}{n}$ el cálculo de k para que la expresión resulte menor que uno, da en ocasiones valores pequeños o muy pequeños, hecho que implica un incremento en los pasos de cálculo, con la posible aparición de problemas numéricos.

Para ejemplificar se considera una cuerda de arpa, de 2 metros de longitud, con masa de 60 gr y una tensión de 500 N a cuyo punto central se da un desplazamiento de 1 cm y luego se libera para generar la vibración de la cuerda.

Resulta, en este caso que, para que $\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma} \leq 1$

$$k = \sqrt{\frac{h^2\gamma}{T}} = \sqrt{\frac{400cm^2 0.3\,\frac{gr}{cm}}{50\,\frac{gr\ cm}{seg^2}}} = 1.5491\ seg$$

Se toma para el cálculo $k = 1.54\ seg$ y con este valor se calcula

$$\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma} = 0.9882$$

Con estos valores, las fórmulas de cálculo resultan

$$u(x_i, 1) = f(x_i)\left(1 - \frac{T}{\gamma}\frac{k^2}{h^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{T}{\gamma}\frac{k^2}{h^2}\left[f(x_{i+1}) + f(x_{i-1)}\right]$$

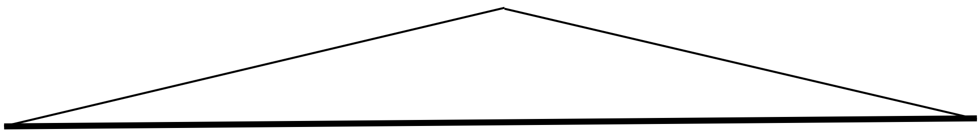
$$u(x_i, 1) = 0.0118\, f(x_i) + 0.4941[f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})]$$

Y, para las siguientes filas

$$u(x_i, t_{j+1}) = \frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}u(x_{i-1}, t_j) + \left(2 - 2\frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}\right)u(x_i, t_j) + \frac{k^2}{h^2}\frac{T}{\gamma}u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1})$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = 0.9882u(x_{i-1}, t_j) + 0.0236\, u(x_i, t_j) + 0.9882\, u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1})$$

Teniendo en cuenta que los valores correspondientes a la deformación inicial $u(x_i, 1)$ resultan de evaluar ordenadas para la función



y que los de la segunda fila $u(x_i, 2)$ resultan de aplicar la fórmula antes consignada, se puede ir completando la tabla con los desplazamientos de los distintos puntos de la cuerda aplicando la segunda fórmula. Resulta, como ejemplo.

EST	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(x,1)	**0.0000**	**0.2000**	**0.4000**	**0.6000**	**0.8000**	**1.0000**	**0.8000**	**0.6000**	**0.4000**	**0.2000**	**0.0000**
u(x,2)	**0.0000**	**0.2000**	**0.4000**	**0.6000**	**0.8000**	**0.8023**	**0.8000**	**0.6000**	**0.4000**	**0.2000**	**0.0000**
u(x,3)	**0.0000**	**0.2000**	**0.4000**	**0.6000**	**0.6046**	**0.6000**	**0.6046**	**0.6000**	**0.4000**	**0.2000**	**0.0000**
u(x,4)	**0.0000**	**0.2000**	**0.4000**	**0.4069**	**0.4001**	**0.4128**	**0.4001**	**0.4069**	**0.4000**	**0.2000**	**0.0000**

El cálculo, naturalmente se debe continuar en una computadora obteniéndose fila por fila las correspondientes ordenadas de la cuerda cuando vibra.

I INTRODUCCION

1 El concepto de límite permite pasar en forma elegante y precisa a la definición de derivada de una función f(x) en un punto x_0, simplemente diciendo que, si existe el límite del cociente incremental

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ese límite es, por definición, la derivada de la función en el punto x_0.

2 Se escribe entonces, indistintamente

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

y se enfatiza que la **derivada en un punto es un número**. De inmediato se calculan las derivadas de funciones elementales en un punto en particular o en uno genérico. Con estas últimas se obtienen las funciones derivadas y también se deducen las reglas de derivación aplicables a una enorme familia de funciones y/o combinaciones de las mismas.

3 En general, aplicando sistemáticamente esas reglas, cualquier función o combinación de funciones pude derivarse. Hasta la más compleja y sin ninguna aplicación posible en problemas de ingeniería.

4 Sin embargo, hay otra clase de problemas donde estas reglas no pueden aplicarse. Por ejemplo:

- Una función definida por un gráfico, tal vez obtenida de un registrador automático.

En este caso resulta necesario aplicar la interpretación geométrica de la derivada en un punto, trazando por el mismo la correspondiente tangente y, luego medir su pendiente, como cociente de segmentos que deben ser medidos (en la escala del gráfico) o como ángulo que también debe ser medido.

Como el trazado de la tangente a una curva en un punto conlleva un grado de incertidumbre importante dependiente de la habilidad y/o la vista del operador, resulta mucho más práctico utilizar un espejo –en lo posible rectangular- apoyándolo de canto en el punto en que se busca la aproximación de la derivada.

El espejo se gira alrededor de un eje vertical hasta que la curva del papel y la reflejada en el espejo no presenten quiebre alguno en el punto de contacto. En esa posición, el lado del espejo marca la normal a la curva. Se la traza y luego, una perpendicular a ella en el punto en estudio, da la tangente con mucha menos incertidumbre. El cálculo continúa como se ha dicho, midiendo segmentos o ángulo.

- Una función dada por una tabla de valores, tal vez detectados cada t_0 segundos.

Este es el caso más frecuente. Detectores automáticos toman señales en lapsos predeterminados conformándose asi una tabla de valores equiespaciados cuyo tratamiento analítico es necesario.

En todo lo que sigue en este trabajo se considera una situación de este tipo, aunque es posible encontrar expresiones que aproximan las derivadas para pasos no constantes, con las complicaciones del caso.

- Una función desconocida cuyas derivadas forman parte de una ecuación diferencial.

Esta es la aplicación más importante de las diferencias finitas, sobre todo cuando se trata de resolver problemas de contorno o ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Es en este tema donde el problema analítico se transforma en un sistema de ecuaciones lineales o en un algoritmo que permite ir la solución de un problema de la física matemática que evoluciona en el tiempo avanzando paso a paso, mejor sería decir, tiempo a tiempo,

Naturalmente aparecen problemas de convergencia y estabilidad de las soluciones, cuyo análisis es necesario pero ellos no invalidan la potencia del método de las diferencias finitas.

5 En todos estos casos es necesario aplicar métodos numéricos para obtener una aproximación aceptable de la derivada.

6 Obviamente, el más sencillo de todos para obtener una aproximación de la derivada primera es calcular el cociente incremental, con lo cual se podrá escribir:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

siendo necesario elegir el valor h. Por supuesto, se comete un error y ese error está relacionado con la elección del valor h.

7 Por ejemplo, la función x^2 en $x_0 = 2$ tiene una derivada $2x_0 = 4$. La siguiente tabla muestra la aproximación alcanzada para distintos valores de h

h	**f(x0 + h) – f(x0)**	**APROXIMACIÓN DE f'(x0)**
1.00	9-4=5	5.00
0.50	6.25-4=2.25	4.50
0.25	5.0625-4=1.0625	4.25
0.125	4.515625-4=0.515625	4.125
0.0625	4.253906-4=0.253906	4.0625
0.03125	4.125976-4=0.125976	4.03125
0.015625	4.062744-4=0.062744	4.015625
0.001	4.004002 – 4=0.004001	4.00100

8 Naturalmente estos cocientes incrementales tienen un error que se puede expresar de la siguiente forma, aceptando que dicho error es función del paso o incremento h

$$e(h) = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

9 Para obtener una estimación de ese error se utiliza un desarrollo en Serie de Taylor alrededor del punto x_0, obteniéndose

$$e(h) = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) - \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)h^3}{3!} + \ldots - f(x_0)}{h}$$

$$e(h) = \frac{f''(x_0)h}{2!} + \frac{f'''(x_0)h^2}{3!} + \ldots$$

Tomando en cuenta solamente el infinitésimo de mayor orden puede decirse que esta aproximación tiene un error O(h)

10 Obsérvese que en el ejemplo desarrollado, la derivada segunda de la función utilizada es constante e igual a 2, de donde e(h) ≈ h como se ve en la tabla.

11 De la misma forma en que se utilizó el cociente incremental del párrafo 6, se puede escribir, recordando que, si el límite existe, es único

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

12 La misma función anterior $f(x) = x^2$ en $x_0 = 2$ aproxima su derivada con esta expresión según la siguiente tabla

h	$f(x_0) - f(x_0 - h)$	APROXIMACIÓN DE $f'(x_0)$
1.00	4-1=3	3.00
0.50	4-2.25=1.75	3.50
0.25	4-3.0625=0.9375	3.75
0.125	4-3.5156=0.4843	3.875
0.0625	4-3.7539=0.2460	3.9375
0.03125	4- 3.8759=0.1240	3.96875
0.015625	4-3.9377=0.06225	3.984375
0.001	4-3.99600=0.003999	3.9999

13 En este caso, por la función ejemplo elegida, las aproximaciones son por defecto. Para analizar el error, se requiere calcular

$$e(h) = f'(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Desarrollando en Serie de Taylor el sustraendo de cociente incremental, se tiene

$$e(h) = f'(x_0) - \frac{f(x_0) - \left[f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots \right]}{h} = -\frac{f''(x_0)}{2}h + \frac{f'''(x_0)}{6}h^2 - \dots$$

Tomando el infinitésimo de mayor orden, puede afirmarse que e(h) = O(h). Debe observarse el signo negativo y compararse con la expresión encontrada en el párrafo 9 precedente.

14 En el caso en estudio, por ser $f''(x_0) = 2$ resulta, se insiste, en este caso, O(h) = -h como puede verse en la tabla anterior.

15 Se debe ser muy prudente en el cálculo de estas aproximaciones porque en determinado momento los problemas numéricos prevalecen y distorsionan los resultados. Obsérvese que en los dos casos presentados el numerador está constituido por una sustracción cuyos minuendos y sustraendos son cada vez más próximos entre si, dando lugar a una operación cuyo resultado puede estar afectado de un enorme error relativo, como se ha señalado en el capítulo "ARITMÉTICA DE t DÍGITOS."

16 Como ejemplo de lo expresado se considera la derivación de la función arctan(x) en x = √2. A medida que los valores de h disminuyen la aproximación mejora pero, si se los sigue haciendo cada vez más pequeños, los resultados, en lugar de mejorar, empeoran. Se parte de h= 1x 10^{-6} y se lo reduce un 20% en cada paso de cálculo.

A partir del paso Nº 120 el cociente comienza a dar valores muy distintos al que debería ser (1/3)

Nº	h	Cociente	Error
1	1.00E-06	0.33333318	-1.5716E-07
2	8.33E-07	0.33333320	-1.3096E-07
3	6.94E-07	0.33333322	-1.0911E-07
4	5.79E-07	0.33333324	-9.0981E-08
5	4.82E-07	0.33333326	-7.571E-08
6	4.02E-07	0.33333327	-6.3094E-08
7	3.35E-07	0.33333328	-5.2707E-08
8	2.79E-07	0.33333329	-4.3889E-08
8	2.33E-07	0.33333330	-3.6569E-08
10	1.94E-07	0.33333330	-2.9981E-08
…	…………………………	………………………	………………………
…	…………………………	………………………	………………………
120	3.78E-16	0.29375043	-0.0395829
121	3.15E-16	0.35250051	0.01916718
122	2.62E-16	0.42300062	0.08966728
123	2.19E-16	0.50760074	0.17426741
124	1.82E-16	0.60912089	0.27578756
125	1.52E-16	0.73094507	0.39761173
126	1.27E-16	0.87713408	0.54380075

II DIFERENCIAS EN AVANCE O DIRECTAS y EN RETROCESO

17 En la aproximación tratada en los párrafos 1 a 10 está o debería estar claro que el punto en que se busca la derivada aproximada es el punto x_0 y que las nuevas ordenadas que se consideran para formar el cociente incremental, corresponden a abscisas que están **por delante del punto x_0.**

x_0 x_0+h x_0+2h x_0+3h x_0+4h x_0+5h .... ⟹

y naturalmente, el **paso h es constante.**

18 De la misma forma, la aproximación obtenida en párrafos 11 a 14 se logra mediante abscisas que están **por detrás del punto x_0**

⟸ x_0-5h x_0-4h x_0-3h x_0-2h x_0-h x_0

19 Las primeras se denominan **"diferencias en avance o directas"** y las segundas **"diferencias en retroceso".** Se las simboliza Δ y ∇ respectivamente y se representan, para un punto x_k genérico

$$\Delta f(x_k) = f(x_k + h) - f(x_k)$$

$$\nabla f(x_k) = f(x_k) - f(x_k - h)$$

20 Si el conjunto en el que está definida la función cuya derivada debe ser aproximada corresponde a un conjunto finito, de n+1 elementos, del tipo

$$\{x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n\} = \{x_k\}_0^n$$

al que le corresponden las ordenadas

$$\{y_0, y_1, y_2, ..., y_k, ..., y_n\} = \{y_k\}_0^n$$

es decir, el conjunto de pares ordenados

$$\{(x_k, y_k)\}_0^n$$

Resulta oportuno un cambio de nomenclatura, haciendo

$$\begin{aligned} y_k &= f(x_k) \\ y_{k+1} &= f(x_k + h) \\ y_{k-1} &= f(x_k - h) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{k+j} &= f(x_k + jh) \\ y_{k-j} &= f(x_k - jh) \end{aligned}$$

Con lo cual resulta

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$$

21 Considerando a los símbolos Δ y ∇ como operadores se pueden demostrar las siguientes propiedades para ellos

$$\Delta(y_{1k} \pm y_{2k}) = \Delta y_{1k} \pm \Delta y_{2k}$$

$$\Delta(ay_k) = a\Delta y_k$$

y

$$\nabla(y_{1k} \pm y_{2k}) = \nabla y_{1k} \pm \nabla y_{2k}$$

$$\nabla(ay_k) = a\nabla y_k$$

es decir, son **operadores lineales**.

22 Además se puede calcular

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - y_{k+1} + y_k =$$

$$= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

análogamente

$$\Delta^3 y_k = \Delta\left(\Delta^2 y_k\right) = \Delta(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = \Delta y_{k+2} - 2\Delta y_{k+1} + \Delta y_k =$$

$$y_{k+3} - y_{k+2} - 2(y_{k+2} - y_{k+1}) + y_{k+1} - y_k = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k$$

con paciencia se lega a

$$\Delta^4 y_k = y_{k+4} - 4y_{k+3} + 6y_{k+2} - 4y_{k+1} + y_k$$

donde los coeficientes responden al binomio de Newton.

Debe tenerse presente que lo anterior **NO** constituye una demostración formal de la propiedad expresada. Simplemente es una presentación heurística (heurística: RAE *En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.)* que conforma y que puede ser rigurosamente demostrada.

23 Análogamente se pueden "demostrar" las propiedades anteriores para el operador ∇ de diferencias en retroceso:

$$\nabla^2 y_k = \nabla(\nabla y_k) = \nabla(y_k - y_{k-1}) = \nabla y_k - \nabla y_{k-1} = y_k - y_{k-1} - y_{k-1} + y_{k-2} =$$

$$= y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$\nabla^3 y_k = \nabla\left(\nabla^2 y_k\right) = \nabla(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}) = \nabla y_k - 2\nabla y_{k-1} + \nabla y_{k-2} =$$

$$y_k - y_{k-1} - 2(y_{k-1} - y_{k-2}) + y_{k-2} - y_{k-3} = y_k - 3y_{k-1} + 3y_{k-2} - y_{k-3}$$

Y de nuevo, con paciencia

$$\nabla^4 y_k = y_k - 4y_{k-1} + 6y_{k-2} - 3y_{k-3} + y_{k-4}$$

24 Una forma útil para "ver" diferencias directas y en retroceso es mediante la siguiente tabla:

Δ	y_{k-4}	y_{k-3}	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}	y_{k+3}	y_{k+4}	∇
Δ					-1	1				
Δ^2					1	-2	1			
Δ^3					-1	3	-3	1		
Δ^4					1	-4	6	-4	1	
				-1	1					∇
			1	-2	1					∇^2
		-1	3	-3	1					∇^3
	1	-4	6	-4	1					∇^4

25 Por ejemplo, tomando la función $f(x) = e^{x^2}$ y $h = 0.001$ se tienen los siguientes valores

k	x(k)	y(k)
-5	1,995	53,518372170
-4	1,996	53,732390783
-3	1,997	53,947373147
-2	1,998	54,163323977
-1	1,999	54,380248017
0	2,000	54,598150033
1	2,001	54,817034818
2	2,002	55,036907190
3	2,003	55,257771990
4	2,004	55,479634086
5	2,005	55,702498372

Aplicando los coeficientes correspondientes a las diferencias en avance, resultan los siguientes valores:

Δ	0,218885
Δ^2	0,000988
Δ^3	0,000005
Δ^4	0,000000
Δ^5	1,42059E-10

III EL OPERADOR D

25 De la misma forma en que se han definido los operadores Δ y ∇ puede definirse el operador D mediante la siguiente propiedad

$$D[f(x)] = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

es decir, D es un operador que, aplicado a una función (derivable) da como resultado su derivada.

26 Para este operador D se cumple que

$$\begin{aligned} &D^0[f(x)] = If(x) = f(x) \\ &D[f(x)] = f'(x) \\ &D^2[f(x)] = f''(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &D^n[f(x)] = f^{(n)}(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Y, por supuesto, también es un operador lineal y se ha hecho $D^0 = I$ operador identidad.

IV DIFERENCIAS EN AVANCE O DIRECTAS

27 Tomando nuevamente la diferencia en avance

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

y recordando el significado de la nomenclatura utilizada, se puede escribir

$$y_{k+1} = f(x_k + h) = f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}h + \frac{f''(x_k)}{2!}h^3 + \frac{f'''(x_k)}{3!} + \frac{f^{(IV)}(x_k)}{4!}h^4 + \ldots$$

Utilizando el operador D, puede escribirse

$$y_{k+1} = I[f(x_k)] + \frac{D[f(x_k)]}{1!}h + \frac{D^2[f(x_k)]}{2!}h^2 + \frac{D^3[f(x_k)]}{3!}h^3 + \frac{D^4[f(x_k)]}{4!}h^4 + \ldots$$

Con lo cual, en forma puramente operacional queda

$$y_{k+1} = \left[I + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \frac{D^3}{3!}h^3 + \frac{D^4}{4!}h^4 + . \right] . f(x_k) =$$

$$= \left[I + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \frac{D^3}{3!}h^3 + \frac{D^4}{4!}h^4 + . \right] y_k$$

28 Llevando este valor a la expresión

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \left[I + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \frac{D^3}{3!}h^3 + \frac{D^4}{4!}h^4 + . \right] y_k - y_k =$$

$$= \left\{ \left[I + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \frac{D^3}{3!}h^3 + \frac{D^4}{4!}h^4 + . \right] y_k - y_k \right\} = \left\{ \left[I + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \frac{D^3}{3!}h^3 + \frac{D^4}{4!}h^4 + . \right] - 1 \right\} y_k$$

recordando el desarrollo en serie de e^x puede ponerse, en forma simbólica

$$\Delta y_k = \left(e^{hD} - 1 \right) y_k$$

Dando un paso más dentro del trabajo simbólico que se está desarrollando, puede escribirse

$$\Delta = e^{hD} - 1$$

29 Se ha encontrado una expresión simbólica que relaciona las diferencias en avance con las derivadas de la función en el punto k. Debe señalarse, con máximo énfasis, el carácter simbólico de la expresión encontrada, que NO se obtiene "simplificando" y_k. Sin embargo, es extremadamente útil.

30 Despejando, tomando logaritmos y desarrollando en serie de potencias se puede escribir

$$e^{hD} = 1+\Delta$$

$$hD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \frac{\Delta^6}{6} + \ldots$$

31 Mediante esa operatoria puede escribirse, por ejemplo, como aproximación de la derivada primera

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \frac{\Delta^6}{6} + .\right)$$

Si se toma el primer término de la "serie" se llega a la expresión aproximada con que comenzó este trabajo.

$$D = \frac{\Delta}{h} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$

Agregando un término más se obtiene

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{-y_{k+2} + 4y_{k+1} - 3y_k}{2h} =$$

$$= f'(x) - \frac{1}{3} f'''(x)h^2 - \frac{1}{4} f^{IV}(x)h^3 - \frac{7}{60} f^{V}(x)h^4 - \frac{1}{24} f^{VI}(x)h^5 - \ldots$$

Con lo cual el error es

$$e(h) = f'(x) - \left(f'(x) - \frac{1}{3} f'''(x)h^2 - \frac{1}{4} f^{IV}(x)h^3 - \frac{7}{60} f^{V}(x)h^4 - \frac{1}{24} f^{VI}(x)h^5 - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} f'''(x)h^2 - \frac{1}{4} f^{IV}(x)h^3 - \frac{7}{60} f^{V}(x)h^4 - \frac{1}{24} f^{VI}(x)h^5 - \ldots = O\left(h^2\right)$$

Agregando un término más, la aproximación es

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} \right)$$

Puede demostrase que el error, en este caso, es $O(h^3)$

32 El cálculo de las diferencias en avance es sencillo si se utiliza una tabla como la siguiente

K	X_k	y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$	$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k$
0	X_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
1	X_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$
2	X_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$
3	X_3	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	$\Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3$
-----	----	-----	-----------	$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$	
n-1	X_{n-1}	y_{n-1}	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$		
n	x_n	y_n			

33 Por ejemplo, para la función y = ln(x) en [1,2] se tiene

K	X_k	y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$	$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k$
0	1.0	0.00000	0.095310	-0.008299	0.001331
1	1.1	0.095310	0.087011	-0.006968	0.001033
2	1.2	0.182321	0.080043	-0.005935	0.000820
3	1.3	0.262364	0.074108	-0.005115	0.000660
4	1.4	0.336472	0.068993	-0.004455	0.000642
5	1.5	0.405465	0.064538	-0.003913	0.000446
6	1.6	0.470003	0.060625	-0.003467	0.000376
7	1.7	0.530628	0.057158	-0.003091	0.000328
8	1.8	0.587786	0.054067	-0.002763	
9	1.9	0.641853	0.051294		
10	2.0	0.693147			

34 Dado que se ha tomado h = 0.1 la primera aproximación de f''(1.0) es igual a 0,95310 con O(h)=h. Si se toman dos términos resulta 0.994596 con O(h^2), con tres términos la aproximación es 0.99903 con O(h^3) Estas aproximaciones se obtienen calculando:

$$D = \frac{1}{h}\Delta = \frac{1}{0.1}0.095310 = 0.95310$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{1}{0.1}\left(0.095310 - \frac{(-0.008299)}{2}\right) = 0.994596$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right) = \frac{1}{0.1}\left(0.095310 - \frac{(-0.0082988)}{2} + \frac{0.001331}{3}\right) = 0.99903$$

Obsérvese que, en este caso es f'(1.0) = 1

35 Las sucesivas y cada vez más precisas aproximaciones de la derivada primera pueden tabularse en función de las ordenadas contadas a partir de la correspondiente al índice k, consignando los coeficientes por los que deben ser afectadas dichas ordenadas para la aproximación deseada.

D	O(h)	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}	y_{k+3}	y_{k+4}
h D	h	-1	1			
2 h D	h^2	-3	4	-1		
6 h D	h^3	-11	18	-9	2	
12hD	h^4	-25	48	-36	16	-3

36 Volviendo al ejemplo del párrafo 25, se calcula en forma aproximada la derivada primera de la función en estudio

Cálculo por expresión	Primera derivada aproximada	Primera derivada por cálculo analítico
hD	218,884785303	218.3926
2hD	218,390992292	218.3926
6hD	218,392606453	218.3926
12hD	218,392600105	218.3926

36 Para el cálculo aproximado de derivadas de orden superior se toman las "potencias" sucesivas de la expresión

$$hD = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \frac{\Delta^6}{6} +$$

obteniéndose de esta forma las siguientes expresiones (se aclara que el desarrollo de las sucesivas "potencias" fue realizado tomando MATHEMATICA como máquina de calcular. De otra forma la tarea es tediosa y propicia a errores)

$$h^2D^2 = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \ldots$$

$$h^3D^3 = \Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \ldots$$

$$h^4D^4 = \Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{17}{6}\Delta^6 - \ldots$$

37 Reemplazando las sucesivas potencias de Δ por su valor en función de y_k, y_{k+1}, etc se obtienen los siguientes coeficientes

	O(h)	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}	y_{k+3}	y_{k+4}	y_{k+5}
$h^2 D^2$	h	1	-2	1			
$h^2 D^2$	h^2	2	-5	4	-1		
$h^3 D^3$	h	-1	3	-3	1		
$2 h^3 D^3$	h^2	-5	18	-24	14	-3	
$h^4 D^4$	h	1	-4	6	-4	1	
$h^4 D^4$	h^2	3	-14	26	-24	11	-2

38 Aplicando estos coeficientes a las ordenadas de la tabla incluida en el párrafo 25 se tiene:

Orden de derivacion	Cantidad de términos de la serie	Aproximada según tabla	Cálculo analítico
Derivada segunda	Uno	987,586023051	982,7658
Derivada segunda	Dos	982,743538707	982,7658
Derivada tercera	Uno	4.842,484379708	4.804,6328
Derivada tercera	Dos	4.804,393228142	4.804,6328
Derivada cuarta	Uno	25.394,129465894	25.115,126
Derivada cuarta	Dos	25.109,969215009	25.115,126

Obsérvese como mejora la aproximación cuando se consideran dos términos de la serie. El costo de esta mejoría es mayor cantidad de cálculo.

V DIFERENCIAS EN RETROCESO

38 Al trabajar con diferencias en retroceso se tiene

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$$

Recordando la nomenclatura en uso se puede poner

$$y_{k-1} = f(x_k - h) = f(x_k) - \frac{f'(x_k)}{1!}h + \frac{f''(x_k)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_k)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x_k)}{4!}h^4 - \ldots =$$

$$= I[f(x_k)] - \frac{D[f(x_k)]}{1!}h + \frac{D^2[f(x_k)]}{2!}h^2 - \frac{D^3[f(x_k)]}{3!}h^3 + \frac{D^4[f(x_k)]}{4!}h^4 - \ldots =$$

$$= \left\{ I - \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 - \frac{D^3}{3!}h^3 + \frac{D^4}{4!}h^4 - \ldots \right\}[f(x_k)] =$$

$$= e^{-hD} y_k$$

Donde se ha trabajado, como antes, en forma simbólica.

39 Reemplazando en

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = y_k - e^{-hD} y_k = \left(1 - e^{-hD}\right) y_k$$

Resulta en forma simbólica

$$\nabla = 1 - e^{-hD}$$

De donde

$$e^{-hD} = 1 - \nabla$$

Tomando logaritmos queda

$$-hD = \ln(1-\nabla) = -\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \frac{\nabla^4}{4} - \frac{\nabla^5}{5} - \ldots$$

De donde, finalmente

$$hD = \ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + ..$$

40 De esta expresión resulta, para el cálculo de la derivada primera aproximada en algún punto que tenga otro precedente

$$D = \frac{1}{h}\nabla$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2}\right)$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3}\right)$$

41 El error e(h) en el primer caso es

$$e(h) = f'(x_k) - \frac{1}{h}\left[f(x_k) - f(x_k - h)\right] =$$

$$= f'(x_k) - \frac{1}{h}\left[f(x_k) - \left(f(x_k) - \frac{f'(x_k)}{1!}h + \frac{f''(x_k)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_k)}{3!}h^3 + \frac{f''''(x_k)}{4!}h^4 - ..\right)\right] =$$

$$= \frac{f''(x_k)}{2!}h - \frac{f'''(x_k)}{3!}h^2 + \frac{f''''(x_k)}{4!}h^3 - ... = O(h)$$

en el segundo

$$e(h) = \frac{1}{3}f'''(x)h^2 - \frac{1}{4}f''''(x)h^3 + \frac{7}{60}f'''''(x)h^4 - \frac{1}{24}f''''''(x)h^5 + ... = O(h^2)$$

Para el tercer caso puede demostrarse que $e(h) = O(h^3)$

42 De la misma forma en que se construyó una tabla para las diferencias directas o en avance se puede construir una tabla para las diferencias en retroceso. Resulta lo siguiente:

K	X_k	y_k	$\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$	$\nabla^2 y_k = \nabla y_k - \nabla y_{k-1}$	$\nabla^3 y_k = \nabla^2 y_k - \nabla^2 y_{k-1}$
0	X_0	y_0			
1	X_1	y_1	$\nabla y_1 = y_1 - y_0$		
2	X_2	y_2	$\nabla y_2 = y_2 - y_1$	$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1$	
3	X_3	y_3	$\nabla y_3 = y_3 - y_2$	$\nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2$	$\nabla^3 y_3 = \nabla^2 y_3 - \nabla^2 y_2$
-----	----	-----	-----------	----------------	------------------
n-1	X_{n-1}	y_{n-1}	$\nabla y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$	$\nabla^2 y_{n-1} = \nabla y_{n-1} - \nabla y_{n-2}$	$\nabla^3 y_{n-1} = \nabla^2 y_{n-1} - \nabla^2 y_{n-2}$
n	x_n	y_n	$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$	$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$	$\nabla^3 y_n = \nabla^2 y_n - \nabla^2 y_{n-1}$

43 La tabla de diferencias en retroceso para la función ln(x) resulta

K	X_k	y_k	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
0	1.0	0.000000					
1	1.1	0.095310	0.0953102				
2	1.2	0.182321	0.0870114	-0.008298			
3	1.3	0.262364	0.0800427	-0.006968	0.001330		
4	1.4	0.336472	0.074108	-0.005934	0.001033	-0.000296	
5	1.5	0.405465	0.0689929	-0.005115	0.000819	-0.000214	0.000082
6	1.6	0.470003	0.0645385	-0.004454	0.000660	-0.000159	0.000055
7	1.7	0.530628	0.0606246	-0.003914	0.000540	-0.000120	0.000038
8	1.8	0.587786	0.0571584	-0.003466	0.000447	-0.000093	0.000027
9	1.9	0.641853	0.0540672	-0.003091	0.000375	-0.000073	0.000020
10	2.0	0.693147	0.0512933	-0.002774	0.000317	-0.000058	0.000015

La aproximación de la derivada primera en x = 2.0 es

$$D = \frac{\nabla}{h} = \frac{0.0512933}{0.1} = 0.512933$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2}\right) = \frac{1}{0.1}\left(0.0512933 + \frac{(-0.002774)}{2}\right) = 0.499063$$

$$D = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3}\right) = \frac{1}{0.1}\left(0.0512933 + \frac{(-0.002774)}{2} + \frac{0.000317}{3}\right) = 0.500120$$

44 Para el cálculo de derivadas de orden superior se toman potencias sucesivas de la expresión

$$hD = \ln(1-\nabla) = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + .$$

Y se obtiene

$$h^2D^2 = \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + ...$$

$$h^3D^3 = \nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5 + \frac{15}{8}\nabla^6 + \frac{29}{15}\nabla^7 + ...$$

$$h^4D^4 = \nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{6}\nabla^6 + \frac{7}{2}\nabla^7 + \frac{967}{240}\nabla^8 + ...$$

Que permiten calcular la derivada segunda, tercera y cuarta

45 En las siguientes tablas se consignan los coeficientes correspondientes a cada una de las ordenadas que intervienen en el cálculo.

	O(h)	y_{k-5}	y_{k-4}	y_{k-3}	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k
$h^2 D^2$	h				1	-2	1
$h^2 D^2$	h^2			1	4	-5	2
$h^3 D^3$	h			-1	3	-3	1
$2 h^3 D^3$	h^2		3	-14	24	-18	5
$h^4 D^4$	h		1	-4	6	-4	1
h^4D^4	h^2	-2	11	-24	26	-14	3

46 Con el mismo ejemplo anterior, se calculan ahora las derivadas segunda, tercera y cuarta aplicando diferencias en retroceso.

Orden de la derivada	Cantidad de términos de la serie	Aproximada según tabla	Analitica
Derivada segunda	Uno	977,976679174	982,7658
Derivada segunda	Dos	982,743816550	982,7658
Derivada tercera	Uno	4.767,137383510	4.804,6328
Derivada tercera	Dos	4.804,395700830	4.804,6328
Derivada cuarta	Uno	24.838,897161317	25.115,126
Derivada cuarta	Dos	25.111,702939284	25.115,126

VI DIFERENCIAS CENTRALES

46 En párrafos anteriores se han vista fórmulas que dan aproximaciones a las derivadas tomando en cuenta puntos situados exclusivamente a la derecha del punto considerado o puntos situados exclusivamente a la izquierda del mismo. Las primeras fueron tratadas como diferencias en avance o directas y las segundas como diferencias retrospectivas. **Va de suyo que las primeras son aptas para aproximar derivadas al principio de un intervalo o de una tabla de valores equiespaciados y que las segundas lo son para el final de la misma.**

47 Cuando la aproximación de las derivadas se busca en puntos interiores al intervalo considerado, se utilizan las denominadas **diferencias centrales,** tomándose en cuenta, para ello, puntos situados a ambos lados del punto considerado

48 Para tratarlas resulta conveniente dar por conocida la función f(x) en puntos soporte x_k -como se lo ha hecho en el caso de las diferencias en avance y retrospectivas- y **en los puntos medios de cada uno de los subintervalos definidos por dos consecutivos de ellos.**

$$x_{k-3/2} \quad x_{k-1} \quad x_{k-1/2} \quad x_k \quad x_{k+1/2} \quad x_{k+1} \quad x_{k+3/2}$$

49 Con esta nomenclatura, las diferencias centrales se definen como:

$$\delta y_k = y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}$$

es decir, como la diferencia entre el valor situado a la derecha del punto considerado menos el valor situado a la izquierda, **en la mitad del paso h**

50 Siendo

$$y_{k+\frac{1}{2}} = f(x_k + \frac{h}{2}) = f(x_k) + \frac{f'(x_k)}{1!}\frac{h}{2} + \frac{f''(x_k)}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{f'''(x_k)}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{(IV)}(x_k)}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + ...$$

e

$$y_{k-\frac{1}{2}} = f(x_k - \frac{h}{2}) = f(x_k) - \frac{f'(x_k)}{1!}\frac{h}{2} + \frac{f''(x_k)}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{f'''(x_k)}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{(IV)}(x_k)}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 - .....$$

Es inmediato que

$$\delta y_k = y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}} = \frac{f'(x_k)}{1!}h + 2\frac{f'''(x_k)}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + 2\frac{f^{(V)}(x_k)}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^5 + ...$$

De donde, como primera aproximación de la derivada primera se puede tomar

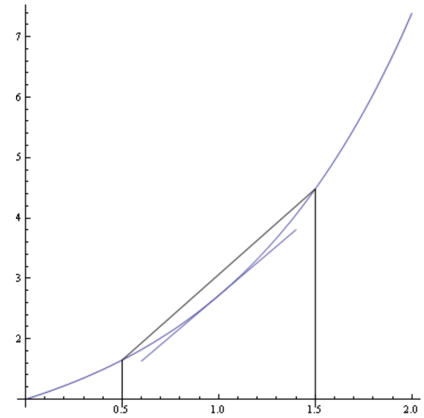
$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}}{h} \approx \frac{\delta y_k}{h}$$

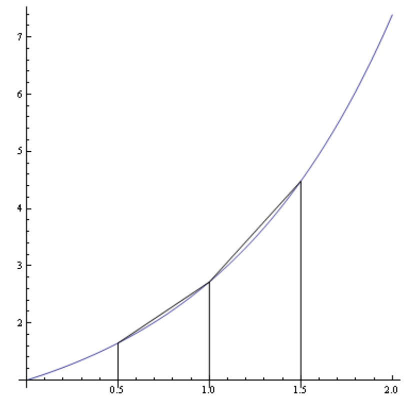
51 El error correspondiente a esta aproximación es

$$e(h) = f'(x) - \left[\frac{y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}}{h}\right] = \frac{f'''(x_k)}{3!}\frac{h^2}{4} + \frac{f^{(V)}(x_k)}{4!}\frac{h^4}{60} + ... = O(h^2)$$

que es de un orden superior al correspondiente a las diferencias en avance y en retroceso.

52 Obsérvese que esta aproximación corresponde a tomar como aproximación de la derivada primera en el punto k a la pendiente de la secante que une los puntos ($x_{k+1/2}$, $y_{k+1/2}$) y ($x_{k-1/2}$, $y_{k-1/2}$). Es oportuno recordar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para apreciar la mejora que se alcanza con las diferencias centrales frente a las directas y en retroceso.





53 Las diferencias centrales sucesivas se definen como

$$\delta^2 y_k = \delta(\delta y_k) = \delta y_{k+\frac{1}{2}} - \delta y_{k-\frac{1}{2}} = y_{k+1} - y_k - (y_k - y_{k-1}) = y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$$

la diferencia central tercera como

$$\delta^3 y_k = \delta(\delta^2 y_k) = \delta y_{k+1} - 2\delta y_k + \delta y_{k-1} = y_{k+\frac{3}{2}} - y_{k+\frac{1}{2}} - 2\left(y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}} \right) + y_{k-\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{3}{2}} =$$

$$= y_{k+\frac{3}{2}} - 3y_{k+\frac{1}{2}} + 3y_{k-\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{3}{2}}$$

VII PROMEDIADOR

54 Para eliminar valores en puntos fraccionarios que aparecen en el cálculo de diferencias centrales impares, se utilizan las diferencias promedio y, para ello se utiliza el operador "promediador" ρ que se define

$$\rho y_k = \frac{1}{2}\left(y_{k+\frac{1}{2}} + y_{k-\frac{1}{2}} \right)$$

Entonces, la primera diferencia central promedio es

$$\rho\delta y_k = \frac{1}{2}\left(\delta y_{k+\frac{1}{2}} + \delta y_{k-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}\left(y_{k+1} - y_k + y_k - y_{k-1}\right) = \frac{1}{2}\left(y_{k+1} - y_{k-1}\right)$$

55 Tomando en cuenta desarrollos de Taylor ya efectuados, se puede escribir

$$\rho\delta y_k = \frac{1}{2}(y_{k+1} - y_{k-1}) = \frac{(e^{hD} - e^{-hD})}{2} y_k$$

De donde, nuevamente en forma simbólica

$$\rho\delta = \frac{e^{hD} - e^{-hD}}{2} = sh(hD)$$

56 Puede entonces escribirse, siempre en forma simbólica

$$\rho\delta = sh(hD)$$

Desarrollando en serie de potencias el seno hiperbólico, se tiene

$$\rho\delta = hD + \frac{h^3 D^3}{6} + \frac{h^5 D^5}{120} + \ldots$$

que da la diferencia central promedio en función de las derivadas sucesivas de la función f(x)

57 Despejando el argumento del seno hiperbólico y desarrollando en serie de potencias se obtienen la siguiente expresión

$$hD = arcsh(\rho\delta) = \rho\delta - \frac{\rho^3\delta^3}{6} + \frac{3\rho^5\delta^5}{40} - \frac{\rho^7\delta^7}{nn} + \ldots$$

en la que aparecen potencias impares del operador promediador ρ.

58 Para simplificar estas potencias es necesario encontrar una relación entre el operador promediador ρ y el operador diferencia central δ. Para ello se calcula

$$\rho^2 y_k = \rho(\rho y_k) = \rho\left[\frac{1}{2}\left(y_{k+\frac{1}{2}} + y_{k-\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\rho y_{k+\frac{1}{2}} + \rho y_{k-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(y_{k+1} + y_k) + \frac{1}{2}(y_k + y_{k-1})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(y_{k+1} + 2y_k + y_{k-1})$$

Por otra lado, se calcula

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) y_k$$

Resulta

$$y_k + \frac{1}{4}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) = \frac{1}{4}(y_{k+1} + 2y_k + y_{k-1})$$

Siendo iguales los segundos términos de ambas expresiones, los primeros también lo serán. Entonces

$$\rho^2 y_k = \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) y_k$$

y, en forma puramente simbólica

$$\rho^2 = \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right)$$

59 Volviendo al desarrollo en serie de potencias y luego de un muy importante trabajo algebraico, se escribe

$$hD = \rho\left(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \frac{\delta^7}{140} + \frac{129\delta^9}{4480} - \ldots\right)$$

Tomando uno o más términos de la serie, se obtienen aproximaciones cada vez mejores a la derivada primera D

60 Elevando al cuadrado la expresión anterior se tiene, como aproximación a la derivada segunda

$$h^2D^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \frac{\delta^8}{560} - \frac{667\delta^{10}}{11200} + ...$$

61 Elevando al cubo se tiene como aproximación a la derivada tercera

$$h^3D^3 = \rho\left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \frac{41\delta^9}{3024} + \frac{53209\delta^{11}}{604800} - ...\right)$$

y, elevando a la cuarta potencia se obtiene la aproximación a la derivada cuarta

$$h^4D^4 = \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \frac{41\delta^{10}}{7560} + \frac{27323\delta^{12}}{226800} - ...$$

62 Por ejemplo, tomando un solo término de la expresión de párrafo 59 se tiene

$$hD = \rho\delta = \rho\left(y_{k+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}}\right) = \rho y_{k+\frac{1}{2}} - \rho y_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_{k+1} + y_k) - \frac{1}{2}(y_k + y_{k-1}) = \frac{1}{2}(y_{k+1} - y_{k-1})$$

$$D = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

el error en este caso es

$$e(h) = \rho\left(-\frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \frac{\delta^7}{140} + \frac{129\delta^9}{4480} - ...\right)$$

62 Tomando los dos primeros términos de la expresión considerada, se tiene

$$hD = \rho\left(\delta - \frac{\delta^3}{6}\right) = \rho\left(y_{k+\frac{1}{2}} + y_{k-\frac{1}{2}}\right) - \frac{\rho}{6}\left(y_{k+\frac{3}{2}} - 3y_{k+\frac{1}{2}} + 3y_{k-\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$\left(y_{k+1} - y_{k-1}\right) - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\left(y_{k+2} + y_{k+1}\right) - \frac{3}{2}\left(y_{k+1} + y_k\right) + \frac{3}{2}\left(y_{k-1} + y_k\right) - \frac{1}{2}\left(y_{k-2} + y_{k-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left(y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2}\right)$$

el error será

$$e(h) = \rho\left(\frac{\delta^5}{30} - \frac{\delta^7}{140} + \frac{129\delta^9}{4480} - \ldots\right)$$

64 Haciendo lo mismo para la derivada segunda, tercera y cuarta, se obtienen los coeficientes que figuran en la siguiente tabla para las ordenadas que rodean al punto considerado.

D	O(h)	y_{k-3}	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}	y_{k+3}
2hD	h^2			-1	0	1		
12hD	h^4		1	-8	0	8	-1	
60hD	h^6	-1	9	-45	0	45	-9	1
h^2D^2	h^2			1	-2	1		
$12h^2D^2$	h^4		-1	16	-30	16	-1	
$180h^2D$	h^6	2	-27	270	-490	270	-27	2
$2h^3D^3$	h^2		-1	2	0	-2	1	
$8h^3D^3$	h^4	1	-8	13	0	-13	8	-1
h^4D^4	h^2		1	-4	6	-4	1	
$6h^4D^4$	h^4	-1	12	-39	56	-39	12	-1

65 Para estas diferencias centrales se construyen tablas como la siguiente

K	X_k	Y_k	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

66 Para el ejemplo que se viene desarrollando, resulta

K	X_k	Y_k	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
0	1.0	0.000000					
1	1.1	0.095310	0.182322				
2	1.2	0.182322	0.167054	-0.0281709			
3	1.3	0.262364	0.154151	-0.0239532	0.00755159		
4	1.4	0.336472	0.143101	-0.0206193	0.00601554	-0.00268066	
5	1.5	0.405465	0.133531	-0.0179377	0.00487093	-0.00201535	0.00113557
6	1.6	0.470004	0.125163	-0.0157484	0.00400019	-0.00154509	
7	1.7	0.530628	0.117783	-0.0139375	0.00332584		
8	1.8	0.587787	0.111226	-0.0124225			
9	1.9	0.641854	0.105361				
10	2.0	0.693147					

67 Continuando con la función $f(x)=e^{x^2}$ con $h=0.001$ en x_0 = 2 se obtienen por cálculo mediante diferencias centrales los siguintes valores para las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta

Orden de la derivada	Aproximada según tabla	Analitica
Derivada primera	218,393400907	218.3926
Derivada primera	218,392600128	218.3926
Derivada primera	218,392600133	218.3926
Derivada segunda	982,768793563	982.7658
Derivada segunda	982,766700632	982.7658
Derivada segunda	982,766700656	982.7658
Derivada tercera	4.804,671938530	4.804.6328
Derivada tercera	4.804,637192102	4.804.6328
Derivada cuarta	25.115,085122707	25.115.126
Derivada cuarta	25.114,823406132	25.115.126

IIX DERIVACIÓN PARCIAL

65 A continuación se trata el tema de aproximación de derivadas parciales de funciones de dos variables independientes, $z = f(x,y)$. Se utilizarán exclusivamente **diferencias centrales** y, para apreciar correctamente los valores que intervienen en el cálculo, se utilizará la siguiente grilla, para el cálculo en el punto i, j

	i-2,j-4	i-2,j-3	i-2,j-2	i-2, j-1	i-2, j	i-2, j+1	i-2,j+2	i-2,j+3	i-2,j+4	
	i-1, j-4	i-1, j-3	i-1, j-2	i-1, j-1	i-1, j	i-1, j+1	i-1, j+2	i-1, j+3	i-1, j+4	
	i, j-4	i, j-3	i, j-2	i, j-1	i, j	i, j+1	i, j+2	i, j+3	i, j+4	
	i+1, j-4	i+1, j-3	i+1, j-2	i+1, j-1	i+1, j	i+1, j+1	i+1,j+2	I+1,j+3	I+1,j+4	
	i+2,j-4	i+2,j-3	i+2,j-2	i+2, j-1	i+2, j	i+2,j+1	i+2,j+2	i+2,j+3	i+2,j+4	

66 Para el cálculo aproximado de las derivadas parciales primeras se aplican los siguientes expresiones

$$D_x z_{i,j} \approx \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2h}$$

$$D_y z_{i,j} = \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2k}$$

Debiendo ser observado que el paso constante según x es h y que según y es k

67 Estas mismas derivadas, pero con errores de orden h^4 o k^4 están dadas por

$$D_x z_{i,j} \approx \frac{z_{i,j-2} - 8z_{i,j-1} + 8z_{i,j+1} - z_{i,j+2}}{12h}$$

$$D_y z_{i,j} \approx \frac{z_{i-2,j} - 8z_{i-1,j} + 8z_{i,+1j} - z_{i+2,j}}{12k}$$

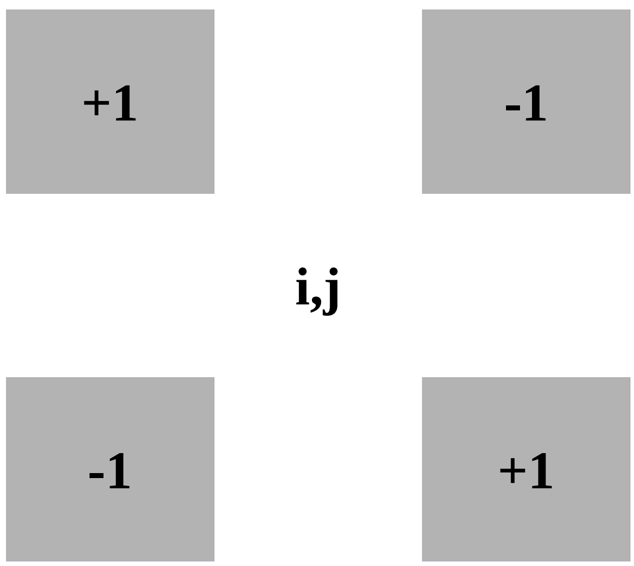
68 Las derivadas segundas están dadas por

$$D_{xx} z_{i,j} \approx \frac{\dfrac{z_{i,j+1} - z_{i,j}}{2h} - \dfrac{z_{i,j} - z_{i,j-1}}{2h}}{2h} = \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{4h^2}$$

$$D_{yy} z_{i,j} \approx \frac{\dfrac{z_{i+1,j} - z_{i,j}}{2k} - \dfrac{z_{i,j} - z_{i-1,j}}{2k}}{2k} = \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{4k^2}$$

$$D_{xy} z_{ij} = \frac{\dfrac{z_{i+1,j+1} - z_{i-1,j+1}}{2k} - \dfrac{z_{i+1,j-1} - z_{i-1,j-1}}{2k}}{2h} = \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i-1,j+1} - z_{i+1,j-1} + z_{i-1,j-1}}{4hk}$$

69 La siguiente plantilla puede ser aplicada sobre un reticulado, haciendo coincidir el cuadrado central con el punto i,j obteniéndose en los cuadrados sombreados los coeficientes por los que se deben multiplicar las ordenadas correspondientes para obtener una aproximación a la derivada segunda cruzada, multiplicada por 4hk



70 El caso común del Laplaciano

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Se resuelve aproximando las derivadas parciales con las expresiones del párrafo 68. Resulta asi

$$\nabla^2 f(x,y) \approx \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{4h^2} + \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{4k^2}$$

Si se hace h=k resulta

$$4h^2\nabla^2 f(x,y) \approx z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1} + z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j} = z_{i,j+1} + z_{i,j-1} + z_{i+1,j} + z_{i-1,j} - 4z_{i,j}$$

Esta última expresión queda sintetizada en la siguiente plantilla, donde como antes el cuadrado central corresponde al punto i,j

$$\mathbf{4h^2\nabla^2 =} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathbf{1} & \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \hline & \mathbf{1} & \\ \hline \end{array} \mathbf{+O(h^2)}$$

71 Plantillas como estas pueden hallarse para derivadas y/u operadores de otros órdenes, tanto en coordenadas cartesianas ortogonales como oblicuas, coordenadas polares y otras según la naturaleza del problema a resolver, generalmente una ecuación diferencial en derivadas parciales o un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

72 Por ejemplo, las siguientes plantillas dan la aproximación de ∇^2 y de ∇^4 respectivamente:

$$12h^2\nabla^2 = \begin{array}{ccccc} & & -1 & & \\ & & 16 & & \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ & & 16 & & \\ & & -1 & & \end{array} + h^2O(h^4)$$

$$6h^4\nabla^4 = \begin{array}{ccccccc} & & & -1 & & & \\ & & -1 & 14 & -1 & & \\ & -1 & 20 & -77 & 20 & -1 & \\ -1 & 14 & -77 & 184 & -77 & 14 & -1 \\ & -1 & 20 & -77 & 20 & -1 & \\ & & -1 & 14 & -1 & & \\ & & & -1 & & & \end{array} + h^4O(h^4)$$

volver al Índice General