CAPITULO X

AUTOVALORES AUTOVECTORES

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & \dots & \dots & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & \dots & \dots & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{ii}-\lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & \dots & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

EXORDIO

Este capítulo comprende métodos para la determinación de autovalores y autovectores.

El tema es de significativa importancia en diversas ramas de la ciencia y de la ingeniería, casi diría en aplicaciones avanzadas de la matemática a problemas de la ingeniería. Vibraciones, inestabilidad del equilibrio, por ejemplo.

Entonces, como en otros capítulos de esta serie se ha consignado lo que se estima todo alumno de ingeniería debe saber sobre el tema. Nada más y nada menos.

Se incluyen métodos que permiten encontrar el polinomio característico de una matriz cuadrada, cuyas raíces son precisamente los autovalores de la matriz. Casi con seguridad dichas raíces deben ser encontradas por métodos aproximados porque, se sabe, polinomios de grado mayor a cuatro no se pueden resolver en forma exacta.

Otros métodos que también se exponen permiten determinar el mayor (o el menor) autovalor realizando iteraciones sobre matrices, productos de matrices por vectores o resolviendo, en cada paso, un sistema de ecuaciones lineales del mismo orden que la matriz dada.

El trabajo numérico resultaría abrumador de no contarse con lenguajes algebraicos que permiten esos cálculos con unas pocas instrucciones como en una calculadora de mesa.

Se ha incluido también el método denominado QR que, según la bibliografía consultada es uno de los diez más importantes del siglo XX.

En resumen, una exposición tal vez un poco larga, que permite al estudiante sacar sus propias conclusiones sobre el tema y disponer de elementos para que, con criterio propio sepa seleccionar uno entre los múltiples métodos existentes de acuerdo a sus necesidades.

Naturalmente, hay que decirlo, tres comandos de un lenguaje algebraico, escritos sin errores, resuelven en forma rápida y segura el problema de la determinación de autovalores y autovectores. Están escritos.

El autor está convencido que un ingeniero es mucho más que un simple digitador de botones, cuya independencia intelectual y su capacidad de aceptar o rechazar resultados está basada en sus conocimientos sobre fundamentos de métodos y procedimientos de cálculo, entre otras muchas cosas que hacen a su ser como Universitario.

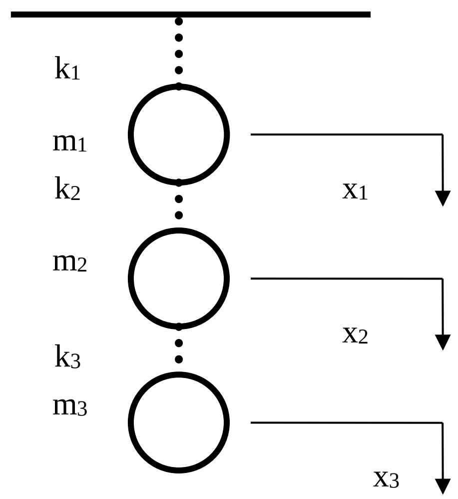
CASOS

Un importante conjunto de problemas matemáticos y de aplicación en ciencias e ingeniería tienen relación directa con el cálculo de los denominados autovalores (eigenvalues) y sus correspondientes autovectores (eigenvectors) de una matriz cuadrada A de n filas y n columnas.

Para señalar sólo algunos de esos problemas, se mencionan los sistemas de ecuaciones diferenciales; la estabilidad de sus soluciones; las tensiones principales en un cuerpo sometido a esfuerzos; los ejes de cónicas y cuádricas; el estudio de oscilaciones de algunas estructuras; la optimización; la biología; etc; etc.

SISTEMAS ELÁSTICOS

A título de ejemplo se resuelve a continuación el sistema compuesto por tres masas conectadas por resortes según el siguiente esquema:



El sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente es

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

Si se supone nulo el amortiguamiento el sistema tendrá movimiento oscilante. Por ese motivo puede ponerse que

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 sen(\omega t) \\ x_2(t) = A_2 sen(\omega t) \\ x_3(t) = A_3 sen(\omega t) \end{cases}$$

donde ω es la frecuencia del sistema.

Derivando, simplificando y agrupando puede escribirse el siguiente problema de autovalores (en ω^2)

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - m_2\omega^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - m_3\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si se toman, como en el texto METODOS NUMERICOS APLICADOS, James, Smith & Wolford, las masas iguales a $1\dfrac{Kgseg^2}{m}$ y las constantes elásticas iguales a $10\dfrac{Kg}{m}$ resulta el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 20-\omega^2 & -10 & 0 \\ -10 & 20-\omega^2 & -10 \\ 0 & -10 & 10-\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Claramente se trata de un problema cuya solución requiere que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo, hecho que solo es posible cuando el polinomio –denominado característico- de tercer grado en ω^2 resultante del desarrollo del determinante del sistema sea nulo y esto ocurrirá para tres valores de ω^2, valores que se denominan **autovalores** de la matriz dada.

Calculados esos valores, como más adelante será expuesto en este trabajo, resultan los valores

$$\omega_1^2 = 32.4698$$
$$\omega_2^2 = 15.5496$$
$$\omega_3^2 = 1.98062$$

Para cada uno de estos valores el determinante del sistema es nulo (o casi nulo, recordar la aritmética de t-dígitos y los errores que acarrea) y, entonces, para cada uno de ellos se podrá determinar un vector A que representa la configuración del sistema para cada frecuencia.

Cada uno de esos vectores se denomina **autovector** del sistema.

Tomando la frecuencia más baja (ω^2 = 1.98062) resulta la matriz

$$\begin{pmatrix} 18.0194 & -10 & 0 \\ -10 & 18.0194 & -10 \\ 0 & -10 & 8.01938 \end{pmatrix}$$

Y de esta se deduce que, para esta frecuencia, las componentes de los autovectores tendrán las siguientes relaciones:

$$A_2 = 1.80194 A_1$$
$$A_3 = 2.24698 A_1$$

Para la frecuencia intermedia (ω^2 = 15.5496) resulta la matriz

$$\begin{pmatrix} 4.45042 & -10 & 0 \\ -10 & 4.45042 & -10 \\ 0 & -10 & -5.54958 \end{pmatrix}$$

Para la que el correspondiente autovector tendrá la siguiente relación de componentes

$$A_2 = 0.45042 A_1$$
$$A_3 = -0.81162 A_1$$

Para la frecuencia más alta resulta

$$\begin{pmatrix} -12.4698 & -10 & 0 \\ -10 & -12.4698 & -10 \\ 0 & -10 & -22.4698 \end{pmatrix}$$

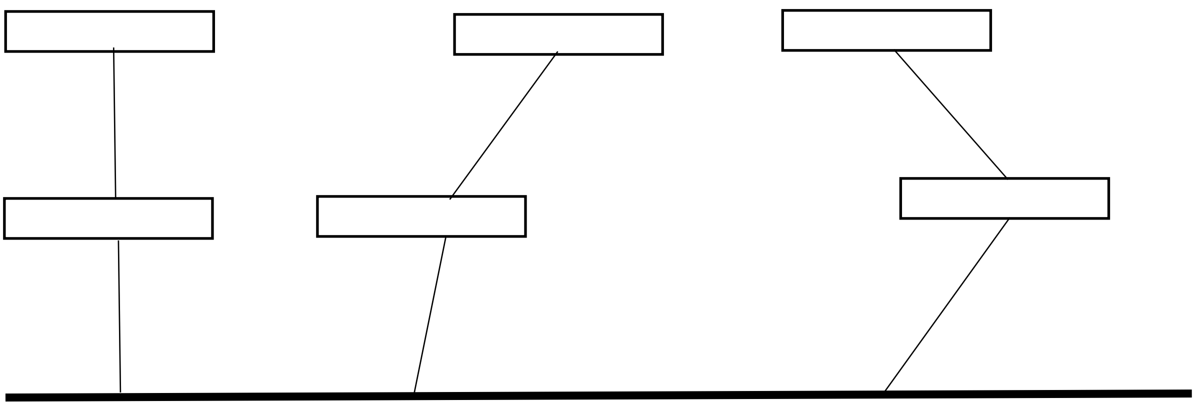
$$A_2 = -1.24698 A_1$$
$$A_3 = 0.554958 A_1$$

Observar que, a la frecuencia más baja, las tres masas oscilan "bajando" de su posición de equilibrio; en la frecuencia intermedia, la primera "baja", la segunda "baja" casi la mitad de lo que "baja" la primera mientras que m_3 "sube". Por último, a la frecuencia más alta, cuando m_1 "baja", m_2 "sube" y m_3 "baja"

Esos son los denominados modos normales de vibración del sistema dado. Resolverlo como se ha hecho no responde a la supuesta perversa demando de algún profesor de física. Una estructura constituida por medios elásticos tiene también sus modos normales de vibración, correspondiendo cada uno de ellos a una distinta configuración de la estructura cuando vibra.

Ante un terremoto, si la onda sísmica tiene la misma frecuencia que uno la de uno de esos modos de vibración, puede producirse el fenómeno de resonancia pudiendo llegarse inclusive al colapso de la estructura. Esto sólo es argumento más que suficiente para apreciar la importancia del tema en tratamiento: autovalores y autovectores.

El siguiente gráfico esquematiza una estructura de dos plantas. Los rectángulos son las masas de cada una de las plantas y las líneas son los sustentos elásticos de dichas masas. Se ponen de manifiesto los dos modos naturales de vibración del sistema. Si una onda sísmica horizontal tiene la misma frecuencia que uno de ellos las consecuencias pueden ser fatales.



SISTEMAS BIOLÓGICOS

El análisis de la variación de una población en función del tiempo es un fenómeno que se denomina “Dinámica de la Población” y es su objeto determinar el número de individuos que la componen a través del tiempo y determinar sus consecuencias ecológicas.

Se presenta en esta segunda aplicación un importante modelo de dinámica de poblaciones denominado 'modelo de Leslie' en honor del autor del método, el fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900 - 1974), siguiendo como modelo lo obtenido en www4. uajen . es/-ajlopez /fm_ambientales

Dada una población de n miembros, la tasa de nacimientos y las migraciones hacia su ámbito la hacen aumentar mientras que las defunciones y la emigración la disminuyen.

De la misma forma que en los problemas físicos elementales modelar este tipo de problemas requiere hipótesis simplificativas que, aun cuando alejan al problema del real, sus resultados son orientadores para realizar análisis posteriores más finos.

En este caso se supone que todos los miembros de la población son iguales y que los recursos de que disponen son ilimitados. Migraciones e inmigraciones no son tenidas en cuenta.

Después de todo, el problema del tiro se comienza a estudiar en una tierra plana, inmóvil, sin resistencia del aire al movimiento del proyectil y, sin embargo, los resultados que se obtienen son altamente significativos para la mejor comprensión posterior del problema.

Otras hipótesis son simplemente de sentido común. Por ejemplo, no admite discusión que la tasa de mortalidad es mayor entre los miembros de la población de mayor edad.

Asimismo la tasa de fecundidad depende de la edad. Es baja en los primeros años de vida, se incrementa hasta que, nuevamente la edad avanzada la hace disminuir.

Se puede suponer que la población tiene el mismo número de machos que de hembras. A los fines de este tipo de análisis sólo cuentan las hembras puesto que son las únicas –en cualquier especie- que pueden asegurar una nueva generación.

Siendo la edad un factor determinante se caracteriza la población de hembras según n rangos de edades, suponiendo que la edad máxima a alcanzar es de N años.

1	(0, N/n)
2	(N/n, 2N/n)
3	(2N/n, 3N/n)
…	………………………
n-1	[(n-2)N/n, (n-1)N/n]
n	[(n-1)N/n, N]

Se supone que, en el momento inicial se conoce el número de hembras en cada uno de los rangos de edad establecidos. Llamando H a estas cantidades se tendrá

$H(0) = \{H_1(0), H_2(0), H_3(0), \dots , H_{n-1}(0), H_n(0)\}$

La evolución de los componentes de este vector, en el tiempo es lo que permite analizar la dinámica de la población bajo estudio.

Para hacerlo se hacen observaciones en tiempos discretos, coincidentes con los intervalos de edades

$t_0 =0, t_1 = N/n, t_2 = 2N/n, \dots, t_k =kN/n$

Dos parámetros demográficos deben introducirse.

- El promedio de número de hijas que tiene una hembra mientras está en la clase i se denominará a_i con i= 1, 2, 3, …, n. Es obvio que $a_i \geq 0$
- Las hembras que sobreviven de la clase i a la clase i+1 se denominará b_i con i = 1, 2, 3, …, n-1. También es obvio que $0 < b_i \leq 1$

El número de hembras en H_1 en el tiempo k está dado por las nacidas en el lapso t_{k-1}, t_k. Serán

$$H_1(k) = a_1H_1(k-1) + a_2H_2(k-1) + a_3H_3(k-1) + \cdots + a_nH_n(k-1)$$

Por otra parte, el número de hembras vivas en la clase i en el tiempo t_k es igual al número de hembras de la clase i en el tiempo t_{k-1} que siguen vivas en ese tiempo. Es decir

$$H_{i+1}(k) = b_iH_i(k-1)$$

Expresando matricialmente lo expuesto resulta

$$\begin{bmatrix} H_1(k) \\ H_2(k) \\ H_3(k) \\ \dots. \\ H_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots. & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(k-1) \\ H_2(k-1) \\ H_3(k-1) \\ \dots. \\ H_n(k-1) \end{bmatrix}$$

Donde la matriz

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots. & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leslie. Claramente puede escribirse

$$H(k) = L^k H(0)$$

Como ejemplo se presenta la siguiente matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que en el tiempo 0 la distribución de hembras es el vector

$$H(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

se obtienen por sucesivas multiplicaciones las siguientes cantidades de hembras

$$H(1) = \begin{bmatrix} 31 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(3) = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(4) = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(5) = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente estas cantidades no permiten apreciar cual será la dinámica de la población en estudio a largo plazo. Para ello es necesario recurrir al cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz L.

Para ello se determina el polinomio característico de la matriz L

$$|L - \lambda I| = \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \dots. & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

desarrollando, para ello, el determinante anterior. Resulta así

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} - \cdots - a_n b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} = 0$$

Se introduce ahora la ecuación

$$Q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_n b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

resultante de calcular

$$\frac{P(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left(\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_n b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}\right)$$

entonces la ecuación $P(\lambda) = 0$ es equivalente a la ecuación $Q(\lambda) = 1$ y observando que la función $Q(\lambda)$ es monótonamente decreciente entre

$$Q(\lambda) \to \infty \; para \; \lambda \to 0$$

y

$$Q(\lambda) \to 0 \; para \; \lambda \to \infty$$

Habrá un único valor de λ , positivo, para el cual $Q(\lambda) = 1$ y además este valor es simple dado que $Q'(\lambda) \neq 0$

Además, puede demostrarse que si dos valores consecutivos a_i son distintos de cero, entonces este autovalor será dominante, es decir se cumplirá que

$$|\lambda_k| \leq \lambda_1$$

Siendo λ_1 el correspondiente a $Q(\lambda) = 1$

Se supone ahora que se tienen los n autovalores de la matriz L, entre los cuales, por supuesto, se encuentra el dominante λ_1 junto a los n autovectores correspondientes. Se los llama $V_k, k = 1, n$. Estos vectores, como enseña el álgebra, constituyen una base para el espacio de n dimensiones, por lo cual puede escribirse

$$H(0) = \; c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + \cdots . + c_n V_n$$

para determinadas constantes $c_k, k = 1, n$

Entonces

$$H(k) = LH(k-1) = \; L^k H(0)$$

reemplazando H(0) por su igual del párrafo anterior queda

$$H(k) = \; L^k (c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + \cdots . + c_n V_n)$$

Siendo por definición de vector propio $LV_i = \lambda_i V_i$ será $L^k V_i = \lambda_i^k V_i$ reemplazando en la expresión anterior queda

$$H(k) = c_1 L^k V_1 + c_2 L^k V_2 + c_3 L^k V_3 + \cdots + c_n L^k V_n$$

Y, en términos de autovalores queda

$$H(k) = c_1\lambda_1^k V_1 + c_2\lambda_2^k V_2 + c_3\lambda_3^k V_3 + \cdots + c_n\lambda_n^k V_n$$

sacando factor común λ_1^k queda

$$H(k) = \lambda_1^k \left[c_1 V_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}\right)V_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3^k}{\lambda_1^k}\right)V_3 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}\right)V_n\right]$$

Esta última expresión es la que permite analizar la dinámica de la población en el transcurso del tiempo. En efecto, siendo λ_1 el autovalor dominante, cada uno de los cocientes

$$\left(\frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}\right) \to 0$$

$$k \to \infty$$

Entonces, en el largo plazo será

$$H(k) \sim c_1\lambda_1^k V_1$$

es decir un múltiplo del autovector correspondiente al autovalor dominante.

Está claro que:

$\lambda_1 < 1$ la población se extingue

$\lambda_1 = 1$ la población permanece estable en un múltiplo del autovector V_1

$\lambda_1 > 1$ la población crece hasta que otro tipo de factores limiten su crecimiento

I Preliminares

1 Si bien el planteo del tema es muy sencillo, su parte operativa es verdaderamente complicada. En efecto, si A es la matriz cuadrada mencionada y X es un vector no nulo de n elementos los autovalores λ son los números –reales o complejos- que satisfacen la siguiente ecuación

$$AX = \lambda X$$

O, lo que es lo mismo

$$(A - \lambda I)X = 0$$

2 Como el vector X no es el vector nulo, la determinación de los autovalores λ exige resolver el sistema

$$A - \lambda I = 0$$

3 Para apreciar un poco mejor la naturaleza del trabajo a desarrollar para obtener los autovalores se escribe a continuación el sistema anterior en forma no simbólica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Naturalmente, el desarrollo del determinante $\det(A - \lambda I)$ da lugar a una ecuación de grado n en la variable λ. Dado que los elementos de la matriz A son números, la ecuación mencionada es una ecuación polinómica, del tipo

$$P_n(\lambda) = p_n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + p_1 \lambda + p_o = 0$$

4 El polinomio $P_n(\lambda)$ se denomina polinomio característico de la matriz A. Para determinados desarrollos resulta conveniente escribirlo de la siguiente forma, denominada mónica (coeficiente de λ^n unitario)

$$Q_n(\lambda) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + q_1\lambda + q_0$$

5 Obsérvese que siempre es posible llevar el polinomio característico a esta forma mónica haciendo $q_k = \frac{p_k}{p_n}, k = n-1,...,0$ dado que nunca $p_n = 0$ ya que si así fuese, el polinomio característico no sería de grado n como debe ser para una matriz de nxn.

6 Varios problemas se presentan de inmediato para el cálculo de los autovalores. Para matrices de segundo, tercer y cuarto orden dicho cálculo puede ser exacto, mientras que, para órdenes superiores a cuatro, sólo son admisibles métodos aproximados dado que, como lo demostraron Abel y Galois, las ecuaciones de grado superior a cuatro no tienen solución mediante expresiones finitas.

7 Un segundo problema es el de determinar de forma eficaz los coeficientes del polinomio característico. Se debe olvidar, por abrumador, el desarrollo del determinante.

8 Por ejemplo, la matriz de 2x2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tiene por polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

Cuyas raíces $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ son los autovalores de la matriz dada.

9 Se buscan ahora los autovalores de una matriz de 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el polinomio característico es:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 1 \\ 5 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-(2-\lambda)-25(1-\lambda) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6-2+\lambda-25+25\lambda =$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda-21$$

Sus raíces son $\lambda_1 = 7.60869$ $\lambda_2 = 1.04145,$ $\lambda_3 = -2.65014$

10 En general este desarrollo requiere el cómputo de 2^n -1 determinantes de distintos órdenes lo que hace verdaderamente ímprobo, desechable, olvidable este camino para encontrar autovalores.

11 Además se presentan problemas como los siguientes.

12 El polinomio de grado 20 siguiente

$$P_{20}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)...(\lambda-18)(\lambda-19)(\lambda-20) = 0$$

tiene por raíces los naturales (l, ele, por lambda, es la variable elegida para escribir el polinomio en MATHEMATICA)

```
{{l → 1}, {l → 2}, {l → 3}, {l → 4}, {l → 5}, {l → 6}, {l → 7},
 {l → 8}, {l → 9}, {l → 10}, {l → 11}, {l → 12}, {l → 13}, {l → 14},
 {l → 15}, {l → 16}, {l → 17}, {l → 18}, {l → 19}, {l → 20}}
```

13 Se construye ahora el polinomio $Q_{20}(\lambda) = P_{20}(\lambda) - 2^{-23}\lambda^{19}$ que aparentemente sólo difiere de $P_{20}(\lambda)$en el coeficiente de λ^{19}pero en una cantidad verdaderamente despreciable: 2^{-23} = 1.192092896 10^{-7} =0.0000001192092896

Sin embargo, al resolver la ecuación resultante se tienen como raíces (nuevamente se ha usado l, ele, por lambda, como variable elegida para escribir el polinomio en MATHEMATICA)

```
{{l → 1.}, {l → 2.}, {l → 3.}, {l → 4.}, {l → 5.}, {l → 6.00001},
 {l → 6.9997}, {l → 8.00727}, {l → 8.91725}, {l → 20.8469},
 {l → 10.0953 - 0.643501 i}, {l → 10.0953 + 0.643501 i},
 {l → 11.7936 - 1.65233 i}, {l → 11.7936 + 1.65233 i},
 {l → 13.9924 - 2.51883 i}, {l → 13.9924 + 2.51883 i},
 {l → 16.7307 - 2.81262 i}, {l → 16.7307 + 2.81262 i},
 {l → 19.5024 - 1.94033 i}, {l → 19.5024 + 1.94033 i}}
```

Lo que indica una gran inestabilidad en los resultados incompatible con alguna aplicación donde cada autovalor tenga un significado físico concreto.

14 Además, debe tenerse en cuenta que los elementos de la matriz A provienen de cálculos previos y/o de mediciones donde errores del orden de 2^{-23} pueden ser inevitables por la aritmética utilizada y porque casi ningún instrumento de medición trabaja con semejante precisión.

15 Otro ejemplo es el de la matriz de 3x3 (propuesto por Davis y Moller)

$$A = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$$

Cuyos autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$.

16 Se considera ahora la matriz B igual a la matriz A salvo el elemento b_{22} que es igual al elemento $a_{22} + 0.01$. Tal vez un posible error de cálculo o de medición introduzca ese centésimo.

$$B = A + \Delta A = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180.01 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$$

Se calculan sus autovalores y resultan $\lambda_1 = 3.5019$; $\lambda_2 = 2.30083$ y $\lambda_3 = 0.207266$

17 Naturalmente todo esto huele a catástrofe. Sin embargo, es necesario determinar autovalores y autovectores y, para ello, se debe conocer cuando una matriz es estable para el cálculo de estos valores.

II Matrices semejantes

18 Para ello es necesario profundizar un poco sobre cálculo matricial determinando lo que se denomina transformación de similitud o de semejanza, transformación que permite obtener otra matriz B con los mismos autovalores que los de la matriz A

19 Para la determinación de B se supone la existencia de una matriz T tal que

$$AX = \lambda X$$

$$T^{-1}AX = \lambda T^{-1}X$$

Llamando

$$T^{-1}X = Y$$

$$X = TY$$

Entonces

$$T^{-1}ATY = \lambda Y$$

$$B = T^{-1}AT$$

$$BY = \lambda Y$$

Donde la matriz B tiene los mismos autovalores que A

20 Además, resulta sencillo ver que ambas matrices tienen el mismo polinomio característico.

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \left|T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T\right| = \left|T^{-1}(A - \lambda I)T\right| = \left|T^{-1}\right|\left|A - \lambda I\right|\left|T\right| = |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$

21 La matriz de transformación T permite estimar la estabilidad de la matriz A en el cálculo de sus autovalores.

Se supone una variación ΔA de la matriz A, entonces

$$B = T^{-1}AT$$

$$B + \Delta B = T^{-1}(A + \Delta A)T$$

$$\Delta B = T^{-1}\Delta A T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta A = T\Delta B T^{-1}$$

Tomando normas, resulta llamando $cond(T) = \|T\|\|T^{-1}\|$

$$\|B\| = \|T^{-1}\|\|A\|\|T\| = cond(T)\|A\|$$

$$\|\Delta A\| = \|T\|\|\Delta B\|\|T^{-1}\| = cond(T)\|\Delta B\|$$

En consecuencia

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq [cond(T)]^2 \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$$

Esta última expresión indica que el cálculo de los autovalores de A está fuertemente influido por la condición de la matriz de transformación T.

III Estrategias de Cálculo

22 Conocidos estos prolegómenos se presentan a elección distintas estrategias para el cálculo de los autovalores (autovectores) de una matriz A.

23

La primera, es determinar el polinomio característico sin calcular el determinante, y luego por algún método aproximado, determinar sus raíces, reales o complejas. Pueden existir problemas como los mencionados en párrafos precedentes.

24 En este orden de cosas también existen métodos para el cálculo del mayor (menor) autovalor sin pasar por la determinación del polinomio característico.

25 Otra estrategia consiste en encontrar, mediante transformaciones adecuadas matrices B semejantes a la dada para las cuales sea mucho más simple la determinación del polinomio característico

26 Típicamente estas matrices B son tridiagonales o las denominadas matrices de Hessenberg, con la siguiente estructura.

$$\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

IV Polinomio Característico

27 Se presentan a continuación diversas formas de hallar el polinomio característico de una matriz cuadrada A de nxn

IV.1 **Método de Le Verrier**

28 Urban Jean Joseph Le Verrier, Saint Lo, Francia 1811 – Paris, Francia 1877. Profesor de Astronomía en Ecole Polytechnic. Estudiando las anomalías en la orbita de Urano, descubrió Neptuno "en la punta de un lápiz". Su amigo y colega alemán Johann Gotried Galle, en el Observatorio de Berlín, observó, luego de una hora de búsqueda el planeta predicho por Le Verrier con su lápiz.

29 A ese hombre se debe el método para hallar el polinomio característico que lleva su nombre: Método de Le Verrier.

30 Para ello se considera el polinomio característico en su forma mónica (coeficiente de λ^n igual a la unidad)

$$Q_n(\lambda) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + q_1\lambda + q_0$$

Si las raíces de este polinomio son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda n$, autovalores de la matriz A, debe ser

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)$$

31 Se calcula ahora

$$\frac{Q_n'(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \frac{n\lambda^{n-1} + (n-1)q_{n-1}\lambda^{n-2} + (n-2)q_{n-2}\lambda^{n-3} + \ldots + q_1}{\lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + q_1\lambda + q_0} =$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\ldots(\lambda-\lambda_n) + (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)\ldots(\lambda-\lambda_n) + \ldots(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_{n-1})}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\ldots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda-\lambda_2} + \frac{1}{\lambda-\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\lambda-\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k}$$

Tomando $|\lambda| > \max\limits_{k=1,n} |\lambda_k|$ la sumatoria se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1-\frac{\lambda_k}{\lambda}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{\lambda_k}{\lambda} + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^3 + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^4 + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda_k}{\lambda^2} + \frac{\lambda_k{}^2}{\lambda^3} + \frac{\lambda_k{}^3}{\lambda^4} + \frac{\lambda_k{}^4}{\lambda^5} + \ldots\right)$$

Por tratarse de una serie geométrica de razón $\frac{\lambda_k}{\lambda} < 1$

32 Llamando

$$s_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad s_2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda^2{}_k \qquad s_3 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k{}^3 \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k{}^n$$

Resulta

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda-\lambda_k} = \frac{n}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \frac{s_3}{\lambda^4} + \ldots$$

Entonces

$$n\lambda^{n-1} + (n-1)q_{n-1}\lambda^{n-2} + (n-2)q_{n-2}\lambda^{n-3} + (n-3)q_{n-3}\lambda^{n-4}\ldots + q_1 =$$

$$= \left(\lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + q_{n-3}\lambda^{n-3}\ldots + q_1\lambda + q_0\right)\left(\frac{n}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \frac{s_2}{\lambda^3} + \frac{s_3}{\lambda^4} + \ldots\right)$$

33 Desarrollando el producto del segundo miembro e igualando los coeficientes de las distintas potencias de λ resulta que, siendo el polinomio mónico característico

$$Q_n(\lambda) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + q_1\lambda + q_0$$

Sus coeficientes vienen dados por

$$q_{n-1} = -s_1$$

$$q_{n-2} = -\frac{s_2 + s_1 q_{n-1}}{2}$$

$$q_{n-3} = -\frac{s_3 + s_2 q_{n-1} + s_1 q_{n-2}}{3}$$

....

$$q_{n-r} = -\frac{s_r + s_{r-1} q_{n-1} + s_{r-2} q_{n-2} + ... + s_1 q_{n-r+1}}{r}$$

34 A título de ejemplo se calculan a continuación los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como primer paso de cálculo se calculan las potencias segunda, tercera y cuarta de la matriz dada. Se obtienen las matrices

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 16 & 23 \\ -8 & 11 & 11 & 13 \\ -14 & 13 & 18 & 25 \\ -18 & 18 & 27 & 37 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -41 & 39 & 61 & 85 \\ -30 & 35 & 40 & 51 \\ -50 & 51 & 67 & 90 \\ -72 & 73 & 101 & 137 \end{bmatrix}$$

35 A continuación se calculan las trazas de esas matrices, que con la notación adoptada se corresponden a los valores s_1, s_2, s_3, s_4

$$s_1 = Tr(A) = Tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 6$$

$$s_2 = Tr\left(A^2\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}\right) = 18$$

$$s_3 = Tr\left(A^3\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} -9 & 8 & 16 & 23 \\ -8 & 11 & 11 & 13 \\ -14 & 13 & 18 & 25 \\ -18 & 18 & 27 & 37 \end{bmatrix}\right) = 57$$

$$s_4 = Tr\left(A^4\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} -41 & 39 & 61 & 85 \\ -30 & 35 & 40 & 51 \\ -50 & 51 & 67 & 90 \\ -72 & 73 & 101 & 137 \end{bmatrix}\right) = 198$$

Con estos valores se calcula

$$q_3 = -s_1 = -6$$

$$q_2 = -\frac{s_2 + s_1 q_3}{2} = 9$$

$$q_1 = -\frac{s_3 + s_2 q_3 + s_1 q_2}{3} = -1$$

$$q_0 = -\frac{s_4 + s_3 q_3 + s_2 q_2 + s_1 q_1}{4} = -3$$

36 El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

Las raíces de este polinomio son los autovalores de la matriz dada. Ellos son

$$\lambda_1 = 3.69963$$
$$\lambda_2 = 1.76088$$
$$\lambda_3 = 1.00000$$
$$\lambda_4 = -0.460505$$

37 Obsérvense la cantidad de operaciones que se han realizado, contando con MATHEMATICA como elemento de cálculo en aptitud de operar con matrices y con un comando especifico para hallar las raíces del polinomio característico.

38 Si ese recurso no existiese, como era el caso en la época de Le Verrier, hubiese sido necesario calcular las distintas potencias de la matriz A

mediante el conocido algoritmo para el producto de matrices (filas por columnas), calcular luego las trazas, armar y computar los coeficientes del polinomio y resolverlo. Esto último implica, primero aislar las raíces, segundo aproximarlas por algún método como Raphson Newton, por ejemplo.

39 El número de operaciones que implica este método ha sido estudiado y puede afirmarse que es del orden de n^4 ($O(n^4)$)

40 Imagínese este trabajo para encontrar los modos de vibración de una estructura con una matriz, por ejemplo, de 40 x 40 lo que no es tan excepcional. ¡2.560.000 operaciones! Si cada operación insume un minuto, el cálculo lleva 14 años según jornadas de 8 horas de trabajo. Sin contar errores. Muy cómodo para calcular los modos de vibración de las alas de un jet que debe entrar al mercado en fecha fija.

IV.2 Método de Le Verrier – Faddeeva

41 Vera Nikolevna Faddeeva, 20 de setiembre 1906, Tambov, Rusia, 15 de Abril de 1983, Leningrado, Rusia

Casada con el también matemático Dmitrii Konstantinovich Faddeev, trabajó en distintas instituciones de investigación rusas. Su obra más conocida es *Computational methods of linear algebra* editada en castellano como Métodos de Cálculo en Algebra Lineal, texto que mereció calurosos elogios, entre ellos de G. E. Forsythe. (Fundador y Director del Departamento de Ciencias de la Computación en la Universidad de Standford)

42 El algoritmo de Le Verrier – Faddeeva, cuya demostración se omite, es operativamente muy sencillo. Consiste en formar una secuencia de matrices B, comenzando con B_1 igual a la matriz identidad del orden considerado, con esta se calcula q_{n-1}, con este valor y B_1 se calcula B_2 y, en base a esta se calcula q_{n-2}, con este ultimo valor y B_2 se calcula B_3, luego q_{n-3} y así sucesivamente. Se

forman dos secuencias: la de las matrices B y la de los coeficientes del polinomio característico.

43 Se presentan a continuación las dos secuencias mencionadas

$$B_1 = I_n \qquad q_{n-1} = -\frac{1}{1} traza(AB_1)$$

$$B_2 = AB_1 + q_{n-1} I_n \qquad q_{n-2} = -\frac{1}{2} traza(AB_2)$$

$$B_3 = AB_2 + q_{n-2} I_n \qquad q_{n-3} = -\frac{1}{3} traza(AB_3)$$

....

$$B_n = AB_{n-1} + q_1 I_n \qquad q_0 = -\frac{1}{n} traza(AB_n)$$

y se debe verificar que $AB_n + q_0 I_n = 0$

44 A continuación se aplica el algoritmo de Le Verrier-Faddeeva al caso ya tratado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = -\frac{1}{1} Traza\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = -6$$

$$B_2 = A.B_1 + q_3.I_4 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = -\frac{1}{2} Traza \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \right] = 9$$

$$B_3 = A.B_2 + q_2 I_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & -11 \\ -4 & -2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = -\frac{1}{3} Traza \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & -11 \\ -4 & -2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \right] = -1$$

$$B_4 = A.B_3 + q_1 I_4 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 2 & -5 \\ -8 & -5 & -4 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$q_0 = -\frac{1}{4} Traza \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 2 & -5 \\ -8 & -5 & -4 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \right] = -3$$

Verificación

$$A.B_4 + q_0 I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3$$

IV.3 Método de Krylov

45 **Alekséi Nikoláyevich Krylov** (ruso: Алексéй Николáевич Крылóв) (15 de agosto de 1863 - 26 de octubre de 1945), ingeniero naval ruso y matemático aplicado. Lleva su nombre el *Instituto de Investigación en Construcción de Buques Krylov*, en San Petersburgo, cuyo actual director es el reconocido Valentín Mijaílovich Pashin

46 El método de Krylov requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los coeficientes del polinomio característico. Este sistema se conforma a partir de la aplicación del teorema de Cayley Hamilton al polinomio característico

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + q_{n-3}\lambda_{n-3} + \ldots + q_1\lambda + q_0$$

$$P_n(A) = A^n + q_{n-1}A^{n-1} + q_{n-2}A^{n-2} + q_{n-3}A^{n-3} + \ldots + q_1 A + q_0 = 0$$

47 Si a la expresión del polinomio característico, evaluado para la matriz A (segunda expresión del párrafo anterior) se lo multiplica por derecha por un vector arbitrario $Y^{(0)}$ se tiene:

$$A^n Y^{(0)} + q_{n-1}A^{n-1}Y^{(0)} + q_{n-2}A^{n-2}Y^{(0)} + q_{n-3}A^{n-3}Y^{(0)} + \ldots + q_1 A Y^{(0)} + q_0 Y^{(0)} = 0$$

Donde

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Llamando $Y^{(1)}$ al producto de la matriz A por el vector $Y^{(0)}$ se tiene

$$Y^{(1)} = AY^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$Y^{(2)}$ al producto de A por $Y^{(1)}$ lo que implica la aplicación de A^2 sobre $Y^{(0)}$

$$Y^{(2)} = A^2Y^{(0)} = AY^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(2)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

En general

$$Y^{(k)} = A^kY^{(0)} = AY^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(k-1)} \end{bmatrix} \qquad k = 1, n$$

48 Con estos vectores se forma el sistema lineal

$$q_{n-1}\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} \\ y_2^{(n-1)} \\ y_3^{(n-1)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + q_{n-2}\begin{bmatrix} y_1^{(n-2)} \\ y_2^{(n-2)} \\ y_3^{(n-2)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(n-2)} \end{bmatrix} + q_{n-3}\begin{bmatrix} y_1^{(n-3)} \\ y_2^{(n-3)} \\ y_3^{(n-3)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(n-3)} \end{bmatrix} + \ldots + q_1\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix} + q_0\begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Expresado en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-3)} & \ldots & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-3)} & \ldots & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(n-1)} & y_3^{(n-2)} & y_3^{(n-3)} & \ldots & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-3)} & & y_n^{(1)} & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ q_{n-3} \\ \\ \\ q_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Resuelto este sistema por alguno de los métodos conocidos, se tienen los coeficientes del polinomio característico.

49 Cabe señalar que, siendo el vector $Y^{(0)}$ arbitrario se toma como tal el que menos trabajo implica, por ejemplo, se toma el vector

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo posible elegir otro si el sistema resulta mal condicionado.

50 Como ejemplo, se encuentra el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

se toma como vector arbitrario al vector

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se calcula

$$Y^{(1)} = A.Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(2)} = A.Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(3)} = A.Y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -14 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(4)} = A.Y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -14 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 \\ -30 \\ -50 \\ -72 \end{bmatrix}$$

El sistema lineal a resolver es

$$\begin{bmatrix} -9 & -1 & 1 & 1 \\ -8 & -2 & 0 & 0 \\ -14 & -4 & -2 & 0 \\ -18 & -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -41 \\ -30 \\ -50 \\ -72 \end{bmatrix}$$

Se obtienen los valores $q_3 = -6 \quad q_2 = 9 \quad q_1 = -1 \quad q_0 = -3$ con lo cual el polinomio característico es

$$Q_4(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3$$

IV.4 Método de los coeficentes indeterminados

51 Siendo el polinomio característico

$$Q_n(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + q_{n-3}\lambda^{n-3} + \ldots + q_1\lambda + q_0$$

su determinación requiere el cálculo de los n valores (números) q_{n-1} , q_{n-2}, q_{n-3} , ... , q_2 , q_1 , q_0.

Para ello se puede "armar" un sistema de ecuaciones lineales asignando a la variable λ, n valores distintos, calculando para cada uno de ellos el determinante $\det(A - \lambda I)$ ¡Nada menos!

Por supuesto, esta elección debe ser hecha de froma tal que el trabajo material de cálculo sea lo más simple posible.

Por ello, se eligen, por ejemplo, los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n-1.

52 Efectuando esos reemplazos se tiene

$$\begin{cases} Q_n(0) = q_0 \\ Q_n(1) = 1 + q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + \ldots + q_1 + q_0 \\ Q_n(2) = 2^n + 2^{n-1}q_{n-1} + 2^{n-2}q_{n-2} + 2^{n-3}q_{n-3} + \ldots + 2q_1 + q_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n(n-1) = (n-1)^n + (n-1)^{(n-1)}q_{n-1} + (n-1)^{(n-2)}q_{n-2} + \ldots + (n-1)q_1 + q_0 \end{cases}$$

53 Operando resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & 2^{n-4} & \ldots & 2 \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & 3^{n-4} & \ldots & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-1)^{n-1} & (n-1)^{n-2} & (n-1)^{n-3} & (n-1)^{n-4} & \ldots & n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ q_{n-3} \\ \ldots \\ \ldots \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_n(1) - Q_n(0) - 1 \\ Q_n(2) - Q_n(0) - 2^n \\ Q_n(3) - Q_n(0) - 3^n \\ \\ \\ Q_n(n-1) - Q_n(0) - (n-1)^n \end{bmatrix}$$

54 ¡Cuidado! Si bien es un método que proporciona los coeficientes del polinomio característico, no se debe pasar por alto que requiere el cálculo de n determinantes de orden n que sin duda era una carga de trabajo muy pesada para valores elevados de n y conste, se utiliza el tiempo pasado porque los

sistemas algebraicos en uso permiten, mediante un comando especifico esa evaluación de manera rápida y carente de errores,

55 Obsérvese también que la matriz de coeficientes no depende de la matriz en estudio, hecho que permite, para un orden determinado, almacenarla junto a su inversa para su aplicación automática ante un caso concreto, evitando esa fase de cálculo.

56 Como ejemplo se calcula el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se “construye” la función

$$Q_4(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Se calcula

$$\begin{aligned} Q_4(0) &= -3 \\ Q_4(1) &= 0 \\ Q_4(2) &= -1 \\ Q_4(3) &= -6 \end{aligned}$$

Con esos valores el vector de términos independientes resulta

$$T = \begin{bmatrix} Q_4(1) - Q_4(0) - 1 \\ Q_4(2) - Q_4(0) - 2^4 \\ Q_4(3) - Q_4(0) - 3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -14 \\ -84 \end{bmatrix}$$

La matriz del sistema a resolver, cuyos elementos NO dependen de la matriz A dada, es

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el SEL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -14 \\ -84 \end{bmatrix}$$

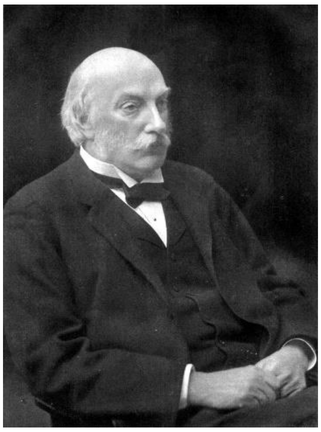
Resultan

$$\begin{aligned} q_3 &= -6 \\ q_2 &= 9 \\ q_1 &= -1 \end{aligned}$$

Con estos valores, el polinomio característico resulta

$$Q_4(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3$$

V Método de Raileygh



57 John Strutt, tercer Barón de Raileygh, nació en Langford Grove, Essex, UK en 1842 y falleció en Withman, Essex en 1919. Se graduó en matemática en el Trinity College de la Universidad de Cambridge. En 1904 ganó el premio Nobel de Física por sus investigaciones sobre gases y el descubrimiento del argón.

58 Se trata de un método iterativo que, partiendo de un vector arbitrario $X^{(0)}$ permite generar una secuencia convergente hacia el valor del autovalor correspondiente. Evita el cálculo del polinomio característico pero exige la solución reiterada de sistemas de ecuaciones lineales.

59 Para ello, dado $X^{(k)}$ se define el cociente de Raileygh como el número

$$\mu_k = \frac{X^{(k)t}.A.X^{(k)}}{X^{(k)t}.X^{(k)}}$$

Es evidente que, si en el paso n, $X^{(n)}$ es un autovector, entonces

$$\mu_n = \frac{X^{(n)t}.A.X^{(n)}}{X^{(n)t}.X^{(n)}} = \frac{X^{(n)t}\lambda_i X^{(n)}}{X^{(n)t}.X^{(n)}} = \lambda_i$$

60 Entonces, elegido $X^{(0)}$ (Puede ser tomado de la representación gráfica a mano alzada del primer modo de vibración de una pieza elástica, una viga, por ejemplo) se calcula

$$\mu_0 = \frac{X^{(0)t}.A.X^{(0)}}{X^{(0)t}.X^{(0)}}$$

Con ese valor μ_0 se resuelve el sistema

$$(A - \mu_0 I)X^{(1)} = X^{(0)}$$

Con $X^{(1)}$ así determinado, se calcula

$$\mu_1 = \frac{X^{(1)t}.A.X^{(1)}}{X^{(1)t}.X^{(1)}}$$

Y, con este valor se determina $X^{(2)}$ resolviendo el sistema

$$(A-\mu_1 I)X^{(2)} = X^{(1)}$$

61 Se continua con la dupla

$$\mu_k = \frac{X^{(k)t}.A.X^{(k)}}{X^{(k)t}.X^{(k)}}$$

$$(A-\mu_k I)X^{(k+1)} = X^{(k)}$$

Cabe señalar que la convergencia de este método es muy buena, dependiendo naturalmente de la bondad de la elección de $X^{(0)}$. Según la bibliografía consultada, esta convergencia es cuadrática. Su formulación y análisis están fuera del alcance de estas páginas.

62 Como ejemplo se calcula a continuación el mayor autovalor de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se toma como vector inicial

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y se calcula (sin grandes esperanzas) el cociente de Raileygh

$$\mu_1 = \frac{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & 1\\4 & 5 & 2 & 0 & 2\\3 & 2 & 5 & 1 & 3\\2 & 0 & 1 & 5 & 4\\1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}} = 13.8$$

Siguiendo lo indicado en párrafo 76 precedente, se resuelve el SEL

$$\left[\begin{bmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & 1\\4 & 5 & 2 & 0 & 2\\3 & 2 & 5 & 1 & 3\\2 & 0 & 1 & 5 & 4\\1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix} - 13.8\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}x_1^1\\x_2^1\\x_3^1\\x_4^1\\x_5^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Resulta así el vector

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix}10.562\\9.3149\\10.0439\\8.11803\\10.3177\end{bmatrix}$$

Y el correspondiente cociente de Raileygh resulta

$$\mu_2 = \frac{X^{(1)t}.A.X^{(1)}}{X^{(1)t}.X^{(1)}} = 13.9025$$

Con un paso más de cálculo se obtiene

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.41321x10^6 \\ 1.24726x10^6 \\ 1.344422x10^6 \\ 1.08909x10^6 \\ 1.38126x10^6 \end{bmatrix}$$

Mientras que el cociente de Raileygh da, en este caso

$$\mu_3 = \frac{X^{(2)t}.A.X^{(2)}}{X^{(2)t}.X^{(2)}} = 13.9026 = \lambda_1$$

63 Se desarrolla a continuación un segundo ejemplo. Se trata de hallar el mayor autovalor de la matriz (cuyos elementos fueron escritos en forma absolutamente arbitraria por los autores) al sólo efecto de presentar, por segunda vez, la potencia del método

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & 8 & 8 & 0 \\ -3 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 7 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Se toma como vector arbitrario de partida al vector

$$W^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.25 \\ 0.75 \\ 1.00 \\ 0.75 \\ 0.25 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Se calcula

$$\mu_1 = \frac{W^{(0)t}.A.W^{(0)}}{W^{(0)t}.W^{(0)}} = 12.3333$$

Y se resuelve el SEL

$$(A - \mu_1 I)W^{(1)} = W^{(0)}$$

Resulta

$$W^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.238329 \\ 0.180045 \\ 0.247604 \\ 0.198931 \\ 0.156941 \\ 0.005428 \\ 0.221707 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \frac{W^{(1)t}.A.W^{(1)}}{W^{(1)t}.W^{(1)}} = 14.4125$$

Resolviendo nuevamente un SEL de 7x7 se obtiene

$$W^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0847715 \\ 0.0810581 \\ 0.119883 \\ 0.098396 \\ 0.112121 \\ 0.0189105 \\ 0.102373 \end{bmatrix}$$

$$\mu_3 = \frac{W^{(2)t}.A.W^{(2)}}{W^{(2)t}.W^{(2)}} = 16.4453$$

Otro SEL de 7x7 da

$$W^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.339927 \\ -0.30435 \\ -0.452344 \\ -0.37743 \\ -0.397474 \\ -0.062098 \\ -0.380466 \end{bmatrix}$$

$$\mu_4 = \frac{W^{(3)t}.A.W^{(3)}}{W^{(3)t}.W^{(3)}} = 16.179$$

Un último SEL de 7x7 da

$$W^{(4)} = \begin{bmatrix} 63.4409 \\ 56.6905 \\ 84.2969 \\ 70.3838 \\ 73.9728 \\ 11.5427 \\ 70.8595 \end{bmatrix}$$

$$\mu_5 = \frac{W^{(4)t}.A.W^{(4)}}{W^{(4)t}.W^{(4)}} = 16.1736 = \lambda_1$$

Como verificación se copia a continuación el cálculo de los autovectores mediante MATHEMATICA. Obsérvese el primer valor de la lista.

```
e = N[Eigenvalues[a]]

{16.1736, -0.733091 + 7.21184 i, -0.733091 - 7.21184 i, 1.39503 + 5.02975 i, 1.39503 - 5.02975 i, 2.89115, -2.38866}
```

V Método de la potencia

64 Este método también evita el cálculo del polinomio característico junto a los problemas emergentes del cálculo de sus raíces, por ejemplo, inestabilidades ya vistas para grados elevados. Se aplica al cálculo del denominado autovalor dominante de una matriz, designándose con ese nombre al autovalor de mayor valor absoluto.

65 Es decir, el método de la potencia es apto para el cálculo del autovalor λ_1 cuando se verifica

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

obsérvese el sentido estricto de la desigualdad existente entre los dos primeros autovalores, mientras que entre los restantes, el sentido de la desigualdad es amplio.

66 Si se dan esas condiciones el cálculo se apoya en el siguiente teorema: Sea A una matriz diagonalizable con autovalor dominante λ_1 . Existe un vector no nulo $X^{(0)}$ tal que la secuencia

$$
\begin{aligned}
& X^{(0)} \\
& X^{(1)} = AX^{(0)} \\
& X^{(2)} = AX^{(!)} = A^2 X^{(0)} \\
& X^{(3)} = AX^{(2)} = A^3 X^{(0)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& X^{(n)} = AX^{(n-1)} = A^n X^{(0)}
\end{aligned}
$$

tiende al autovector dominante de la matriz A

67 Para probarlo se considera, primero la desigualdad

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

segundo, los autovectores linealmente independientes correspondientes a cada uno de los autovalores de A, formando una base para dicho espacio. Llamando e_1, e_2 , e_3 , ..., e_n a esos vectores, el vector $X^{(0)}$ puede escribirse:

$$X^{(0)} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n$$

Donde los c_k k= 1, n son números

68 Siendo los e_i autovectores correspondientes a los autovalores λ_i se verifica

$$Ae = \lambda e \qquad \Rightarrow \qquad A^n e = \lambda^n e$$

entonces

$$X^{(k)} = A^k X^{(0)} = c_1 \lambda_1{}^k e_1 + c_2 \lambda_2{}^k e_2 + c_3 \lambda_3{}^k e_3 + \ldots + c_n \lambda_n{}^k e_n$$

Tomando factor común λ_1^k resulta

$$X^{(k)} = \lambda_1^{\,k}\left[c_1 e_1 + c_2 e_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + c_3 e_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k + \ldots + c_n e_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \right]$$

Por ser λ_1 dominante, los cocientes $\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1}$ $\quad j = 2, n$ son menores que la unidad, entonces cuando $k \to \infty$ se verifica

$$X^{(k)} \to \lambda_1^{\,k} c_1 e_1$$

Lo que indica que $X^{(k)}$ tiende a ser un múltiplo del autovector e_1, autovector dominante. Esto completa la prueba.

69 Sin embargo queda una pregunta. ¿cual es el autovalor dominante? Para calcularlo, se toma, por ejemplo, la primer componente de cada uno de los vectores $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots, X^{(n-1)}, X^{(n)}; \ldots$ y se las relaciona. Siendo $X^{(k)}$ un múltiplo de e_1 la relación entre ambas componentes tenderá a λ_1.

70 Como ejemplo aplicación de este método se calcula el autovalor de mayor módulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se elige el vector

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y se calculan en forma sucesiva

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 55 \\ 48 \\ 43 \\ 27 \\ 35 \end{bmatrix} \qquad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 685 \\ 616 \\ 608 \\ 428 \\ 563 \end{bmatrix} \qquad X^{(4)} = \begin{bmatrix} 9132 \\ 8162 \\ 8444 \\ 6370 \\ 8268 \end{bmatrix}$$

$$X^{(5)} = \begin{bmatrix} 124648 \\ 110762 \\ 117114 \\ 91630 \\ 117608 \end{bmatrix} \qquad X^{(6)} = \begin{bmatrix} 1718498 \\ 1521846 \\ 1625492 \\ 1294992 \\ 1652074 \end{bmatrix} \qquad X^{(7)} = \begin{bmatrix} 23798408 \\ 21038354 \\ 22577860 \\ 18145744 \\ 23079004 \end{bmatrix} \qquad X^{(8)} = \begin{bmatrix} 330249528 \\ 291699130 \\ 313743988 \\ 253219412 \\ 321586692 \end{bmatrix}$$

$$X^{(9)} = \begin{bmatrix} 4587301640 \\ 4050155122 \\ 4360846272 \\ 3526686872 \\ 4475690860 \end{bmatrix} \qquad X^{(10)} = \begin{bmatrix} 63748732108 \\ 56273056434 \\ 60620205976 \\ 49071647352 \\ 62255352488 \end{bmatrix}$$

71 Relacionando las primeras componentes de cada vector se tiene

$$\mu_1 = \frac{x_1^1}{x_1^0} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \mu_2 = \frac{x_1^2}{x_1^1} = \frac{55}{5} = 11 \qquad \mu_3 = \frac{x_1^3}{x_1^2} = \frac{685}{55} = 12.4545$$

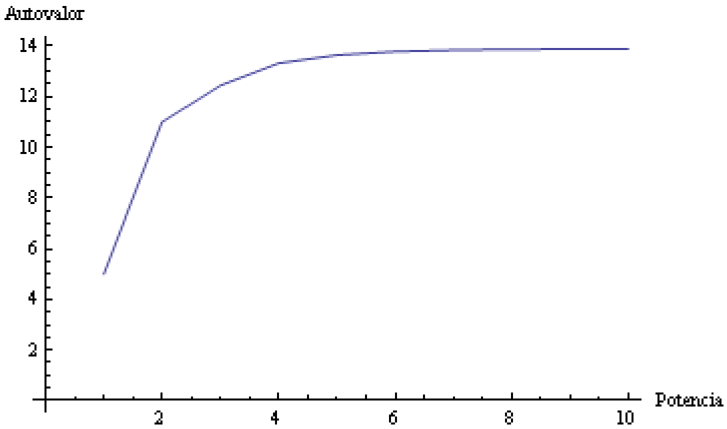
$$\mu_4 = \frac{x_1^4}{x_1^3} = \frac{9132}{685} = 13.3314 \qquad \mu_5 = \frac{x_1^5}{x_1^4} = \frac{124648}{9132} = 13.6496$$

$$\mu_6 = \frac{x_1^6}{x_1^5} = \frac{1418798}{124648} = 13.7868 \qquad \mu_7 = \frac{x_1^7}{x_1^6} = \frac{23798408}{1418798} = 13.8484$$

$$\mu_8 = \frac{x_1^8}{x_1^7} = \frac{330249528}{23798408} = 13.877 \qquad \mu_9 = \frac{x_1^9}{x_1^8} = \frac{4587301640}{330249528} = 13.8904$$

$$\mu_{10} = \frac{x_1^{10}}{x_1^9} = \frac{63748732108}{4587301640} = 13.8968$$

Llevados estos valores a un gráfico resulta



Donde la convergencia es apreciable

VII **Método de la potencia inversa**

72 El denominado método de la potencia inversa permite determinar el autovalor más chico de una matriz A.

73 Para ello obsérvese que siendo λ un autovalor de la matriz A debe cumplirse que

$$AX = \lambda X$$

Premultiplicando por A^{-1} resulta

$$A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$$

Lo que indica que los autovalores de A^{-1} son las inversas de los autovalores de A. En consecuencia, el mayor autovalor de A^{-1} debe ser el menor autovalor de A

74 Cambiando de notación a efectos de simplificar el tema, partiendo de un vector arbitrario $W^{(0)}$ se deben ir calculando los vectores $W^{(K)}$ mediante

$$
\begin{aligned}
&W^{(0)}\\
&W^{(1)} = A^{-1}W^{(0)}\\
&W^{(2)} = A^{-1}W^{(!)} = (A^{-1})^2 W^{(0)}\\
&W^{(3)} = A^{-1}W^{(2)} = (A^{-1})^3 W^{(0)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&W^{(n)} = A^{-1}W^{(n-1)} = (A^{-1})^n W^{(0)}
\end{aligned}
$$

En lugar de invertir la matriz A, lo que acarrea inevitables errores numéricos, es preferible resolver los sistemas lineales

$$
\begin{aligned}
&AW^{(1)} = W^{(0)} \quad \Rightarrow \quad W^{(1)}\\
&AW^{(2)} = W^{(1)} \quad \Rightarrow \quad W^{(2)}\\
&AW^{(3)} = W^{(2)} \quad \Rightarrow \quad W^{(3)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&AW^{(n)} = W^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad W^{(n)}
\end{aligned}
$$

75 Se calcula a continuación el menor autovalor de la matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}
$$

Tomando como vector arbitrario inicial a

$$
W^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Y resolviendo los SEL indicados se tiene:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \\ w_4^1 \\ w_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad W^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.083333 \\ 0.166667 \\ 0.166667 \\ 0.333333 \\ -0.416667 \end{bmatrix}$$

De la misma forma se obtienen sucesivamente los siguientes vectores (¡ATENCION! Cada uno de ellos requiere sea resuelto un sistema de ecuaciones lineales de 5x5. Imagínese un trabajo similar para una matriz de 10x10 nada más, sin ayuda de los sistemas de cálculo disponibles)

$$W^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.347222 \\ -0.276144 \\ -0.163399 \\ -0.23366 \\ 0.242347 \end{bmatrix}$$

$$W^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.281182 \\ 0.231337 \\ 0.188709 \\ 0.302207 \\ -0.342761 \end{bmatrix}$$

$$W^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.336992 \\ -0.279746 \\ -0.191819 \\ -0.302286 \\ 0.332868 \end{bmatrix}$$

$$W^{(5)} = \begin{bmatrix} -0.346134 \\ 0.284763 \\ 0.211534 \\ 0.332527 \\ -0.371047 \end{bmatrix}$$

$$W^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.377006 \\ -0.311769 \\ -0.223381 \\ -0.352559 \\ 0.391172 \end{bmatrix}$$

$$W^{(7)} = \begin{bmatrix} '0.401117 \\ 0.330885 \\ 0.240832 \\ 0.379125 \\ -0.421695 \end{bmatrix}$$

$$W^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.430794 \\ -0.35577 \\ -0.257204 \\ -0.405439 \\ 0.400484 \end{bmatrix}$$

$$W^{(9)} = \begin{bmatrix} -0.46091 \\ 0.380451 \\ 0.275835 \\ 0.404531 \\ -0.483027 \end{bmatrix}$$

$$W^{(10)} = \begin{bmatrix} 0.493895 \\ -0.407766 \\ -0.295283 \\ -0.465302 \\ 0.517134 \end{bmatrix}$$

Calculando con este último vector el cociente de Raileygh se obtiene para la matriz dada $\lambda_{\min} = -0.933633$ valor que coincide con el que se obtiene con el comando Eigenvalues[a] en MATHEMATICA

VI Factorización

76 El factoreo de la matriz dada como producto de otras dos matrices es el punto de partida de diversos algoritmos de álgebra lineal. Entre ellos, el factoreo denominado QR, donde Q es una matriz ortogonal (ortonormal) y R

es una matriz triangular superior da origen a uno de los métodos más modernos y utilizados para el cálculo de los autovalores.

77 La bibliografía menciona tres métodos distintos para el factoreo QR. Ellos son:

El método de Gram Schmidt
El método de Householder
El método de Givens

78 En este trabajo solamente será considerado el método denominado de Gram Schmidt (aunque parece que Laplace y Cauchy trabajaron con anterioridad en el tema) en honor a Jorgen Pedersen Gram y Erhard Schmidt, ambos en las fotos siguientes

27 jun 1850 Nustrup (Dinamarca) 29 abr 1916 Copenhagen, el priemro y el segundo 13 ene 1876 Tartu (Estonia en esa época) 6 dic 1959 Berlin,

79 Básicamente el método de Gram Schmidt es un algoritmo que, a partir de una base del espacio, permite encontrar otra para el mismo espacio y que, además sea ortogonal (ortonormal)

80 Sea entonces $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ una base de E_n y $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ una base ortogonal (ortonormal) para el mismo espacio. El algoritmo procede de la siguiente forma:

1° Se toma $q_1 = a_1$. Se normaliza, calculando $r_{11} = \|q_1\|$ $e_1 = \dfrac{q_1}{r_{11}}$

2° Se toma $q_2 = a_2 - r_{12} e_1$ y se calcula r_{12} para que q_1 y q_2 sean ortogonales. Esto es $e_1 . q_2 = e_1 a_2 - r_{12} e_1 e_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{12} = e_1\, a_2$

3° Se calcula $r_{22} = \|q_2\|$ $e_2 = \dfrac{q_2}{r_{22}}$

4° Se toma $q_3 = a_3 - r_{13}e_1 - r_{23}e_2$ y se calculan r_{13} y r_{23} para que los vectores q_3 y q_2 y q_3 y q_1 sean ortogonales. Multiplicando escalarmente por e_1 y recordando que q_2 fue calculado para que fuese ortogonal a q_1 resulta:

$$r_{13} = e_1 a_3$$

Análogamente resulta

$$r_{23} = e_2 a_3$$

4° Se calcula

$$r_{33} = \|q_3\| \qquad e_3 = \frac{q_3}{r_{33}}$$

5° Se continua de esta forma hasta haber considerado todos los elementos de la base a, obteniéndose asi una matriz ortogonal Q y otra ortonormal E

81 Con estos elementos puede escribirse

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}e_1 \\ q_2 &= r_{22}e_2 \\ q_3 &= r_{33}e_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= r_{nn}e_n \end{aligned}$$

82 Por otra parte

$$\begin{aligned} q_2 &= a_2 - r_{12}e_1 \\ q_3 &= a_3 - r_{13}e_1 - r_{23}e_2 \\ q_4 &= a_4 - r_{14}e_1 - r_{24}e_2 - r_{34}e_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= a_n - r_{1n}e_1 - r_{2n}e_2 - \ldots - r_{n-1,n}e_{n-1} \end{aligned}$$

83 Despejando las a_i de las expresiones anteriores, se tiene

$$
\begin{aligned}
a_1 &= r_{11}e_1 \\
a_2 &= r_{12}e_1 + r_{22}e_2 \\
a_3 &= r_{13}e_1 + r_{23}e_2 + r_{33}e_3 \\
a_4 &= r_{14}e_1 + r_{24}e_2 + r_{34}e_3 + r_{44}e_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= r_{1n}e_1 + r_{2n}e_2 + \ldots + r_{n-1,n}e_{n-1} + r_{nn}e_n
\end{aligned}
$$

84 Las expresiones anteriores pueden escribirse, con lenguaje matricial como

$$
\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \ldots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \ldots & r_{3n} \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & & r_{nn} \end{bmatrix}
$$

que corresponde al factoreo de la matriz A en el producto de una matriz ortonormal E por otra triangular superior R

85 Cabe mencionar que la bibliografía consultada señala claramente que este método, en razón a la aritmética en uso se "contamina" con errores que se propagan a través del proceso de cálculo, haciendo en ciertos casos absolutamente inapropiados los resultados. Wolfran (MATHEMATICA) dice al respecto "*The Gram–Schmidt process is an algorithm for converting a set of linearly independent vectors into a set of orthonormal vectors with the same span. The classical Gram–Schmidt algorithm is numerically unstable, which means that when implemented on a computer, round-off errors can cause the output vectors to be significantly non-orthogonal*"

86 A fin de ensayar sobre estas aseveraciones se agregan a continuación tres ejemplos, realizados en búsqueda de resultados inapropiados.

87 Primer ejemplo. Factorear la matriz *A* (3x3) en una matriz ortonormal por otra triangular superior.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad a_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \qquad a_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$q_1 = a_1$$
$$r_{11} = \sqrt{3}$$

$$e_1 = \frac{q_1}{r_{11}} = \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix}$$

$$r_{12} = e_1.a_2 = -1.1547$$

$$q_2 = a_2 - r_{12}a_2 = \begin{bmatrix} 1.66667 \\ -0.33333 \\ -1.33333 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \sqrt{1.66667^2 + (0.33333)^2 + (-1.33333)^2} = 2.16025$$

$$e_2 = \frac{q_2}{r_{22}} = \begin{bmatrix} 0.771517 \\ -0.154303 \\ -0.617213 \end{bmatrix}$$

$$r_{13} = e_1.a_3 = 1.1547$$
$$r_{23} = e_2.a_3 = 0.154303$$

$$q_3 = a_3 - r_{13}e_1 - r_{23}e_2 = \begin{bmatrix} 0.214286 \\ -0.642857 \\ 0.428571 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \sqrt{0.214286^2 + (-0.642857)^2 + 0.428571^2} = 0.801784$$

$$e_3 = \frac{q_3}{r_{33}} = \begin{bmatrix} 0.267261 \\ -0.801784 \\ 0.534522 \end{bmatrix}$$

Con estos elementos se forman las matrices

$$E = \begin{bmatrix} 0.57735 & 0.771517 & 0.267261 \\ 0.57735 & -0.154303 & -0.801784 \\ 0.57735 & -0.617213 & 0.534522 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1.1547 & 1.1547 \\ 0 & 2.16025 & 0.15303 \\ 0 & 0 & 0.801784 \end{bmatrix}$$

Verificándose que E.R=A. Se deja constancia que la ortogonalidad de e_1 con e_2 y con e_3 y la de e_2 con e_3 ha sido verificada.

88 Segundo ejemplo. Factorear la matriz A (4x4) en una matriz ortonormal por otra triangular superior. Se procederá a verificar la ortogonalidad de los vectores e hallados.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = a_1$$

$$r_{11} = \|q_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$$

$$e_1 = \frac{q_1}{r_{11}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$r_{12} = e_1.a_2 = -1$$

$$q_2 = a_2 - r_{12}e_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|q_2\| = 2.23607$$

$$e_2 = \frac{q_2}{r_{22}} = \begin{bmatrix} 0.67082 \\ -0.223607 \\ -0.67082 \\ 0.223607 \end{bmatrix}$$

$$r_{13} = e_1.a_3 = 2$$
$$r_{23} = e_2.a_3 = 0.447214$$

$$q_3 = a_3 - r_{13}e_1 - r_{23}e_2 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.9 \\ 0.3 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$
$$r_{33} = \|q_3\| = 1.34264$$

$$e_3 = \frac{q_3}{r_{33}} = \begin{bmatrix} -0.223607 \\ -0.67082 \\ 0.223607 \\ 0.67082 \end{bmatrix}$$

$$r_{14} = e_1.a_4 = 1.5$$
$$r_{24} = e_2.a_4 = -1.56525$$
$$r_{34} = e_3.a_4 = -0.223607$$

$$q_4 = a_4 - r_{14}e_1 - r_{24}e_2 - r_{34}e_3 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.25 \\ 0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

$$r_{44} = \|q_4\| = 0.5$$

$$e_4 = \frac{q_4}{r_{44}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.67082 & -0.223607 & 0.5 \\ 0.5 & -0.223607 & -0.67082 & -0.5 \\ 0.5 & -0.67082 & 0.223607 & 0.5 \\ 0.5 & 0.223607 & 0.67082 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1.5 \\ 0 & 2.23607 & 0.447214 & -1.56525 \\ 0 & 0 & 1.34164 & -0.223607 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Como verificación se calcula el producto E.R, obteniéndose la matriz (traída directamente de una sesión de MATHEMATICA) donde se observa un "casi cero" en la posición a_{14}.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -2. & 0. \\ 1. & 0. & 1. & 2. \\ -5.55112 \times 10^{-17} & 1. & 2. & 0. \end{pmatrix}$$

89 Tercer ejemplo. Factorear la matriz A (5x5) en una matriz ortonormal por otra triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2} = 7.4162$$

$$e_1 = \frac{q_1}{r_{11}} = \begin{bmatrix} 0.6742 \\ 0.53936 \\ 0.40452 \\ 0.26968 \\ 0.13484 \end{bmatrix}$$

$$r_{12} = e_1.a_2 = 6.47232$$

$$q_2 = a_2 - r_{12}e_1 = \begin{bmatrix} -0.363636 \\ 1.50909 \\ -0.618182 \\ -1.74545 \\ 1.12727 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|q_2\| = 2.66629$$

$$e_2 = \frac{q_2}{r_{22}} = \begin{bmatrix} -0.136383 \\ 0.565989 \\ -0.231851 \\ -0.654638 \\ 0.422787 \end{bmatrix}$$

Verificación: $e_1.e_2 = -2.22045x10^{-16}$ valor que se acepta como cero.

$$r_{13} = e_1.a_3 = 5.79812$$
$$r_{23} = e_2.a_3 = 0.177298$$

$$q_3 = a_3 - r_{13}e_1 - r_{23}e_2 = \begin{bmatrix} -0.88491 \\ -1.22762 \\ 2.69565 \\ -0.44757 \\ 2.14322 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|q_3\| = 3.78819$$

$$e_3 = \frac{q_3}{r_{33}} = \begin{bmatrix} -0.233597 \\ -0.324065 \\ 0.711594 \\ -0.118149 \\ 0.565764 \end{bmatrix}$$

Verificaciones: $e_3.e_1 = 2.63678x10^{-16}$ y $e_3.e_2 = -1{,}11022x10^{-16}$, de nuevo, "casi" cero.

$$r_{14} = e_1 a_4 = 3.64068$$
$$r_{24} = e_2 a_4 = -2.08666$$
$$r_{34} = e_3 a_4 = 1.191671$$

$$q_4 = a_4 - r_{14}e_1 - r_{24}e_2 - r_{34}e_3 = \begin{bmatrix} -0.291392 \\ -0.161469 \\ -2.32044 \\ 2.87863 \\ 3.30690 \end{bmatrix}$$

$$r_{44} = \|q_4\| = 4.97167$$

$$e_4 = \frac{q_4}{r_{44}} = \begin{bmatrix} -0.0586104 \\ -0.0324777 \\ -0.466733 \\ 0.579007 \\ 0.665148 \end{bmatrix}$$

$$r_{15} = e_1 a_5 = 4.7194$$
$$r_{25} = e_2 a_5 = -0.204575$$
$$r_{35} = e_3 a_5 = 3.60928$$
$$r_{45} = e_4 a_5 = 4.118$$

$$q_5 = a_5 - r_{15}e_1 - r_{25}e_2 - r_{35}e_3 - r_{45}e_4 = \begin{bmatrix} -1.12524 \\ 0.873714 \\ 0.397145 \\ 0.635432 \\ -0.330954 \end{bmatrix}$$

$$r_{55} = 1.64335$$

$$e_5 = \frac{q_5}{r_{55}} = \begin{bmatrix} -0.684727 \\ 0.531671 \\ 0.241668 \\ 0.386670 \\ -0.20139 \end{bmatrix}$$

Con estos valores, la matriz ortonormal E resulta

$$\begin{pmatrix} 0.6742 & -0.136383 & -0.233597 & -0.0586104 & -0.684727 \\ 0.53936 & 0.565989 & -0.324065 & -0.0324777 & 0.531671 \\ 0.40452 & -0.231851 & 0.711594 & -0.466733 & 0.241668 \\ 0.26968 & -0.654638 & -0.118149 & 0.579007 & 0.38667 \\ 0.13484 & 0.422787 & 0.565764 & 0.665148 & -0.20139 \end{pmatrix}$$

Y la matriz triangular superior R

$$\begin{pmatrix} 7.4162 & 6.47232 & 5.79812 & 3.64068 & 4.7194 \\ 0 & 2.66629 & 0.177298 & -2.08666 & -0.204575 \\ 0 & 0 & 3.78819 & 1.91671 & 3.60928 \\ 0 & 0 & 0 & 4.97167 & 4.118 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.64335 \end{pmatrix}$$

Como verificación se calcula ER obteniéndose

$$\begin{pmatrix} 5. & 4. & 3. & 2. & 1. \\ 4. & 5. & 2. & -1.38778\times 10^{-16} & 2. \\ 3. & 2. & 5. & 1. & 3. \\ 2. & -2.22045\times 10^{-16} & 1. & 5. & 4. \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \end{pmatrix}$$

Que reproduce bastante bien la matriz dada con los “casi” ceros

VI Método QR

90 El método de cálculo de autovalores denominado QR es uno de los más poderosos y estables. Fue presentado en forma simultánea por el inglés John Francis y la rusa Vera Kublanovskaya en 1960, cuyas fotografías se adjuntan a continuación, tomadas en oportunidad de realizarse un evento científico con motivo de cumplirse cincuenta años de la aparición del método.

Según autorizadas opiniones el algoritmo QR es uno de los diez más importantes del siglo XX y uno de los más utilizados. A tal punto que, para el cálculo de raíces de polinomios se utiliza este método con la denominada "matriz compañera"

91 En efecto, sea el polinomio de grado n

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + q_2\lambda^{n-2} + q_3\lambda^{n-3} + \ldots + q_{n-1}\lambda + q_n$$

La "matriz compañera" es

$$A = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 & \ldots & -q_{n-1} & -q_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuyos autovalores son las raíces del polinomio dado.

92 Retomando el tema, ¿En qué consiste el método QR? Simplemente (¿?) en factorear la matriz A cuyos autovalores se buscan como el producto de otras dos matrices: Q ortogonal y R triangular superior

$$A = QR$$

93 Una vez factoreada de esta forma la matriz A se genera la secuencia

$$\begin{aligned}
A = A_1 &= Q_1 R_1 \\
A_2 &= R_1 Q_1 \\
\\
A_2 &= Q_2 R_2 \\
A_3 &= R_2 Q_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
A_k &= Q_k R_k \\
A_{k+1} &= R_k Q_k
\end{aligned}$$

Se demuestra que si los autovalores son distintos y satisfacen la desigualdad

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_n|$$

$$\lim_{k \to \infty} A_k = D$$

donde D es una matriz triangular superior cuya diagonal principal está formada por los autovalores de la matriz dada.

94 Obsérvese que a lo largo de todo el proceso de cálculo se trabaja con matrices semejantes, debido a que

$$A = Q_1 R_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = Q_1^T A$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^T A Q_1$$

Lo que indica la semejanza entre las matrices A y A_2 y sucesivas. Recuérdese que cuando las matrices son ortogonales u ortonormales como es el caso de Q, la inversa es la traspuesta.

95 A continuación se buscan los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Utilizando este método resulta

A_4

$$\begin{pmatrix} 13.6496 & -0.765474 & 0.979705 & 0.57182 & 0.0172382 \\ -0.765474 & 5.09734 & -1.42543 & -1.7187 & 0.206377 \\ 0.979705 & -1.42543 & 3.731 & 0.462829 & 0.343314 \\ 0.57182 & -1.7187 & 0.462829 & 3.36852 & 0.357218 \\ 0.0172382 & 0.206377 & 0.343314 & 0.357218 & -0.846447 \end{pmatrix}$$

A_5

$$\begin{pmatrix} 13.8484 & -0.578477 & 0.220511 & 0.112034 & 0.0011864 \\ -0.578477 & 6.38628 & -0.707606 & -0.805709 & 0.0357721 \\ 0.220511 & -0.707606 & 3.13314 & -0.20293 & 0.125612 \\ 0.112034 & -0.805709 & -0.20293 & 2.55145 & 0.171193 \\ 0.0011864 & 0.0357721 & 0.125612 & 0.171193 & -0.919243 \end{pmatrix}$$

A_6

$$\begin{pmatrix} 13.8904 & -0.293551 & 0.0441982 & 0.0193816 & 0.0000800513 \\ -0.293551 & 6.59203 & -0.260977 & -0.296514 & 0.00520306 \\ 0.0441982 & -0.260977 & 3.0826 & -0.253633 & 0.0401474 \\ 0.0193816 & -0.296514 & -0.253633 & 2.36617 & 0.0782861 \\ 0.0000800513 & 0.00520306 & 0.0401474 & 0.0782861 & -0.93121 \end{pmatrix}$$

A_7

$$\begin{pmatrix} 13.8998 & -0.141088 & 0.00914948 & 0.00323685 & 5.38104\times 10^{-6} \\ -0.141088 & 6.61497 & -0.100215 & -0.104045 & 0.000737041 \\ 0.00914948 & -0.100215 & 3.10932 & -0.202851 & 0.0122541 \\ 0.00323685 & -0.104045 & -0.202851 & 2.30912 & 0.0341169 \\ 5.38104\times 10^{-6} & 0.000737041 & 0.0122541 & 0.0341169 & -0.933222 \end{pmatrix}$$

A_8

$$\begin{pmatrix} 13.9019 & -0.0672653 & 0.00196697 & 0.00053303 & 3.61439\times 10^{-7} \\ -0.0672653 & 6.61719 & -0.0415219 & -0.0359859 & 0.000104046 \\ 0.00196697 & -0.0415219 & 3.1306 & -0.150687 & 0.00367874 \\ 0.00053303 & -0.0359859 & -0.150687 & 2.28384 & 0.014494 \\ 3.61439\times 10^{-7} & 0.000104046 & 0.00367874 & 0.014494 & -0.933563 \end{pmatrix}$$

A_9

$$\begin{pmatrix} 13.9024 & -0.0320268 & 0.000433411 & 0.0000871795 & 2.42736\times 10^{-8} \\ -0.0320268 & 6.61735 & -0.0182407 & -0.0123641 & 0.0000146809 \\ 0.000433411 & -0.0182407 & 3.14278 & -0.109555 & 0.00109624 \\ 0.0000871795 & -0.0123641 & -0.109555 & 2.27108 & 0.00607755 \\ 2.42736\times 10^{-8} & 0.0000146809 & 0.00109624 & 0.00607755 & -0.933621 \end{pmatrix}$$

A_{10}

$$\begin{pmatrix} 13.9025 & -0.00725644 & 0.0000218075 & 2.31161\times10^{-6} & 1.09472\times10^{-10} \\ -0.00725644 & 6.61734 & -0.00387156 & -0.001447 & 2.92244\times10^{-7} \\ 0.0000218075 & -0.00387156 & 3.15267 & -0.0567066 & 0.0000964648 \\ 2.31161\times10^{-6} & -0.001447 & -0.0567066 & 2.26107 & 0.00105069 \\ 1.09472\times10^{-10} & 2.92244\times10^{-7} & 0.0000964648 & 0.00105069 & -0.933633 \end{pmatrix}$$

A_{11}

$$\begin{pmatrix} 13.9026 & -0.00345393 & 4.92987\times10^{-6} & 3.75723\times10^{-7} & 7.35104\times10^{-12} \\ -0.00345393 & 6.61734 & -0.00182351 & -0.000494122 & 4.12324\times10^{-8} \\ 4.92987\times10^{-6} & -0.00182351 & 3.15442 & -0.040639 & 0.0000285626 \\ 3.75723\times10^{-7} & -0.000494122 & -0.040639 & 2.25932 & 0.000435343 \\ 7.35164\times10^{-12} & 4.12324\times10^{-8} & 0.0000285626 & 0.000435343 & -0.933633 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son (elementos de la diagonal principal)

$$\lambda_1 = 13.9026(13.9026) \qquad \lambda_2 = 6.61734(6.61733) \qquad \lambda_3 = 3.15442(3.15626)$$
$$\lambda_4 = 2.25932(2.25748) \qquad \lambda_5 = -0.933633(-0.933633)$$

Aclarando que se ha colocado entre paréntesis los valores que se obtienen por cálculo de dicho valores con MATHEMATICA. Como es fácil observar la aproximación es excelente y los “casi” ceros parecen ser aceptables.

XX Autovectores

96 La determinación de los autovectores correspondientes a cada uno de los autovalores hallados constituye un problema que, cuando el rango de la matrices lo permite, puede solucionarse mediante operaciones algebraicas sencillas, teniendo en cuenta que el resultado no es un vector sino una familia de vectores de direcciones coincidentes.

97 El otros casos se requiere cálculo no demasiado sencillo y no todos los métodos de búsqueda de autovalores permiten la determinación de los correspondientes autovectores.

98 Como ejemplo de lo expresado, se calculan a continuación autovectores utilizando elementos del cálculo del polinomio característico por el método de Krylov.

99 En dicho método se calculan los vectores

$$Y^{(k)} = A^k Y^{(0)} = AY^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \\ \dots \\ \dots \\ y_n^{(k-1)} \end{bmatrix} \qquad k = 1, n$$

con los cuales se determinan, los coeficientes del polinomio característico mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales y, con este polinomio los autovalores que, en este caso, se supondrán distintos entre si.

100 Sea entonces

$$Q_n(\lambda) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + q_2\lambda^{n-2} + q_3\lambda^{n-3} + \dots + q_{n-1}\lambda + q_n$$

el polinomio característico y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ los autovalores distintos entre sí.

101 Se buscan los vectores característicos $X_1, X_2, X_3,..., X_n$ correspondientes a cada uno de los autovalores calculados.

102 Para ello se establece que el vector $Y^{(0)}$ arbitrario con el que comienza el método de Krylov es una combinación lineal de estos vectores X_k tomados como base

$$Y^{(0)} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + ... + c_n X_n$$

siendo los c_i números

103 Además siendo

$$\begin{aligned} AX_i &= \lambda_i X_i \\ A^2 X_i &= \lambda_i^2 X_i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^n X_i &= \lambda_i^n X_i \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y^{(1)} = AY^{(0)} &= c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + c_3 AX_3 + ... + c_n AX_n = \\ &= c_1\lambda_1 X_1 + c_2\lambda_2 X_2 + c_3\lambda_3 X_3 + ... + c_n\lambda_n X_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y^{(2)} &= c_1\lambda_1^2 X_1 + c_2\lambda_2^2 X_2 + c_3\lambda_3^2 X_3 + ... + c_n\lambda_n^2 X_n \\ Y^{(3)} &= c_1\lambda_1^3 X_1 + c_2\lambda_2^3 X_2 + c_3\lambda_3^3 X_3 + ... + c_n\lambda_n^3 X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^{(n-1)} &= c_1\lambda_1^{n-1} X_1 + c_2\lambda_2^{n-1} X_2 + c_3\lambda_3^{n-1} X_3 + ... + c_n\lambda_n^{n-1} X_n \end{aligned}$$

104 Se considera ahora la familia de polinomios

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{Q_n(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$$

Es evidente que siendo distintos los autovalores se cumple que $\varphi_i(\lambda_j) = 0$ y que $\varphi_i(\lambda_i) = Q_n'(\lambda_i) \neq 0$ en razón a que la definición es una indeterminación de la forma cero sobre cero que se puede resolver mediante la regla de L'Hopital.

105 Esos polinomios tienen la forma

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\lambda)=\lambda^{n-1}+p_{11}\lambda^{n-2}+p_{21}\lambda^{n-3}+\ldots+p_{n-1,1}\\
&\varphi_2(\lambda)=\lambda^{n-1}+p_{12}\lambda^{n-2}+p_{22}\lambda^{n-3}+\ldots+p_{n-1,2}\\
&\varphi_3(\lambda)=\lambda^{n-1}+p_{13}\lambda^{n-2}+p_{23}\lambda^{n-3}+\ldots+p_{n-1,3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(\lambda)=\lambda^{n-1}+p_{1n}\lambda^{n-2}+p_{2n}\lambda^{n-3}+\ldots+p_{n-1,n}
\end{aligned}$$

señalando que los coeficientes $p_{i,j}$ pueden calcularse por división entre $Q_n(\lambda)$ y $\lambda-\lambda_i$

106 Se escribe ahora la expresión

$$Y^{(n-1)}+p_{1,i}Y^{(n-2)}+p_{2,i}Y^{(n-3)}+p_{3,i}Y^{(n-4)}+\ldots+p_{n-1,i}Y^{(0)}$$

Dicha expresión, reemplazando los $Y^{(k)}$ por sus iguales antes determinados queda:

$$\begin{aligned}
&Y^{(n-1)}+p_{1,i}Y^{(n-2)}+p_{2,i}Y^{(n-3)}+p_{3,i}Y^{(n-4)}+\ldots+p_{n-1,i}Y^{(0)}=\\
&c_1\lambda_1^{n-1}X_1+c_2\lambda_2^{n-1}X_2+c_3\lambda_3^{n-1}X_3+\ldots+c_n\lambda_n^{n-1}X_n+\\
&p_{1,i}\left[c_1\lambda_1^{n-2}X_1+c_2\lambda_2^{n-2}X_2+c_3\lambda_3^{n-2}X_3+\ldots+c_n\lambda_n^{n-2}X_n\right]+\\
&p_{2,i}\left[c_1\lambda_1^{n-3}X_1+c_2\lambda_2^{n-3}X_2+c_3\lambda_3^{n-3}X_3+\ldots+c_n\lambda_n^{n-3}X_n\right]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{n-1,i}\left[c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+\ldots+c_nX\right]=\\
&c_1\varphi_i(\lambda_1)X_1+c_2\varphi_i(\lambda_2)X_2+\ldots+c_n\varphi_i(\lambda_n)X_n
\end{aligned}$$

Resumiendo, la igualdad que importa es

$$Y^{(n-1)}+p_{1i}Y^{(n-2)}+p_{2i}Y^{(n-3)}+p_{3i}Y^{(n-4)}+\ldots+p_{n-1,i}Y(0)=c_1\varphi_i(\lambda_1)X_1+c_2\varphi_i(\lambda_2)X_2+\ldots+c_n\varphi_i(\lambda_n)X_n$$

107 Recordando que $\varphi_i(x_j)=0$ resulta

$$c_i\varphi_i(\lambda_i)X_i=Y^{(n-1)}+p_{1,i}Y^{(n-2)}+p_{2,i}Y^{(n-3)}+p_{3,i}Y^{(n-4)}+\ldots+p_{n-1,i}Y(0)$$

Que, salvo un factor constante c_i permite determinar la relación de componentes del vector propio o autovector X_i

108 Se calculan a continuación los autovectores de la matriz siguiendo el procedimiento descripto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(1)} = A.Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(2)} = A.Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(3)} = A.Y^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ -14 \\ -18 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es entonces (Método de Krylov)

$$Q_4(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 3$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 3.69963, \lambda_2 = 1.76088, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -0.460505$

109 Por su parte, los polinomios $\varphi_i(\lambda)$ son los siguientes, obtenidos, como ya se ha dicho por división entre $Q_4(\lambda)$ y $\lambda-\lambda_i$

$$\varphi_1(\lambda)=\lambda^3-2.30037\lambda^2+0.48948\lambda+0.810892$$
$$\varphi_2(\lambda)=\lambda^3-4.23912\lambda^2+1.53543\lambda+1.7037$$
$$\varphi_3(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+4\lambda+3$$
$$\varphi_4(\lambda)=\lambda^3-6.4605\lambda^2+11.9751\lambda-6.51459$$

Con todos los elementos anteriores es posible determinar

$$c_1X_1=\frac{1}{\varphi_1(\lambda_1)}\left[Y^{(3)}+p_{11}Y^{(2)}+p_{21}Y^{(1)}+p_{31}Y^{(0)}\right]=$$

$$=\frac{1}{21.7738}\left[\begin{bmatrix}-9\\-8\\-14\\-18\end{bmatrix}-2.300037\begin{bmatrix}-1\\-2\\-4\\-4\end{bmatrix}+0.48948\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}+0.810892\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-0.24797\\-0.156117\\-0.265341\\-0.404088\end{bmatrix}$$

Dado que solo se buscan relaciones entre las componentes del autovector, se dividen sus términos por el elemento de mayor valor absoluto. Se tiene asi:

$$c_1X_1=\begin{bmatrix}0.613655\\0.386345\\0.656642\\1{,}000000\end{bmatrix}$$

Nota: estos valores coinciden prácticamente con los que se obtienen mediante el comando Eigenvalues[A] de MATHEMATICA.

MATHEMATICA

```
{0.613656, 0.386344, 0.656642, 1.}
```

CALCULO

```
{0.613655,0.386345, 0.656642,1.}
```

De la misma y laboriosa forma se obtienen los otros tres autovectores de la matriz dada.

IX MATHEMATICA

110 Sepa lector que tres comandos de MATHEMATICA, escritos sin errores, resuelven en forma rápida y segura el problema de la determinación de autovalores y autovectores.

IX.1 Autovalores

111 Dada la matriz A se escribe

Eigenvalues[A]

La respuesta es la lista de los autovalores.

112 Ejemplo

```
a = {{5, 4, 3, 2, 1}, {4, 5, 2, 0, 2}, {3, 2, 5, 1, 3}, {2, 0, 1, 5, 4}, {1, 2, 3, 4, 5}}

N[Eigenvalues[a]]

{13.9026, 6.61733, 3.15626, 2.25748, -0.933633}
```

113 Dada la matriz A se escribe

Eigenvectors[a]

La respuesta es la lista de los autovectores

114 Ejemplo

```
In[4]:= Eigenvectors[a] 1.

Out[4]= {{1.02313, 0.902986, 0.973185, 0.788475, 1.}, {-0.831077, -1.08274, -0.213419, 1.31354, 1.},
  {-1.7612, -0.924529, 3.3747, -2.08939, 1.}, {-0.954313, 1.21765, -0.761093, -0.485058, 1.}, {0.954814, -0.788256, -0.571018, -0.89972, 1.}}
```

La respuesta es una lista que contiene cinco listas. Cada una de ellas es uno de los autovectores de la la matriz A. ¿Qué hace el 1. allí?

115 Dada la matriz A se escribe

Eigensystem[a]

La respuesta es una lista de listas. La primera corresponde a los autovalores. La segunda es nuevamente una lista de listas. Cada una de ellas es uno de los autovectores.

116 Ejemplo

```
In[6]:= N[Eigensystem[a]]

Out[6]= {{13.9026, 6.61733, 3.15626, 2.25748, -0.933633}, {{1.02313, 0.902986, 0.973185, 0.788475, 1.}, {-0.831077, -1.08274, -0.213419, 1.31354, 1.},
  {-1.7612, -0.924529, 3.3747, -2.08939, 1.}, {-0.954313, 1.21765, -0.761093, -0.485058, 1.}, {0.954814, -0.788256, -0.571018, -0.89972, 1.}}}
```

¿Por qué esta la N delante del comando? Probar sin ponerla.

---

volver al Índice General