Centro Educativo de Nivel Secundario Nº 451
Anexo Universidad Tecnológica Nacional
____
Dirección de Capacitación No Docente

Dirección General de Cultura y Educación
Provincia de Buenos Aires

MATEMATICA

Primer Año
Módulos 4 y 5

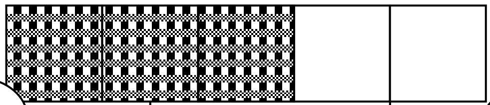
LIBROS BACHILLER 2011
Formato digital - PDF
Publicación de edUTecNe - Editorial de la U. T. N.
Sarmiento 440 - (C1041AAJ) - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
http://www.edutecne.utn.edu.ar

edutecne@utn.edu.ar

Capítulo IV

NÚMEROS RACIONALES

Si observamos el siguiente dibujo veremos dos zonas perfectamente delimitadas, cada una de ellas se puede representar con una fracción.

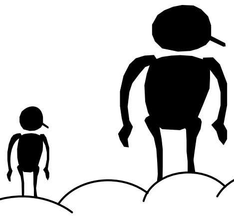


Se lee: tres quintos

$\frac{3}{5}$ **y** $\frac{2}{5}$

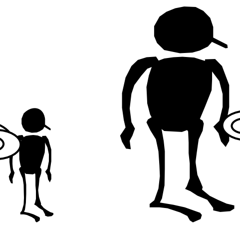
Se lee: dos quintos

Una fracción esta formada por dos números naturales:
el numerador y el denominador:



$$\frac{3 \longrightarrow}{5 \longrightarrow} \frac{\textit{numerador}}{\textit{denominador}}$$

El numerador indica cuantas partes se han tomado del entero.



El denominador indica en cuantas partes se ha divido el entero.

IMPORTANTE EL DENOMINADOR NO PUEDE SER 0

En la vida cotidiana estamos acostumbrados a hablar con fracciones; cuando vamos a la panadería y pedimos $\frac{1}{2}$ kg de pan; en el supermercado $\frac{1}{4}$ de café, etc.

El ticket del supermercado también muchas veces "esconde" una fracción; ya que si el mismo nos indica que gastamos $ 24,50, esta es la forma decimal de nombrar un número racional. O sea que los números racionales pueden expresarse en forma fraccionaria $\frac{1}{2}$ ó en forma decimal ya que $\frac{1}{2}$ es la forma fraccionaria y 0,5 es su equivalente en su forma decimal.

¿***Cómo pasar una fracción a número decimal y viceversa?***

Ejemplo: $\frac{3}{4}$ para pasar esta fracción a decimal se divide 3 por 4 :

se obtiene 0,75

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Ahora ***para pasar de decimal a fracción se procede*:**

1) en el numerador se escribe todo el número, en este caso 75 y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el número que deseamos pasar a fracción.

2) luego se simplifica. Simplificar significa ***"achicar"*** la fracción dividiendo numerador y denominador por un mismo número. En este caso , primero se divide por 5, y luego nuevamente por 5, así se obtiene $\frac{3}{4}$

Trabajemos juntos

1) $\frac{1}{8}$ para pasar a decimal dividimos 1 dividido 8

se obtiene

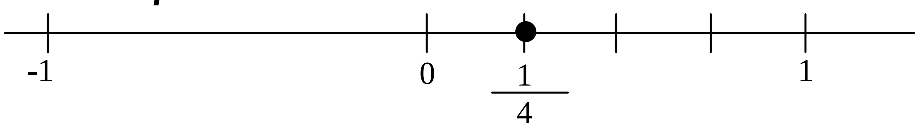
$$\begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}125 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

0,125, ahora para volver a la fracción, se escribe en el numerador todo el número y en el denominador 1000. Para simplificar dividimos numerador y denominador por 5.

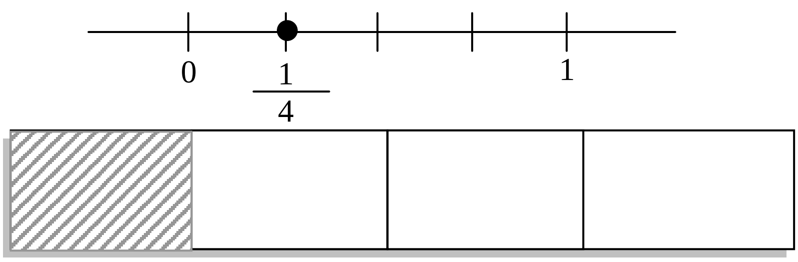
$$\frac{\overset{\overset{\overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{25}}}{\cancel{125}}}{\underset{\underset{\underset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{200}}}{\cancel{1000}}}$$

2) Se simplifica hasta obtener nuevamente: $\frac{1}{8}$

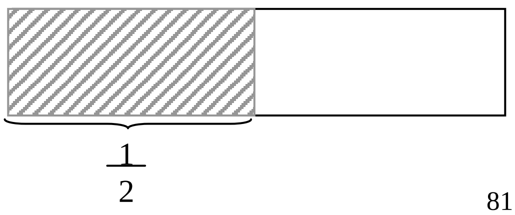
Representación de fracciones en la recta numérica:



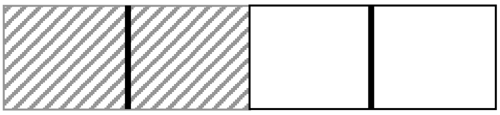
Si queremos representar $\frac{1}{4}$ en la recta numérica; sabemos que se trata de un número que está comprendido entre el 0 y el 1 ya que ¼ es la forma fraccionaria y 0,25 es su equivalente en su forma decimal.
Para representar $\frac{1}{4}$ en la recta numérica dividimos el “segmento unidad” entre 0 y 1 en cuatro partes iguales y tomamos una de ellas.
De la misma forma podemos hacer si tuviéramos una tableta de chocolate y quisiéramos sólo $\frac{1}{4}$ de la tableta.



Continuamos con el ejemplo del chocolate.
Si tenemos una barra de chocolate y queremos sólo la mitad es decir $\frac{1}{2}$
Tomaremos:



Si de la **misma barra** de chocolate queremos $\frac{2}{4}$ tendremos que dividir la barra en cuatro partes iguales y tomar dos de ella.

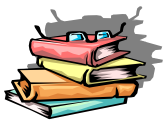


$\frac{2}{4}$

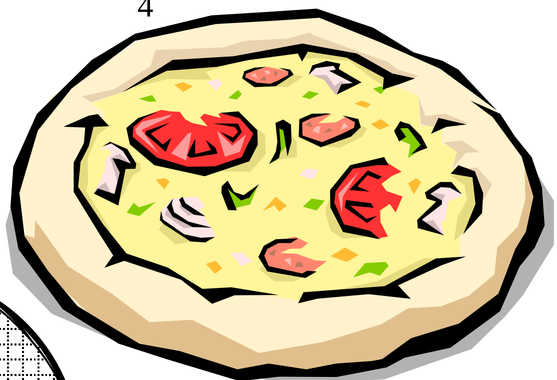
¿Qué observamos? Que tenemos exactamente "la misma cantidad" de chocolate en ambos casos. Es decir que $\frac{1}{2}$ representa lo mismo que $\frac{2}{4}$ Cuando esto sucede decimos que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son ***fracciones equivalentes*.**

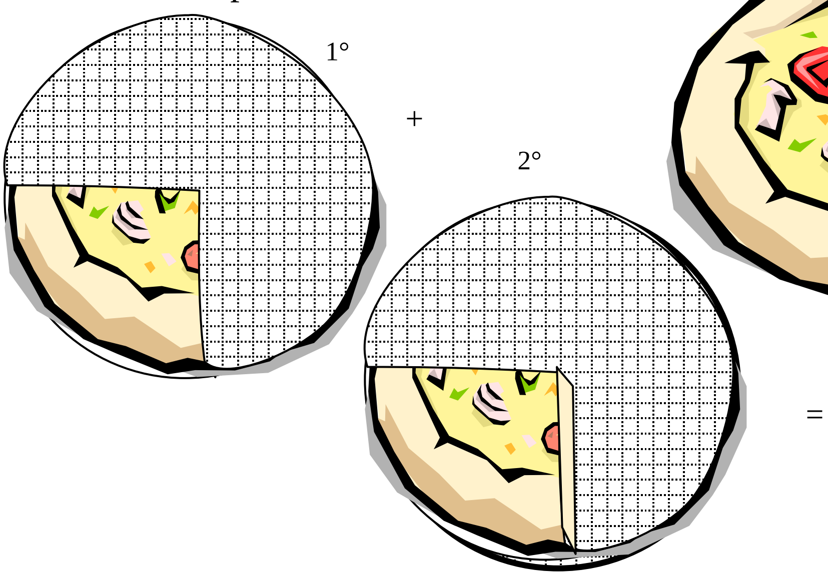
A pesar de que tienen distinto numerador y distinto denominador, si se simplifica $\frac{2}{4}$ se obtiene $\frac{1}{2}$.(para simplificar dividimos numerador y denominador por 2)

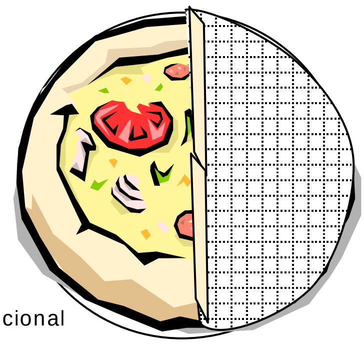
OPERACIONES CON FRACCIONES



Si comemos $\frac{1}{4}$ de una pizza y después $\frac{2}{4}$ de la misma ¿Qué fracción de la pizza comimos?







Es decir que para sumar 2 o más fracciones, las mismas deben tener el mismo denominador y entonces sumamos los numeradores. Ej $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+5}{4}=\frac{6}{4}$ ¿Qué ocurre cuando las fracciones no tienen el mismo denominador?

La convertimos en fracción equivalente de denominador 4 para poder sumarla

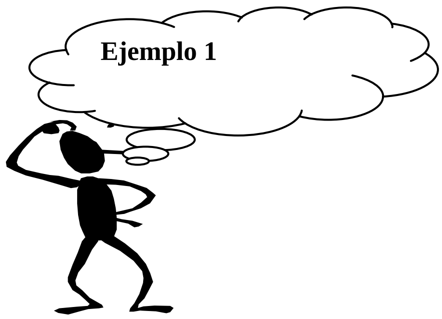
$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}= \qquad\qquad \frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$$

equivalente

La convertimos en fracción equivalente de denominador 4

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{4}$$

equivalente



Trabajamos Juntos

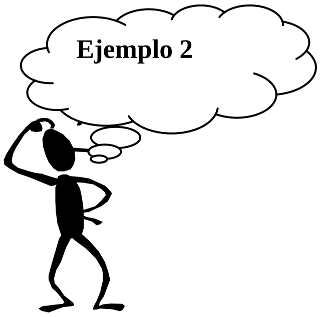
$$\frac{1}{7}+\frac{2}{5}=\frac{5}{35}+\frac{14}{35}=\frac{19}{35}$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{5}=\frac{5}{35} \qquad\qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{7}=\frac{14}{35}$$

EQUIVALENTES EQUIVALENTES

Si es necesario transformamos ambas fracciones dadas en fracciones equivalentes y luego las sumamos.

$$\frac{3}{8}+\boxed{\frac{5}{4}}= \qquad\qquad \frac{3}{8}+\boxed{\frac{10}{8}}=\frac{13}{8}$$



Transformamos en una fracción equivalente de denominador 8

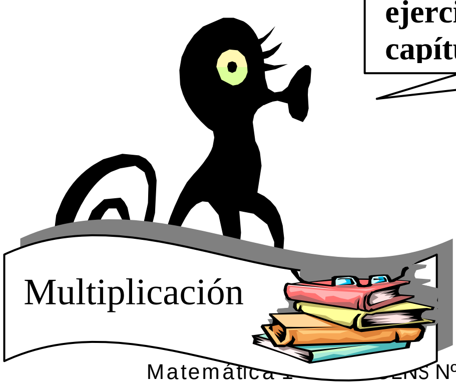
$$\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{2}=\frac{10}{8}$$

Conclusión:

Para sumar o restar dos números racionales expresados en forma fraccionaria, se los expresa como fracciones equivalentes de igual denominador y el resultado es otra fracción del mismo denominador y el numerador resulta de sumar o restar los numeradores.

	Buscar las fracciones equivalentes	*Sumar o restar*
$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=$	$\frac{1}{4}\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\frac{4}{4}=$	$\frac{5}{20}+\frac{12}{20}=\frac{17}{20}$
$\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=$	$\frac{3}{2}\frac{2}{2}-\frac{5}{4}=$	$\frac{6}{4}-\frac{5}{4}=$
$\frac{7}{3}+\frac{3}{2}=$	$\frac{7}{3}\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\frac{3}{3}=$	$\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=$

Cuando aparezco yo es porque el ejercicio está resuelto al final del capítulo

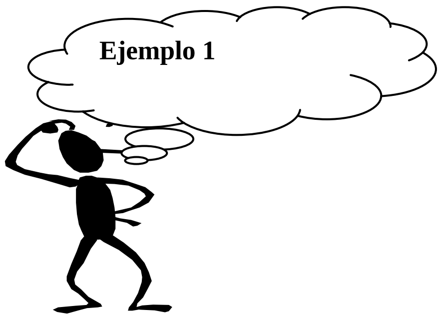


El producto de números racionales expresados en forma fraccionaria, es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.
Ejemplo:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{9}=\frac{3}{45}$$

Para poder trabajar con números más pequeños, se puede simplificar antes de efectuar la multiplicación; los numeradores con los denominadores.
Simplificamos el 3 y el 9 por 3

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5}\cdot\frac{1}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{1}{15}$$

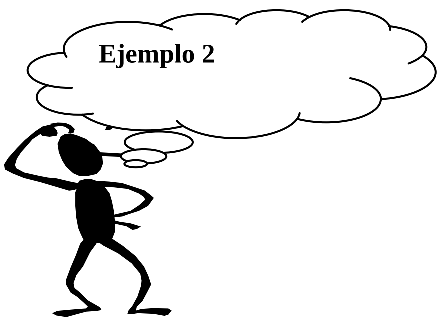


$$\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$$

Simplificamos el 20 y el 4 por 4. ($20\div 4=5$ y $4\div 4=1$) después efectuamos la multiplicación:

$5\cdot 3=15$ numerador

$1\cdot 8=8$ denominador



Trabajamos juntos

Operación	Simplificamos	Multiplicamos
$\frac{16}{3}\ \frac{15}{12}$	....	....

Operación	Multiplicamos	Simplificamos
$\frac{18}{3}\ \frac{15}{24}$	....	....

División

Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera de ellas por la recíproca de la segunda fracción. Es decir:

$$\frac{2}{5} : \boxed{\frac{7}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \boxed{\frac{3}{7}}$$

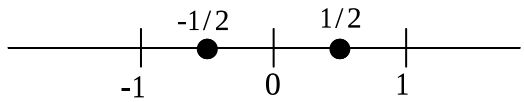
$\frac{7}{3}$ su recíproco $\frac{3}{7}$

y convertimos la división en producto

Entonces , hay que invertir la segunda fracción y luego multiplicar

Los números racionales pueden ser también negativos .

Observemos la recta numérica.



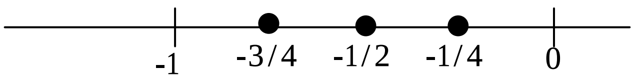
$-\frac{1}{2}$ es un número racional negativo.

Es decir que cuando hablemos de números racionales o ***fracciones*** en lo sucesivo hay que pensar que pueden ser positivos o negativos (si son negativos delante de la raya de fracción colocaremos el signo - correspondiente).

O sea:

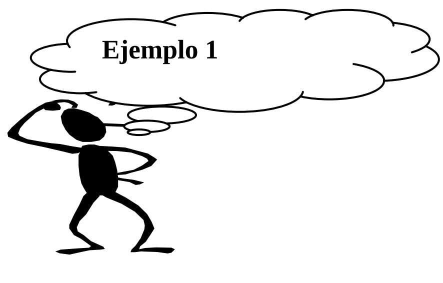
$$-\frac{1}{2}\;;\;-\frac{3}{4}\;;\;-\frac{1}{4}$$

Ubicamos en la recta numérica:

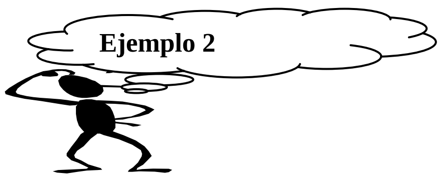


Las operaciones con los números racionales negativos respetan las mismas reglas vistas anteriormente:

Ejemplos:



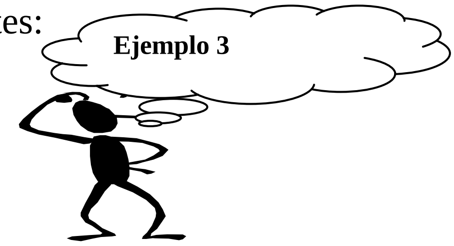
$$-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{4}{4}=-1$$

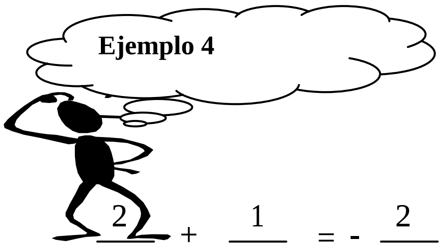


$$\underbrace{-\frac{1}{7}}_{1}\;\underbrace{-\frac{2}{7}}_{2}=-\frac{3}{7}$$

$$-\frac{5}{4}+\frac{2}{5}=-\frac{5}{4}.\frac{5}{5}+\frac{2}{5}.\frac{4}{4}=-\frac{25}{20}+\frac{8}{20}=\frac{-25+8}{20}=-\frac{17}{20}$$

En 1 y 2 convertimos en fracciones equivalentes:





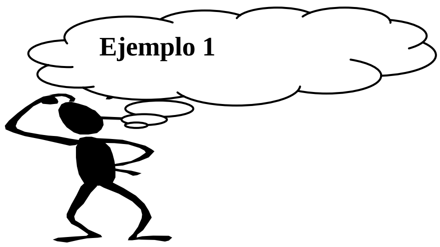
$$\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \underbrace{-\ \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{3}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{7}}_{2} = -\ \frac{6}{21} + \frac{7}{21} = \boxed{\frac{1}{21}}$$

En 1 y 2 convertimos en fracciones equivalentes:

Producto y cociente

Respetamos la regla de los signos

	+	-
+	+	-
-	-	+

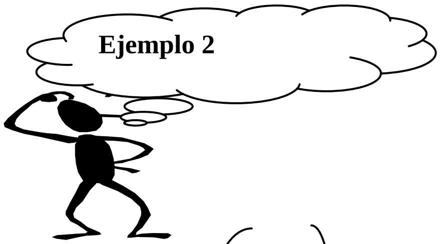


$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \left(-\ \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \right) = -\ \frac{3}{2}$$

Simplificamos numeradores y denominadores (el 9 y el 3 por 3; y el 2 y el 4 por 2).

El resultado es una fracción negativa, porque $\frac{2}{3}$ es positiva y $-\frac{9}{4}$ es negativa, respetando la regla de los signos (+) . (-) = (-).

Resultado negativo

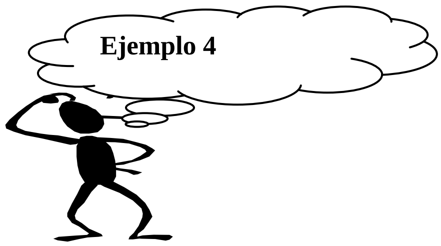


$$\frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{4} \cdot (-7) = \boxed{-\frac{21}{4}}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{7}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot \; -7 = +\frac{14}{3}$$

El más (+) no lo coloco, ya sé que es positivo

(-) . (-) = +



$$\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \cdot \left(-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{5}_{1}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{9}_{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

Observamos que cuando es un producto o una división de racionales negativos los encerramos entre paréntesis.

* $\left(-\frac{2}{5}\right) \quad \left(-\frac{25}{4}\right)$ **es un producto**

$-\frac{2}{5} \quad -\frac{25}{4}$ **es una resta**

Por eso la importancia de los paréntesis en *

Resolvemos:

$$\left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{4}_{2}}\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{2}{5}-\frac{25}{4}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{4}-\frac{25}{4}\cdot\frac{5}{5}=-\frac{8}{20}-\frac{125}{20}=\boxed{-\frac{133}{20}}$$

Remarcamos que:

$$\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{25}{4}\right)}_{\text{producto}}\neq\underbrace{-\frac{2}{5}-\frac{25}{4}}_{\text{resta}}$$

Por eso la importancia
de colocar paréntesis

CENS Nº 451

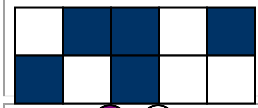
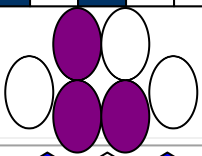
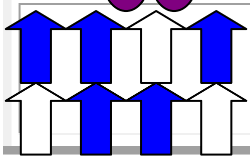
1er. Año

NOMBRE Y APELLIDO: ______________________

DEPENDENCIA: ______________________

Matemática — *Actividad* **10**

1) Expresa la parte coloreada en forma de fracción

Figura	Fracción	Numerador	Denominador
			
			
			

2) Escribe tres fracciones equivalentes

$\frac{3}{5}$			
$\frac{4}{5}$			
$\frac{7}{2}$			

3) Completa cada una de las siguientes igualdades de forma que se obtengan ecuaciones equivalentes.

$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{\_\_}$	$\frac{\_\_}{25}$	$\frac{24}{\_\_}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{\_\_}$	$\frac{\_\_}{45}$	$\frac{16}{\_\_}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{\_\_}$	$\frac{\_\_}{9}$	$\frac{28}{\_\_}$

TRABAJAMOS JUNTOS

Resolviendo problemas:
El primero lo hacemos juntos:
María y Carmen tienen, cada una un block con 240 hojas. María usó las dos terceras partes del suyo y Carmen las tres quintas partes. ¿Cuántas hojas usó cada una?.

María $\frac{2}{3}$ de 240 = $\frac{2.\cancel{240}^{80}}{\cancel{3}} = 160$

Carmen $\frac{3}{5}$ de 240 = $\frac{3.\cancel{240}^{48}}{\cancel{5}_{1}} = 144$

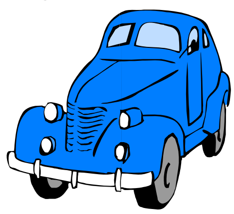
OTROS

5) En la oficina de personal hay 30 empleados, las dos quintas partes son mujeres y el resto hombres. ¿Cuántas mujeres hay en la oficina? Y ¿hombres?

$\frac{2}{5}$ de 30 = $\frac{\cancel{30}^{6}.2}{\cancel{5}_{1}} = 12$ mujeres

30 – 12 =18 hombres

6) Un automovilista recorrió un camino en tres días. El primer día recorrió la tercera parte. El segundo día las dos cuartas partes del mismo camino y el tercer día el resto. Si el camino tenía 1200 km.
¿cuántos kilómetros recorrió el primer día?
¿cuántos kilómetros recorrió el segundo y cuantos el tercer día?



1° día $\frac{1}{3}$ de 1200 = $\frac{\cancel{1200}^{400}}{\cancel{3}_{1}} = 400km$

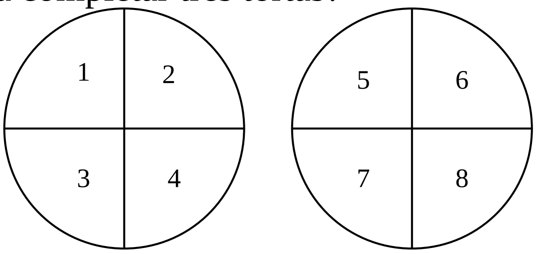
2° día $\frac{2}{4}$ de 1200 = $\frac{\overset{600}{\cancel{1200}}.\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{4}}} = 600km$

3° día 1200 – 600 – 400 = 200 km

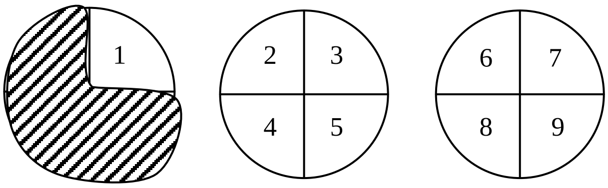
RTA: a)……………………………………………b)………………..………

7)¿ Cuantos cuartos de torta hay en dos tortas?, ¿ Cuánto hay que agregar a tres cuartos de torta para completar tres tortas?

Rta: a) 8 cuartos



b) 9 cuartos



TRABAJAMOS JUNTOS

8) Para festejar el cumpleaños de Adrián en la oficina compraron empanadas de pollo, jamón y queso y carne picante. Primero comieron la mitad de las que compraron, luego la tercera parte de las que quedaban y finalmente María se llevo a su casa las 6 que sobraron. ¿cuántas empanadas compraron?.

x cantidad de empanadas

primero comieron $\frac{1}{2}$ x

segundo $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba

si habían comido $\frac{1}{2}$ quedan

$\frac{1}{2}$ entonces $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

María se llevó 6

Entonces

$\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{6}$ x + 6 = x

$6 = x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{6} x$

$6 = \frac{6x - 3x - 1x}{6}$

$36 = 2x$

$18 = x$

OTROS

8) Para viajar a San Nicolás alquilaron un micro. Primero reservaron la tercera parte de los asientos, luego la mitad de los que quedaban y aun quedaron sin reservar 8 asientos. ¿Cuántos asientos tenía el micro?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

CENS Nº 451

1er. Año

NOMBRE Y APELLIDO: ____________________

DEPENDENCIA: ____________________

Matemática *Actividad* **11**

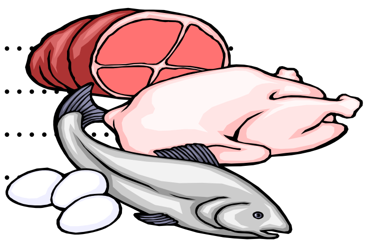
1)
Pasar a número decimal:

$\frac{1}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{5}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{16}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	

2) Pasar a fracción:

0,2		1,25		1,50	
0,1		0,750		4,50	
0,125		0,50		0,6	

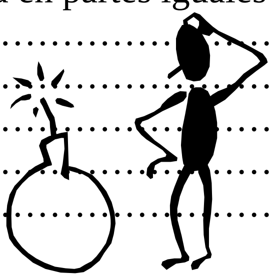
3) Compramos 2 kilos a $ 12,75 de carne de cerdo , 4 kilos a 8,50 de cordero y 6 kilos de papas a $ 1,25 (los precios que se indican son por kilo).¿ si pagamos con un billete de $ 100, cuanto dinero nos devolvieron?



……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

RTA.: **33**

4) Fuimos al buffet del club y gastamos $ 33,18 ¿cuántos pesos debió pagar cada uno si éramos tres personas y dividimos la cuenta en partes iguales?



……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

RTA.: **11,06**

Potenciación en Q

Para resolver una potencia en el conjunto de los racionales (en Q) recordamos que la potenciación es distributiva respecto del cociente, por lo tanto , elevamos a lo que indica el exponente al numerador y al denominador Elevamos por separado numerador y denominador.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2}$$

Aplicamos propiedad distributiva del cociente respecto a la potenciación

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Como es **exponente** es **par** el resultado es **positivo**

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

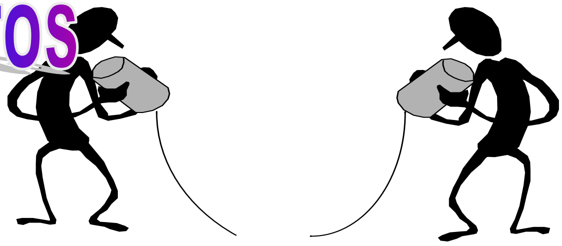
Como es **exponent**e es **impar** el resultado es **negativo**

Observamos que representamos las mismas reglas vistas para la potenciación que vimos para los números enteros.

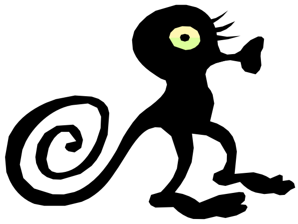
$$\boxed{\begin{array}{l} (+)\ .\ (+) = (+) \\ (+)\ .\ (-) = (-) \\ (-)\ .\ (+) = (-) \\ (-)\ .\ (-) = (+) \end{array}}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

TRABAJAMOS JUNTOS



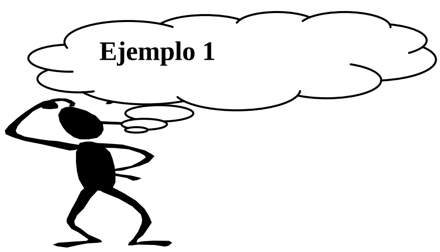
Datos	Resolver	Datos	Resolver	Datos	Resolver
$\left(-\frac{1}{3}\right)^2$		$(-3)^3$		$\left(-\frac{4}{3}\right)^2$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^2$		0^3		$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	
$\left(-\frac{4}{5}\right)^2$		3^0		$\left(-\frac{4}{3}\right)^3$	
$\left(-\frac{1}{7}\right)^3$		$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$		$\left(\frac{2}{7}\right)^2$	



Radicación en Q

Para resolver una raíz en el conjunto de los racionales (o sea en Q), recordamos que **la radicación es distributiva** respecto del cociente, es decir, que si tenemos una fracción debajo de una raíz, podemos separarla en dos raíces, una para el numerador y otra para el denominador.

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$



(o sea que extraemos la raíz cuadrada del numerador y del denominador)
Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$

Cuando el radicando es negativo y el índice es impar, el resultado es negativo (igual que en Z)

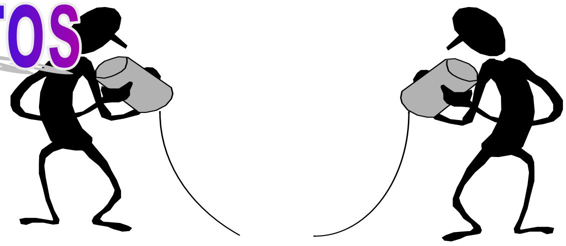
c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

d) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

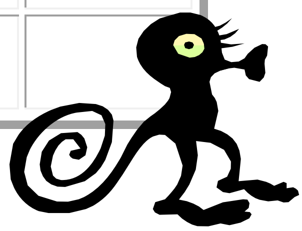
e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$

f) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$

TRABAJAMOS JUNTOS



operación	Resolver	operación	Resolver	operación	Resolver
$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$		$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$		$\sqrt{\frac{81}{36}}$	
$\sqrt{\frac{1}{4}}$		$\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$		$\sqrt{-\frac{1}{4}}$	
$\sqrt{\frac{36}{100}}$		$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$		$\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$	
$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$		$\sqrt[5]{-32}$		$\sqrt{\frac{121}{4}}$	



Producto de potencias de igual base:

RECORDANDO

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} = 2^5 = 2^{3+2}$$

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 2^{3+2}$$

Conclusión: en el producto de potencias de igual base se suman los exponentes.

Con las fracciones pasa exactamente lo mismo que con los números enteros, si se tiene la misma base se suman los exponentes.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{5}$$

Cociente de

Potencias de igual base

$$4^5 : 4^3 = 4^2$$

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}} = 4^2$$

Si observamos los exponentes: 5 - 3 = 2

Lo mismo ocurre si la base es una fracción, se restan los exponentes.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Se restan los exponentes

Propiedad: En el cociente de potencias de igual base se restan los exponentes.

$(2^2)^3 =$

$(2 . 2)^3 = 2^3 . 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$

Propiedad En la potencia de potencia se multiplican los exponentes

$(2^5)^2 = 2^{5 . 2} = 2^{10}$

Lo mismo ocurre con las fracciones, se multiplican los exponentes.

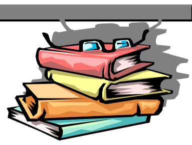
$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

Se multiplican los exponentes

Propiedades de la potenciación

- Producto de potencias de igual base → Se suman los exponentes
- Cociente de potencias de igual base → Se restan los exponentes
- Potencia de potencia → Se multiplican los exponentes

RADICACIÓN



Ejercicios Combinados

Para resolver un ejercicio combinado es necesario recordar el orden de prioridad de las operaciones, es decir:

1° efectúe las multiplicaciones y las divisiones
2° efectúe las sumas y restas.

Ejemplo 1°

$$\overbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}}^{1} - \overbrace{\frac{1}{3}}^{2}$$

Separamos en términos

$$\frac{8}{15} - \frac{1}{3} = \frac{8-5}{15} = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{15}_{\,5}} = \frac{1}{5}$$

En primer lugar efectuamos el producto

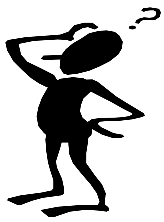
Sacamos común denominador para efectuar

$$\frac{5}{\cancel{4}_{\,2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}^{\,1}}{3}\right) + \frac{2}{7} =$$

$$-\frac{5}{6} + \frac{2}{7} = \frac{-35+12}{42} = -\frac{23}{42}$$

Simplificamos (en el producto) numerador con denominador

Sacamos común denominador para efectuar la suma



En este ejercicio el paréntesis se coloca para indicar que la fracción es negativa y que se trata de un producto de un numero positivo (5/4) por otro negativo $-\frac{2}{3}$

¿Qué hubiera ocurrido si no estaba el paréntesis?
si no hubiera estado colocado el paréntesis hubiera quedado así:
la operación se transforma en una resta $\frac{5}{4} - \frac{2}{3}$

el paréntesis es absolutamente necesario para indicar que se trata de un producto entre un racional positivo y un racional negativo. Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow$$ **Es un producto**

$$\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \longrightarrow$$ **Es una resta**

¿y si son los dos negativos y quiero realizar un producto?
Es sencillo, coloco dos paréntesis en lugar de uno solo, uno para cada numero negativo por ejemplo.

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}$$

Es un producto entre dos números negativos, aplicamos la regla de los signos. (-) . (-) = (+)

Como es un producto entre dos números negativos hay que aplicar la regla de los signos.

(-) . (-) = (+)

otros ejercicios combinados

Separamos en términos.

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{1} + \overbrace{\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{5}}^{2} - \overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}^{3} =$$

Para separar en términos tengo que tener en cuenta los signos (+) y (-) que estén colocados fuera de los paréntesis. Por eso el primer signo (+) que encontramos está después de ½, o sea que el primer término de este ejercicio está formado solamente por un número que es $\frac{1}{2}$, el segundo término abarca hasta el signo (-) delante del paréntesis y luego hasta finalizar, el tercer término.

Primero se realizan las divisiones y los productos por eso en este caso se resuelve primero el segundo termino.

$$\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{5} = -\frac{10}{3}$$

Después el tercer término $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

Los signos que separan los términos no se modifican hasta que se resuelvan los mismos

Finalmente realizamos las sumas y las restas sacando el común denominador

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} =$$

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{10}{3}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{10}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6 - 40 - 3}{12} = -\frac{37}{12}$$

Recuerda que 6 es un número positivo, mientras que 40 y 3 son negativos :
6 – (40+3) = 6 – 43 = - 37 que es el numerador.

OTRO

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 5\right) : \frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

En este caso, dentro del paréntesis se separa en términos.
Luego realiza el producto entre $\frac{3}{4}$ y 5. A ese resultado súmele $\frac{1}{2}$. Además todo lo que encierra el paréntesis divídalo por $\frac{1}{2}$

Fíjate como lo hacemos:

$$\frac{3}{4} . 5 = \frac{15}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{2 + 15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$= \frac{17}{4} : \frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{17}{2} + \frac{2}{3} = \frac{51 + 4}{6} = \frac{55}{6}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{4}\right) : \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \longrightarrow$$

Cálculos auxiliares

1

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$$

CENS Nº 451

1er. Año

NOMBRE Y APELLIDO: ____________________

DEPENDENCIA: ____________________

Matemática *Actividad* **12**

Resuelva los siguientes ejercicios combinados. Escriba todos los pasos necesarios para resolverlo. Si le resulta útil, realice los cálculos auxiliares al costado derecho de la hoja.

1) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2} =$

2) $\sqrt{\frac{36}{49}}-\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)^{3} =$

3) $\frac{3}{4}\left(-\frac{20}{9}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)^{0}+2 =$

4) $\frac{5}{6}\left(-\frac{20}{9}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right) =$

5) $\frac{7}{8}-2:\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3} =$

6) $\frac{2}{5}-\frac{7}{8}\left(-\frac{4}{21}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)^{2} =$

7) $\frac{1}{10}-\frac{3}{5}:\left(-\frac{9}{10}\right)-\left(-\frac{3}{2}+4\right) =$

8) $-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}:\left(-\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right) =$

9) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right).\left(-\frac{8}{9}\right)-\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)\right].\frac{5}{4}=$

10) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\left(-\frac{27}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)^{0}=$

Algunos problemas.

1) María gastó en el supermercado

1°) $\frac{1}{4}$ de lo que tenía en la carnicería

2°) $\frac{1}{5}$ de lo que tenía en lácteos

Si tenía 125 pesos, ¿cuánto gastó en cada rubro y cuanto dinero le queda?
RTA:... ....

2) ¿Cuántos cuartos hay que agregar a $\frac{3}{4}$ de pizza para tener 4 pizzas?

RTA:... ....

Resueltos

Ejercicio página 84

1)

	Buscar las fracciones equivalentes	*Sumar o restar*
$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{17}{20}$	$\frac{1}{4}\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\frac{4}{4}=\frac{5}{20}+\frac{12}{20}$	$\frac{5}{20}+\frac{12}{20}=\frac{17}{20}$
$\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}\frac{2}{2}-\frac{5}{4}=\frac{6}{4}-\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$
$\frac{7}{3}+\frac{3}{2}=\frac{23}{6}$	$\frac{7}{3}\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\frac{3}{3}=\frac{14}{6}+\frac{9}{6}$	$\frac{14}{6}+\frac{9}{6}=\frac{23}{6}$

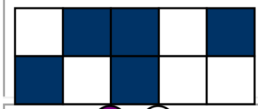
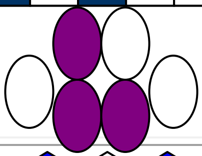
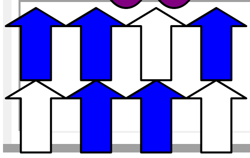
Ejercicio página 86

Operación	Simplificamos	Multiplicamos
$\frac{16}{3}\ \frac{15}{12}$	$\frac{\cancel{16}^{\,4}}{3}\ \frac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{12}_{\,\cancel{4}\ 1}}$	$\frac{20}{3}$

Operación	Simplificamos	Multiplicamos
$\frac{18}{3}\ \frac{15}{24}$	$^{9}\frac{18}{\cancel{3}}\ \frac{15}{\cancel{24}}^{5}\ \ \cancel{8}\ 4$	$\frac{45}{12}$

Ejercicio página 91

1)

Figura	Fracción	Numerador	Denominador
	$\frac{5}{10}$	**5**	**10**
	$\frac{3}{6}$	**3**	**6**
	$\frac{5}{8}$	**5**	**8**

2)

$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{12}{20}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{16}{20}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{28}{8}$

3)

$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{20}{25}$	$\frac{24}{30}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{16}{72}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{28}{12}$

Ejercicio página 97

1

$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{4}{3}$	$1,3\widehat{3}$	$\frac{1}{4}$	0,25
$\frac{3}{5}$	0,6	$\frac{5}{3}$	$1,6\widehat{6}$	$\frac{1}{8}$	0,125
$\frac{16}{5}$	3,2	$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{3}{2}$	1,5

2

0,2	1/5	1,25	5/4	1,50	3/2
0,1	1/10	0,750	3/4	4,50	9/2
0,125	1/8	0,50	1/2	0,6	3/5

Ejercicio página 100

Datos	**Resolver**	**Datos**	**Resolver**	**Datos**	**Resolver**
$\left(-\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$	$(-3)^3$	**-27**	$\left(-\frac{4}{3}\right)^2$	$\frac{16}{9}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{4}{9}$	0^3	**0**	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$\frac{64}{27}$
$\left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\frac{16}{25}$	3^0	**1**	$\left(-\frac{4}{3}\right)^3$	$-\frac{64}{27}$
$\left(-\frac{1}{7}\right)^3$	$-\frac{1}{343}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{2}{7}\right)^2$	$\frac{4}{49}$

Ejercicio página 101

operación	Resolver	operación	Resolver	operación	Resolver
$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{81}{36}}$	$\frac{9}{6}$
$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{-\frac{1}{4}}$	$\emptyset$
$\sqrt{\frac{36}{100}}$	$\frac{6}{10}$	$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$	$-\frac{3}{2}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$	$\frac{2}{5}$
$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$	$\frac{1}{5}$	$\sqrt[5]{-32}$	- 2	$\sqrt{\frac{121}{4}}$	$\frac{11}{2}$

Capítulo V

Geometría:

- 🕮 Signos y símbolos.
- 🕮 Conjunto de puntos: punto, recta y plano. Definición de semirrecta y segmento. Segmentos consecutivos. Suma de segmentos.
- 🕮 Ángulos, medidas de un ángulo convexos, llanos, cóncavos, consecutivos.
- 🕮 Clasificación de los ángulos. Opuestos por el vértice.
- 🕮 Triángulos : definición. Elementos de un triángulo. Clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos.

Signos y Símbolos

$\neq$ no es igual a

$<$ menor que

$>$ mayor que

$\not<$ no es menor que

$\not>$ no es mayor que

$\leq$ menor o igual que

$\geq$ mayor o igual que

$\perp$ perpendicular a

// paralela a

$\angle$ oblicua a

$\not\parallel$ no paralela a

$\underline{\parallel}$ igual y paralelo

$\therefore$ en consecuencia

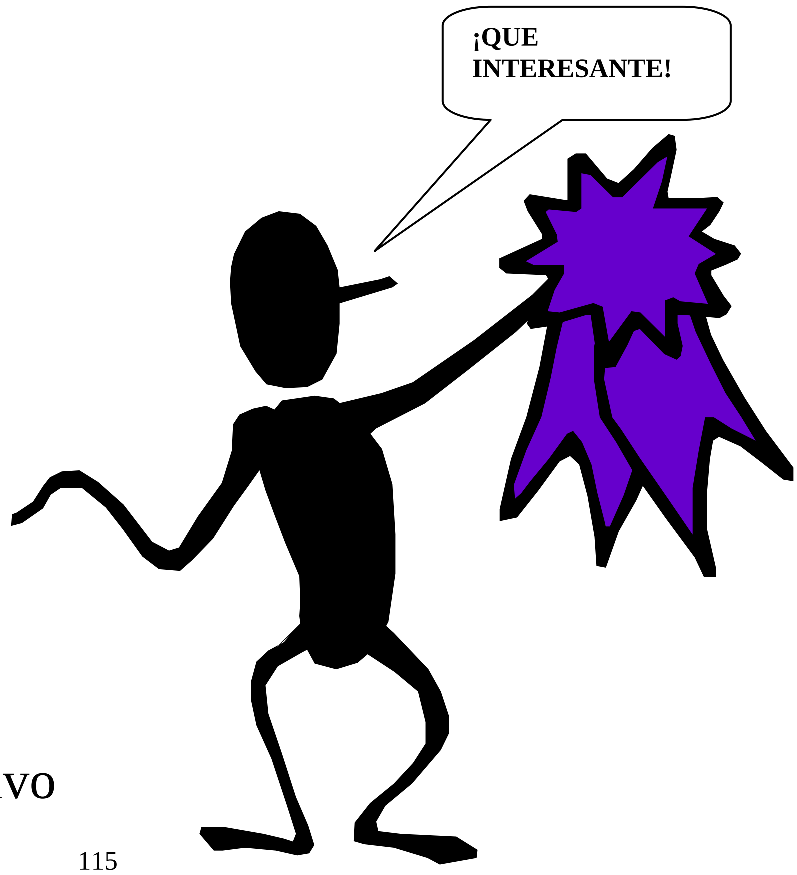
$\in$ pertenece a

$\notin$ no pertenece a

$\equiv$ determinan

$\wedge$ y

$\vee$ o, en sentido inclusivo



⊽ o, en sentido exclusivo

/ tal que

$\subseteq$ incluido en

$\supseteq$ incluye a

$\subset$ incluido estrictamente o propiamente dicho

$\supset$ incluye estrictamente a

$\cup$ unión o reunión

$\cap$ intersección

$\forall$ para todo

$\exists$ existe por lo menos uno

$\Rightarrow$ implica (condición necesaria)

$\Leftrightarrow$ implica doblemente; si sólo si(condición necesaria y suficiente)

$\rightarrow$ corresponde unívocamente

$\leftrightarrow$ corresponde biunívocamente

ϕ conjunto vacío

α alfa	η eta	ν nu	τ tau
β beta	θ theta	ξ xi	υ ípsilon
γ gamma	ι iota	o ómicron	φ phi
δ delta	κ kappa	π pi	χ ji o chi
ε épsilon	λ lambda	ρ rho	ψ psi
ζ zeta	μ mu	σ sigma	ω omega

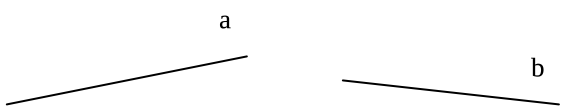
Antes de comenzar a trabajar nos pondremos de acuerdo en la notación que utilizaremos, es decir cuando veamos un símbolo sabremos lo que representa

- A los puntos los designaremos mediante letras mayúsculas de imprenta.

  Por ejemplo: A , B

- A las rectas con letras minúsculas de imprenta.

  Por ejemplo:



- - A los planos mediante letras del alfabeto griego. Por ejemplo:

- A las semirrectas con dos letras mayúsculas de imprenta y una flecha sobre las mismas. Por ejemplo: $\overline{AB}$.
- A los segmentos con dos letras mayúsculas de imprenta y un guión sobre las mismas. Por ejemplo: $\overline{AB}$.

La geometría que estudiaremos será la llamada geometría Euclídea, en honor a Euclides

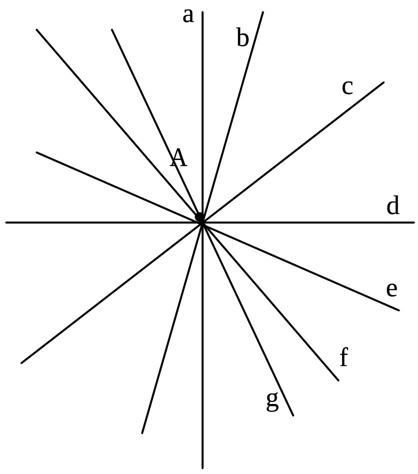
EUCLIDES

Euclides es, sin lugar a dudas, el Matemático más famoso de la antigüedad y quizás el más nombrado y conocido de la historia de las Matemáticas.

Se conoce poco de la vida de Euclides, sin embargo, su obra sí es ampliamente conocida. Todo lo que sabemos de su vida nos ha llegado a través de los comentarios de un historiador griego llamado Proclo. Sabemos que vivió en Alejandría (Egipto), al parecer en torno al año 300 a.c. Allí fundó una escuela de estudios matemáticos. Por otra parte también se dice que estudió en la escuela fundada por Platón.

Su obra más importante es un tratado de geometría que recibe el título de *"Los Elementos"*, cuyo contenido se ha estado (y aún se sigue de alguna manera) enseñando hasta el siglo XVIII, cuando aparecen las geometrías no euclídeas. ***"Los Elementos"*** ha tenido más de 1.000 ediciones desde su primera publicación en imprenta en 1482. Se puede afirmar, por tanto, que Euclides es el matemático más leído de la historia.
Esta obra es importante, no tanto por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización, el orden y la argumentación con la que está constituida. Euclides recopila, ordena y argumenta los conocimientos geométrico-matemáticos de su época, que ya eran muchos.
Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de axiomas (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que Euclides llamó *postulados.* Los famosos ***cinco postulados de Euclides***, que ofrecemos a continuación, son:
Ahora enunciamos los axiomas o postulados que relacionan los entes elementales. ***Se denominan axiomas o postulados porque al ser tan evidentes no necesitan demostración***

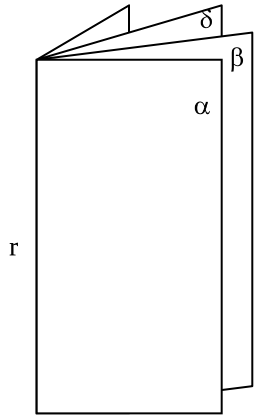
Axioma 1: Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos.
Axioma 2: Por un punto pasan infinitas rectas.



Axioma 3: Dos puntos determinan una única recta a la cual pertenecen.

Axioma 4: por una recta pasan infinitos planos.

Un ejemplo concreto de este axioma lo constituyen las puertas giratorias de los bancos compuestas de un eje fijo (la recta r) y de las hojas que giran alrededor de él (los planos).



lenguaje simbólico

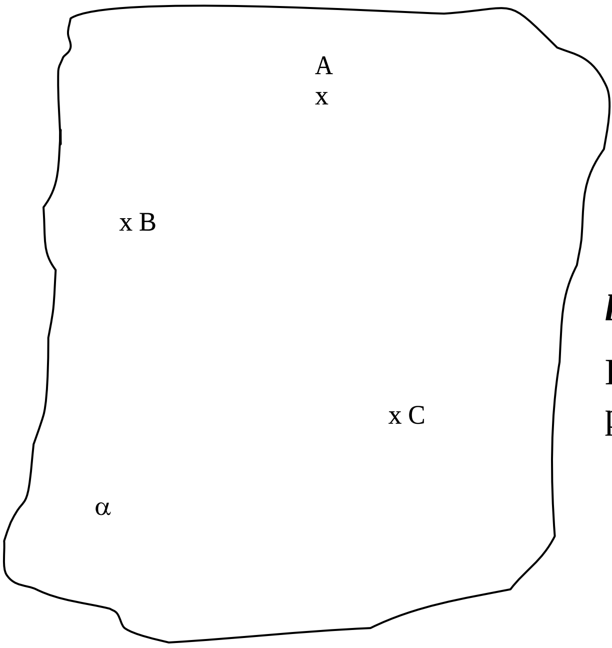
$r \subset \alpha$; $r \subset \beta \wedge r \subset \delta$

lenguaje coloquial

La recta r está incluida en el plano alfa, la recta r está incluida en el plano beta y la recta r está incluida en el plano delta.

Axioma 5:

Por tres puntos no alineados pasa un único plano al cual pertenecen .

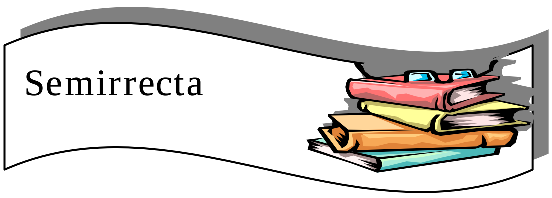


lenguaje simbólico

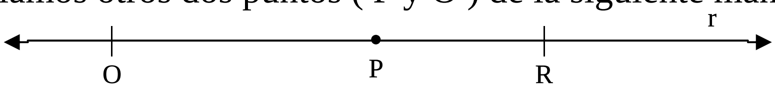
$A; B \wedge C \equiv \alpha$

lenguaje coloquial

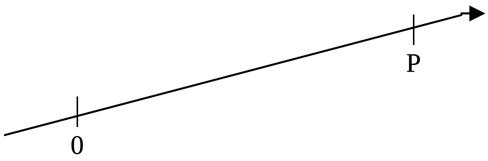
El punto A, B, y C determinan el plano alfa.



Si sobre una recta marcamos un punto P, la recta quedará dividida en dos partes que llamaremos ***semirrecta***. En realidad quedan dos semirrectas pero para poder diferenciar a cual de las dos semirrectas nos referimos señalamos otros dos puntos (P y O) de la siguiente manera:

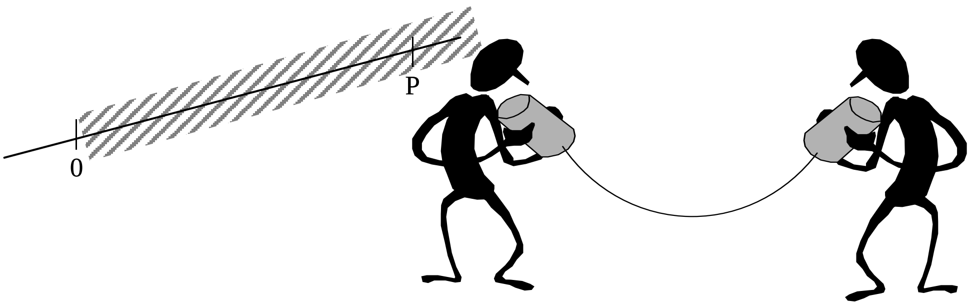


$\overline{PR}$ es la semirrecta de origen P que contiene al punto R
$\overline{PO}$ es la semirrecta de origen P que contiene al punto O
El punto R y el punto O le dan el sentido a las semirrectas.
La semirrecta $\overline{PR}$ tiene sentido hacia la derecha de la hoja mientras que la semirrecta $\overline{PO}$ tiene sentido hacia la izquierda de la hoja.
$\overline{PR}$ y $\overline{PO}$ son semirrectas opuestas: porque están sobre la misma recta r, tienen el mismo origen P y distinto sentido.
La semirrecta es un conjunto de puntos que tiene origen pero no tiene fin.
Otro ejemplo:



OP es la semirrecta de origen O que contiene al punto P

Vamos a marcar el conjunto de puntos que abarca dicha semirrecta.

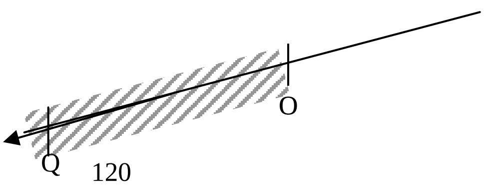


¿Por qué marcamos más allá del punto P; acaso la semirrecta no termina en el punto P?

No, el punto P solo determina el sentido de la semirrecta, pero esto no significa que la semirrecta finalice en el punto P.

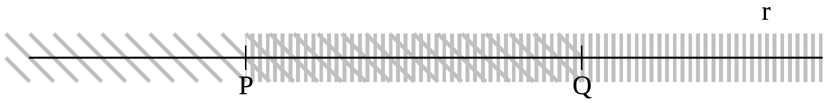
Quiere decir que la semirrecta OP empieza en el punto O y no tiene fin.
Exactamente, el punto P solo me determina el sentido si es a la derecha o a la izquierda, te doy otro ejemplo:

$\overrightarrow{OQ}$: Semirrecta de origen O que contiene al punto Q



Segmento

Dada una recta r y dos puntos P y Q pertenecientes a ella, hallamos gráficamente la *intersección* entre las semirrectas $\overrightarrow{PQ}$ y $\overleftarrow{QP}$



Obtenemos una porción de la recta que está rayada por ambos trazos, es decir que es común a ambas semirrectas, dicha porción común la denominamos segmento $\overline{PQ}$.

Un segmento es un conjunto de puntos que tiene origen y fin.

En el segmento $\overline{PQ}$; P y Q son los extremos del segmento.

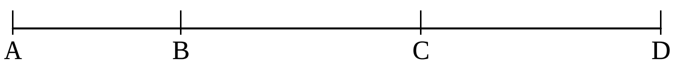
Con las rectas, semirrectas y segmentos podemos efectuar operaciones, ya que se trata de conjuntos de puntos, por lo tanto podemos efectuar operaciones de unión y de intersección.

Segmentos Consecutivos

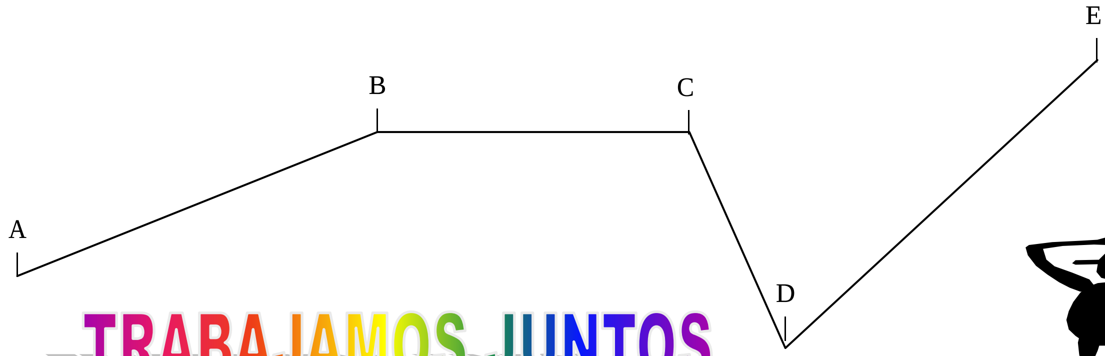
Si tomamos un metro de madera y lo estiramos, nos damos cuenta que está formado por varias varillas unidas entre sí por remaches, cada una de estas varillas representa un segmento que está unido al anterior por el remache, que es lo único que tienen en común.

Llamamos **segmentos consecutivos** a aquellos que tienen solamente un extremo común.

Si están sobre una recta, se dice que están alineados.

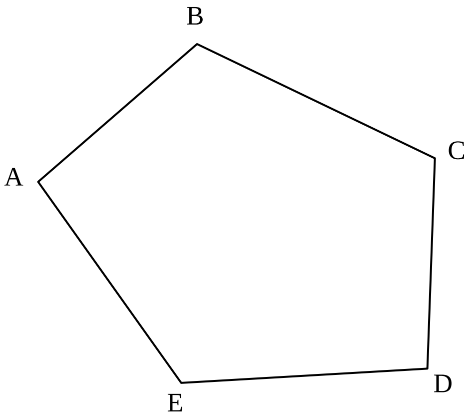


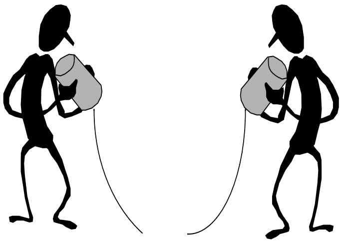
Cuando no están alineados se dice que forman una poligonal.



TRABAJAMOS JUNTOS

Dadas las siguientes figuras nombrar pares de segmentos consecutivos y no consecutivos.





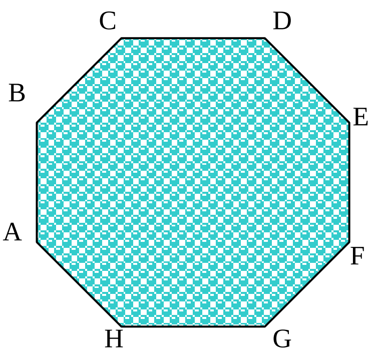
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos consecutivos

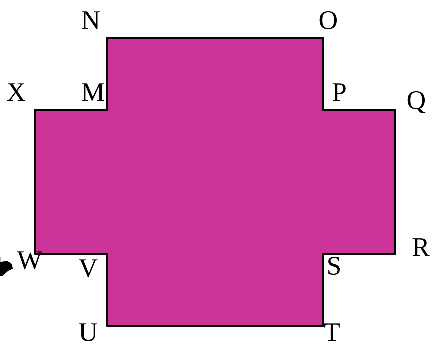
$\overline{ED}$ y $\overline{DC}$ son segmentos consecutivos

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son segmentos consecutivos

$\overline{AE}$ y $\overline{BC}$ no son segmentos consecutivos

OTROS



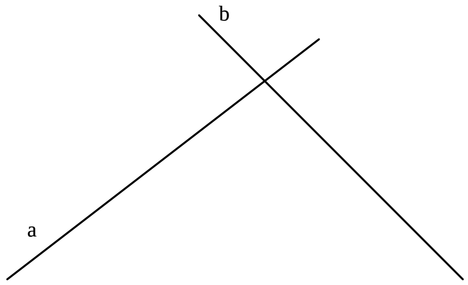


Segmentos consecutivos	Segmentos no consecutivos
$\overline{CO},\overline{DE}$	$\overline{CD},\overline{EF}$
$\overline{EF},\overline{FG}$	$\overline{FG},\overline{CD}$
$\overline{AH},\overline{HG}$	$\overline{BC},\overline{HG}$

Segmentos consecutivos	Segmentos no consecutivos
$\overline{MN},\overline{NO}$	$\overline{MN},\overline{PQ}$
$\overline{OP},\overline{PQ}$	$\overline{XM},\overline{VU}$
$\overline{RS},\overline{ST}$	$\overline{UT},\overline{XM}$

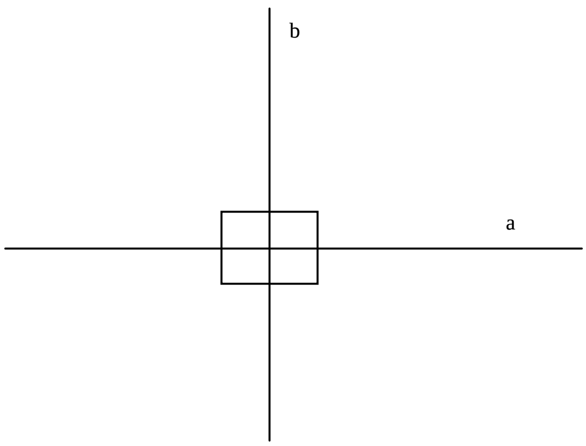
Posiciones relativas a dos rectas en el plano:

Dos rectas que se cortan en el plano se dice que son **secantes.**



a y b son secantes

Dos rectas que se cortan formando cuatro ángulos iguales son perpendiculares



a $\perp$ b Se lee: "la recta a es perpendicular a la recta b"

Rectas paralelas

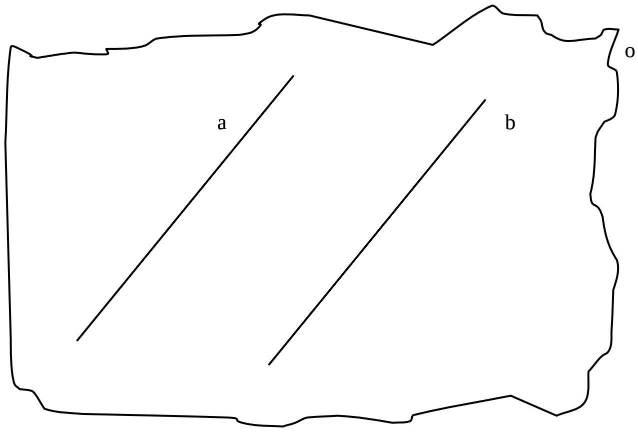
Dos rectas en el plano son paralelas cuando no tienen ningún punto en común, es decir, cuando no se cortan o bien cuando tienen todos sus puntos en común. (esto es difícil de comprender, pero igual lo mencionamos, mas adelante nos interiorizaremos en ello)

lenguaje simbólico

$a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset$

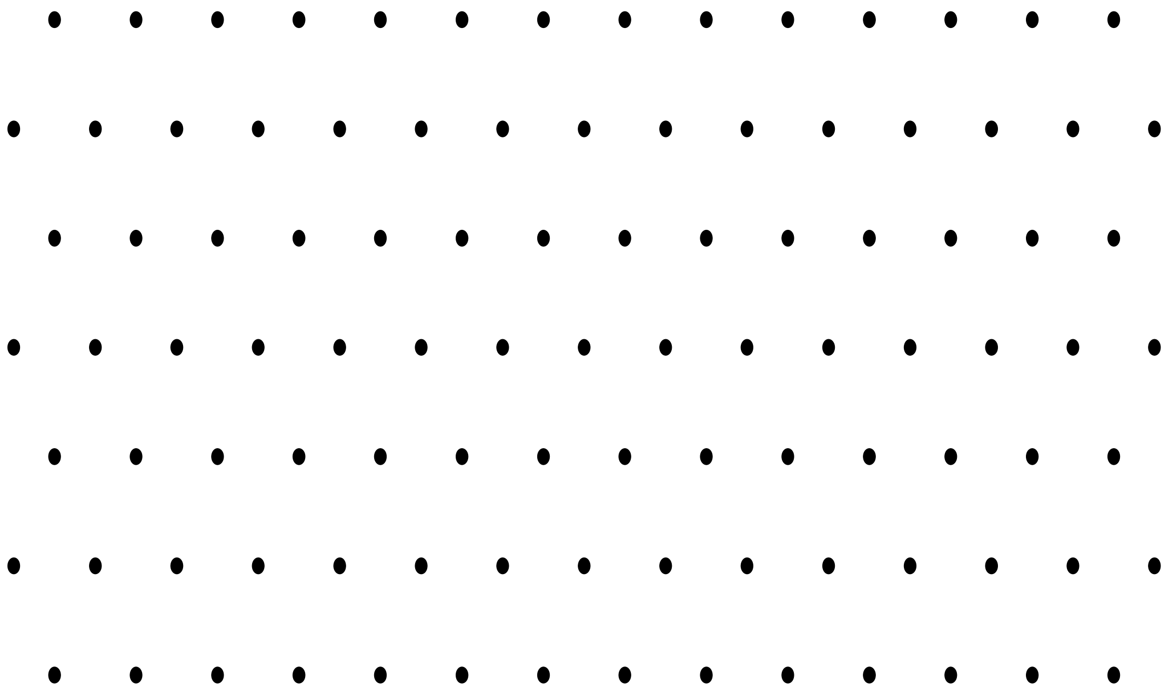
lenguaje coloquial

La recta **a** es paralela a la recta **b** sí y solo sí a intersección **b** es igual al conjunto vacío.



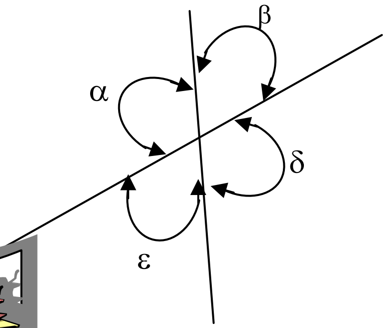
Trabajamos solos

Observen los puntos, esta figura se llama trama. Dibujen en ella con distintos colores 2 rectas paralelas, 2 rectas perpendiculares y 2 rectas oblicuas

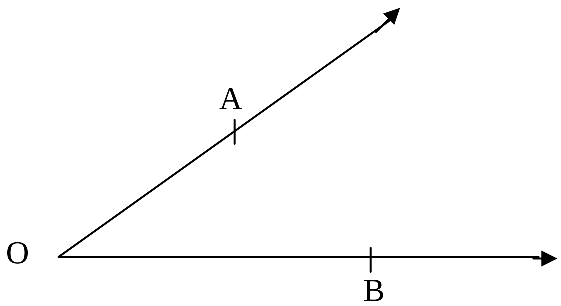


Ángulos

Dos rectas que se intersecan determinan cuatro regiones, a las que llamaremos ángulos.



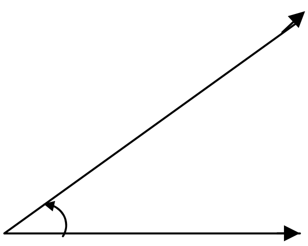
Elementos de un ángulo



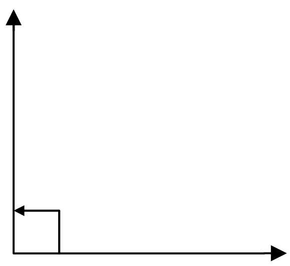
Todo ángulo convexo puede ser designado con tres letras mayúsculas, ubicando en el centro, el vértice del ángulo o bien con una letra del alfabeto griego. Por ejemplo el ángulo dibujado anteriormente se designa $A\hat{O}B$ siendo O el vértice del ángulo.

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

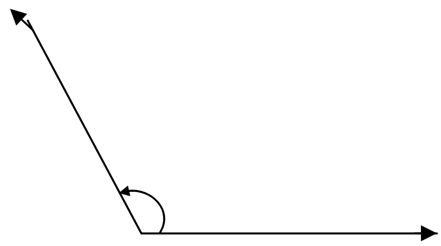
Convexos



Agudo
menores de 90º



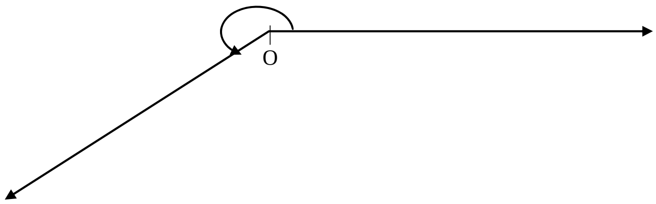
Recto
igual a 90º



Obtuso
mayores de 90º

Ángulo Cóncavo

Son mayores son mayores a 180º



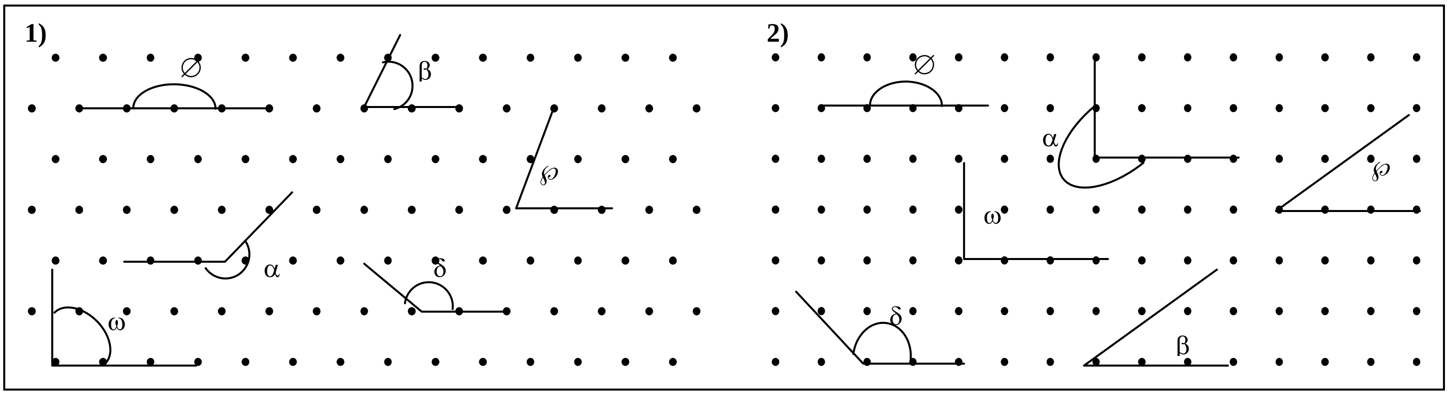
Ángulos especiales:
Angulo nulo: es el que mide o°
Angulo llano: es el que mide 180°

TRABAJAMOS SOLOS

Observen detenidamente las regiones punteadas, se llaman tramas. La primera es una trama triangular y la segunda es una trama cuadrada: Utilizando como vértices los puntitos de cada una dibujen en ambas:

1) un ángulo cóncavo ($\hat{\alpha}$) 2) un ángulo convexo ($\hat{\beta}$) 3) un ángulo llano. ($\hat{\phi}$)

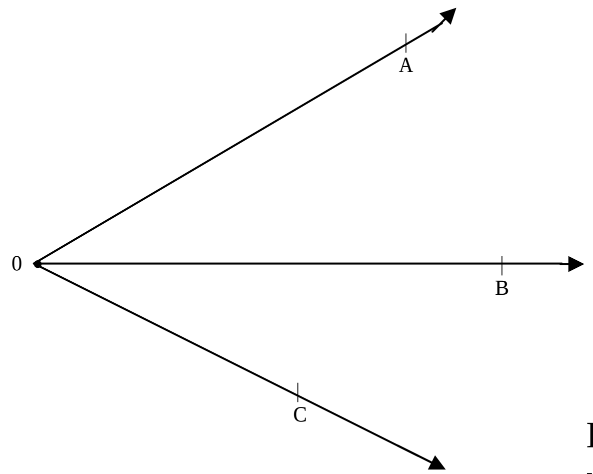
4) un ángulo recto. ($\hat{\varpi}$) 5) un ángulo obtuso. ($\hat{\delta}$) 6) un ángulo agudo. ($\hat{\rho}$)



CÓNCAVO 0°<($\hat{\alpha}$)<180°	*CONVEXO* $\hat{\beta}$ >180°
($\hat{\alpha}$) = 0° nulo 0°<($\hat{\alpha}$)<90° ***agudo*** ($\hat{\alpha}$) = 90° recto 90°<($\hat{\alpha}$)<180° ***obtuso*** ($\hat{\alpha}$)= 180° llano	

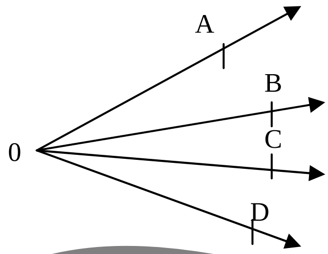
Ángulos consecutivos

Dos ángulos son consecutivos cuando tienen un lado común.
Si tienen un lado en común significa que tienen el mismo vértice. (En este ejemplo el vértice es el punto 0).



$A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son ángulos consecutivos

Dado el siguiente gráfico, nombraremos algunos pares de ángulos consecutivos y algunos no consecutivos.

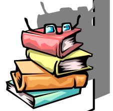


$A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son consecutivos

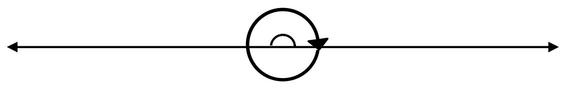
$B\hat{O}C$ Y $C\hat{O}D$ son consecutivos

$A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ no son consecutivos

Medida de un Ángulo



La medida de un ángulo es un número que nos permite comparar la amplitud de ese ángulo con la amplitud de otro que consideramos como unidad consideramos como unidad la amplitud de una vuelta completa.



En el sistema sexagesimal el ángulo de una vuelta completa es igual a 360º.
Si dividimos un ángulo de un giro en 360 partes de igual medida, cada una de ellas es un ángulo de un grado sexagesimal. Se simboliza:1º

Si dividimos un ángulo de 1º en 60 partes de igual medida obtenemos un ángulo de un minuto sexagesimal.
Se simboliza 1´ y se cumple que 1º = 60´ (un grado es igual a sesenta minutos).
Y si hacemos lo mismo con un ángulo de 1´ obtenemos uno de un segundo sexagesimal. Se simboliza 1" y se cumple que 1´= 60". Este sistema de medición de ángulos se llama sistema sexagesimal.
Para medir ángulos se debe utilizar un instrumento llamado transportador; que consiste en un semicírculo graduado dividido en 180 partes, cada una de las cuales corresponde al ángulo central de un grado.

La medida del tiempo, igual que los ángulos, se realiza en el sistema sexagesimal. **Analicemos el siguiente problema:**

Luis es un corredor de maratón que para entrenarse corrió dos días seguidos una maratón. Obtuvo los siguientes registros: el primer día corrió la maratón en 2 h 48' 35"; el segundo día, en 2h 45' 30". ¿Cuanto tiempo corrió Luis en ambos días?

Si sumamos por separado las horas, los minutos y los segundos, resulta:

$$\begin{array}{r} 2h\ \ 48'\ \ 35'' \\ +\ \ 2h\ \ 45'\ \ 30'' \\ \hline 4h\ \ 93'\ \ 65'' \end{array}$$

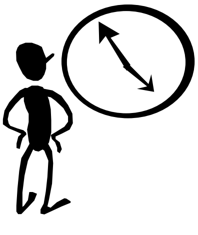
Pero 65 segundos equivalen a 1 minuto (60 segundos) y 5 segundos, luego la suma se puede escribir así:

$$4h\ \ 94'\ \ 5''$$

De la misma forma, 94' equivalen a 1 hora y 34 minutos. Luego la suma es:

$$5h\ \ 34'\ \ 5''$$

Los mismos procedimientos hay que realizar para sumar ángulos.



Resta de ángulos en el sistema sexagesimal.

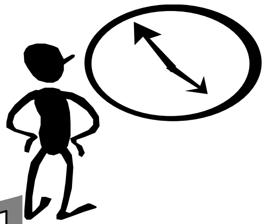
En la primera carrera un compañero de Luis corrió la maratón en 3 horas exactamente. ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre ambos?

Debemos hacer la siguiente operación:

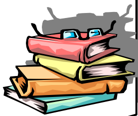
$$\begin{array}{r} 3h\ \ 0'\ \ 0'' \\ -\ \underline{2h\ \ 48'\ \ 35''} \end{array}$$

Igual que en la suma, deberíamos restar por separado las horas los minutos y los segundos, pero no podemos hacer las restas 0-35 (segundos) ni 0-48 (minutos). Para conseguirlo transformamos una hora en 60 minutos y un minuto en 60 segundos. Es decir, las 3 horas se convierten en 2h 59' 60''.

$$\begin{array}{r} 2h\ \ 59'\ \ 60'' \\ -\ \underline{2h\ \ 48'\ \ 35''} \\ 0h\ \ 11'\ 25'' \end{array}$$



Multiplicación de un ángulo por un número natural.



Para multiplicar un ángulo por un número natural debemos multiplicar por ese número cada una de las unidades del ángulo (grados, minutos y segundos). Si alguno de los productos de los segundos o minutos es superior a 60, lo transformamos en una unidad de orden inmediatamente superior.

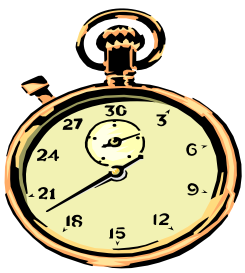
$$\begin{array}{r} 18^{o}\ \ 26'\ \ 35'' \\ \underline{\times\ 3} \\ 54^{o}\ \ 78'\ 105'' \end{array}$$

Pero 105'' = 1' 45'', luego

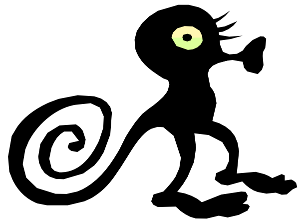
$$54^{o}\ \ 79'\ \ 45''$$

Pero 79' = 1º 19', luego

$$55^{o}\ 19'\ 45''$$

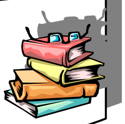


Trabajemos solos

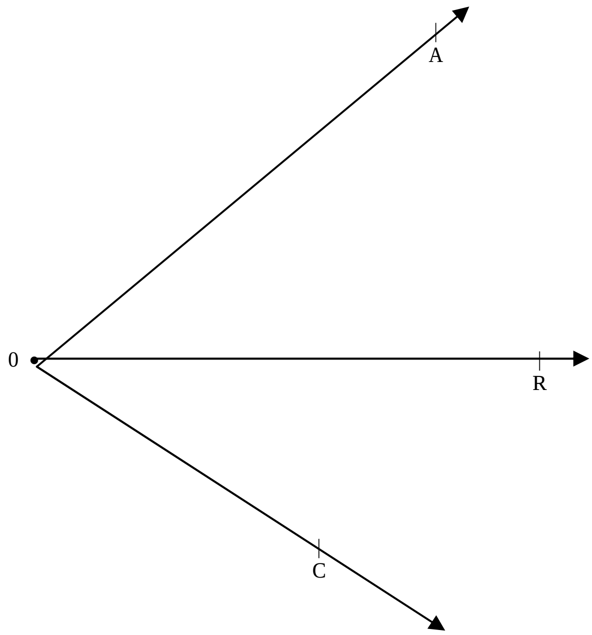


18°25´36” + 45°25´30”	45°25´30” - 18°30´36”	26°16´52” x2
.... RTA.:	.... RTA.:	.... RTA.:

Bisectriz de un ángulo



Se llama bisectriz de un ángulo a la semirrecta interior con origen en el vértice del ángulo que lo divide en dos partes congruentes (es decir iguales).

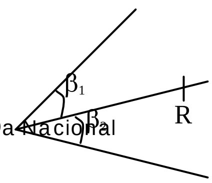


OR bisectriz del $A\hat{O}C \Rightarrow = A\hat{O}R = R\hat{O}C$

$\downarrow$

Se lee: El ángulo $A\hat{O}R$ es congruente al ángulo $R\hat{O}C$.(En geometría se habla de congruencia entre dos figuras, no de igualdad).

Ejemplo:



Dado el ángulo β que mide 60º, si trazamos su bisectriz $\overline{OR}$; $\hat{\beta}_1$ mide 30º y $\hat{\beta}_2$ también mide 30º.

Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de ambos es igual a un recto.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios $\Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de ambos es igual a un llano.

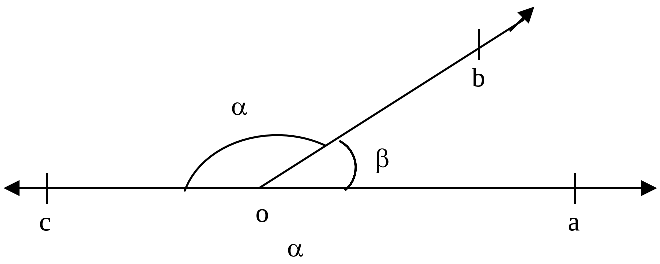
$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios $\Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$

Si $\hat{\alpha}$ por ejemplo vale 50º y $\hat{\beta}$ es igual a 40º, entre los dos suman 90º, entonces $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se dicen complementarios

Claro, siempre que la suma de los dos sea igual a 90º se dicen que son complementarios y si $\hat{\alpha}$ es igual a 120º y $\hat{\beta}$ es igual a 60º se dice que son suplementarios porque la suma es 180º.

Ángulos adyacentes

Dos ángulos que son consecutivos y suplementarios se llaman ***ángulos adyacentes***



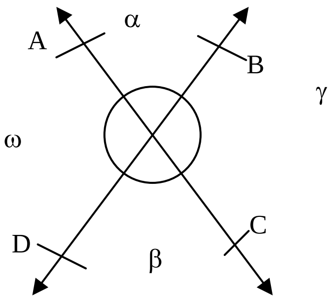
$\vec{ob}$ lado común, $\vec{oc}$ y $\vec{oa}$ semirrectas opuestas $\Rightarrow \hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son adyacentes

$\Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180º$

Ángulos opuestos por el vértice

Se llaman así los ángulos que tienen el vertice común y sus lados son semirrectas opuestas

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos opuestos por el vértice $\hat{\omega}$ y $\hat{\gamma}$ también lo son.



Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

CENS Nº 451

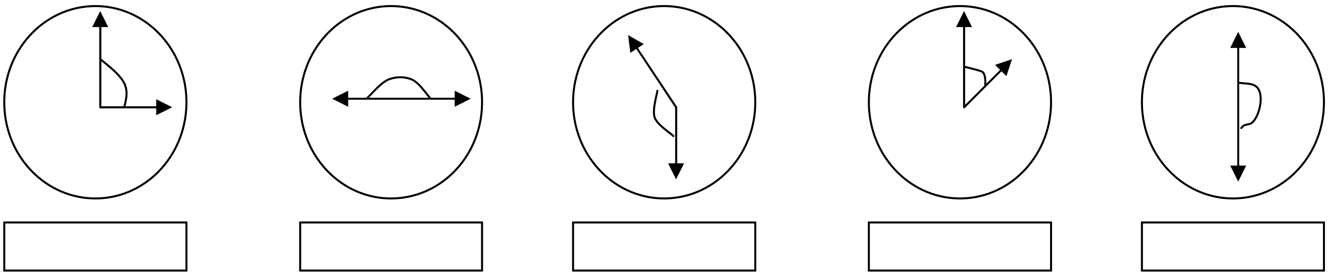
1er. Año

NOMBRE Y APELLIDO: ____________________

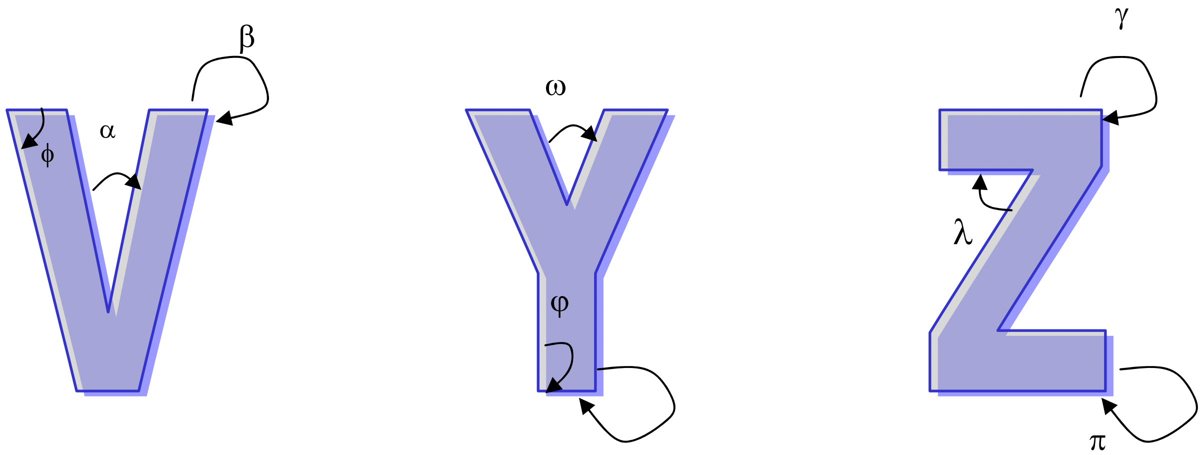
DEPENDENCIA: ____________________

Matemática *Actividad* **13**

1)Observen cada reloj y determinen que tipo de ángulo determinan las agujas



2)Clasifiquen los ángulos de las siguientes figuras



($\hat{\alpha}$) ....($\hat{\beta}$)............................... ($\hat{\phi}$) ....

($\hat{\varpi}$)..($\hat{\delta}$) ....($\hat{\rho}$)..........................

($\hat{\lambda}$) ....($\hat{\gamma}$) ....($\hat{\pi}$) ....

3) Hallen la medida de $\hat{\alpha}$ sabiendo que:

a)$\hat{\beta}$ = 53° 23 35” y $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios.

....

....

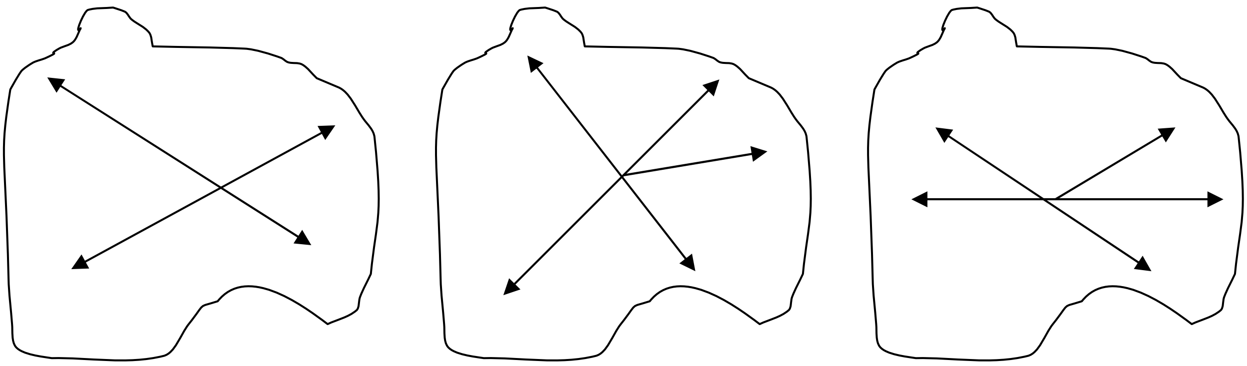
....

....
....

b) $\hat{\beta}$ = 37° 43 21”   y $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios.

....
....
....
....

4) Hallen la medida de los ángulos.



= 23° 54 36”

$\hat{\alpha}$ = 126° 38 42”

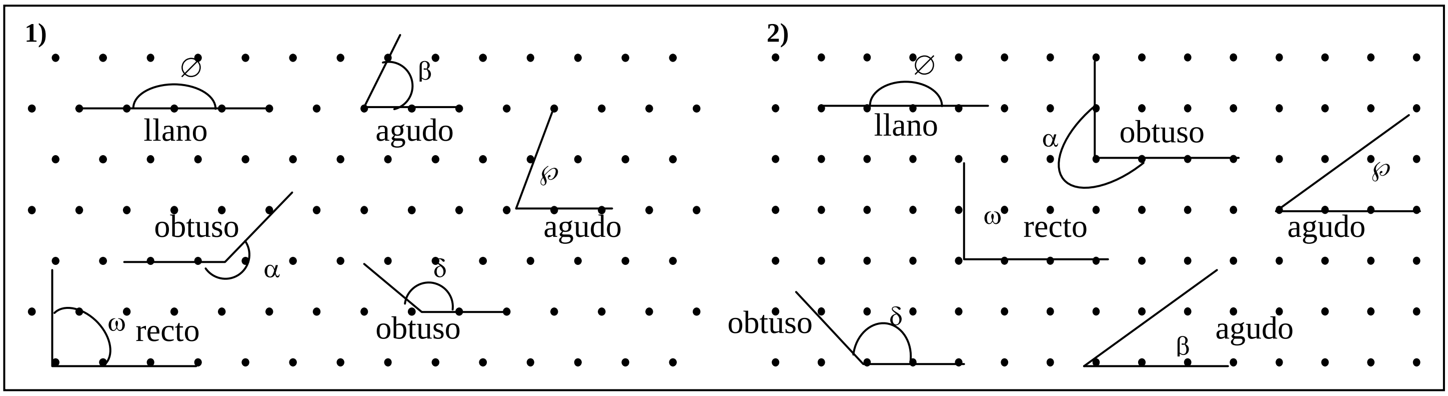
$\hat{\beta}$ = $\hat{\delta}$

$\hat{\alpha}$ = 86° 41 58”

$\hat{\beta}$ = 27° 34 18”

Resueltos

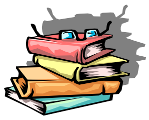
Ejercicio página 126



Ejercicio página 130

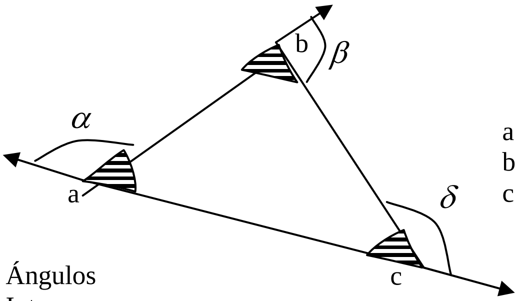
18°25´36” + 45°25´30”	45°25´30” - 18°30´36”	26°16´52” x2
…………………………… …………………………… …………………………… …………………………… RTA.: 63°51´6”	…………………………… …………………………… …………………………… …………………………… RTA.: 26°54´54”	…………………………… …………………………… …………………………… …………………………… RTA.: 52°29´44”

Triángulos



Un triángulo es un **polígono convexo.**
Los tres segmentos que forman los bordes son los **lados.**
Los tres puntos que comparten los lados dos a dos son los **vértices.**
Las tres regiones interiores que se forman al cortarse cada par de lados son los **ángulos interiores.**
Si se prolongan los lados , los ángulos adyacentes a los ángulos interiores son los ángulos exteriores.

$\overline{ab}$
$\overline{bc}$
$\overline{ca}$
a, b, c vértices



a
b
c
ángulos externos

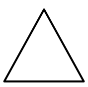
$\hat{a}$
$\hat{b}$
$\hat{c}$
Ángulos
Internos

.

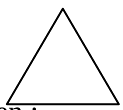
Clasificación de los triángulos

Según la longitud de **sus lados** los triángulos se clasifican en :

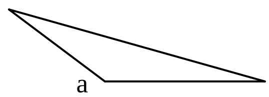
Triángulos **equiláteros**
Tres lados iguales y
tres ángulos iguales.



Triángulos isósceles
Dos lados iguales y
dos ángulos iguales



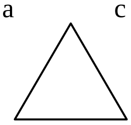
Triángulos escalenos
Tres lados distintos y
tres ángulos distintos.



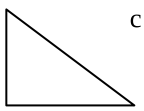
Según la **ángulos** los triángulos se clasifican en :

Triángulos acutángulos
Tres ángulos agudos

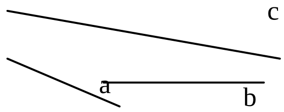
. amplitud de s**us**

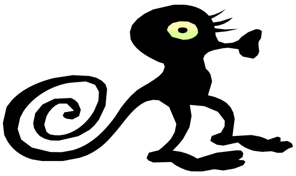


Triángulos rectángulos
Un ángulo recto



Triángulos obtusángulos
Un ángulo obtuso





Trabajamos juntos

Completen las siguientes tablas: (la medida de los lados está en cm).

Lean previamente la página 60

Si se sabe que la suma de los ángulos interiores es de 180°

Triángulo	**Angulo** $\hat{A}$	**Angulo** $\tilde{B}$	**Angulo** $\hat{C}$	**Clasificación de acuerdo a la amplitud de sus ángulos**
1	53 °	28°		
2	123°		16°	
3	90°	45°		
4	60°	60°		
5	32°		108°	

Si se sabe que el perímetro de un triángulo es la suma de las medidas de los lados.

Triangulo	**Lado AB**	**Lado BC**	**Lado CA**	**Perímetro**	**Clasificación de Acuerdo a la longitud de sus lados**
1	10	8	8		
2	21		21	65	
3	24	15		82	

a) Identifiquen y anoten cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1- Si un triángulo es equilátero, también es isósceles. ☐

2- Todo triángulo isósceles es equilátero.

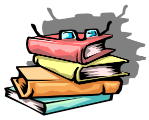
3- Un triángulo obtusángulo puede ser isósceles.

4- Un triángulo equilátero puede ser rectángulo.

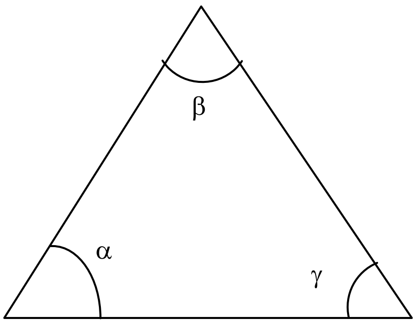
5- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son siempre complementarios.

Un triángulo escaleno puede ser rectángulo.

Relaciones entre los ángulos de un triángulo



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180º$

Si pudiéramos recortar un triángulo y de cada vértice recortar el ángulo y pegarlos uno a continuación del otro podríamos observar que nos queda determinado un ángulo llano.

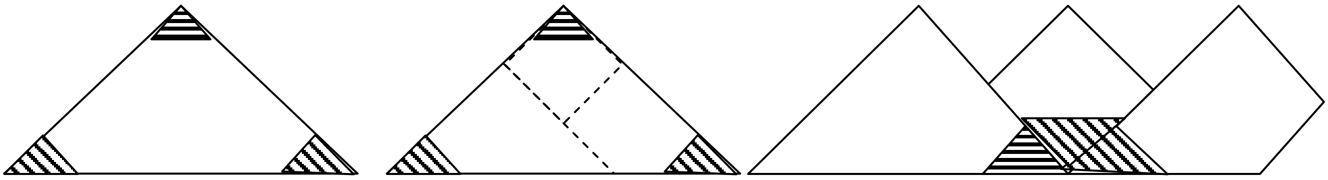
Dibujen un triángulo cualquiera.

Marquen los ángulos interiores con color.

Dividan el triángulo en 3

Dispongan esas partes de forma que en cada una quede un ángulo.

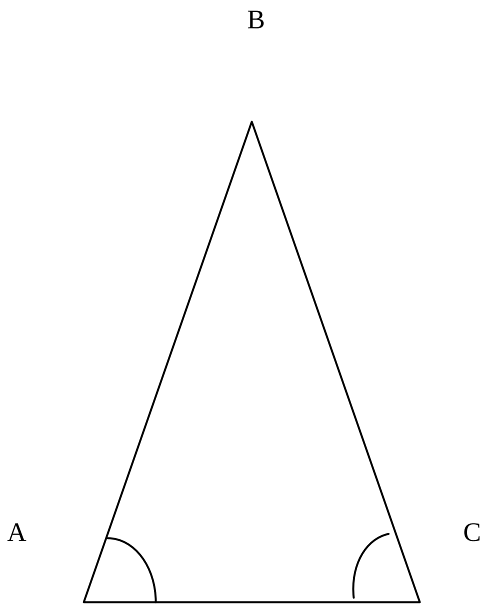
.



Trate de hacerlo con papel y tijera recortando los ángulos del triángulo y pegándolos uno a continuación del otro.
Esta propiedad nos permite calcular los ángulos interiores de un triángulo de la siguiente forma.
Verificamos que la suma de los ángulos interiores es igual a 180°

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°

Supongamos que nos dan un triángulo isósceles y nos dicen que el ángulo desigual mide 40º es decir:



Como se trata de un triángulo isósceles
Tiene 2 lados congruentes (iguales)
$\hat{A} = \hat{C}$ y también 2 ángulos congruentes
$\hat{A} = \hat{C}$

Y el ángulo desigual $\hat{B} = 40º$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$
$\hat{A} + \hat{C} + 40º = 180º$ (Remplazamos el dato $\hat{B} = 40º$)

$\hat{A} + \hat{C} = 180º - 40º$

$\hat{A} + \hat{C} = 140º$ Pero como $\hat{A} = \hat{C}$

$\hat{A} = 140º : 2$

$\hat{A} = 70º$

Resueltos

Ejercicio página 137

Triángulo	Angulo $\hat{A}$	Angulo $\tilde{B}$	Angulo $\hat{C}$	Clasificación de acuerdo a la amplitud de sus ángulos
1	53 °	28°	**99°**	Obtusángulo
2	123°	**41°**	16°	Acutángulo
3	90°	45°	**45°**	Rectángulo
4	60°	60°	**60°**	Acutángulo
5	32°	**40°**	108°	Obtusángulo

Triangulo	Lado AB	Lado BC	Lado CA	Perímetro	Clasificación de Acuerdo a la longitud de sus lados
1	10	8	8	**26**	Isósceles
2	21	**23**	21	65	Isósceles
3	24	15	**43**	82	Escaleno

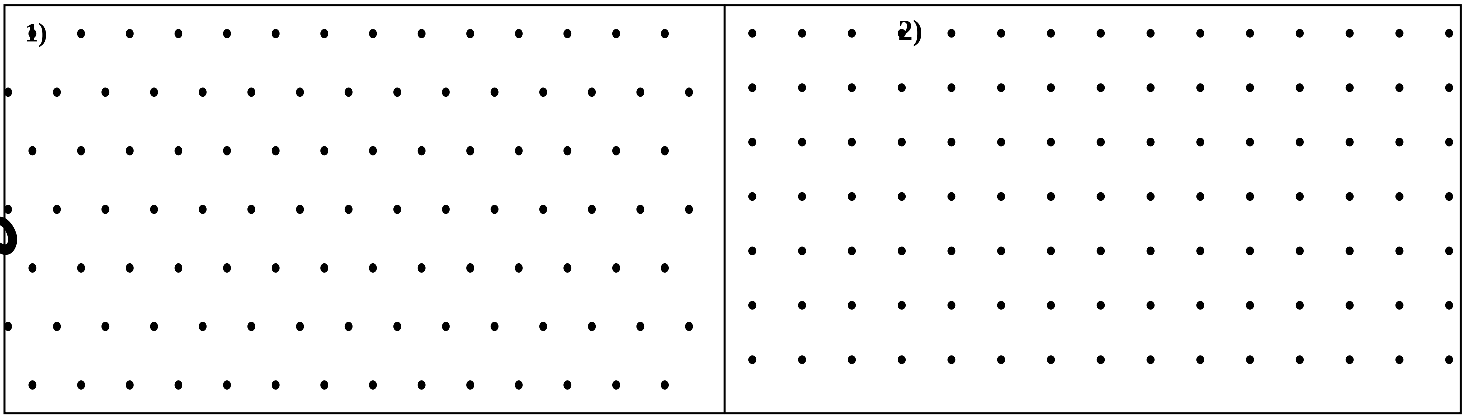
CENS Nº 451

1er. Año

NOMBRE Y APELLIDO: ____________________________

DEPENDENCIA: ________________________________

Matemática *Actividad* **14**



1)Observen detenidamente las regiones punteadas. Utilizando como vértices los puntitos de cada trama.

dibujen en caso de ser posible: (los lados y ángulos iguales con el mismo color)

1. un triángulo que tenga los tres lados iguales.
2. Un triángulo que tenga dos lados iguales.
3. Un triángulo que tenga los tres lados desiguales.
4. Marquen con color los ángulos interiores.
5. Un triangulo rectángulo isósceles.
6. Un triangulo obtusángulo.
7. Un triangulo acutángulo escaleno

2) Lean atentamente e indiquen si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando en cada caso:

a) Todos los triángulos isósceles son equiláteros.

....

b) Algunos triángulos equiláteros son isósceles

....

c) Ningún triángulo rectángulo es equilátero

....

d) Ningún triángulo obtusángulo es isósceles.

....

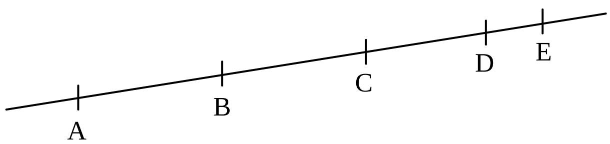
e) A veces los triángulos rectángulos son isósceles.

....

3) Observen atentamente la siguiente tabla y completen justificando en cada caso con un gráfico que cumpla las condiciones. De no ser posible indiquen por que.

TRIANGULO	**EQUILÁTERO**	**ISÓSCELES**	**ESCALENO**
ACUTÁNGULO			
OBTUSÁNGULO			
RECTÁNGULO			

4) Dado el siguiente dibujo , completen el cuadro.



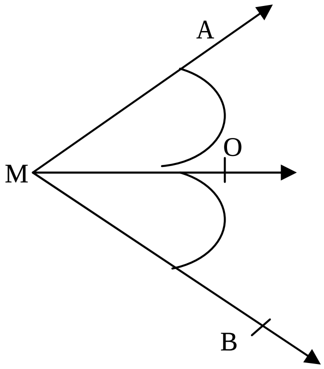
5) Si el ángulo = 70º ¿Cuál es su complemento? ¿Y su suplemento?

....

....

....

6) Calculen la medida del AMB, sabiendo que MO es bisectriz de AMB y que A $A\hat{M}O$ O = 4 X – 29º y $O\hat{M}B$ = x + 19º



Resolvemos juntos

$A\hat{M}O$ es igual a $O\hat{M}B$ por su bisectriz entonces

$A\hat{M}O = A\hat{M}O$

4 x – 29° = x + 19°

3 X = 48°

$x = \frac{48°}{3} =$

x = 16°

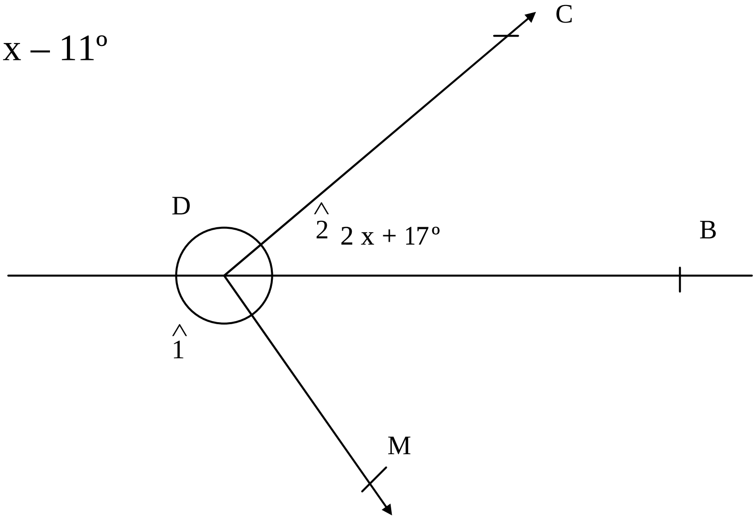
Reemplazamos y $A\hat{M}O$ = 4 . 16° - 29

= 64° - 28°

$A\hat{M}O$ =35°

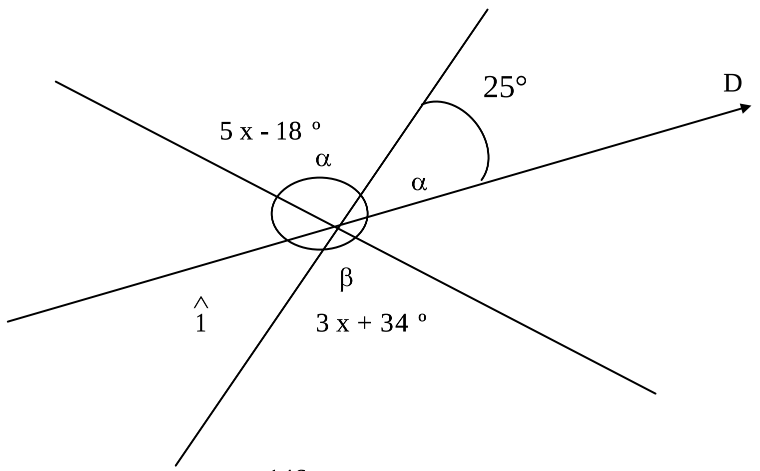
7) Calcular los ángulos señalados con números:

a) 7 x – 11º

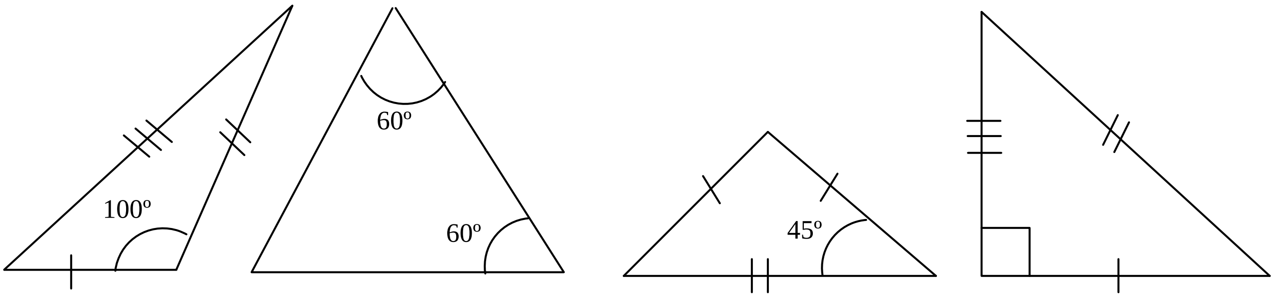


$\hat{B}$ es bisectriz de $C\hat{D}M$

Determina la medida de todos los ángulos
Ayuda α es el opuesto por el vértice con β



8) Clasifique cada triángulo de acuerdo a los datos.



3 lados distintos			