



Centro Educativo de Nivel Secundario N° 451
Anexo Universidad Tecnológica Nacional

Dirección de Capacitación No Docente

Dirección General de Cultura y Educación
Provincia de Buenos Aires

MATEMATICA

Segundo Año
Módulo 2



LIBROS BACHILLER 2011

Formato digital - PDF

Publicación de edUTecNe - Editorial de la U. T. N.

Sarmiento 440 - (C1041AAJ) - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina

<http://www.edutecne.utn.edu.ar>

edutecne@utn.edu.ar

© Universidad Tecnológica Nacional -U.T.N. - Argentina

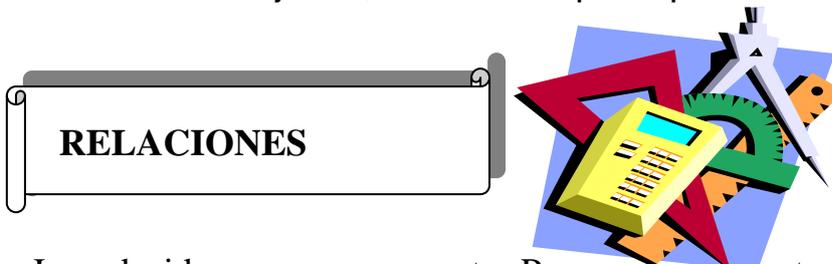
La Editorial de la U.T.N. recuerda que las obras publicadas en su sitio web son de libre acceso para fines académicos y como un medio de difundir el conocimiento generado por autores universitarios, pero que los mismos y edUTecNe se reservan el derecho de autoría a todos los fines que correspondan.

CAPÍTULO 2

Relaciones y funciones. Pares ordenados. Coordenadas cartesianas. Producto cartesiano.
Relaciones: representación. Proporcionalidad. Regla de tres.

Las funciones describen fenómenos de la vida cotidiana. Si se conoce una determinada función que describe adecuadamente un fenómeno se podrá utilizar esa información para estimar por ejemplo cual será el gasto en meses futuros del consumo de gas, aclarando que como todo está sujeto a muchos factores variables, estas estimaciones serán en algunos casos solo probables pero nos permitirán actuar de manera no totalmente arbitraria.

En ocasiones, realizar una experiencia y medir resulta excesivamente oneroso o imposible, pensemos en lo que hubiera significado usar este método para enviar un cohete a la luna, por eso conociendo las leyes de la mecánica, se pudieron establecer funciones que describieron la trayectoria del cohete en función de todas sus variables lo que permitió diseñar una aparato para alcanzar su objetivo, es decir se pudo predecir.



Juan decide comprar una moto. Para su presupuesto encuentra dos marcas, una Kawasaki 1500 y otra Honda 1000. De las dos marcas elige tres colores, plateado, azul y rojo.

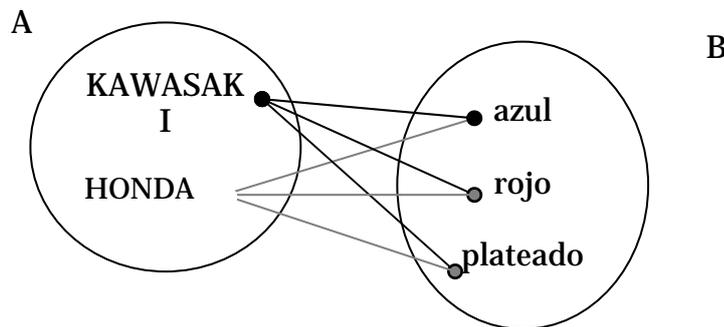
Juan se imagina las posibles combinaciones entre marca y color.

Representamos dicha situación mediante un **diagrama de Venn**.

$$A = \{ x/x \text{ es una marca de moto} \}$$

Nota: x/x es una notación conjuntista que se lee “**x tal que x**” y es en sentido genérico.

$$B = \{ x/x \text{ es color de la moto} \}$$

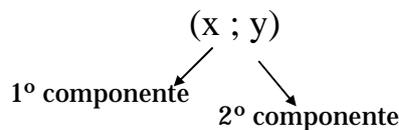


Al conjunto **A** se lo llama Conjunto de Partida o Alcance. (Dominio)
 Al conjunto **B** se lo llama Conjunto de Llegada o Rango. (Codominio)

Definimos el conjunto **P** tal que sus elementos sean los pares formados por una marca y un color en ese orden.

$$P = \{ (K ; A) (K ; R) (K ; P) (H ; A) (H ; R) (H ; P) \}$$

Cada par que satisface una relación recibe el nombre de **par ordenado**:



Definimos relación entre dos conjuntos:

Es otro conjunto cuyos elementos son pares ordenados, tal que el primer elemento del par pertenece al conjunto de partida y el segundo elemento del par pertenece al conjunto de llegada.

Ahora *definimos* al conjunto *P* por comprensión:

$$P: A \rightarrow B \Rightarrow P = \{ (x ; y) / x \in A \wedge y \in B \}$$

Se lee: “**P** del conjunto A en el conjunto B, esto implica que el conjunto P está formado por los pares ordenados (x ; y) tales que la 1^{er} componente del par pertenece al conjunto A y la segunda componente del par al conjunto B.

Escribamos todos los pares ordenados que satisfacen la relación ubicando, en el mismo renglón, la primer componente en la columna de la izquierda y la segunda componente en la columna de la derecha.

$$y \mid x$$

| | |
|---|---|
| K | a |
| K | r |
| K | p |
| H | a |
| H | r |
| H | p |

Si recordamos el juego de “La Batalla Naval”, teníamos sobre un lado del tablero letras y sobre el otro números. Supongamos que en el plano del tablero ubicamos los barcos.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 1 | | | | |
| 2 | | |  | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

Si nuestro contrincante decía por ejemplo D2, C2, o E2 sabíamos que nuestro barco estaba hundido o averiado.

(D ; 2) es un par ordenado donde D representa la primer componente de dicho par y está sobre el eje de las letras o eje x horizontal, y el número 2 en este caso es la 2^{da} componente del par ordenado y está sobre el eje de los números o ejes vertical.

Si en lugar de colocar letras de uno de los lados y números sobre el otro, colocamos números en ambos lados, (que en matemática reciben el nombre de **ejes**) y si además estos ejes se cortan perpendicularmente (o sea formando 4 ángulos rectos) tendríamos los **ejes cartesianos**.

Ejemplos:



Para ubicar un punto en el plano se debe definir previamente: un sistema de referencia.

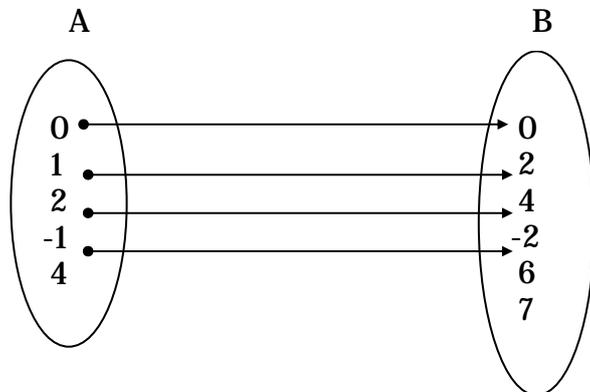
Por conveniencia elegimos como sistema de referencia los ejes **cartesianos** determinado por dos rectas perpendiculares. La recta **horizontal** representa el **eje de abscisas** (la designamos con la letra x) y la **vertical** el **eje de ordenadas** (la designamos con la letra y).



Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{0; 1; 2; -1; 4\}$ $B = \{0; 2; 4; -2; 6; 7; \}$ y la relación

$R: A \rightarrow B / \text{“y es el doble de x”}$



Representamos la relación mediante un *diagrama de Venn*:

Escribamos la relación por extensión:

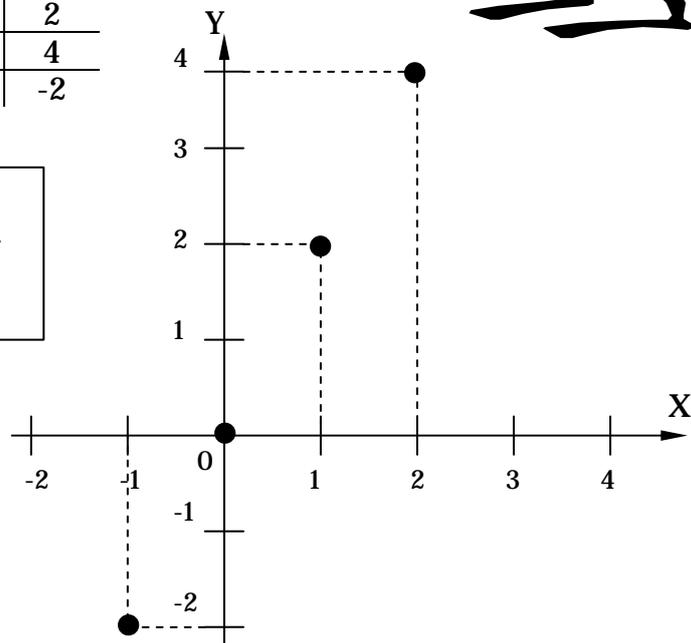
$R = \{(0; 0) (1; 2) (2; 4) (-1; -2)\}$

Expresemos la relación mediante una tabla de valores

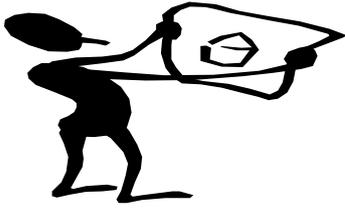
| X | Y |
|----|----|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| -1 | -2 |



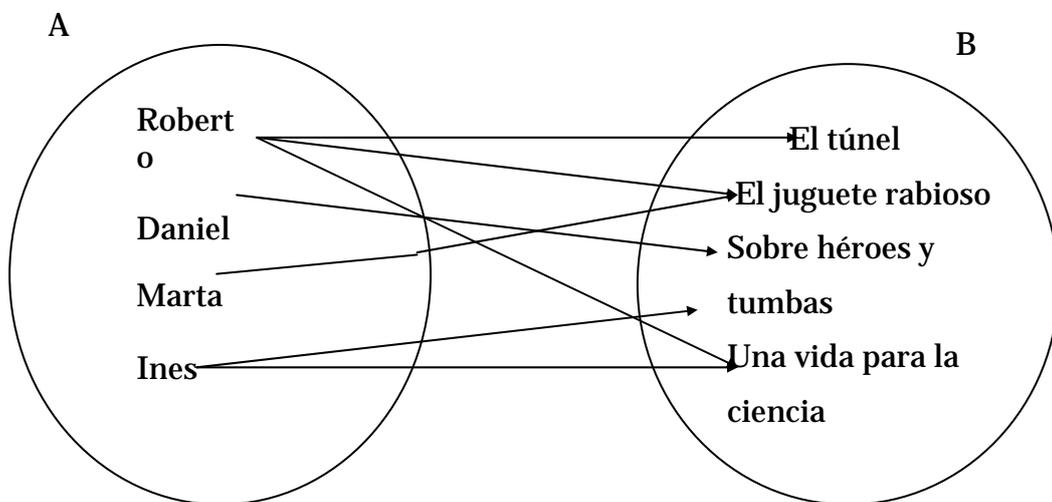
Puedo representar la misma relación mediante un par de ejes cartesianos:



Para establecer una relación tengo que tener dos conjuntos; a uno de ellos lo llamo conjunto de partida y al otro conjunto de llegada (en algunos casos los dos conjuntos pueden ser iguales). Estos conjuntos pueden ser de números, de personas, de animales, etc. El conjunto de partida y el de llegada no necesariamente tienen que ser de la misma clase, es decir uno puede ser de personas y el otro de libros.

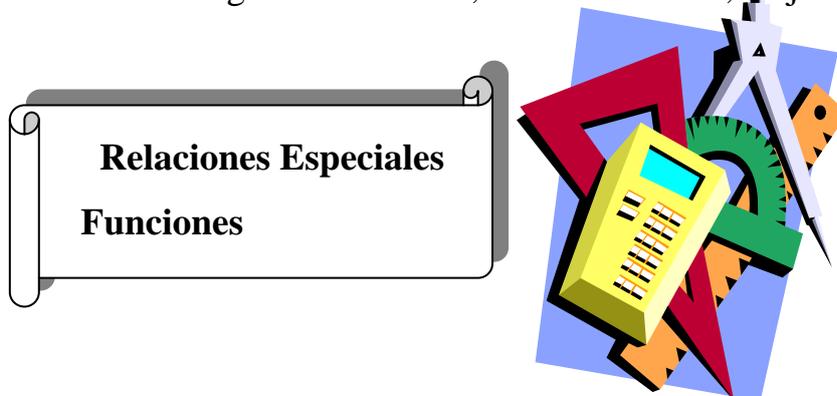


Por ejemplo si encerramos un conjunto cierta cantidad de personas y en otro libros y vinculamos mediante flechas, de acuerdo a los libros que hayan leído cada uno de ellos obtenemos una relación entre ambos conjuntos.



Y la relación será entre las personas y los libros que leyeron; por ejemplo Roberto leyó, “El túnel”, “El juguete rabioso”, y “Triste solitario y final”, en cambio Inés leyó dos “Una vida para la ciencia” y “Triste, solitario y final”.

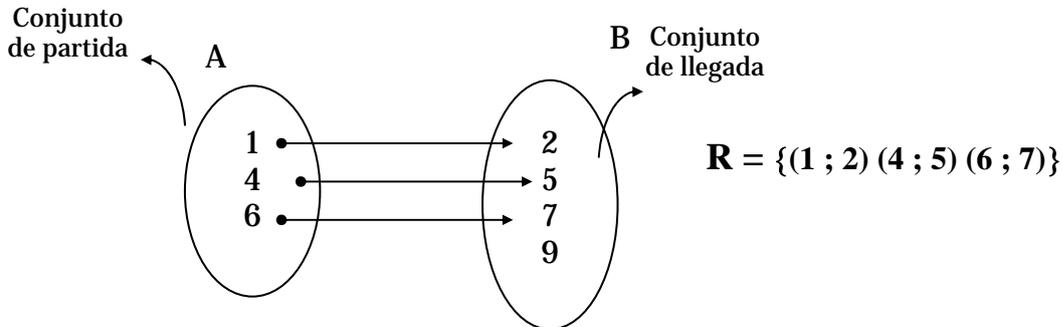
Entonces las relaciones pueden representarse como dijimos anteriormente mediante diagramas de Venn, tabla de valores, o ejes cartesianos.



Dados los conjuntos:

$A = \{1; 4; 6\}$ y $B = \{2; 5; 7; 9\}$ y la relación $R: A \rightarrow B$ “ es el siguiente de”.

Representamos la relación en un diagrama de Venn.



Observamos que en esta relación cada elemento del conjunto de partida se relaciona con un sólo elemento del conjunto de llegada y no quedan elementos del conjunto de partida sin relacionarse con los del conjunto de llegada.

Cuando ocurre esto decimos que dicha relación **es una función**.

Al conjunto A se lo llama **dominio** y a los elementos del conjunto B que se relacionan con los del conjunto A se lo llama conjunto **imagen**.

El dominio de esta función es: $Dm(f) = \{1; 4; 6\}$

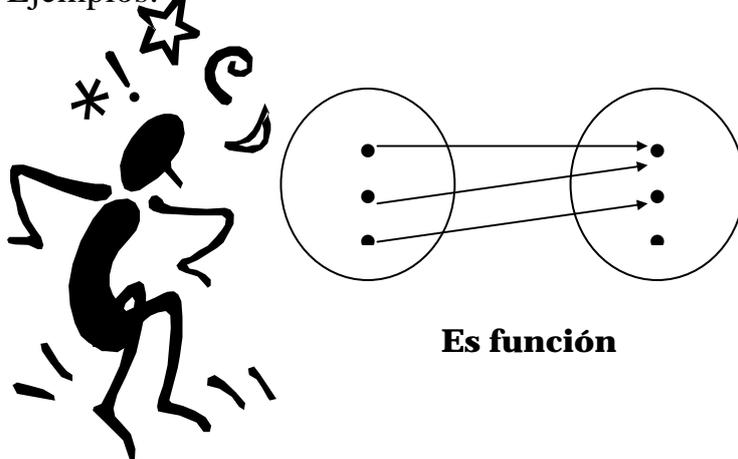
La imagen “ “ “ “: $Im(f) = \{2; 5; 7\}$

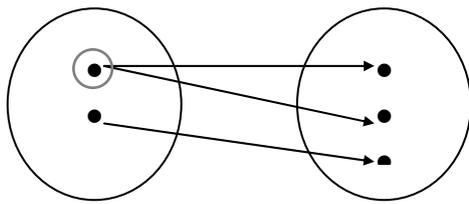
Aclaración: el 9 no pertenece a la imagen porque no se relaciona con ningún elemento del conjunto A.

Todos los elementos del conjunto de partida tienen imagen.

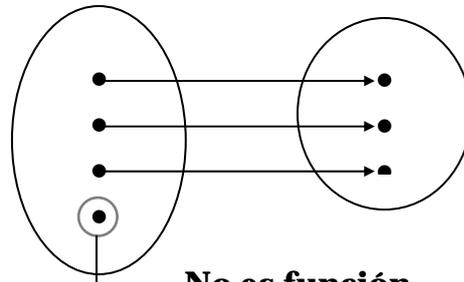
Cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen, es decir: una relación es función si para cada elemento del conjunto de partida existe una imagen y ella es única.

Ejemplos:

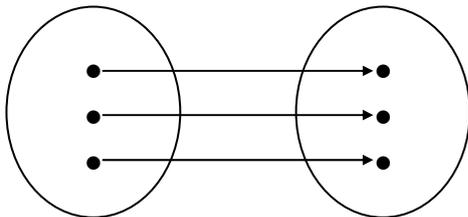




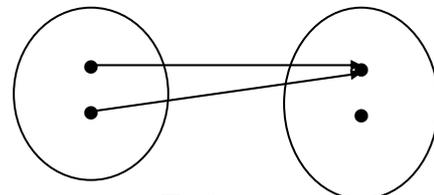
No es función
(tiene dos imágenes)



No es función
Este elemento no tiene imagen



Es función



Es función

Las funciones representan situaciones de la vida cotidiana. Definen una relación entre dos variables.: “ *distancia recorrida en función del tiempo*” Esa relación es muy especial, a través de ella a cada variable independiente (el tiempo) le corresponde “ *siempre una única variable dependiente*” (una distancia). A las 8,30 horas estarán a una única distancia, Otro ejemplo la Relación “ hijo de ”, (ser hijo es la variable independiente, ser padre es la variable dependiente) Cada hijo tiene *un solo* padre

A las funciones se las puede representar de diferentes formas mediante: diagramas de Venn, tabla de valores, gráficos y en algunos casos mediante una fórmula.

- Diagramas de Venn
- En ejes cartesianos
- En tablas de valores

y pueden expresarse a través de alguna fórmula.

Para el ejemplo que vimos anteriormente “es el siguiente de”, si quisiéramos expresar esta función mediante una fórmula, resultará:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{y} = \textcircled{x} + 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Variable} & \text{Variable} \\ \text{dependiente} & \text{independiente} \end{array}$$

Ahora vamos a representar la función en un par de ejes cartesianos.

Para eso necesitamos previamente hacer una “*tabla de valores*”.

¿de dónde obtenemos esos valores?

Para la variable independiente x le asignamos valores arbitrarios, por ej.:

para $x = 1$; $x = 0$; $x = -1$; $x = -2$ (esos valores los elegimos nosotros).

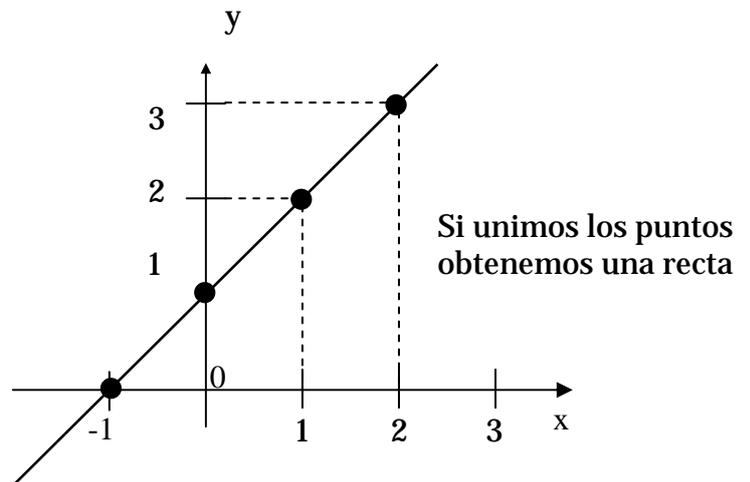
Con esos valores de x los reemplazamos en la fórmula (en este caso $y = x + 1$) y así obtenemos los valores de y .

| x | y |
|----|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| -1 | 0 |
| 2 | 3 |

Tabla de

$$\begin{array}{l} \rightarrow y = \boxed{0} + 1 = 1 \\ \rightarrow y = \boxed{1} + 1 = 2 \\ \rightarrow y = \boxed{-1} + 1 = 0 \\ \rightarrow y = \boxed{2} + 1 = 3 \end{array}$$

↓
Valores de x



Esta función $y = x + 1$, que en el plano representa una recta se la conoce como **función lineal**.

TRABAJAMOS JUNTOS

Para incentivar a Pedro, su papá le prometió cinco pesos por cada problema que resuelva bien . Si se desea expresar esta relación (pesos cobrados en función de problemas bien resueltos) se podría hacer de diferentes formas: Observen atentamente y completen: (Supongamos que el numero de problemas que Pedro tiene que resolver son 5)

Diagrama de Venn

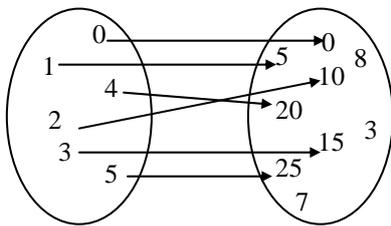
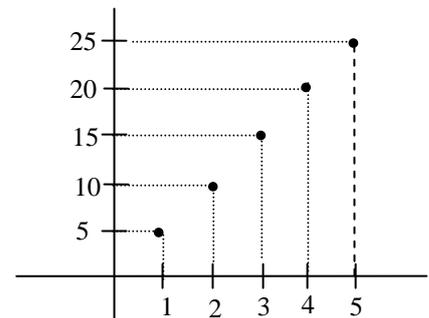


tabla de valores

| x | y |
|---|----|
| 0 | 0 |
| 1 | 5 |
| 2 | 10 |
| 3 | 15 |
| 4 | 20 |
| 5 | 25 |

gráfico



También se puede encontrar una fórmula que represente la relación planteada:
Encuentren la fórmula que les permita calcular la cantidad de dinero que
cobrara Pedro en función de la cantidad de problemas bien resueltos.

\$ a cobrar = \$ 5 x problemas bien resueltos

$$y = 5 \cdot x$$

Se dice que **y** es función de **x** $y = f(x)$

y es la cantidad de dinero a cobrar , **x** la cantidad de problemas bien resueltos

El conjunto de las variables independientes determina el **dominio** de la función (en el ejemplo de Pedro : cantidad de problemas que puede llegar a resolver bien) y el de las variables dependientes el **codominio**.(cantidad de dinero que puede llegar a cobrar)

Cuando todos los puntos de una función que se representa en un sistema de ejes cartesianos pertenecen a una misma recta esta es una **función afín**.

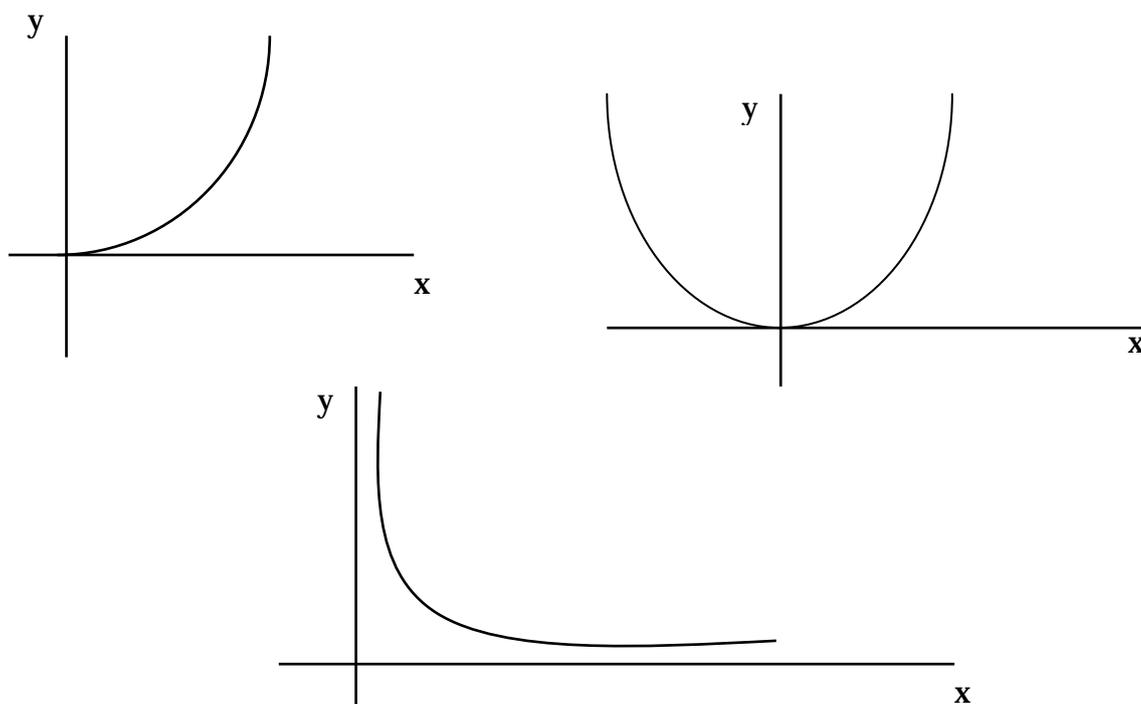
La expresión que representa a una función afín es : $y = ax + b$.

x pertenece al conjunto Dominio(es la variable independiente) e **y** al conjunto codominio.(es la variable dependiente)

Si la recta pasa por el origen de coordenadas se llama función lineal.

Claro está que las funciones lineales no son las únicas funciones ; hay otras que se representan con curvas que las veremos más adelante.

Te mostramos unos ejemplos para que te familiarices con estos temas.



Seguimos trabajando

Seguimos **juntos**

Ejemplo N° 1

Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{ 1; 2; 3; 7 \}$ y $B = \{ 2; 3; 4; 8; 10 \}$

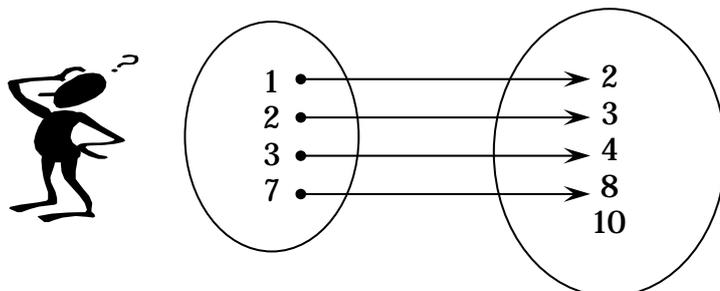
y la relación $R : A \rightarrow B$ / “y es el siguiente de x”



Escribimos una fórmula para la siguiente relación:

$$y = x + 1$$

Representamos la relación en un diagrama de Venn:



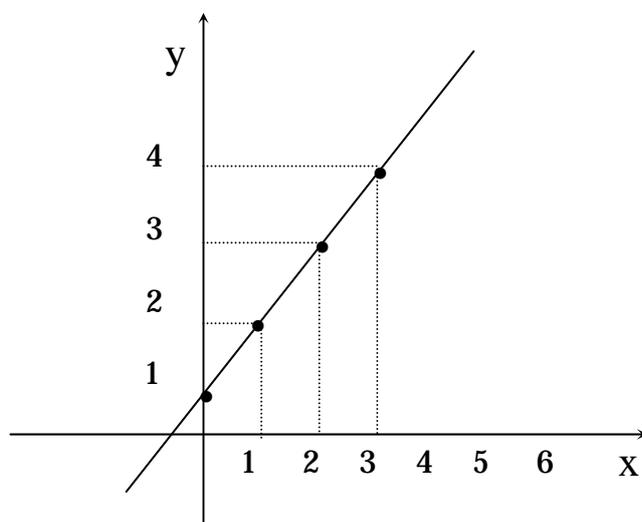
Decimos si es o no es una función:

Si es función, porque cada elemento del conjunto de partida tiene una y solo una imagen.

Confeccionamos una tabla de valores:

| x | y |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 7 | 8 |

Representamos la función en un sistema de ejes cartesianos:



Si unimos todos los puntos, obtenemos una *recta*, a este tipo de funciones se la conoce como **afin**

Escribimos el dominio y la imagen de la función:

$$Dm(f) = \{ 1; 2; 3; 7 \}$$

$$Im(f) = \{ 2; 3; 4; 8 \}$$

Ejemplo N°2:

1. **Dados los siguientes conjuntos $A = \{ x / x \text{ es cifra del número } 4568 \}$; $\{ x / x \text{ es cifra del número } 1153 \}$ y la relación es: es el siguiente**

$$R: A \rightarrow B / (x, y), R \Leftrightarrow y = x - 1$$

también puede escribirse

$$R(x) = x - 1$$

Define por extensión cada conjunto

$$A = \{ 4; 5; 6; 8 \}$$

$$B = \{ 1; 3; 5 \}$$

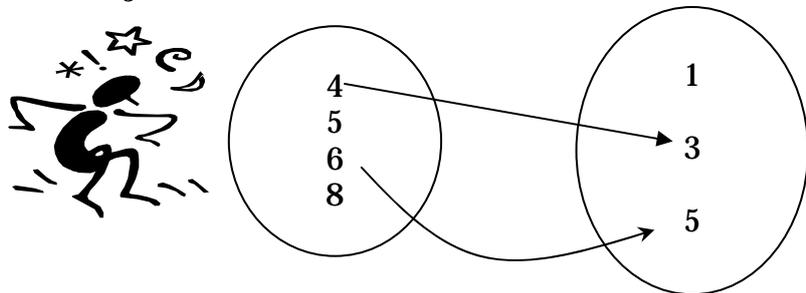


Diagrama R. ¿ R es función ? ¿Porqué?

No es una función porque 5 y 8 no tienen imagen, es decir no se relacionan con ningún elemento del conjunto B

2. Define por extensión:

$$R = \{ (4 ; 3) (6 ; 5) \}$$

$$D(R) = \{ 4 ; 6 \}$$

$$I(R) = \{ 3 ; 5 \}$$

Ejemplo N° 3

Dados dos conjuntos Y la relación R:

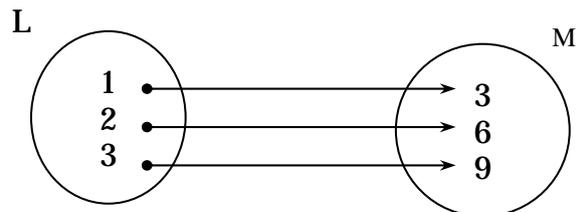
$$M = \{ 3 ; 6 ; 9 \} \quad L = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$$

$$R = \{ (x, y) / y \text{ es el triplo de } x \}$$

2. Escribe la fórmula que sirve para encontrar los pares de esta relación y construye la tabla de R

$$y = 3x$$

| x | y |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |



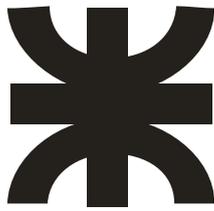
¿**R es función**? Sí ¿Por qué? Todos los elementos de L están relacionados con los de M y no queda ningún elemento de L sin imagen.

3. Define por extensión: R ; D (R) ; I (R).

$$R = \{ (1 ; 3) (2 ; 6) (3 ; 9) \}$$

$$D (R) = \{ 1 ; 2 ; 3 \}$$

$$I (R) \{ 3 ; 6 ; 9 \}$$



NOMBRE Y APELLIDO: _____

DEPENDENCIA: _____

Matemática

Actividad 4

Corte por la línea de puntos y envíe



1) Dados los conjuntos:

$A = \{0; 1; 3; 5\}$ y $B = \{0; 2; 6; 10; 14\}$

y la relación $R: A \rightarrow B$ / “y es el doble de x”.

a Representar la relación mediante un diagrama de Venn.

b Confeccionar una tabla de valores

c Representar la relación en ejes cartesianos.

d Decir si es ó no función

.....

.....

.....

.....



2) Dados los conjuntos $A = \{0; 2; 8; 5; 7;\}$ y $B = \{1; 4; 10; 9\}$ y la relación $R: A \rightarrow B$ / “es la mitad de x”

a Representar la relación mediante un diagrama de Venn.

b Confeccionar una tabla de valores

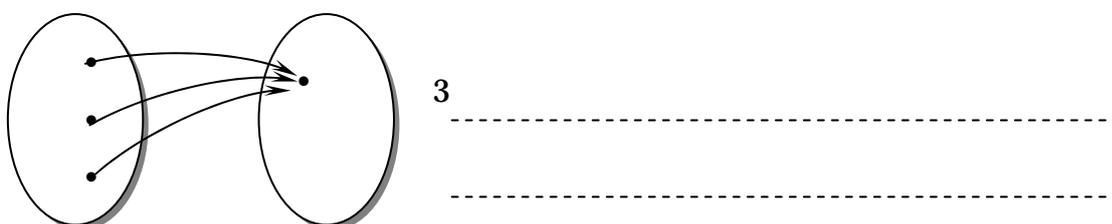
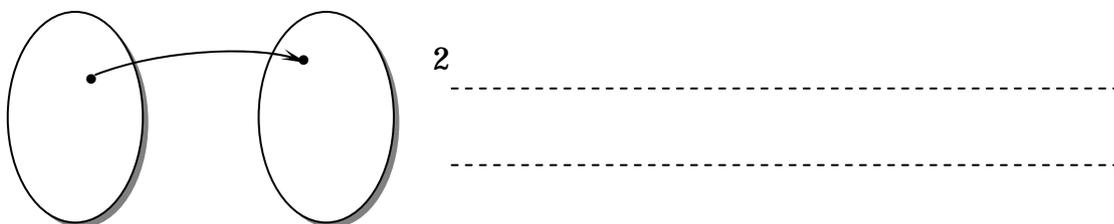
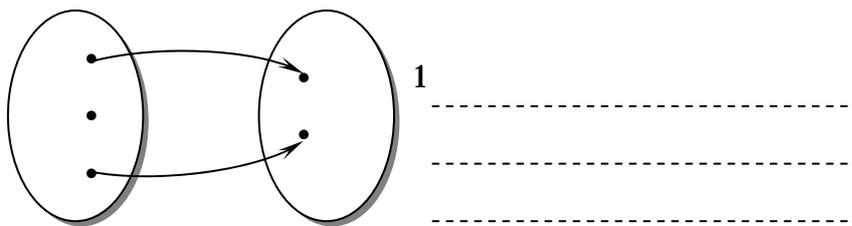
c Representar la relación en ejes cartesianos.

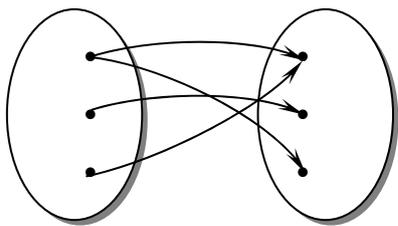
d Decir si es ó no función

.....
.....

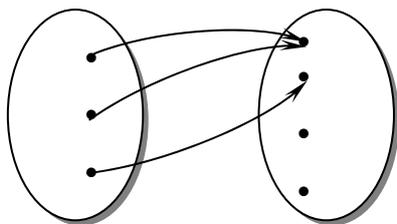
3)

Dados los siguientes diagramas de Venn, clasificar cuáles son funciones,





4



5

4) Dadas las siguientes funciones afines

a) $y = x + 3$

b) $y = x - 2$

c) $y = 2x - 4$

d) $y = x + 5$

✓ **Confeccionar una tabla de valores para cada función**

✓ **Representar cada una de las funciones en ejes cartesianos (hacer un gráfico para c/u de las distintas funciones).**

5)

Analizemos un gráfico que suele publicarse en cualquier diario o revista.

El siguiente gráfico relaciona los años con el capital de una empresa, analízalo y contesta:

a) ¿Con qué capital inicia su actividad?
 Con 10 millones. (fíjate que para $x = 0$ su valor en el eje vertical es 10).

.....



b) ¿Cuánto aumentó el capital en los dos primeros años?
 Para $x = 2$ (x años) ($y =$ millones) corresponde 25, o sea que de 10 millones pasó a 25 millones, es decir, aumentó 15 millones.

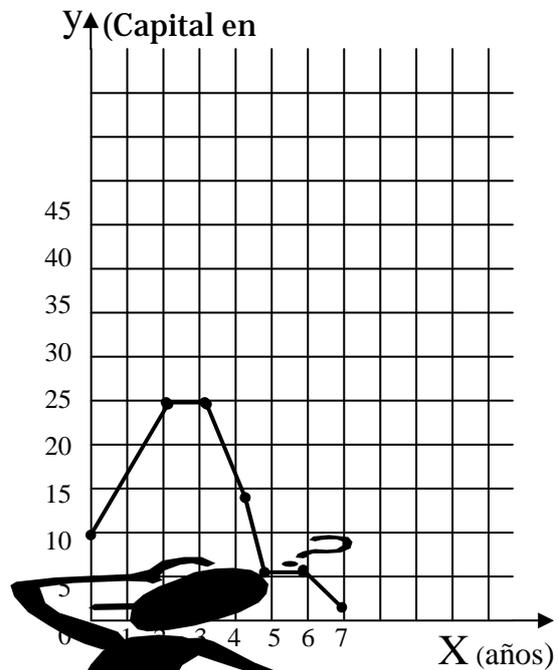
.....

c) ¿Qué sucedió durante el tercer año?
 Entre el segundo y tercer año, vemos que en el gráfico hay una recta horizontal es decir se mantuvo constante no aumentó ni disminuyó.

.....

d) ¿Qué significa en esta relación el par $(7, 0)$?
 Que a los 7 años se perdió todo, porque a siete años le corresponde 0 millones, o sea no quedó nada!

.....



6) Lo pensamos juntos

Dada la relación: definida de P en C
 Siendo $P = \{ 3,4,5,6 \}$
 $Y C = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$
 $R = \{ (x, y) / R(x) = x - 1 \}$

1. Construye la tabla y representa en ejes cartesianos.

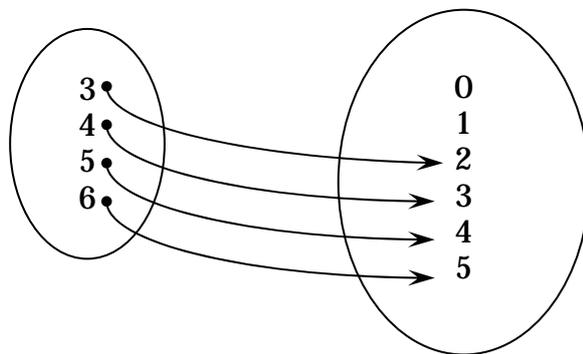
2. Completa:

a) ¿Cuál es la imagen de 3?, es decir $F(3) = ?$ (cuando $x = 3$ y $y = 2$)

b) ¿Cuál es la preimagen de 2?, es decir si $F(x) = 2 \rightarrow x = ?$

c) cuando $y = 2$ $x = ?$

3. Analiza si R es función, justifica.



Es una función, porque todos los elementos del conjunto de partida tienen todos una sola imagen

4. Define por extensión : $D(R)$; $I(R)$.

$$D(R) = \{ 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$$

$$I(R) = \{ 2 ; 3 ; 4 ; 5 \}$$



7)

La empresa de fletes “Traslado feliz “ cobra \$ 10 por kilómetro (o fracción) recorrido más un costo fijo de \$ 20 para el seguro de la mercadería.

- ☞ hallen la expresión que permita calcular el costo de un viaje cualquiera en función de los kilómetros recorridos
- ☞ Grafiquen , los costos desde que se inicia un viaje de 321 km.
- ☞ ¿qué gráfica resultó

Si ahora la empresa decide cobrar solo \$ 10 por kilómetro , sin recargo adicional.

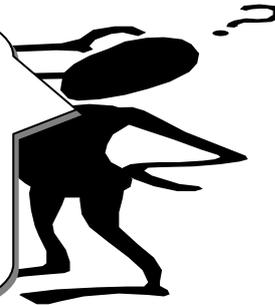
- ☞ hallen la expresión que permita calcular el costo de un viaje cualquiera en función de los kilómetros recorridos
- ☞ Grafiquen , los costos desde que se inicia un viaje de 321 km.
- ☞ ¿qué gráfica resultó ?

Una ayuda para la primera:

Costo del viaje = \$10 por kilómetro + costo fijo

Para la segunda:

Costo del viaje = \$10 por kilómetro



RAZONES Y PROPORCIONES

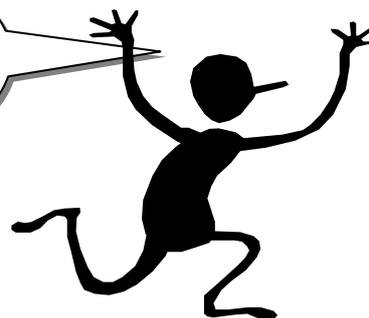


RAZÓN: Se llama razón al cociente entre dos números enteros.

Por ejemplo:

¿Pero, $\frac{7}{2}$ es una fracción?

Sí, y además todas las fracciones son razones.

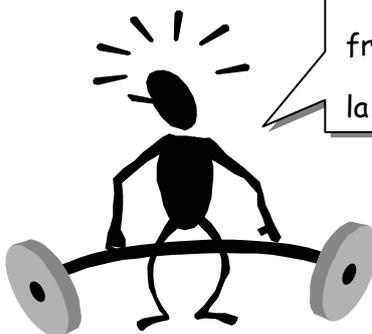


PROPORCIÓN: Es la igualdad entre dos razones.

Ejemplo: $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$

Simplificamos:

$$\frac{7}{\frac{14}{\cancel{4}}} = \frac{7}{2}$$



Ya me acuerdo: $\frac{7}{2}$ y $\frac{14}{4}$ son fracciones equivalentes porque $\frac{14}{4}$ la puedo simplificar por 2.

Simplificar es dividir numerador y denominador por el mismo número (en este caso simplificamos por dos).

Razones y Proporciones en lenguaje simbólico:



Si a y b son números enteros se llama razón al cociente entre a y b

$\frac{a}{b}$ Siendo **a** el **antecedente** de la razón y **b** el **consecuente**.



Si a , b , c y d son cuatro números enteros, se llama proporción a la

igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

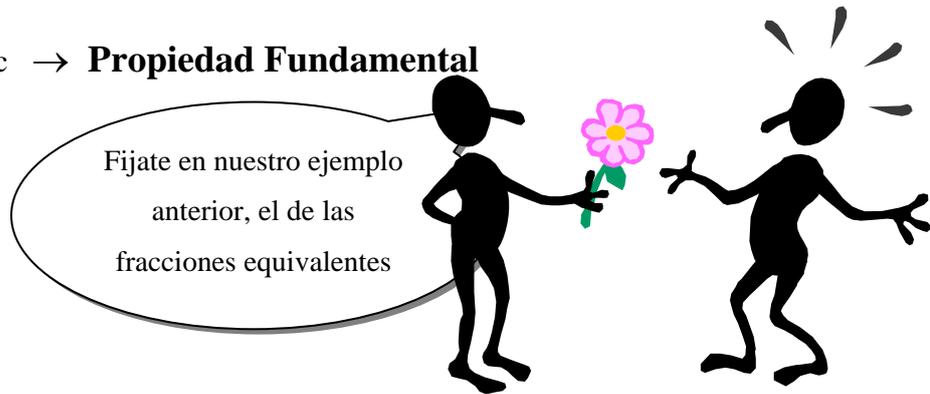
a y **d** son los extremos de la proporción y **c** y **b** los **medios**.

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Dada la siguiente proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$a \cdot d = b \cdot c \rightarrow$ **Propiedad Fundamental**



Fijate en nuestro ejemplo anterior, el de las fracciones equivalentes

Ejemplo 2
 $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$

Si aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones.

$$7 \cdot 4 = 14 \cdot 2$$

$$28 = 28 \quad (7 \text{ y } 4 \text{ son los extremos})$$

$$(14 \text{ y } 2 \text{ son los medios})$$

Verificamos que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA



Una moto se mueve a velocidad constante, recorre 15 km en 3 minutos. Para llegar a un puesto policial le faltan recorrer 40 km. ¿Cuánto tardará en recorrerlos?.

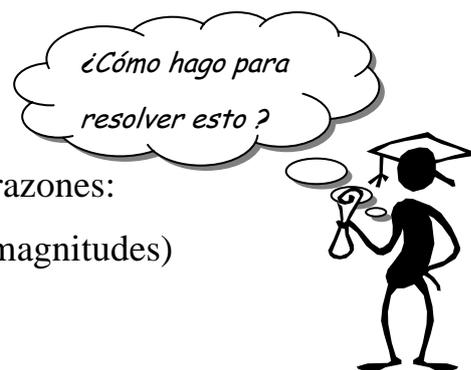
Planteamos la situación:

$$\begin{array}{l} 15 \text{ km} \text{ —————} 3 \text{ minutos} \\ 40 \text{ km} \text{ —————} x \text{ minutos} \end{array}$$

La experiencia nos indica que:

Si nos faltan recorrer más kilómetros vamos a tardar más tiempo en recorrerlos.

Es decir que a más cantidad de kilómetros, “más minutos” o sea más tiempo; cuando esto ocurre se trata de magnitudes directamente proporcionales.



Para resolver este tipo de problemas hallamos las razones:

(Acordate que razón es un cociente entre 2 magnitudes)

$$\frac{15 \cancel{\text{ km}}}{40 \cancel{\text{ km}}} = \frac{3 \text{ minutos}}{x}$$

15 x = 3 minutos 40 → **Aplico la propiedad fundamental de las proporciones: el producto de los medios es igual al producto de los extremos.**

$$x = \frac{\cancel{3} \text{ minutos} \cdot \cancel{40} \text{ Km}}{\cancel{15} \text{ Km}} \quad \text{—Despejamos la x. (Pasamos el 15 dividiendo)}$$

$$x = \frac{3 \cdot 40}{15}$$

$$x = 8 \text{ minutos}$$

¿Y para recorrer 80 km cuánto tiempo tardará?

15 km ————— 3 minutos

80 km ————— x minutos

$$\frac{15 \text{ km}}{80 \text{ km}} = \frac{3 \text{ minutos}}{x}$$

$$x = \frac{\cancel{80} \text{ km} \cdot \cancel{3} \text{ minutos}}{\cancel{15} \text{ km}} = 16 \text{ minutos}$$

$$x = \frac{80 \cdot 3}{15} = 16$$

Fijate que para recorrer 40 km tardó 8 minutos y para recorrer 80 km tardó 16 minutos

¿qué se observa?

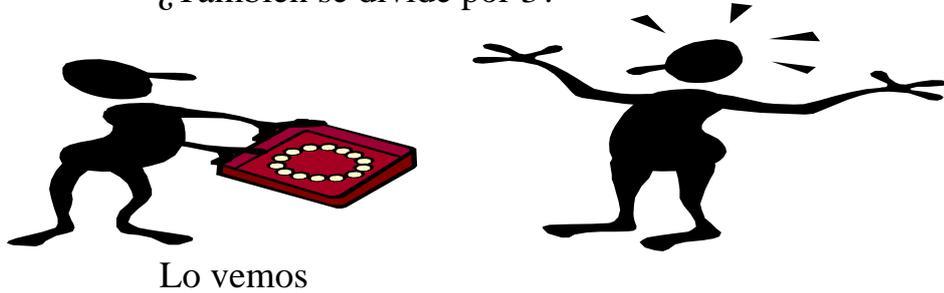


Que cuando el espacio se duplica el tiempo se duplica.

Si se divide por 3 la distancia ¿qué sucede con el tiempo correspondiente?



¿También se divide por 3?



Lo vemos

$$15 \text{ km} \text{ — } 3 \text{ minutos}$$

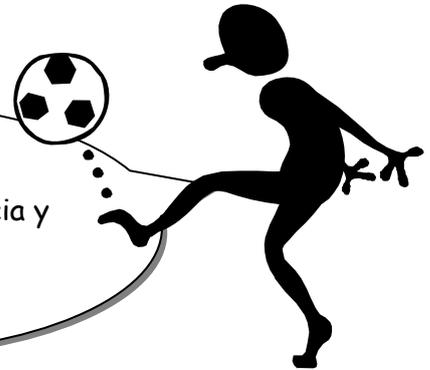
$$5 \text{ km} \text{ — } x$$

$$\frac{15 \text{ km}}{5 \text{ km}} = \frac{3 \text{ minutos}}{x}$$

$$15 \text{ km} \cdot x = 5 \text{ km} \cdot 3 \text{ minutos}$$

$$x = \frac{5 \text{ km} \cdot 3 \text{ minutos}}{15 \text{ km}} = 1 \text{ minuto}$$

¿cómo resultan los cocientes entre distancia y tiempo que se corresponden?



por ejemplo para

15 km le corresponden 3 minutos, para 40 km le corresponden 8 minutos, para 80 km 16 minutos.

Si hacemos la división entre 15 y 3; 40 y 8 y 80

¡Me dan todos los cocientes lo mismo!

$$\frac{15}{3} = 5; \quad \frac{40}{8} = 5; \quad \frac{80}{16} = 5$$

, todos los cocientes nos dan cinco, a ese número lo llamamos constante y lo designamos con la letra k





Resumiendo:

Las magnitudes que cumplen estas condiciones se llaman magnitudes directamente proporcionales.

En ellas:

1) El cociente o razón es constante

En lenguaje simbólico se expresa: $k = \frac{y}{x}$

2) Si una magnitud aumenta o disminuye, su correspondiente aumenta o disminuye de la misma manera.

**FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD
DIRECTA O DIRECTAMENTE
PROPORCIONAL**



Si en una función quedan determinadas razones iguales entre cada elemento del dominio y su correspondiente del codominio, se denomina función directamente proporcional o función de proporcionalidad

directa. Ejemplo $\frac{1,50}{1} = \frac{3}{2} = \frac{4,50}{3}$ Y la razón se denomina **constante de**

proporcionalidad.

La grafica correspondiente a un función de proporcionalidad directa es siempre una recta que contiene al origen de coordenadas

La expresión que representa una función directamente proporcional es

$$y = ax .$$

Trabajamos juntos

Ejemplo:

Para fabricar 110.000 ladrillos se utilizan 125 tn de barro y arcilla ¿Cuántos ladrillos se fabricarán con 520 tn de la misma mezcla?

¿Es directamente proporcional?



Sí, porque con más mezcla se podrán fabricar, más ladrillos.

¡Exactamente! ¿Cómo puede calcular la constante k?

Hallando el cociente entre ambas magnitudes o sea entre los ladrillos y la mezcla, el resultado es:

$$K = \frac{110\,000}{125} = 88$$

Utilizando la constante, ¿puede calcular cuántos ladrillos se fabricarán con 520 tn de la misma mezcla?

$$(1)_k = \frac{\text{cantidad de ladrillos}}{\text{tonelada de mezcla}}$$

k, ya estaba calculada, es $k = 88$. Las toneladas de mezcla son 520 y lo que tengo que averiguar es la cantidad de ladrillos.

Cantidad de ladrillos: es lo que tengo que averiguar

(x) toneladas de mezcla = 520 tn

Ahora reemplazo en (1)



$$88 = \frac{x}{520 \text{ tn}} \Rightarrow 88 \cdot 520 = x$$

$45.760 = x$

Otro ejercicio:

En la panadería hay una promoción, dos kilos de pan cuestan \$ 3,60

a) ¿cuánto costarán 3 kilos de dicho pan? b) ¿y el $\frac{1}{4}$ kg.?

a) Planteamos:

$$\begin{array}{l} 2 \text{ kg} \quad \text{---} \quad 3,60 \$ \\ 3 \text{ kg} \quad \text{---} \quad x \$ \end{array}$$

$$\frac{2 \text{ kg}}{3 \text{ kg}} = \frac{3,60 \$}{x}$$

$$2 \text{ Kg. } x = 3,60 \$ \cdot 3 \text{ Kg}$$



$$x = \frac{3,60\$ \times 3\text{kg}}{2\text{kg}}$$

$$x = 5,40 \$$$

Hacemos una tabla de valores

| x | y |
|-----|------|
| 2 | 3,60 |
| 3 | 5,40 |
| 1/4 | ? |

Como es una función de proporcionalidad directa escribimos la fórmula :

$$y = k \cdot x$$

Luego, calculamos la constante de proporcionalidad.

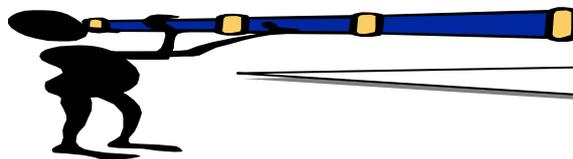
$$3,60 = k \cdot 2 \Rightarrow k = \frac{3,60}{2} = 1,8$$

$$k = 1,8$$

b) Debo calcular un 1/4 kg. de pan, o sea y, entonces si $x = 1/4$ y la constante es

$k = 1,8$, escribiendo la fórmula de proporcionalidad directa tenemos:

$$y = k \cdot x$$

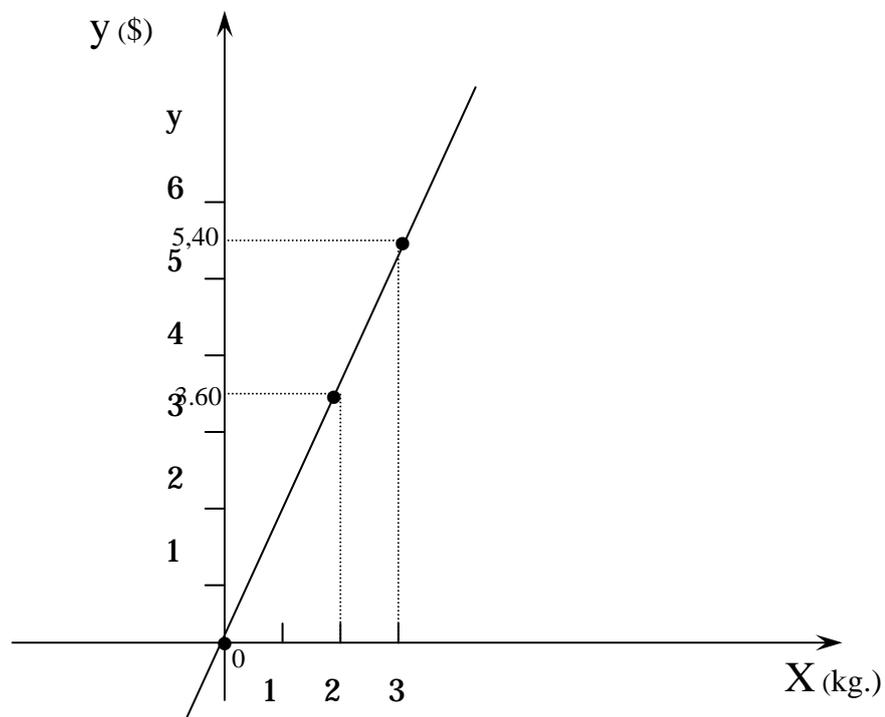


ES DIRECTAMENTE
PROPORCIONAL

Ahora reemplazamos nuestros datos: $x = 1/4$; $k = 1,8$

$$y = 1,8 \cdot 1/4 = \boxed{0,45 \$}$$

Hacemos un gráfico donde en el eje x representamos los kilos (kg) y en el eje y los pesos (\$) (llevamos los valores de la tabla de la página anterior)



PROPORCIONALIDAD INVERSA

Una relación funcional definida entre dos conjuntos (A de las variables independientes y B de las variables dependientes) es de proporcionalidad **inversa o inversamente proporcional** si al aumentar una de las variables la otra disminuye en la misma proporción. (En nuestro ejemplo si la base se duplica la altura queda reducida a la mitad).

Vayamos a un ejemplo:

Dos obreros tardan 24 días en finalizar una obra. ¿cuánto tardarán 4 obreros en finalizar la misma obra?

Planteamos la situación:

2 obreros _____ 24 días

4 obreros _____ x días



$$2 \text{ obreros} \cdot 24 \text{ días} = 4 \text{ obreros} \cdot x$$

$$x = \frac{2 \text{ obreros} \cdot 24 \text{ días}}{4 \text{ obreros}}$$

$$\frac{2 \text{ ob}}{4 \text{ ob}} = \frac{x}{24 \text{ días}}$$

La invertí

$$x = 12 \text{ días}$$



Si hacemos una tabla de valores:

| x (obreros) | y días |
|-------------|--------|
| 2 | 24 |
| 4 | 12 |
| 6 | ? |

$$2 \cdot 24 = 48$$

$$4 \cdot 12 = 48$$

$$6 \cdot y = 48 \Rightarrow y = \frac{48}{6} = 8$$

todos los productos me dan lo mismo:

$$2 \cdot 24 = 48$$

$$4 \cdot 12 = 48$$

$$6 \cdot 8 = 48$$

¿Y un obrero solo, cuánto hubiera tardado?

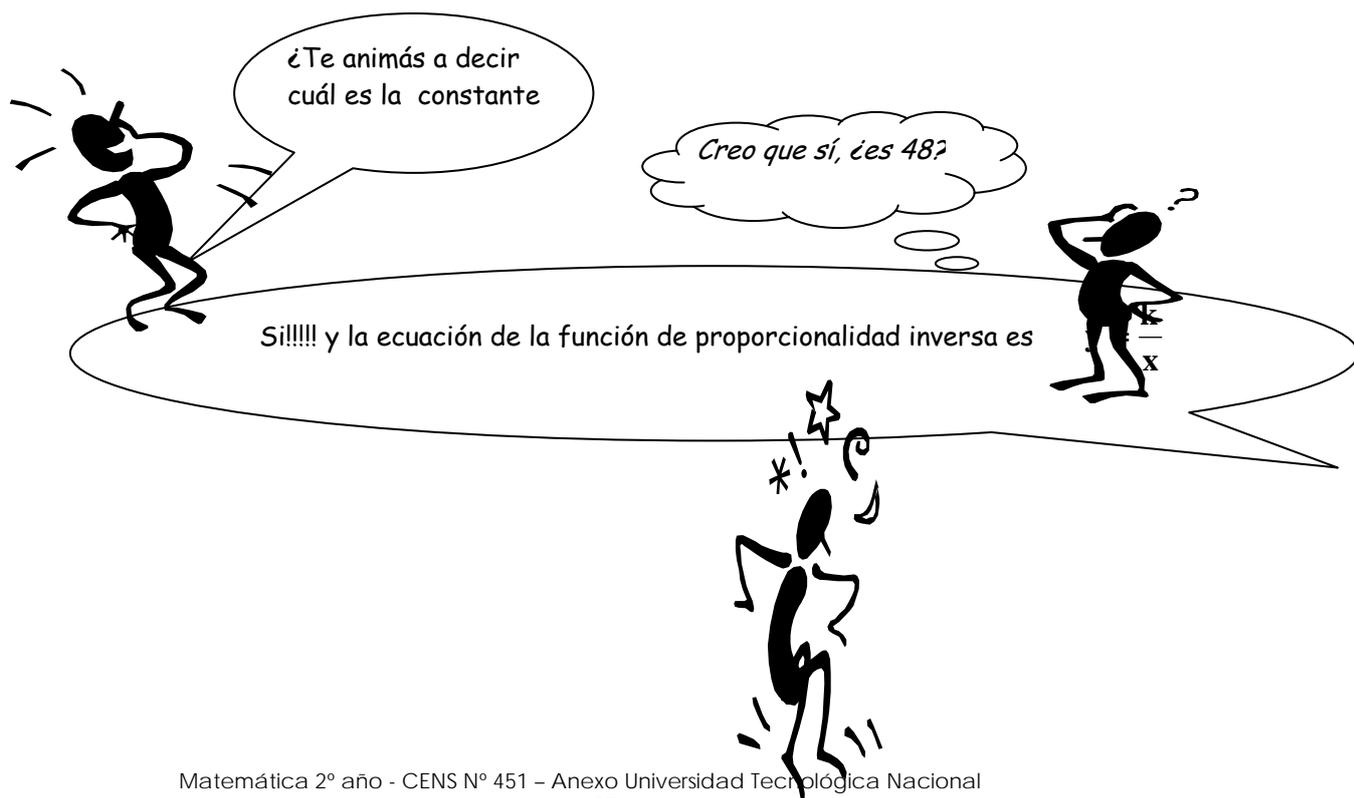
| x (obreros) | y días |
|-------------|--------|
| 1 | 48 |
| 3 | 16 |

$$1 \cdot 48 = 48$$

$$3 \cdot 16 = 48$$

¡Un obrero tardará 48 días!

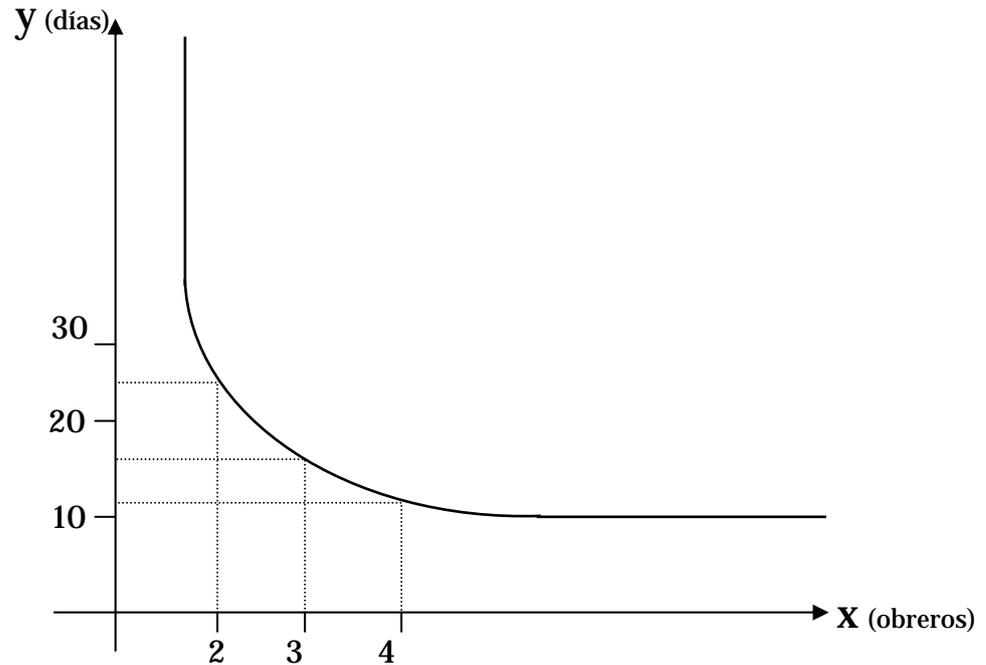
Tres obreros 16 días.



Para calcular la constante despejamos k

$$y \cdot x = k$$

Si hacemos el gráfico de la función:



El gráfico de la función de proporcionalidad inversa no es una recta, es una curva que se llama hipérbola equilátera.

Las magnitudes que cumplen con estas condiciones se llaman magnitudes inversamente proporcionales en ellas:

1) El producto es constante entre x e y .
En lenguaje simbólico: $k = x \cdot y$
 k : constante de proporcionalidad inversa.

2) Si a una magnitud se la multiplica o divide por un cierto número, su correspondiente queda dividido o multiplicado por un mismo número.

Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, económicos, históricos o simplemente para describir situaciones estrictamente matemáticas o de la vida cotidiana.

Aplicación de función afin a la vida cotidiana

LA FUNCIÓN LINEAL Y EL PAGO DE SERVICIOS



En el mes de enero nos llega la factura de luz, observamos la factura del mes de diciembre y vemos que la compañía eléctrica nos cobra un cargo fijo de \$12 y \$0,25 por cada kilowatt (Kw) de luz consumido. Estos valores incluyen impuestos.

Deberemos encontrar una fórmula que nos permita calcular el importe I (de la factura) en función de los kilowatts de luz consumidos.

$$I = 0,25 \cdot x + \$12$$

En donde X representa la cantidad de kilowatts y \$12 el cargo fijo.

Sigamos con el ejemplo, si en el mes de diciembre se consumieron 200Kw ¿Cuál es el importe de la factura?

$$I = 0,25 \cdot 200 + 12 = 50 + 12 = \$ 62$$

Si el importe de la factura del mes de enero es de \$98 ¿Cuántos Kilowatts se consumieron?

$$y = 0,25 x + \$12$$

$$\$98 = 0,25 x + \$12$$

factura

→ y \$98
↓
el importe total de la

$$\$98 - \$12 = 0,25 x$$

$$\frac{\$86}{0,25} = x$$

$$x = 344 \text{ Kw}$$

Se consumieron 344 Kilowatts.

Veamos otro ejemplo:

Juan toma un taxi, la bajada de bandera es de \$1,20 y por cada ficha que cae se incrementa \$0,15.

Se pide hallar una fórmula que nos permita calcular cuanto cuesta un viaje, teniendo en cuenta la cantidad de fichas que bajan y el costo fijo que representa la bajada de bandera.

$y = 0,15 x + 1,20$ x : representa la cantidad de fichas y 1,20 el costo fijo.

Si cuando Juan completa su viaje cayeron 30 fichas ¿Cuánto pagó en total por el mismo?

$$y = 0,15 x + \$1,20$$

$$y = \$0,15 \cdot 30 + \$1,20 = \$4,5 + \$1,20 = \$ 5,70$$

Si queremos calcular en un viaje que cuesta \$8 ¿Cuántas fichas se cayeron?

$$y = \$8 \quad (\text{el costo total del viaje})$$

$$8 = 0,15 x + 1,20 \quad \text{De esta ecuación tenemos que despejar la } x:$$

$$8 - 1,20 = 0,15$$

$$\underline{6,80} = x$$

$$0,15$$

$$x = 45,3$$

Son 45 fichas aproximadamente.

NOMBRE Y APELLIDO: _____

DEPENDENCIA: _____

Matemática

Actividad 5

- 1) Calcula el valor desconocido, justificando cada paso.

1-1)
$$\frac{x}{0,3 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1 - 0,5}{1 - \frac{3}{2}}$$

1-2)
$$\frac{0,05 - 2^{-1}}{x} = \frac{0,8}{\sqrt[3]{\frac{7}{8} - 1}}$$

- 2) Teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$$\frac{-0,5 \cdot (0,1 - 1)}{x} = \frac{x}{(0,2 + 2)^{-1}}$$

- 3) ¿Cuál será la altura de una columna que produce una sombra de 4,5 m, sabiendo que a la misma hora una varilla vertical de 0,49 m arroja una sombra de 0,63 m?

.....

.....

.....

- 3-1) Cuáles son las magnitudes que se relacionan?

.....

.....

.....

- 3-2) ¿La relación es directa o inversamente proporcional?

.....
.....
.....
3-3) Halla k

4) Para empapelar una habitación se necesitan 15 rollos de papel de 0,45 m de ancho. ¿ Cuántos rollos se necesitarán, si el ancho fuera de 75 cm?

.....
.....
.....

Enunciado:

a) La cantidad de agua que arroja una canilla por segundo y el tiempo que tarda en llenar un balde

.....

b) El peso y la altura de una persona.

c) La cantidad de dientes y la edad.

.....

d) El área de un cuadrado y la medida del lado.

.....

e) El perímetro de un triángulo equilátero y la medida del lado.

.....

f) La bolsas que pueden llenarse con 6 kilogramos de arena y el tamaño

.....

5) Calculen , los extremos o medios de las siguientes proporciones según corresponda

$$\frac{0,1}{\frac{1}{2}} = \frac{0,5}{x}$$

$$0,8 : 1,2 = x : 0,4$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{-2} = 2,5 : x$$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{-4}$$

.....
.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6) Encuentren los medios o extremos según corresponda de las siguientes proporciones.

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{x} = \frac{2}{2,5}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{72}{144}$$

$$\frac{161}{x} = \frac{46}{82}$$

.....

.....

.....

.....

7) Pablo pagó por 12,5 kg. de zapallo \$ 13,125. ¿Cuánto pagara por 8 kg? ¿cuál es el precio de 150 g.?

.....

.....

.....

8) Diez damajuanas iguales contienen 80 litros de vinagre ¿Cuántas damajuanas son necesarias para almacenar 35 litros de vinagre?,

.....

.....

.....

