Centro Educativo de Nivel Secundario Nº 451
Anexo Universidad Tecnológica Nacional

Dirección de Capacitación No Docente

Dirección General de Cultura y Educación
Provincia de Buenos Aires

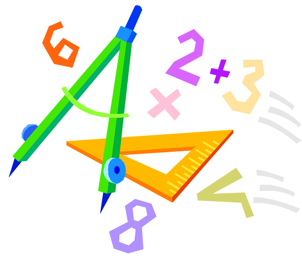
MATEMATICA

Segundo Año
Módulo 5

LIBROS BACHILLER 2011
Formato digital - PDF
Publicación de edUTecNe - Editorial de la U. T. N.
Sarmiento 440 - (C1041AAJ) - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina
http://www.edutecne.utn.edu.ar

edutecne@utn.edu.ar

CAPÍTULO 5



PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

Decimos que los segmentos a, b, c y d son proporcionales si se puede establecer una proporción entre sus medidas o sea: $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$. Se llama razón entre dos segmentos cualesquiera, al cociente (el resultado de la divisón) entre sus medidas.

TRABAJAMOS JUNTOS

1) Determinar si los segmentos m = 10 cm n = 6 cm t = 5 cm y s = 3 cm son proporcionales.

Plantar las razones: $\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1,\widehat{6}$

Son proporcionales, los cocientes son iguales.

2) Determinar si los segmentos m = 18 cm n = 6 cm t = 5 cm y s = 10 cm son proporcionales.

Plantear las razones: $\frac{18}{6}\neq\frac{5}{10}$

No son proporcionales, los cocientes (los resultados de las divisiones) no son iguales.

SEGUIMOS TRABAJANDO JUNTOS

Ahora la situación planteada es otra: como dato nos dan cuatro segmentos, se sabe que son proporcionales, (*m* y *n* son proporcionales a *p* y *q*) se conoce la medida de tres de ellos y se pide calcular la medida del cuarto segmento: m = 12, n = 8, p = 10 y q = ?

Plantear la razones.

$\frac{12}{8}=\frac{10}{\mathbf{q}}$ **entonces** $\mathbf{q}=\frac{10.8}{12}$ **entonces** $\mathbf{q}=6,\widehat{6}$

SEGUIMOS TRABAJANDO JUNTOS

1) **Si los segmentos m y n son proporcionales a los segmentos p y q, respectivamente. Además se sabe que m = 6 cm, n = 10 cm y que p = 8 cm.**

Determina la medida del segmento q.

$\frac{6}{10} = \frac{8}{\mathbf{q}}$ **entonces** $\mathbf{q} = \frac{10.8}{6}$ **entonces** $\mathbf{q} = 13,\widehat{3}$

2) **Si los segmentos m y n son proporcionales a los segmentos p y q, respectivamente. Además se tiene que m = 5 cm, n = ? cm y que p = 8 cm y q = ?. Determina la medida del segmento n.**

$\frac{5}{\mathbf{n}} = \frac{8}{16}$ **entonces** $\mathbf{n} = \frac{16.5}{8}$ **entonces** **q = 10**

3) **Si los segmentos m y n son proporcionales a los segmentos p y q, respectivamente. Además se tiene que m = ? cm, n = 21 cm y que p = 7 cm y q = 14. Determina la medida del segmento m.**

$\frac{\mathbf{m}}{21} = \frac{7}{14}$ **entonces** $\mathbf{n} = \frac{7.21}{14}$ **entonces** **q = 10,5**

4) **Determina el valor de x en las siguientes proporciones:**

Completar:

a) 12 : 9 = x : 36 **plantear las proporciones** $\frac{12}{9} = \frac{\mathbf{x}}{36}$

entonces $\mathbf{x} = \frac{.....}{.....}$ **entonces x = 48**

b) 5 : x = 0,6 : 3 **plantear las proporciones** $\frac{5}{\mathbf{x}} = \frac{0,6}{3}$

entonces $\mathbf{x} = \frac{.....}{.....}$ **entonces x = 25**

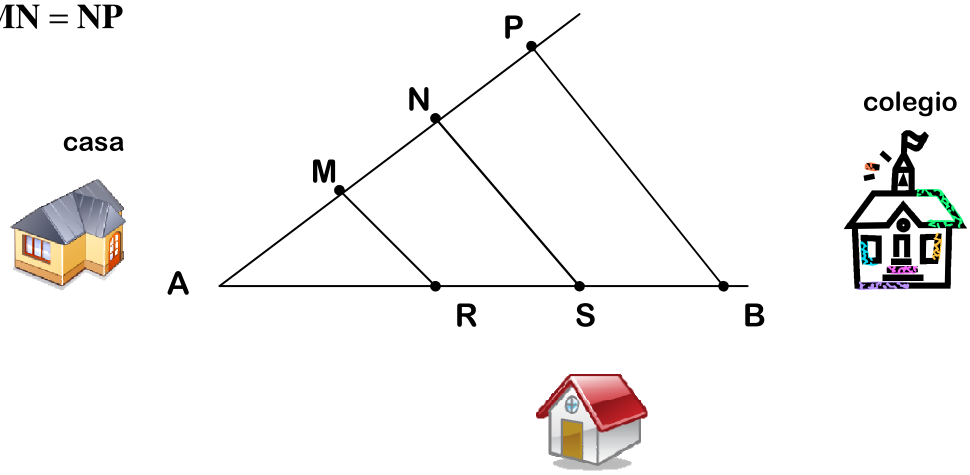
c) $\frac{50}{9} = \frac{10}{\mathbf{x}}$ $\mathbf{x} = \frac{.....}{.....}$ **entonces x = 1,8**

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

Juan vive en un pueblito situado a 30 km de Salvador de Jujuy, tiene que recorrer todos los días desde su casa al colegio una distancia de 30 km. Al recorrer la dos terceras partes del camino, para en la casa de un amigo, para tomar un poco de agua. Queremos saber exactamente en que punto

del camino se detiene Juan a tomar agua. Para eso tenemos que dividir la totalidad del camino en tres partes iguales.
Tomamos el segmento $\overline{AB}$ (que es el camino).

$\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NP}$



Trazamos por el punto A una semirrecta auxiliar y transportamos sobre ella tres veces un segmento de cualquier medida. (Tres veces el mismo segmento) $=_c$ $\overline{AM} =_c \overline{NM}$ $\overline{NP}$ (de una medida arbitraria)
Luego unimos P con B y trazamos las paralelas al segmento $\overline{PB}$ por N y por M. Así el segmento AB queda dividido en tres partes congruentes (iguales). Es decir $\overline{AR} =_c \overline{RS} =_c \overline{SB}$
Juan se detiene exactamente en el punto S.

Otro ejercicio + grande

Dividir el segmento $\overline{CD}$ en 5 partes iguales $\overline{CD} = 15\text{cm}$

1) Dibujar $\overline{CD}$

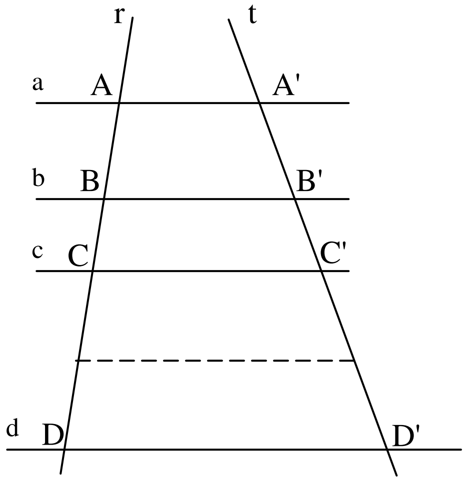
Llevamos una semirrecta cualquiera, por ejemplo $\overrightarrow{CM}$ y sobre $\overrightarrow{CM}$ llevamos cinco segmentos congruentes (iguales) de cualquier medida.

Unimos el último punto S con D y trazamos paralelas a $\overrightarrow{SD}$ por los sucesivos puntos marcados sobre $\overrightarrow{CM}$. El segmento $\overline{CD}$ quedó dividido en cinco partes iguales $\overline{CP} =_C \overline{PQ} =_C \overline{QR} =_C \overline{RT} =_C \overline{TD}$

TEOREMA DE THALES

Un poco de historia

Thales nació en la ciudad griega de Mileto (actualmente pertenece a Turquía). Vivió entre los años 624 A.c. y 548 A.c. fue sobre todo comerciante, pero también ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático.

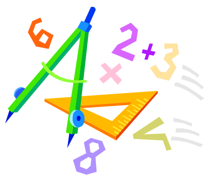


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = k$$

Aunque de su vida se sabe muy poco, no hay dudas acerca de su inteligencia. Fue el primero de los siete grandes sabios griegos.

Vivió muchos años en Egipto, donde recogió todos los conocimientos geométricos de la época. Fue el primer matemático en utilizar el método educativo para probar propiedades. Según la leyenda, utilizó el teorema que lleva su nombre para medir la altura de una pirámide utilizando su propia altura, la medida de su sombra y de la sombra de la pirámide.

También causó gran asombro cuando pronosticó, mediante cálculos matemáticos, un eclipse total de sol en el año 585 A.c.



ENUNCIADO DEL TEOREMA DE THALES

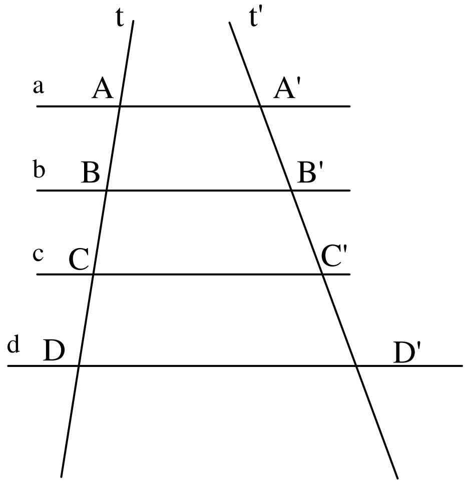
Si tres o más paralelas (a // b // c) son cortadas por dos rectas transversales (t y t'), dos segmentos cualesquiera sobre una de ellas y sus correspondientes en la otra forman una proporción. Siendo a//b//c//d

Algunas proporciones entre los segmentos son:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

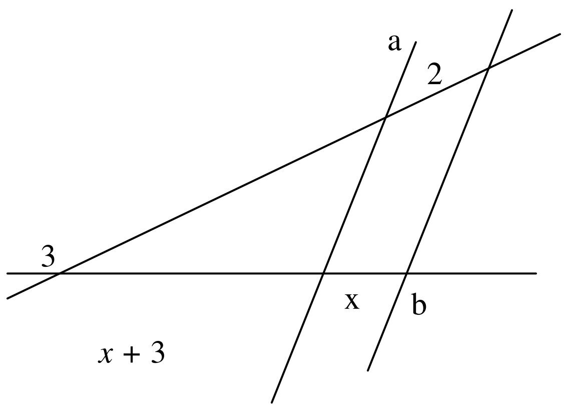
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'D'}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{C'D'}}$$

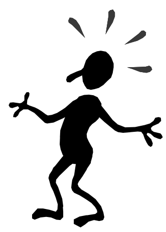


SEGUIMOS TRABAJANDO JUNTOS

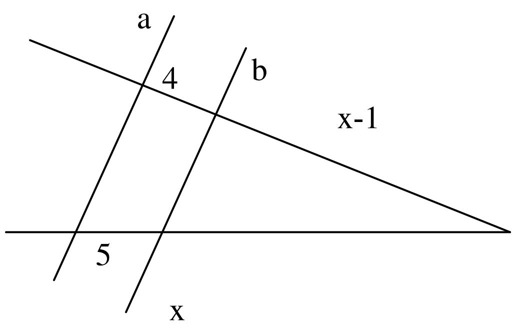
OTRO EJERCICIO (aplicamos el teorema de Thales)
Hallar x en cada una de las siguientes situaciones, sabiendo que a//b.
Planteamos la proporción y decimos: 3 es a 2 como x+3 es a x



$$\frac{3}{2} = \frac{\mathbf{x}+3}{\mathbf{x}}$$
$$3\mathbf{x} = 2(\mathbf{x}+3)$$
$$3\mathbf{x} = 2\mathbf{x}+6$$
$$3\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = 6$$
$$\mathbf{x} = 6$$



Otro más: 4 es a x-1 como 5 es a x



$$\frac{4}{\mathbf{x}-1} = \frac{5}{\mathbf{x}}$$
$$4\mathbf{x} = 5(\mathbf{x}-1)$$
$$4\mathbf{x} = 5\mathbf{x}-4$$
$$5 = 5\mathbf{x}-4\mathbf{x}$$
$$5 = \mathbf{x}$$

¿Qué hubiera pasado si decíamos: 4 es a 5 como x-1 es a x?

$$\frac{4}{5}=\frac{\mathbf{x}-1}{\mathbf{x}}$$

$$4\mathbf{x}=5(\mathbf{x}-1)$$

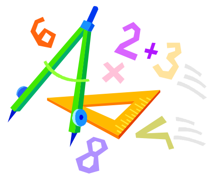
$$4\mathbf{x}=5\mathbf{x}-5$$

$$5=5\mathbf{x}-4\mathbf{x}$$

$$5=\mathbf{x}$$

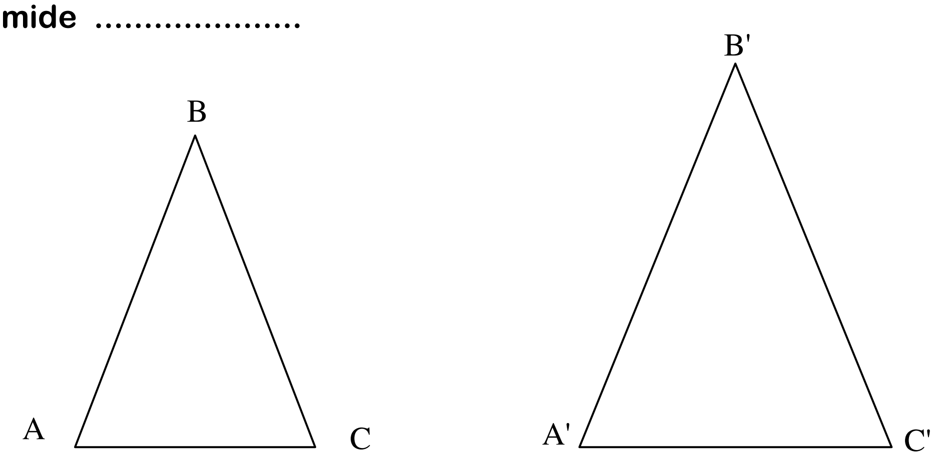
¡¡era lo mismo!!

TRIÁNGULOS SEMEJANTES



Juan tenía que hacer un trabajo para actividades prácticas y dibujó dos triángulos “uno más grande y otro mas chico”, porque los tenía que recortar y pintar. Una vez que los dibujó los observó y dijo “son parecidos”. Y tenía razón los triángulos se parecían pero no eran iguales.
Anímese a buscar un transportador y medir los ángulos del triángulo más chico (el ABC) ¿Cuánto miden?

El $\widehat{A}$ mide ....
El $\widehat{B}$ mide ....
El $\widehat{C}$ mide ....



Ahora medimos los del triángulo grande el $\overset{\triangle}{ABC}$ A'B'C'
Acuérdese de apoyar bien el transportador

El ángulo $\widehat{A}'$ mide ....
El ángulo $\widehat{B}'$ mide ....
El ángulo $\widehat{C}'$ mide ....

¿Qué se observa?
Que los ángulos del **“triángulo chico”** y del **“triángulo grande”** son iguales.
Fantástico! Continuemos – Ahora con una regla midan los lados de los dos triángulos.
Ya está! El $\overline{AC}=4\,\mathbf{cm}$; $\overline{AB}=5\,\mathbf{cm}$; $\overline{BC}=5\,\mathbf{cm}$; $\overline{A'C'}=8\ \mathbf{cm}$; $\overline{A'B'}=1\ \mathbf{cm}$; $\overline{B'C'}=10\,\mathbf{cm}$.

Muy bien ¿Pueden sacar alguna conclusión?
¿Qué relación se observa entre el lado $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$?

$\overline{AC}$ mide 4 cm y $\overline{A'C'}$ mide 8 cm.
$\overline{A'C'}$ mide el doble de $\overline{AC}$ y con los otros dos pares de lados pasa lo mismo, los del "triángulo chico".

Esto podemos expresarlo en lenguaje matemático, diciendo que las razones entre las longitudes de los lados que se corresponden (homólogos) en los dos triángulos, es igual a 2.

O sea: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$

Reemplazamos el valor de los lados

$$\frac{10\,\mathbf{cm}}{5\,\mathbf{cm}} = \frac{10\,\mathbf{cm}}{5\,\mathbf{cm}} = \frac{8\,\mathbf{cm}}{4\,\mathbf{cm}} = 2$$

En lenguaje simbólico $A\hat{B}C \sim A'\hat{B}'C'$

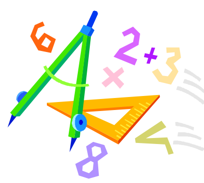
"~" semejante

El triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es semejante al triángulo $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ y su razón de semejanza es 2.

Definición:
Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos que se corresponden congruentes y los lados que se corresponden proporcionales.

Por suerte los matemáticos encontraron criterios para determinar cuándo dos triángulos son semejantes sin necesidad de tener que medir 6 ángulos, 6 lados y hallar sus razones.

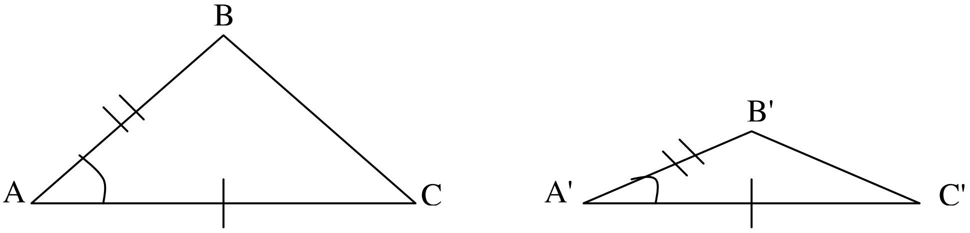
CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



Primer Criterio

Dos triángulos son semejantes si tienen un par de lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente.
¿Qué quiere decir homólogos?....

Lenguaje gráfico:

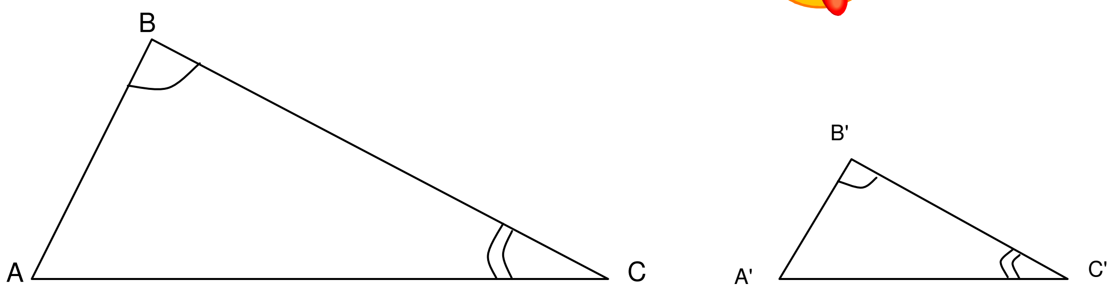


Lenguaje simbólico: $A\hat{B}C \sim A'\hat{B}'C' \iff \begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \\ \hat{A} =_{C} \hat{A}' \end{cases}$

Segundo Criterio

Si dos ángulos de un triángulo $A\hat{B}C$ son congruentes a dos ángulos de un triángulo $A'\hat{B}'C'$, entonces los triángulos son semejantes.

Lenguaje Gráfico



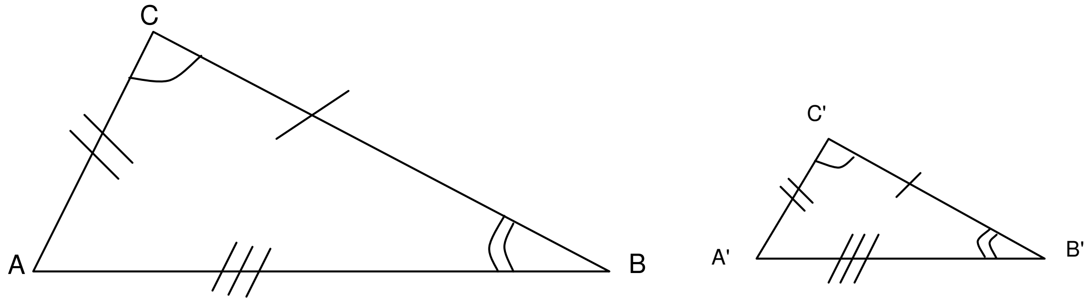
Lenguaje Simbólico

$$A\hat{B}C \sim A'\hat{B}'C' \Leftrightarrow \begin{array}{l} \hat{C} =_{C} \hat{C}' \\ \hat{B} =_{C} \hat{B}' \end{array}$$

Tercer Criterio

Si dos triángulos tienen sus tres lados homólogos proporcionales, entonces son semejantes.

Lenguaje Gráfico

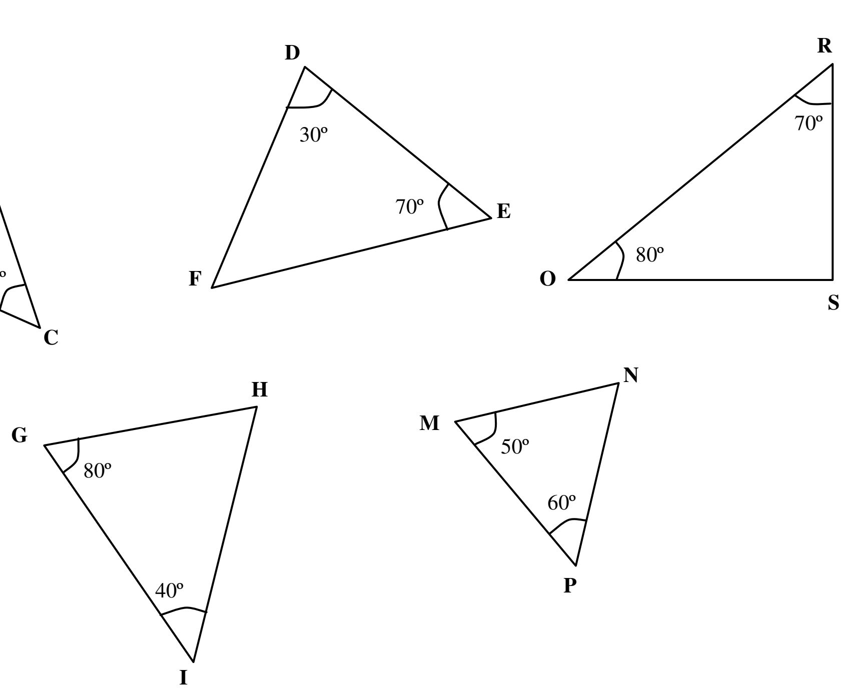


Lenguaje Simbólico

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

SEGUIMOS TRABAJANDO JUNTOS

Indicar si los siguientes triángulos son semejantes y establecer cuáles son los lados que son proporcionales.



El triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es semejante al $\overset{\Delta}{MNP}$.
¿Por qué?

Recordemos los criterios de semejanza, el segundo criterio nos dice que **dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes. (igual medida)**

Claro pero el $\overset{\Delta}{ABC}$ tiene un ángulo de 60º y otro de 70º y el $\overset{\Delta}{MNP}$ tiene uno de 60º y el otro de 50º entonces…….

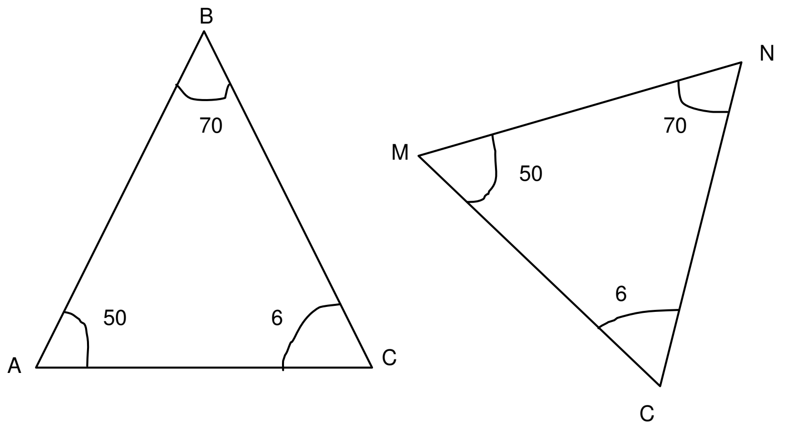
Recordemos la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º"

En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{A}$?

$\hat{B}$ mide 70º y $\hat{C}$ mide 60º, quiere decir que entre los dos suman 130º, entonces para llegar a 180º el ángulo $\hat{A}$ **mide 50º.**

Correcto, lo mismo deberá pensar para el triángulo $\overset{\Delta}{MNP}$. El ángulo $\hat{N}$ mide 70º.

Vamos a dibujar nuevamente los dos triángulos con los ángulos encontrados.



Como pueden observar estos dos triángulos tienen 2 ángulos congruentes (por lo tanto el tercer ángulo también será congruente). Como se verifica en el 2do criterio de semejanza, los dos triángulos son semejantes, si son semejantes sus lados son proporcionales, pero como establecemos la proporcionalidad entre sus lados, es decir ¿qué lados del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ son proporcionales al otro triángulo?

Bueno en realidad no sé… ¿Qué tengo que tener en cuenta?

Te acordás que hablamos de lados homólogos, bueno **los lados homólogos son aquellos que se oponen a ángulos congruentes** (de igual medida), es decir en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ el ángulo de 70º

se opone al lado $\overline{AC}$ y en el triángulo MNP el ángulo de 70° se opone al lado $\overline{MP}$, entonces $\overline{AC}$ y $\overline{MP}$ son lados homólogos y por lo tanto proporcionales.

Es decir que para establecer la proporcionalidad entre los lados, tengo que mirar los ángulos a qué lados se oponen en cada triángulo.

Exactamente: Vamos a escribir la proporcionalidad entre los lados de ambos triángulos.

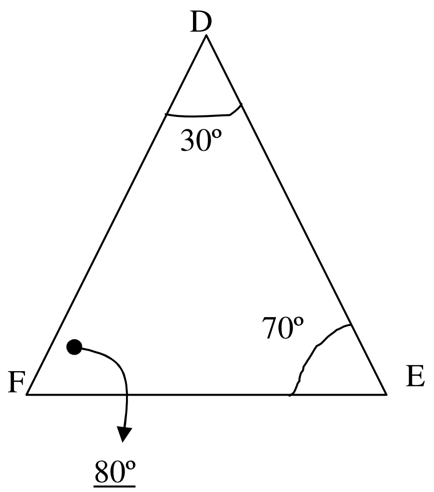
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}$$

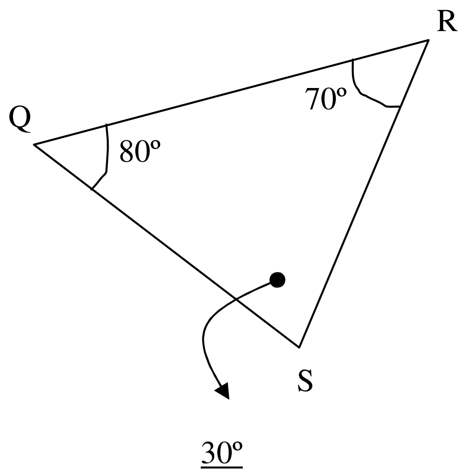
Fijate que $\overline{AB}$ se opone al ángulo de 60° y $\overline{MN}$ se opone en el otro triángulo al ángulo de 60°.

SEGUIMOS TRABAJANDO JUNTOS

Analicemos los triángulos $\overset{\Delta}{DEF}$ y $\overset{\Delta}{QRS}$:

Son Semejantes





El ángulo $\hat{F}$ mide 80° y el ángulo $\hat{S}$ mide 30° por lo tanto $\overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{QRS}$, establecemos entonces la proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{QR}}$$

CENS Nº 451
2do. año

NOMBRE Y APELLIDO: ____________________

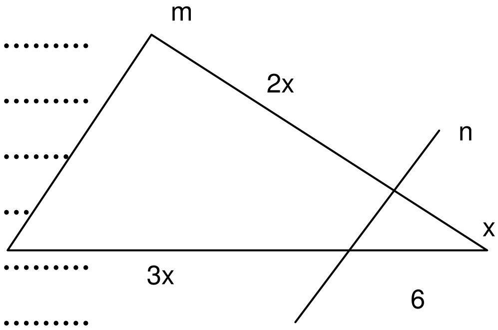
DEPENDENCIA: ____________________

Matemática *Actividad* **8**

Ejercicio 1:

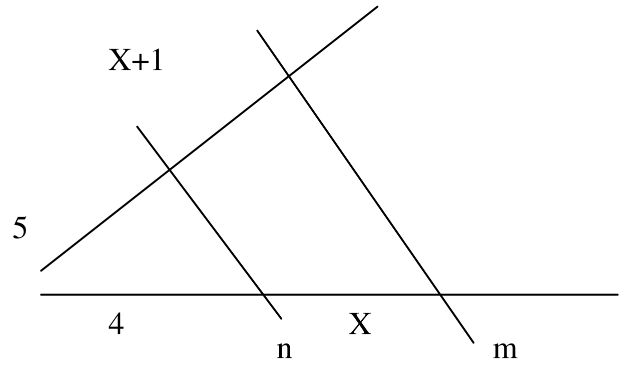
Dadas las siguientes figuras, hallar X sabiendo que m//n.

a)



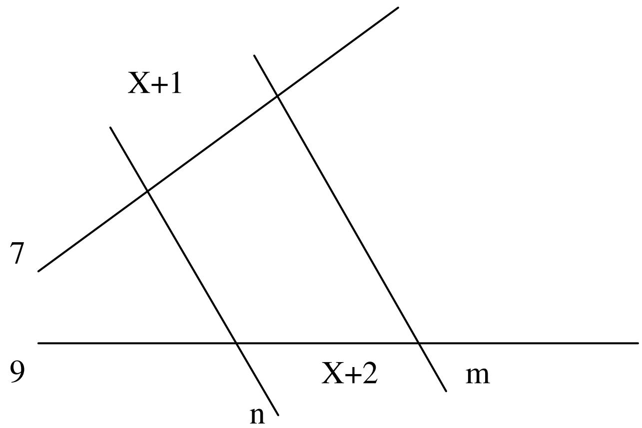
....
....
....
....
....
....
....
....

b)



....
....
....
....
....
....
....
....

c)

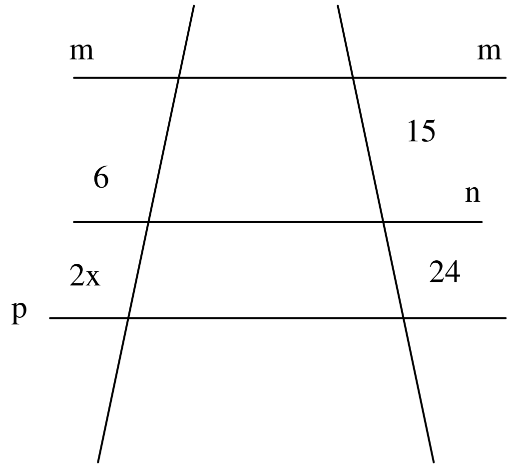


....
....
....
....
....
....

…………………………………………………

d)

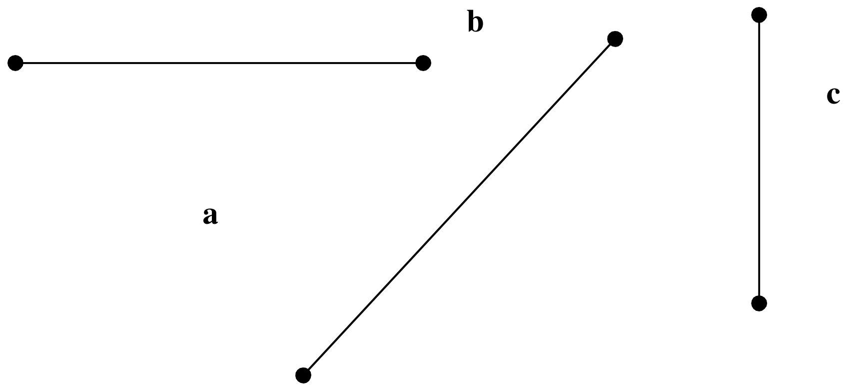
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………



Ejercicio 2:

Dividir los siguientes segmentos en:

a) **Tres partes iguales.**
b) **Cinco partes iguales.**
c) **Siete partes iguales.**



Dibujar tres segmentos:

a) de 16 cm y dividirlo en tres partes iguales.
b) De 14,5 cm y dividirlo en cinco partes iguales.
c) De 7,50 cm y dividirlo en cuatro partes iguales.

Ejercicio 3:
Hallar en cada caso el valor de x:

a) $\frac{2}{7} = \frac{5}{\mathbf{x}}$ **b)** $\frac{9}{\mathbf{x}} = \frac{12}{7}$ **c)** $\frac{\mathbf{x}+1}{5} = \frac{3}{8}$ **d)** $\frac{3}{4} = \frac{5-\mathbf{x}}{6}$

CENS Nº 451

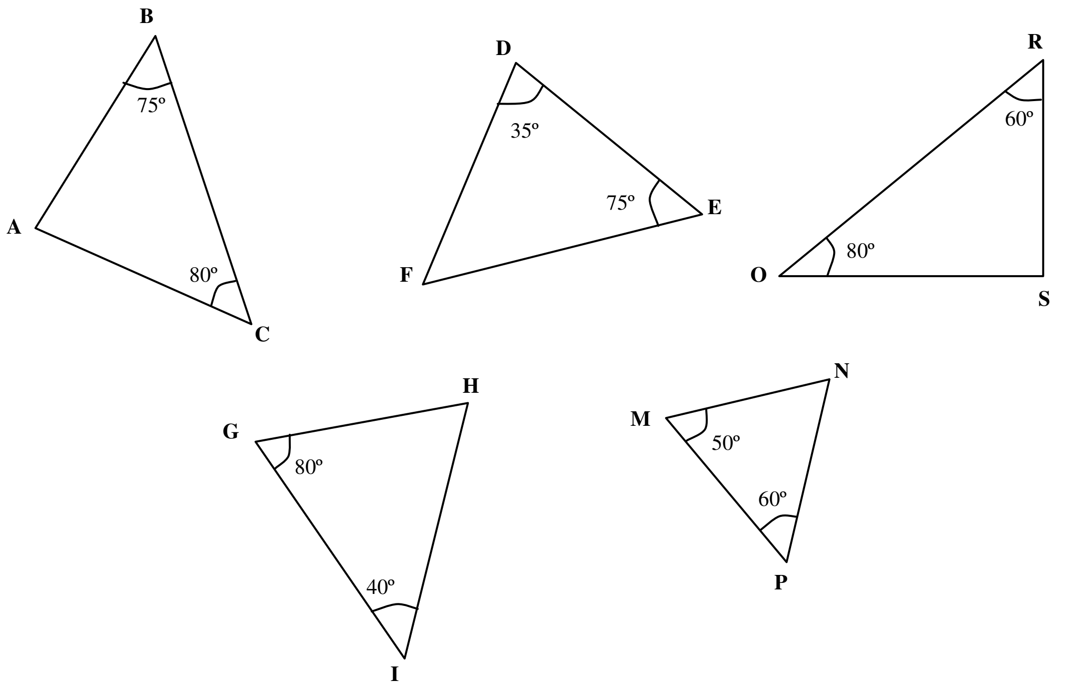
2do. año

NOMBRE Y APELLIDO: ____________________

DEPENDENCIA: ____________________

Matemática *Actividad* **9**

Dados los siguientes triángulos determinar cuáles son semejantes. Justificar la respuesta e indicar cuáles son los lados proporcionales.



Realizar una breve reseña bibliográfica (no menos de 15 renglones y no más de 25) de Pitágoras y Euclides.