

## MODELADO DEL BPP/CVRPTW Y SU RESOLUCIÓN A TRAVEZ DE UNA META-HEURÍSTICA EVOLUTIVA

Fabio Miguel <sup>1</sup>, Mariano Frutos <sup>2</sup> y Fernando Tohmé <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Río Negro, Sede Alto Valle y Valle Medio  
Tacuarí 669, 1er. piso, Villa Regina, Argentina, [fmiguel@unrn.edu.ar](mailto:fmiguel@unrn.edu.ar)

<sup>2</sup> Universidad Nacional del Sur, Departamento de Ingeniería e IIESS-CONICET  
Av. Alem 1253, 1er. piso, Bahía Blanca, Argentina, [mfrutos@uns.edu.ar](mailto:mfrutos@uns.edu.ar)

<sup>3</sup> Universidad Nacional del Sur, Departamento de Economía e IIESS-CONICET  
12 de Octubre 1198, 7mo. piso, Bahía Blanca, Argentina, [ftohme@criba.edu.ar](mailto:ftohme@criba.edu.ar)

### RESUMEN

El Bin Packing Problem (BPP) es un problema cuya solución radica en encontrar un orden a los distintos embalajes de objetos de diferentes volúmenes a ser consolidados en contenedores de igual o distinto tamaño. Una solución óptima a este problema consiste en minimizar el número de contenedores utilizados. A pesar de que el BPP es un problema combinatorio NP-difícil, soluciones óptimas se han conseguido con el uso de meta-heurísticas. Hay muchas variaciones de este problema planteando embalaje en peso, embalaje por el costo, y así sucesivamente. A este problema se le adiciona el Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows (CVRPTW). En este trabajo se presenta el modelado de ambos problemas de manera integrada y se resuelve a partir de una meta-heurística evolutiva. La experiencia fue realizada sobre un caso real presentado por una empresa radicada en la Provincia de Río Negro.

**Palabras Claves:** Bin Packing Problem, Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows, Logística, Optimización.

### ÁREA TEMÁTICA

C - Gestión de Operaciones y Logística.

### 1. INTRODUCCIÓN

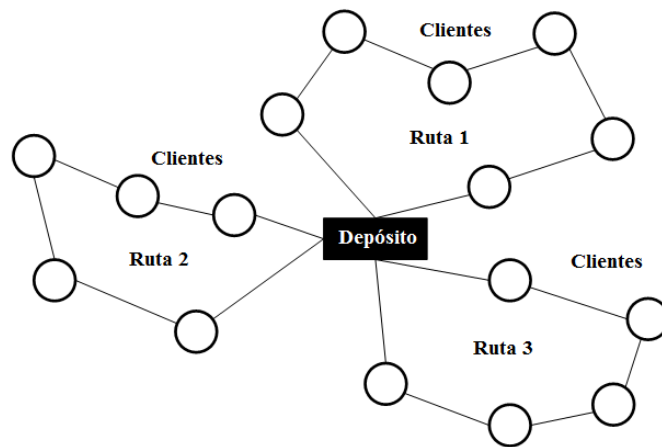
El presente trabajo estudia el modelado conjunto de dos problemas clásicos de optimización combinatoria de la literatura: Bin Packing Problem (BPP) [1] y Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows (CVRPTW) [2]. Las actividades que conforman la planificación operativa de la distribución física implican un gran número de pequeñas decisiones interrelacionadas entre sí. Los problemas en la distribución física de mercancías constituyen un conjunto variado y complejo de casos que algunos autores han intentado agrupar atendiendo a sus características más relevantes. Esta simplificación de la realidad permite la adopción de modelos matemáticos que facilitan los procesos de decisión que atañen a las empresas de transporte [3]. La optimización en general implica hallar el valor máximo o mínimo de una cierta función, definida en un dominio. En los problemas de optimización combinatoria las variables de decisión son enteras y, por lo general, el espacio de soluciones está formado por ordenaciones o subconjuntos de números naturales. Este tipo de problemas se presenta con

asiduidad en la toma de decisiones inherentes a la distribución física y el transporte. Los problemas se clasifican según su complejidad. Los problemas P son problemas de decisión que pueden ser resueltos en tiempo cálculo que crece de forma polinomial ante incrementos lineales del número de elementos que intervienen. Los problemas NP son aquellos problemas solubles en un tiempo polinomial indeterminado, es decir, que se puede resolver en tiempo polinomial con un ordenador no determinístico (autómata capaz de ejecutar un número ilimitado, pero finito, de ejecuciones en paralelo). Sólo los problemas P son resolubles eficientemente mediante algoritmos, no conociéndose un procedimiento polinomial de resolución para los NP. Finalmente, los problemas NP-completos son una clase de problemas NP muy difíciles para los que no se han encontrado algoritmos eficientes para su resolución. La importancia práctica de estos problemas ha asegurado que hayan sido objeto de esfuerzos sostenidos de investigadores y académicos para hallar un método de solución eficiente. Por esto el área de optimización combinatoria resulta tan atrayente ya que cualquier contribución en este ámbito tiene repercusiones directas en la industria. El problema estudiado en el presente trabajo se considera un problema de optimización combinatoria y pertenece a la clase de problemas NP-completos, por lo que no existe un algoritmo de tiempo polinomial que pueda resolverlo de manera óptima. Este problema consiste en asignar a cada pedido un vehículo y una ruta. Definiendo qué pedidos deben cargarse juntos en un determinado vehículo de modo de aprovechar al máximo su capacidad y al mismo tiempo reducir el costo de distribución al determinar conjuntamente las rutas de los vehículos que con cierta limitación de capacidad deben recoger y distribuir mercancías a un grupo de clientes. Los clientes se localizan en nodos determinados y a su vez tienen horarios de servicio determinados.

### **1.1 Vehicle Routing Problem**

El problema de ruteo de vehículos, en general, consiste en un conjunto de clientes y depósitos dispersos geográficamente, y una flota de vehículos, y se debe determinar un conjunto de rutas de costo mínimo que comiencen y terminen en los depósitos, para que los vehículos visiten a los clientes máximo una vez [4]. Se trata en los casos más generales de problemas de secuenciación y programación de los horarios de las unidades de transporte. Algunas características de estos problemas son: tamaño de la flota (número de vehículos limitado o ilimitado), tipo de flota (homogénea o heterogénea), almacén (depósito único o múltiple), naturaleza de la demanda (determinada, estocástica, fija o dinámica), localización de la demanda (nodos o arcos), restricciones horarias de servicio (sin restricciones o ventana temporal), restricciones en la capacidad de los vehículos (limitada o ilimitada), duración máxima de una ruta (limitada o ilimitada), entre otras. Se reseñan a continuación algunos de los problemas de distribución más importantes. El Traveling Salesman Problem (TSP) constituye la situación general y de partida para formular otros problemas combinatorios más complejos pero más prácticos, como el ruteo de vehículos [5]. En el TSP se dispone de un solo vehículo que debe visitar a todos los clientes en una sola ruta y a costo mínimo. Es decir, la ruta debe ser tal que minimice la distancia recorrida. Para  $n$  clientes, en un caso general, el número de rutas factibles que debe considerarse es  $(n-1)!/2$  puesto que hay  $(n-1)$  posibilidades para la primera ciudad después de la ciudad de residencia del agente,  $(n-2)$  posibilidades para la siguiente ciudad y así sucesivamente. El denominador 2 surge porque cada ruta presenta una ruta inversa equivalente con la misma distancia (TSP simétrico). El problema pertenece al tipo de problemas NP-completo. En el Multiple Traveling Salesmen Problem (m-TSP),  $m$  vendedores deben cubrir un número determinado de ciudades, de forma que cada destino sólo

se visita por uno de ellos. Cada viaje empieza en una ciudad base que es también el final del recorrido. En este caso, se desea minimizar la suma de las distancias recorridas a lo largo de todas las rutas. El número de vendedores puede ser fijo o una variable de decisión. El problema se puede transformar fácilmente en un TSP añadiendo  $m$  copias del almacén y haciendo que los costos de desplazamiento entre estos puntos virtuales sean infinitos. El Vehicle Routing Problem (VRP) [6], es una generalización del  $m$ -TSP donde existe una demanda asociada a cada cliente, depósitos dispersos geográficamente y una capacidad determinada de transporte para cada uno de los vehículos. Algunos autores le han llamado Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP), debido a que el total de la demanda de las ciudades visitadas en una ruta no debe superar la capacidad del vehículo [4] (Figura 1).



**Figura 1** Aspecto de una solución para el CVRP

El Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows (CVRPTW), es el mismo problema que el CVRP con una restricción adicional donde se asocia una ventana temporal a cada cliente. Dicha ventana temporal se define como el intervalo de tiempo en el que un cliente puede ser servido [7]. El problema clásico se puede plantear de la siguiente manera: si se tiene una flota de vehículos del mismo tipo localizada en un depósito central y un conjunto de clientes con una demanda conocida, se debe diseñar un conjunto de posibles rutas que empiecen y terminen en el almacén de modo que se visiten todos los clientes una sola vez al mínimo costo. Además, cada ruta debe satisfacer las restricciones de capacidad de los vehículos y de las ventanas de tiempo. Más formalmente, el VRPTW consiste en encontrar un conjunto de  $m$  rutas tal que: (i) cada ruta comienza y termina en el depósito, (ii) cada cliente recibe la visita de exactamente un vehículo, (iii) la demanda total de los clientes asignados a un solo vehículo no excede de su capacidad de carga, (iv) las rutas comienzan y terminan dentro de una ventana de tiempo predefinido, y (v) la suma del costo de ruteo y de las sanciones por violaciones a las ventanas de tiempo se reduce al mínimo.

## 1.2 Bin Packing Problem

El denominado problema de empaquetamiento o embalaje Bin Packing Problem (BPP) [8], consiste en embalar un conjunto de objetos en varios contenedores tal que el peso o volumen total no exceda un valor máximo de cada contenedor, con el objetivo de minimizar el número total de contenedores utilizados y el costo requerido inherente a su uso [9]. No obstante,

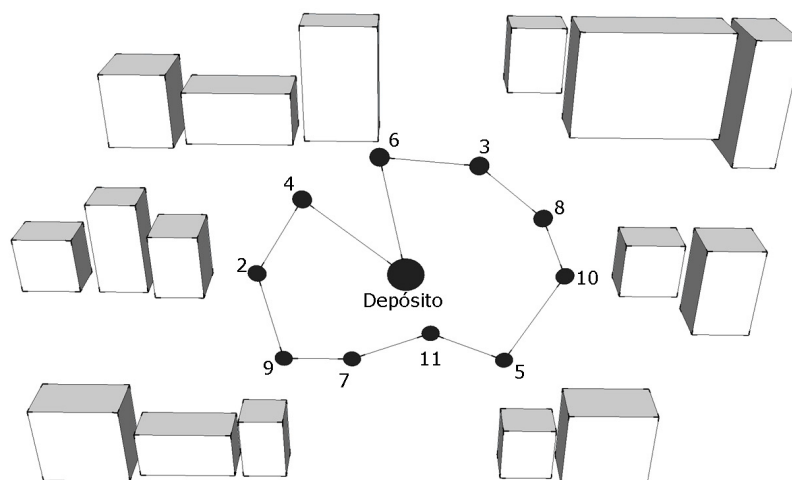
muchos de los problemas de optimización reales relativos al área de corte y empaquetamiento necesitan de la asignación de ítems a otras unidades mayores sin que exista solapamiento y minimizando el número de contenedores requeridos. Situación que es adecuadamente modelada por el BPP [10]. Este problema tiene numerosas aplicaciones en la vida real. Permite modelar, entre otras situaciones, la carga de camiones con limitaciones de peso, situaciones de almacenamiento, la asignación de trabajos de producción, entre otros.

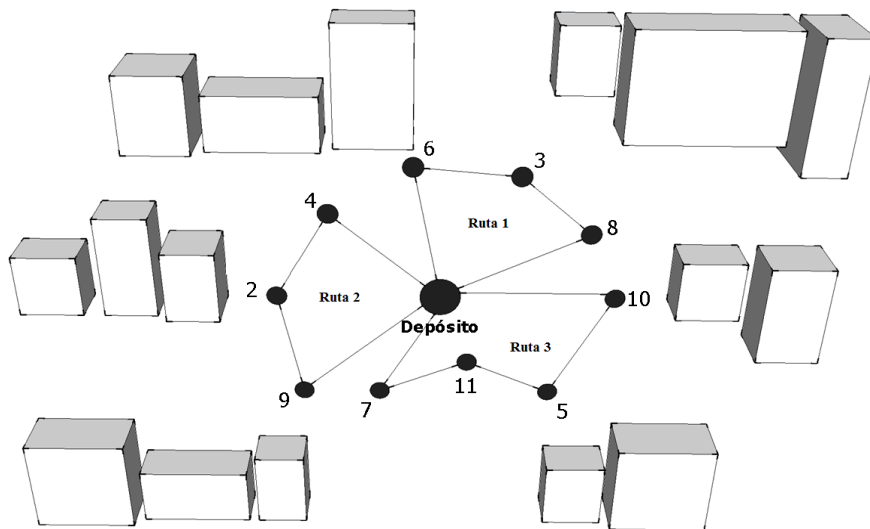
## 2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La restricción de capacidad de una dimensión como en el caso del problema CVRPTW [7], asegura que la capacidad total del vehículo no se exceda. Pero en la realidad, los productos se caracterizan por tener varias dimensiones, ya sea peso, superficie ocupada en la base del contenedor, volumen que ocupa en el contenedor, si es frágil o no lo que determinará que sea o no apilable, etc. [11]. Así el objetivo, por un lado, será empacar de manera óptima un conjunto de elementos en un conjunto de contenedores de dimensiones predefinidas. Por otro lado, las secuencias de los clientes en las rutas de los vehículos deben estar diseñadas para evitar las operaciones de descarga y recarga innecesarias. Resolver los problemas de embalaje y de ruteo por separado puede llevar a decisiones sub-óptimas. De esta manera se plantea una formulación de un modelo integrado para capturar las mencionadas interdependencias (Figura 2).

### 2.1 Parámetros para el modelado

Por un lado el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo se definía en un grafo  $G=(V,A)$ , donde el conjunto de nodos viene dado por  $V = \{0, n+1\} \cup \{1, \dots, n\}$ , donde los nodos  $\{0, n+1\}$  son dos copias del nodo depósito y  $C = \{1, \dots, n\}$  es el conjunto de nodos clientes.  $A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$  es el conjunto de arcos. Cada arco  $(i, j) \in A$  se asocia a un costo de transporte  $c_{ij}$  y a un tiempo de viaje  $t_{ij}$ . La demanda del cliente  $i \in C$  es caracterizada por un conjunto  $P_i$  de ítems (o productos) con un peso total de  $q_i$ , que debe ser satisfecha por un vehículo, y un tiempo de servicio  $s_i$ . Cada ítem (o producto)  $h$  está caracterizado por su ancho  $f_h$  y su altura  $e_h$ , donde  $h \in P$  siendo el conjunto de ítems (o productos)  $P = \sum_{i \in C} P_i$ . Además, se asocia con cada nodo  $i$  una ventana de tiempo  $[a_i, b_i]$ , en la que se supone que el servicio debe comenzar.





**Figura 2** Problema conjunto BPP y CVRP para una ruta y para varias rutas

Los vehículos que llegan temprano (antes de  $a_i$ ) tienen que esperar hasta el inicio de la ventana de tiempo y por otro lado, los vehículos que llegan tarde e inician el servicio después de  $b_i$  penalizan con una unidad  $c_i^L$ . Para los nodos de depósito, se asume que  $q_{0,p} = q_{n+1,p} = s_0 = s_{n+1} = 0$ . La ventana temporal asociada al depósito (siendo  $a_0 = a_{n+1}, b_0 = b_{n+1}$ ) representa el momento de apertura para salida del depósito y el momento de cierre para llegada al depósito. Una flota de  $m$  vehículos idénticos de capacidad  $Q$  (representada por  $K = \{1, \dots, m\}$ ) tiene como base el depósito. A menos que se indique lo contrario, cada vehículo puede ejecutar como máximo una ruta, y las entregas divididas no están permitidas. La flota de vehículos se caracteriza por un espacio de carga rectangular de ancho  $f^k$  y de alto  $e^k$ . Se supone que los ítems tienen una orientación fija, que tienen que ser envasados en paralelo a los bordes de la superficie de carga y no se pueden girar. Esta restricción es realista en el tipo de productos bajo estudio, que requieren de vehículos refrigerados que usualmente solo tienen acceso desde la parte posterior y los artículos se empaquetan de forma tal que la descarga se puede hacer fácilmente con solo deslizarlos hacia la parte trasera del vehículo.

## 2.2 Presentación de las variables y descripción formal del modelo

La variable binaria  $x_{ijk}$  asume el valor 1 si y solo si el vehículo  $k \in K$  atraviesa el arco  $(i, j) \in A$ . La variable binaria  $y_{ik}$  asume el valor 1 si y solo si el nodo  $i \in V$  es visitado por el vehículo  $k$ . La variable temporal  $w_{ik}$  representa el momento de inicio del servicio por el vehículo  $k$  al nodo  $i$ . La variable de decisión  $u_i$  modela el retraso respecto al comienzo del servicio al nodo  $i$ . La variable  $v_{hk}$  es igual a 1 si y solo si el ítem  $h$  se coloca en el vehículo  $k$ . La variable binaria  $z_{hl}$  es igual a 1 si y solo si los ítems  $h$  y  $l$  se colocan en el mismo vehículo. Para evitar la superposición de ítems la variable binaria  $o_{hl}^L$  asume el valor 1 si y solo si el ítem  $l$  se coloca a la izquierda del ítem  $h$ , así estos dos ítems no se superponen horizontalmente. La variable binaria  $o_{hl}^U$  es igual a 1 si y solo si el ítem  $l$  es colocado debajo del ítem  $h$ , de esta manera estos ítems no se superponen verticalmente. Finalmente  $c_h^X$  y  $c_h^Y$  se utilizan para modelar las coordenadas  $(x, y)$  de la esquina inferior izquierda del ítem  $h$ . A continuación, en ecuaciones (1) a (26) se presenta el modelo.

$$\min \sum_{k \in K} c_k^F \cdot (1 - x_{0,n+1,k}) + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \sum_{k \in K} x_{ijk} + \sum_{i \in V} c_i^L u_i \quad (1)$$

s. t.

$$\sum_{i \in V} \sum_{p \in P} q_{ip} y_{ik} \leq Q, \forall k \in K \quad (2) \quad y_{ik} = v_{hk}, \forall k \in K, i \in C, h \in P_i \quad (15)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1, \forall i \in C \quad (3) \quad c_h^X + f_h^P \leq f^k, \forall h \in P \quad (16)$$

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = m, \forall i \in \{0, n+1\} \quad (4) \quad c_h^Y + e_h^P \leq e^k, \forall h \in P \quad (17)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ijk} = y_{jk}, \forall j \in V \setminus \{0\}, k \in K \quad (5) \quad c_h^X + f_h^P \leq c_l^X + f^k (2 - z_{hl} - o_{hl}^L), \forall h, l \in P \quad (18)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = y_{jk}, \forall i \in V \setminus \{n+1\}, k \in K \quad (6) \quad c_l^X + f_l^P \leq c_h^X + f^k (2 - z_{hl} - o_{hl}^L), \forall h, l \in P \quad (19)$$

$$w_{ik} + s_i + t_{ij} \leq w_{ij} + M(1 - x_{ijk}), \forall i, j \in V, k \in K \quad (7) \quad c_h^Y + e_h^P \leq c_l^Y + e^k (2 - z_{hl} - o_{hl}^L), \forall h, l \in P \quad (20)$$

$$a_i \leq \sum_{k \in K} w_{ik} \leq b_i + u_i, \forall i \in C \quad (8) \quad c_l^Y + e_l^P \leq c_h^Y + e^k (2 - z_{hl} - o_{hl}^L), \forall h, l \in P \quad (21)$$

$$a_i \leq w_{ik} \leq b_i + u_i, \forall k \in K, i \in \{0, n+1\} \quad (9) \quad \sum_{i \in C} y_{ik} \leq M(1 - x_{0,n+1,k}), \forall k \in K \quad (22)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V, k \in K \quad (10) \quad o_{hl}^L + o_{lh}^L + o_{hl}^U + o_{lh}^U \geq 1, \forall h, l \in P \quad (23)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}, \forall i \in V, k \in K \quad (11) \quad c_h^X, c_h^Y \geq 0, \forall h \in P \quad (24)$$

$$w_{ik} \geq 0, \forall i \in V, k \in K \quad (12) \quad z_{hl}, o_{hl}^L, o_{hl}^U \in \{0, 1\}, \forall h, l \in P \quad (25)$$

$$u_i \geq 0, \forall i \in V \quad (13) \quad v_{hk} \in \{0, 1\}, \forall h \in P, k \in K \quad (26)$$

$$\sum_{k \in K} v_{hk} = 1, \forall h \in P \quad (14)$$

La función objetivo (1) minimiza el costo total. El parámetro  $c_k^F$  es el costo por vehículo. La restricción (2) requiere que no se exceda la capacidad máxima de los vehículos. Las restricciones (3) y (4) aseguran que cada cliente sea visitado una sola vez y que el depósito es utilizado por todos los vehículos de  $K$ . La conservación del flujo está garantizada por las restricciones (5) y (6). La restricción (7) garantiza la viabilidad con respecto al tiempo. Las restricciones (8) y (9) imponen las ventanas de tiempo, cuya violación es penalizada en la función objetivo. Las restricciones (10), (11), (12) y (13) imponen condiciones a las variables. Las restricciones (14) y (15), en combinación con la (3) imponen que todos los artículos deben ser empacados en vehículos y que todos los productos  $P_i$  que pertenecen al cliente  $i$  deberán ser envasados en el mismo vehículo  $k$ . Las restricciones (16) y (17) garantizan que los productos no sobresalgan de la superficie de carga de los vehículos. Las restricciones (18), (19), (20) y (21) aseguran de que no haya dos elementos que se solapen, si se colocan en el mismo vehículo  $k$ . La restricción (22) asegura que los elementos sólo pueden cargarse en los vehículos que están actualmente en uso. Las restricciones (23), (24), (25) y (26) imponen condiciones a las variables.

### 3. APLICACIÓN DEL MODELO Y SU RESOLUCIÓN

Para la aplicación del modelo, se realiza la experimentación sobre una empresa rionegrina dedicada a la producción y comercialización de fruta de pepita en fresco. Se acotará el análisis a la comercialización en Capital Federal y su área de incumbencia. La empresa cuenta con un

depósito refrigerado en el Mercado Central de Buenos Aires ( $N_1$ ), posee 3 camiones refrigerados con capacidad homogénea para la distribución de la mercadería a sus clientes situados en 10 mercados concentradores. Los clientes del Mercado Central no se consideran dentro del problema diario de embalaje y ruteo, dado que correspondería a la logística interna del depósito. En la Tabla 1 se detallan los mercados ( $N_i$   $i = 1, \dots, 11$  considerando como  $N_1$  al depósito). Se detalla las ventanas temporales en las que se puede realizar la carga y descarga de mercadería ( $a_i, b_i$ ),  $i = 1, \dots, 11$ . Se especifica el tiempo de servicio para cada cliente  $s_i$  y las coordenadas geográficas de los mismos.

**Tabla 1** Especificaciones de los Nodos

Nodo $i$ ( $N_i$ )	Mercado	Ventana Temporal		$s_i$	Coordenadas	
		$a_i$	$b_i$		Lat.: $X_i$	Long.: $Y_i$
$N_1$	Mercado Central de Bs. As (DEP)	13:00 hs	1:00 hs	60 min	34°42'36.37"S	58°30'4.74"O
$N_2$	Mercado José C. Paz	14:00 hs	21:00 hs	60 min	34°31'49.52"S	58°46'13.55"O
$N_3$	Mercado de Escobar	14:00 hs	21:00 hs	60 min	34°25'36.71"S	58°42'51.43"O
$N_4$	Mercado de Abasto 3 de Febrero	14:00 hs	21:00 hs	60 min	34°37'14.62"S	58°33'24.54"O
$N_5$	Mercado Consorcio de Beccar	14:00 hs	21:00 hs	60 min	34°27'44.95"S	58°32'49.81"O
$N_6$	Mercado La Matanza	14:00 hs	21:00 hs	60 min	34°39'53.58"S	58°31'13.37"O
$N_7$	Mercado de Bursaco	16:00 hs	23:00 hs	60 min	34°48'21.59"S	58°21'56.26"O
$N_8$	Mercado de Avellaneda - Abasto XXI	16:00 hs	23:00 hs	60 min	34°40'25.09"S	58°19'26.46"O
$N_9$	Mercado de abasto de Quilmes	16:00 hs	23:00 hs	60 min	34°43'55.73"S	58°16'47.88"O
$N_{10}$	Berazategui	16:00 hs	23:00 hs	60 min	34°45'57.50"S	58°14'58.91"O
$N_{11}$	Mercado Regional de la Plata	16:00 hs	23:00 hs	0 min	34°52'59.65"S	57°58'29.94"O

En la Tabla 2 se especifican los costos totales diarios de transporte en pesos entre los nodos y en la Tabla 3 los tiempos de viaje en minutos entre los nodos  $t_{ij}$ , para cada arco  $(i, j) \in \{1, \dots, 11\} | i \neq j$ .

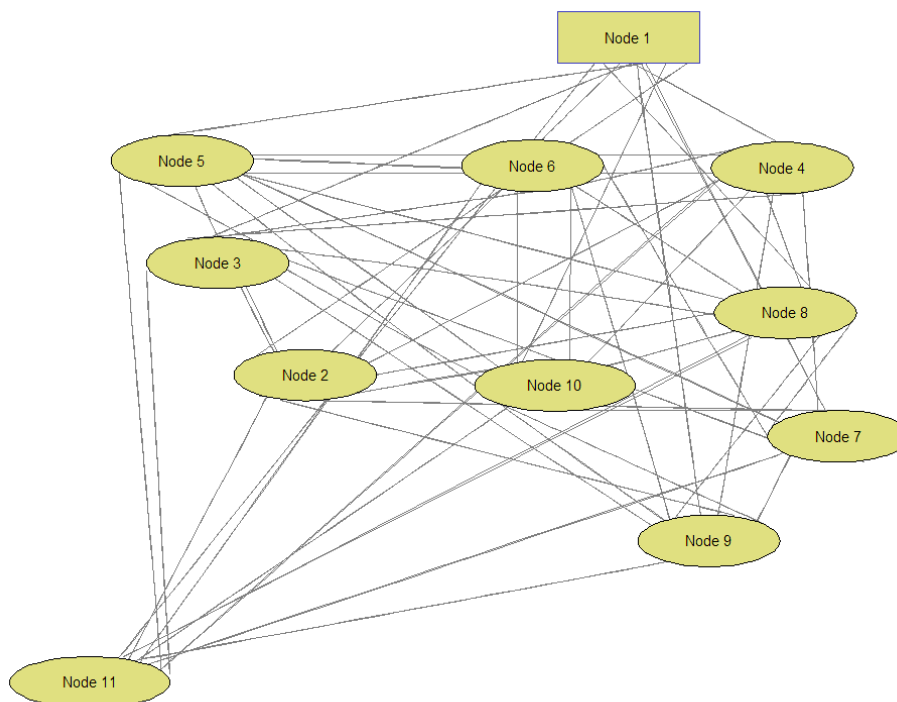
**Tabla 2** Matriz de Costos de Transporte

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$N_8$	$N_9$	$N_{10}$	$N_{11}$
$N_1$	0	1339	1300	400	894	195	671	983	889	1053	1817
$N_2$	1339	0	520	710	673	1170	1862	2072	1979	2194	2912
$N_3$	1300	520	0	1048	634	1131	1823	1979	1885	2049	2808
$N_4$	400	710	1048	0	653	229	920	1082	988	1152	1916
$N_5$	894	673	634	653	0	723	1414	1570	1477	1641	2405
$N_6$	195	1170	1131	229	723	0	715	1019	926	1092	1856
$N_7$	671	1862	1823	920	1414	715	0	616	348	369	1313
$N_8$	983	2072	1979	1082	1570	1019	616	0	268	432	1199
$N_9$	889	1979	1885	988	1477	926	348	268	0	127	1139
$N_{10}$	1053	2194	2049	1152	1641	1092	369	432	127	0	931
$N_{11}$	1817	2912	2808	1916	2405	1856	1313	1199	1139	931	0

**Tabla 3** Matriz de Tiempos de Viaje

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$N_8$	$N_9$	$N_{10}$	$N_{11}$
$N_1$	0	134	112	50	84	25	103	84	100	126	134
$N_2$	134	0	75	126	95	126	221	182	198	224	232
$N_3$	112	75	0	106	72	103	198	162	179	204	212
$N_4$	50	126	106	0	81	42	137	100	117	142	151
$N_5$	84	95	72	81	0	75	170	134	151	176	184
$N_6$	25	126	103	42	75	0	112	92	109	131	140
$N_7$	103	221	198	137	170	112	0	117	81	72	156
$N_8$	84	182	162	100	134	92	117	0	53	78	89
$N_9$	100	198	179	117	151	109	81	53	0	36	100
$N_{10}$	126	224	204	142	176	131	72	78	36	0	98
$N_{11}$	134	232	212	151	184	140	156	89	100	98	0

En la Figura 3 se observa el grafo resultante el cual contiene 11 nodos con 110 arcos. Se muestran las combinaciones del problema de ruteo que enfrenta la empresa para cada uno de los camiones.



**Figura 3** Grafo para el Problema de Ruteo

La flota con base en el  $N_1$  (depósito), consta de  $m = 3$  camiones térmicos refrigerados con acceso posterior, donde cada uno tiene una capacidad de carga fijada por normativa legal, de



$Q_k = 26.000\text{kg}$  para  $k = \{1,2,3\}$ . Cada vehículo refrigerado posee un espacio de carga rectangular de ancho  $f^k = 2,5\text{m}$  y de largo  $e^k = 13,5\text{m}$  ( $33.75\text{ m}^2$ ). La demanda o pedido de cada  $N_i | i = 2, \dots, 11$ , se caracteriza por un conjunto  $P_i$  de pallets de cajas embaladas con pera o manzana. Es decir, cada ítem de  $h \in P_i$  es un pallet, caracterizado por su ancho  $f_h = 1,2\text{m}$ , por su largo  $e_h = 1\text{m}$  fijos e iguales para todos los pallets. El peso total de la demanda del cliente  $i$  está dado por la suma de los pesos del conjunto de pallets pedidos. El peso de cada pallet varía en función del producto (pera o manzana). El peso de un pallet de manzana es  $\text{Peso}(h_{\text{manzana}}) = 994,7\text{kg}$  y de pera es  $\text{Peso}(h_{\text{pera}}) = 1.136,8\text{kg}$ , considerando el peso del producto y de los materiales. Cada cliente arma el pedido en función del stock informado desde el depósito el día anterior a la distribución. Cada pallet a su vez está caracterizado por tres variables que no alteran los parámetros del modelo, dado que no afectan el peso del pallet por tipo de producto (pera o manzana) ni las dimensiones del pallet. Tampoco alteran las variables de decisión del modelo, ni su formulación dado que están predeterminadas por pallet armado en origen y stockeado en el depósito. Estas variables son: 1) Calibre (Tamaño del fruto), en cada pallet puede haber uno o más calibres (cada caja contiene fruto de un solo calibre), 2) Calidad (Elegido, comercial, común) cada pallet tiene una sola calidad, 3) Marca (La empresa trabaja con diferentes marcas) cada pallet tiene una sola marca. Un supuesto que diferencia el caso de aplicación con la formulación matemática general, es el hecho de que la insatisfacción de la ventana temporal implica la no descarga del pedido y el desabastecimiento del cliente. El problema de esta manera consiste en determinar de manera óptima la asignación del espacio por camión a cada pedido y en determinar la secuencia óptima de los clientes en las rutas de los vehículos. Considerando una estructura LIFO (last in first out) en la asignación del espacio, dado que el acceso carga/descarga del vehículo es por la parte posterior. El optimizador utilizado para resolver el modelo fue una meta-heurística evolutiva llamada algoritmo genético. Este tipo de algoritmo se corresponde con un modelo de aprendizaje que debe su comportamiento a una metáfora de algunos de los mecanismos de la evolución que se observan en la naturaleza. Los algoritmos genéticos se caracterizan por su gran adaptación al problema y generalmente son usados como métodos de búsqueda y optimización de parámetros. En la evolución incorporan al proceso operadores genéticos de cruce y mutación, y definen los criterios de selección. Los parámetros y características del algoritmo genético desarrollado en Matlab fueron: Tamaño de la Población 100, Número de Generaciones 500, Selección Ranking, Tipo de Cruce 2-Point, Probabilidad de Cruce 0.85, Tipo de Mutación 2-Swap, Probabilidad de Mutación 0.01, Procesador Intel Core 2 Duo 2,4 GHz. y RAM 4 Gb.

#### 4. EXPERIENCIA Y RESULTADOS

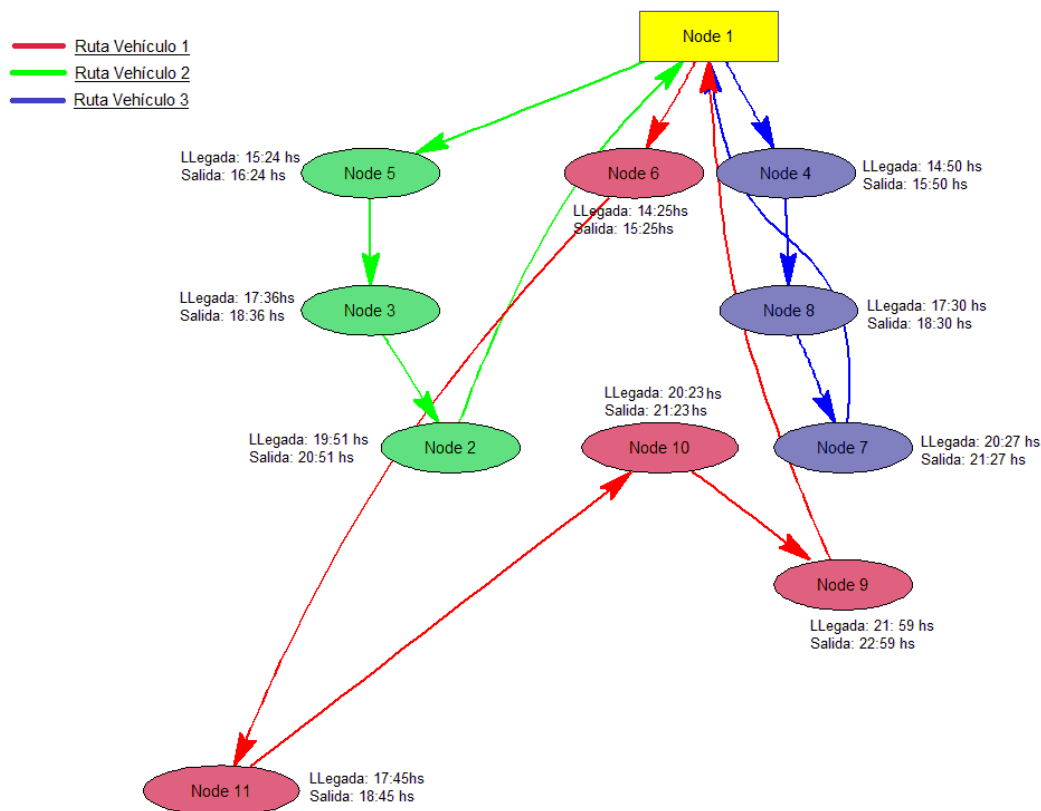
Con el objetivo de evaluar el desempeño del modelo, se consideró el set de pedidos de la Tabla 4, y se lo comparó con la asignación realizada en la realidad por la empresa.

**Tabla 4** Set de Pedidos

Clientes	$h_{\text{manzana}}$			$h_{\text{pera}}$			Ventana Temporal	
	Nº	$\text{m}^2$	kg	Nº	$\text{m}^2$	kg	$a_i$	$b_i$
$N_1$	-	-	-	-	-	-	20:00 hs	4:00 hs
$N_2$	3	3,6	2.984	2	2,4	2.274	14:00 hs	21:00 hs
$N_3$	4	4,8	3.979	2	2,4	2.274	14:00 hs	21:00 hs

N <sub>4</sub>	8	9,6	7.958	7	8,4	7.958	14:00 hs	21:00 hs
N <sub>5</sub>	7	8,4	6.963	5	6	5.684	14:00 hs	21:00 hs
N <sub>6</sub>	3	3,6	2.984	2	2,4	2.274	14:00 hs	21:00 hs
N <sub>7</sub>	3	3,6	2.984	1	1,2	1.137	16:00 hs	23:00 hs
N <sub>8</sub>	3	3,6	2.984	2	2,4	2.274	16:00 hs	23:00 hs
N <sub>9</sub>	2	2,4	1.989	1	1,2	1.137	16:00 hs	23:00 hs
N <sub>10</sub>	3	3,6	2.984	1	1,2	1.137	16:00 hs	23:00 hs
N <sub>11</sub>	5	6,0	4.974	4	4,8	4.547	16:00 hs	23:00 hs

Es notable el grado de optimización mostrado en el modelo aplicado. El resultado en la instancia real, (por cuestiones de confidencialidad no es posible presentar más detalladamente la información recabada en este aspecto, puesto que refleja la aplicabilidad de una herramienta algorítmica en la realidad implicaba un factor de utilización promedio de los 3 camiones, de un 70% de su capacidad de peso y menos en su capacidad en m<sup>2</sup>, con arrendamiento de un vehículo adicional a un costo superior a la utilización de los camiones propios, para poder satisfacer las ventanas temporales y todos los pedidos de forma completa o en su defecto podía optar por el desabastecimiento total o parcial de alguno de los nodos. Mediante el modelo propuesto, se mejoraron estos resultados en todos los aspectos. En la Figura 4 se presenta el dígrafo que esquematiza la solución propuesta, y en la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos.



**Figura 4** Dígrafo Solución del ruteo mediante modelo propuesto

**Tabla 5** Solución

	Rutas	Demanda (kg)	Demanda (m <sup>2</sup> )	N <sub>i</sub> →N <sub>j</sub> (min)	Ventana Temporal				Costo (\$)
					Llegada al N <sub>j</sub>	Inicio Servicio	Duración Servicio (min)	Salida de N <sub>i</sub>	
<b>Ruta 1</b>	N <sub>1</sub>	-	-	-	-	14:00	0	14:00	-
	N <sub>6</sub>	5.257	6,00	25	14:25	14:25	60	15:25	195
	N <sub>11</sub>	9.520	10,80	140	17:45	17:45	60	18:45	1.856
	N <sub>10</sub>	4.120	4,80	98	20:23	20:23	60	21:23	931
	N <sub>9</sub>	3.126	3,60	36	21:59	21:59	60	22:59	127
	N <sub>1</sub>	0	-	100	0:39	0:39	0	0:39	889
	<b>Totales</b>	<b>22.023</b>	<b>25,2</b>	<b>399</b>	-	-	<b>240</b>	-	<b>3.999</b>
<b>Ruta 2</b>	N <sub>1</sub>	-	-	-	-	14:00	0	14:00	-
	N <sub>5</sub>	12.646	14,40	84	15:24	15:24	60	16:24	894
	N <sub>3</sub>	6.252	7,20	72	17:36	17:36	60	18:36	634
	N <sub>2</sub>	5.257	6,00	75	19:51	19:51	60	20:51	520
	N <sub>1</sub>	0	-	134	23:05	23:05	0	23:05	1.339
	<b>Totales</b>	<b>24.155</b>	<b>27,6</b>	<b>365</b>	-	-	<b>180</b>	-	<b>3.388</b>
<b>Ruta 3</b>	N <sub>1</sub>	-	-	-	-	14:00	0	14:00	-
	N <sub>4</sub>	15.915	18,00	50	14:50	14:50	60	15:50	400
	N <sub>8</sub>	5.257	6,00	100	17:30	17:30	60	18:30	1.082
	N <sub>7</sub>	4.120	4,80	117	20:27	20:27	60	21:27	616
	N <sub>1</sub>	0	-	103	23:10	23:10	0	23:10	671
	<b>Totales</b>	<b>25.292</b>	<b>28,8</b>	<b>370</b>	-	-	<b>180</b>	-	<b>2.769</b>

El costo total diario asciende a \$ 10.156 para este set de pedidos. Estos resultados implican factores de utilización de los vehículos descriptos en la Tabla 6 y un cumplimiento del 100% con las ventanas temporales y el abastecimiento de los nodos. En la Tabla 7 se muestra la solución para el BPP.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo para resolver el Bin Packing Problem (BPP) y el Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows (CVRPTW) de manera integrada. Se especificó la formulación original del modelo y su adaptación al problema planteado. Se describieron las características técnicas de un caso presentado por una empresa rionegrina dedicada a la producción y comercialización de fruta de pepita en fresco. Como optimizador del modelo se utilizó un algoritmo genético desarrollado en Matlab. Los resultados obtenidos satisficieron todas las restricciones técnicas y operativas del modelo, y además mejoraron significativamente las condiciones actuales de la empresa. El trabajo se continuará abordando problemas de mayor envergadura y se desarrollaran nuevas condiciones en la elaboración del

modelo. Debido a las características particulares del problema abordado se pretende utilizar otros optimizadores también incorporados a Matlab.

**Tabla 6** Factor de Utilización de los Vehículos

	% Utilización (kg)	% Utilización (m <sup>2</sup> )
<b>Vehículo 1</b>	85%	75%
<b>Vehículo 2</b>	93%	82%
<b>Vehículo 3</b>	97%	85%

**Tabla 7** Resultado del BPP

Vehículo 1			Vehículo 2			Vehículo 3	
N <sub>9</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>9</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>2</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>2</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>7</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>7</sub> h <sub>manzana</sub>
N <sub>9</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>10</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>2</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>2</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>7</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>7</sub> h <sub>manzana</sub>
N <sub>10</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>10</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>2</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>3</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>8</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>8</sub> h <sub>pera</sub>
N <sub>10</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>11</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>3</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>3</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>8</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>8</sub> h <sub>manzana</sub>
N <sub>11</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>11</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>3</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>3</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>8</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>
N <sub>11</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>11</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>
N <sub>11</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>11</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>
N <sub>11</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>11</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>pera</sub>
N <sub>6</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>6</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>pera</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>
N <sub>6</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>6</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>
N <sub>6</sub> h <sub>manzana</sub>			N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>
			N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>		N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>	N <sub>4</sub> h <sub>manzana</sub>
			N <sub>5</sub> h <sub>manzana</sub>				

## 6. REFERENCIAS

- [1] Ruixin, M.; György, D.; Xin, H.; Hing-Fung, T.; Deshi, Y.; Yong, Z. (2013). "A note on a selfish bin packing problem". Journal of Global Optimization. Vol. 56 (4). pp. 1457-1462.
- [2] Kok, A.; Meyer, C.; Kopfer, H.; Schutten, J. (2010). "A dynamic programming heuristic for the vehicle routing problem with time windows and European Community social legislation". Transportation Science. Vol. 44 (4). pp. 442-454.
- [3] Mula, J.; Peidro, D.; Diaz-Madronero, M.; Vicens, E. (2010). "Mathematical programming models for supply chain production and transport planning". European Journal of Operational Research. Vol. 204 (3). pp. 377-390.
- [4] Frutos, M.; Tohmé, F. (2012). "A new approach to the optimization of the CVRP through genetic algorithms". American Journal of Operations Research. Vol. 2 (4). pp. 495-501.

- [5] Theys, C.; Bräysy, O.; Dullaert, W.; Raa, B. (2010). "Using a TSP heuristic for routing order pickers in warehouses". *European Journal of Operational Research*. Vol. 200 (3). pp. 755-763.
- [6] Kallehauge, B.; Larsen, J.; Madsen, O. B. G. (2006). "Lagrangian duality applied to the vehicle routing problem with time windows". *Computers & Operations Research*. Vol. 33 (5). pp. 1464-1487.
- [7] Bräysy, O. (2003). "A reactive variable neighborhood search for the vehicle routing problem with time windows". *INFORMS Journal on Computing*. Vol. 15 (4). pp. 347-368.
- [8] Baumgartner, L.; Schmid, V.; Blum, C. (2011). "Solving the two-dimensional bin packing problem with a probabilistic multi-start heuristic". *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 6683. pp. 76-90.
- [9] Bennell, J. A.; Lee, L. S.; Potts, C. N. (2013). "A genetic algorithm for two-dimensional bin packing with due dates". *International Journal of Production Economics*. Available online 2 May 2013.
- [10] Lodi, A.; Martello, S.; Vigo, D. (2002). "Recent advances on two-dimensional bin packing problems". *Discrete Applied Mathematics*. Vol. 123 (3). pp. 379-396.
- [11] Iori, M.; Salazar-González, J. J.; Vigo, D. (2007). "An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints". *Transportation Science*. Vol. 41 (2). pp. 253-264.

### **Agradecimientos**

Este trabajo no podría haberse realizado sin el apoyo económico prestado por varias fuentes. Los autores agradecen a la Universidad Nacional de Río Negro, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Universidad Nacional del Sur.