

# SISTEMAS DE COLAS DE SERVICIO ÚNICO CON DOS CANALES DISPUESTOS EN SERIE SIN CONDICIONES DE LIBERACIÓN DE FLUJO

## Gestión de Operaciones y Logística

Miranda, Miguel\* – Carlevari, Ricardo\*

Massanes Betelu, María del Pilar\* – Perez Otero, Diógenes\* – Rocca, Stella Maris

*Facultad de Ingeniería, Universidad Austral*

*Mariano Acosta 1699 – Presidente Derqui - B1630FHB – Pilar, Provincia de Buenos Aires*

[diogenes.perez@ing.austral.edu.ar](mailto:diogenes.perez@ing.austral.edu.ar)

### RESUMEN

El presente trabajo se refiere a un sistema de colas de dos canales de atención dispuestos secuencialmente, que brindan el mismo servicio y que no presentan restricciones de capacidad de la cola ni otras condiciones que posibiliten la liberación de clientes sin haber recibido el servicio. Esta configuración se presenta en situaciones en las que, por restricciones de lay-out, los canales no pueden ser dispuestos en paralelo. Se proporcionan tablas y ábacos para resolver un caso de dos canales y un método para determinar la conveniencia de pasar de un sistema monocal a un sistema bicanal.

**Palabras Claves:** Sistemas de colas - Estaciones de peajes de autopistas - Doble cabina - Procesos estocásticos.

### ABSTRACT

This paper analyzes a queueing system with two servers in series that perform the same service with infinite system capacity and impossibility of system abandonment prior to being served. This configuration is usual in situations in which, due to lay-out restrictions, servers cannot be placed in parallel. For example: working stations in assembly lines, freight loading platforms for wagons, payment stations in toll-booths. Tables and nomograms for such systems are provided and a criterion for switching from a single server to a double server in series configuration is developed, based on cost optimization.

**Key words:** Queueing systems – In-series workstations – Stochastic processes.

## 1. INTRODUCCIÓN

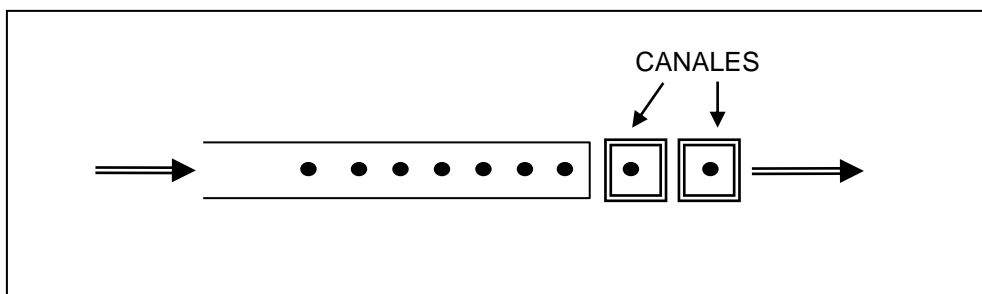
Un objetivo de la mayoría de las instalaciones de servicios en donde puede haber trabajos en espera es balancear adecuadamente los costos que resultan de brindar un servicio más eficiente contra los costos asociados a la espera que deben experimentar los clientes o trabajos. A fin de optimizar la ecuación económica, los administradores de estos sistemas pueden dimensionar el nivel de servicio determinando la velocidad de atención o la cantidad de canales a disponer en paralelo en el sistema. En situaciones en donde no es posible dimensionar estas variables de decisión, típicamente por razones físicas u operativas, puede existir la opción de habilitar canales en serie, tal como podría ser el caso de una estación de trabajo en una línea de montaje con varios canales dispuestos en serie para realizar el ensamblaje correspondiente a esa estación. En la Figura 1 se muestra esquemáticamente un sistema con dos canales.

Las estaciones de servicio para carga de combustible constituyen otro ejemplo, en donde el ancho de la instalación restringe la cantidad de islas de carga a disponer en paralelo. Sin embargo, en muchas ocasiones se puede disponer un surtidor adicional en serie sobre la misma isla.

Asimismo, en plataformas de carga y descarga de vagones autopropulsados que circulan por una misma vía férrea, tales como las instaladas en yacimientos carboníferos, cementeras, etc., es factible emplazar más de una tolva en forma secuencial a fin de aumentar la capacidad operativa de la plataforma.

Otra situación práctica similar es el de algunas autopistas de alto volumen de circulación cuando se intenta aliviar la congestión que se produce en horas pico pero que no es posible habilitar más cabinas de cobro en paralelo. El flujo de vehículos que circula en un sentido determinado se distribuye en distintas líneas habilitadas para cada modalidad de pago de peaje (por ejemplo "tránsito liviano-pago exacto", "tránsito pesado", "telepeaje", etc.). Asimismo, el flujo vehicular para cada modalidad se distribuye típicamente en forma proporcional en cada línea de pago disponible. Estas líneas están constituidas habitualmente por una cabina de cobro. Sin embargo, algunas autopistas de nuestro país ya han dispuesto una segunda cabina en serie que se habilita en determinadas franjas horarias para reducir el tiempo de espera de los usuarios.

En todos estos casos, el nivel de actividad de un canal se ve afectado por el estado operativo de los otros canales. En efecto, cuando un canal ha finalizado el servicio a un cliente, pero el canal subsiguiente en la línea aún se encuentra trabajando, el cliente no se puede retirar del sistema y se queda bloqueando el canal hasta tanto finalice la atención del siguiente canal. Del mismo modo, si un canal aguas abajo está disponible pero el anterior en la línea aún está ocupado, un cliente que esté esperando en la cola no podrá posicionarse en el canal libre para que se le brinde el servicio hasta tanto finalice la atención en el canal anterior. Esto significa que un canal puede estar activamente ocupado, si se encuentra realizando el trabajo, o inactivamente ocupado si está bloqueado. Asimismo, un canal desocupado puede estar libre efectivamente si no hay clientes esperando en cola o forzosamente libre si hay clientes en espera pero el paso por la línea se encuentra bloqueado.



**Figura 1:** Disposición física de una cola con dos canales de atención. Un canal obstaculiza físicamente el paso al otro canal, por lo que se pueden generar bloqueos.

Si bien el ordenamiento en serie de un canal no produce el mismo efecto, en términos de eficiencia operativa, que el de un canal dispuesto en paralelo (debido a los bloqueos de servicios e interrupciones de paso que se generan), esta disposición puede constituir una mejora en los beneficios del sistema cuando el arreglo en paralelo no es factible.

Los autores del presente trabajo revelaron un procedimiento de optimización de sistemas de peaje en autopistas para determinar la oportunidad adecuada para agregar un segundo canal en serie cuando existen regulaciones para levantar las barreras en horas pico si se alcanza un nivel de congestión predeterminado, por ejemplo, en términos de cantidad de vehículos esperando en cola [1]. Sin embargo, no se encaró en ese trabajo un enfoque cuantitativo para sistemas de clientes cautivos, que son aquellos en que los usuarios no pueden abandonar el sistema sin haber recibido la atención. En el caso de los sistemas de peaje de doble cabina, esta situación se daría si no existieran normas que obliguen a levantar las barreras en caso de que se supere un tiempo de espera determinado o su equivalente en cantidad de vehículos en espera. Aquí, los administradores de las instalaciones deben dimensionar el sistema para que funcione con un

responsable y adecuado nivel de servicio, de modo tal que se encuentre en equilibrio en condiciones de régimen permanente.

En el presente trabajo se estudiará una configuración de doble canal en serie con clientes cautivos, en donde ellos pueden progresar solamente sobre una única línea o carril, de modo tal que un estado determinado puede generar inactividad en alguno de los canales debido a la obstrucción producida al libre pasaje de los clientes por esa vía de circulación.

A este tipo de disposición secuencial en donde los canales proporcionan un mismo servicio se lo denominará *semiserie*, a fin de diferenciarla de las instalaciones comúnmente denominadas *en serie*, que son las que brindan servicios diferentes en cada uno de sus canales. La notación Kendall a utilizar es  $P_1/P_2/M_{SS}/N/d/(N')$ , en donde  $P_1$  y  $P_2$  se refieren respectivamente al tipo de procesos de arribos y de servicios ( $M$ =markoviano,  $G$ =general, etc.),  $M_{SS}$  indica la cantidad de canales en semiserie,  $N$  es la capacidad del sistema,  $d$  se refiere a la modalidad de atención (FIFO, LIFO, SIRO, Prioridad, etc.) y  $N'$  indica el tamaño de la población. Si no se consigna información en las posiciones 4, 5 y 6 de esta notación, por *default* se supone, respectivamente, capacidad ilimitada, disciplina FIFO y población infinita.

En este trabajo se utilizará la nomenclatura propuesta en el texto *Sistemas de colas* [2]. En particular, llamaremos:

$\lambda$ : Tasa promedio de arribos de clientes al sistema.

$\mu$ : Velocidad promedio de atención.

$T_s$ : Tiempo promedio de atención  $\left(T_s = \frac{1}{\lambda}\right)$

$\rho$ : Factor de tráfico del carril  $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$\lambda_n$ : Tasa promedio de ingreso de usuarios cuando el estado del sistema es "n".

$\mu_n$ : Tasa promedio de egreso de clientes cuando el estado del sistema es "n".

$\bar{\lambda}$ : Tasa promedio de ingresos al sistema.

$\bar{\mu}$ : Tasa promedio de egresos del sistema.

## 2. DESARROLLO

En la Figura 2 se muestra nuevamente el sistema semiserie de la Figura 1, con sus parámetros respectivos. Denominaremos CANAL 1 al servidor ubicado más próximo a la cola y CANAL 2 al localizado más adelante.

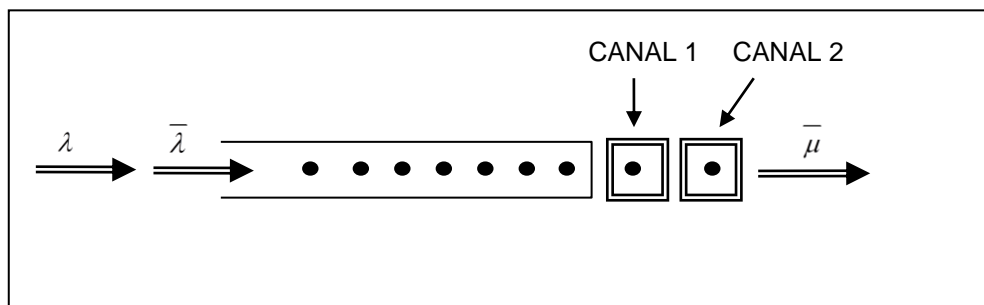


Figura 2: Flujo de clientes en sistema de doble canal  $M/M/2_{ss}$ .

Para el desarrollo del modelo matemático se adoptarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- El proceso de arribo de clientes es de tipo Poisson, y se conoce la tasa promedio de arribos  $\lambda$  (o su inversa, intervalo promedio entre arribos,  $T_A$ ).
- El proceso de servicio en los canales es de tipo Poisson, y se conoce la tasa de procesamiento  $\mu$  (o su inversa, la duración promedio del pago del peaje,  $T_S$ ).
- El sistema se encuentra en condiciones de régimen permanente. En consecuencia, el flujo ingresante debe ser igual al saliente.
- La población de clientes potenciales de la instalación es infinita.
- Los clientes son cautivos. Por tanto, no hay abandonos de clientes por impaciencia, ni por restricciones de capacidad de la cola, ni por liberación masiva de la obligación de pago del servicio. En consecuencia, tal como se muestra en la Figura 2, la tasa de ingreso de clientes al sistema es igual a la tasa de arribos. Es decir:  $\lambda = \bar{\lambda}$
- Los tiempos de servicio en ambos canales tienen idéntica distribución (igual parámetro  $\mu$ ). Como la velocidad de servicio no varía con la longitud de cola, se concluye que  $\mu = \mu_n \forall n$ .

- Si ambos canales están disponibles para brindar el servicio, un cliente que arriba al sistema se ubica en el que está más adelante (canal 2).
- Si ambos canales estaban ocupados cuando el canal 2 termina el servicio, un cliente que esté esperando en cola no puede avanzar para recibir el servicio debido a que la ocupación del canal 1 impide el paso hasta que éste termine su atención.
- Si ambos canales estaban ocupados cuando el canal 1 termina el servicio, un cliente que esté esperando en cola no puede avanzar para recibir el servicio debido a que la ocupación del canal 2 impide que el cliente que terminó el servicio pueda retirarse del sistema. Denominaremos a esta situación como estado bloqueado.
- Un cliente que fue atendido en el canal 1, si está libre el canal 2, pasa instantáneamente por éste para retirarse.

Designaremos, entonces, a los estados en tres dimensiones  $(n_c, n_1, n_2)$ , en donde:

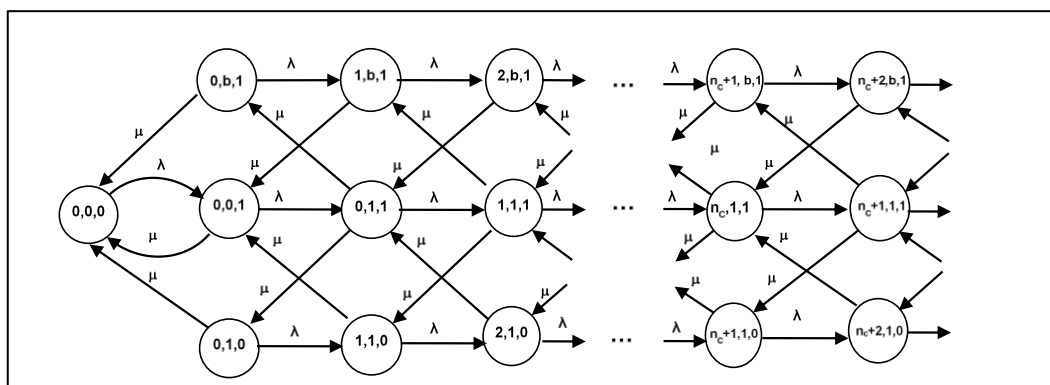
- $n_c$  indica la cantidad de usuarios que están esperando en la cola del carril en un instante determinado.
- $n_1$  se refiere a la condición del canal 1: 0 (sin clientes), 1 (atendiendo a un cliente), b (bloqueado esperando que termine el servicio del canal 2), y
- $n_2$  indica la condición del canal 2: 0 (sin clientes), 1 (atendiendo a un cliente).
- $p(n_c, n_1, n_2)$  a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $(n_c, n_1, n_2)$ .

En el sistema pueden identificarse 5 condiciones operativas:

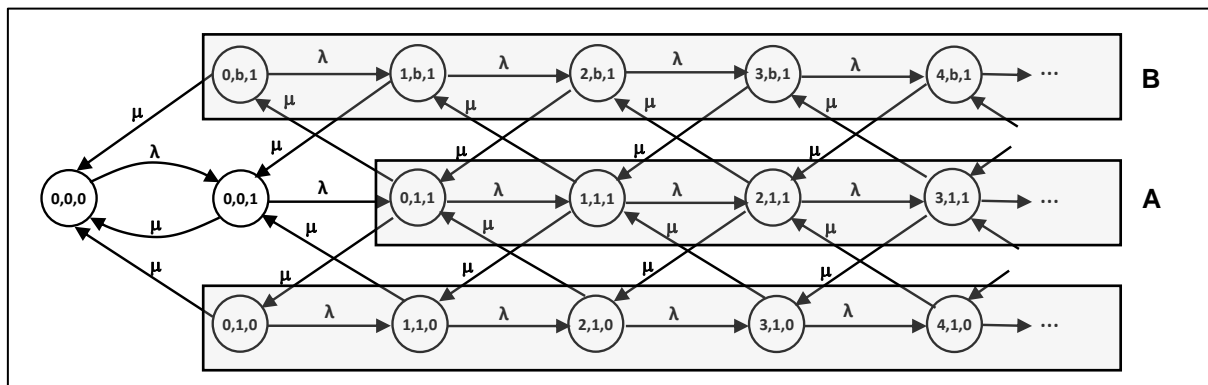
- Ambas cabinas vacías: estado  $(0,0,0)$ .
- Un solo cliente en el sistema, atendándose en el canal 2: estado  $(0,0,1)$ .
- Dos o más clientes en el sistema, estando ambos canales activos: estado  $(n_c, 1, 1)$ .
- Dos o más clientes en el sistema, estando el canal 1 bloqueado y el canal 2 en actividad: estado  $(n_c, b, 1)$ .
- Uno o más clientes en el sistema, estando el canal 2 desocupado pero el canal 1 todavía procesando el servicio: estado  $(n_c, 1, 0)$ .

Las dos últimas condiciones operativas generan condiciones de ineficiencia cuando  $n_c > 0$  ya que la actividad de un canal impide que el otro canal libre atienda a clientes que están esperando en cola.

La Figura 3 muestra la cadena markoviana de este sistema para distintos estados, incluyendo estados genéricos, y en la Figura 4 se agrupan estos estados conforme a sus condiciones operativas.



**Figura 3:** Cadena markoviana del sistema.



**Figura 4:** Cadena markoviana del sistema con los estados agrupados según sus condiciones operativas. B indica todos los estados con condición de bloqueo y A identifica a todos los estados con ambos canales en operación.

Llamaremos B al porcentaje de inactividad forzada del canal 1 debido a la ocupación activa del canal 2. Es decir, B es la probabilidad de que el sistema se encuentre con el canal 1 en bloqueo y corresponde a la suma de las probabilidades de los estados de la fila superior de la Figura 4.

$$B = \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, b, 1) \quad (1)$$

Por su parte, el porcentaje de tiempo ocioso del canal 2 se da por la ocupación del canal 1 que interrumpe el paso a un cliente que está esperando en la cola hasta tanto termine de realizar su servicio. Es decir, este porcentaje de inactividad es igual a la probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de los estados  $(n_c, 1, 0)$ , y que corresponde a la suma de las probabilidades de los estados de la fila inferior de la Figura 4.

Observando la cadena markoviana de la Figura 2, se puede ver que los estados  $(n_c, b, 1)$  son exactamente simétricos a los estados  $(n_c, 1, 0)$  en términos de flujos probabilísticos entrantes y salientes de los respectivos nodos, por lo que se verifica que  $p(n_c, b, 1) = p(n_c, 1, 0)$ . En consecuencia, el porcentaje de inactividad forzada del canal 1 es igual al porcentaje de inactividad forzada del canal 2:

$$B = \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, 1, 0) \quad (2)$$

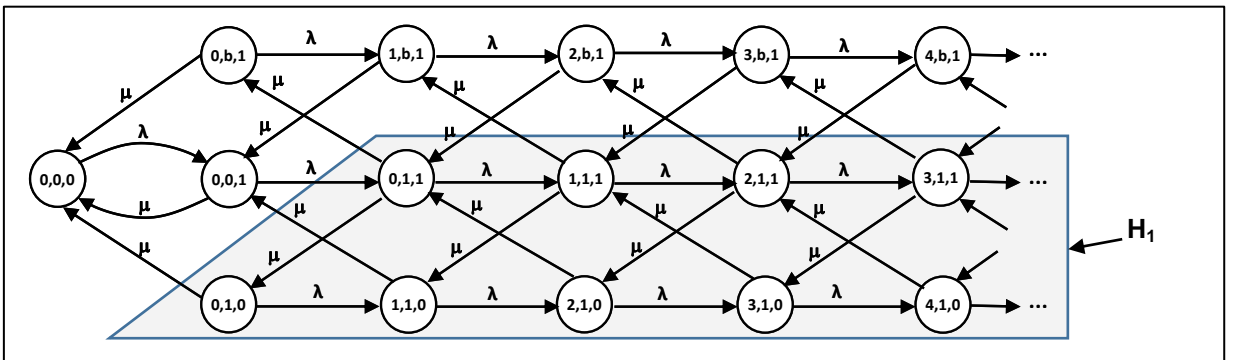
Llamaremos A al porcentaje de tiempo en el cual el sistema está en modalidad de actividad conjunta y es igual a la probabilidad de que el sistema se encuentre con ambos canales activamente ocupados. Esta modalidad se da para los estados resaltados en la fila central de la Figura 4 con excepción de los estados  $(0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .

$$A = \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, 1, 1) \quad (3)$$

El porcentaje de ocupación activa del canal 1, es decir, la probabilidad de que dicho canal esté trabajando es:

$$H_1 = \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, 1, 1) + \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, 1, 0) = A + B \quad (4)$$

$H_1$ , que está resaltado en la Figura 5, puede interpretarse también como el número promedio de clientes que se encuentra recibiendo el servicio en el canal 1.

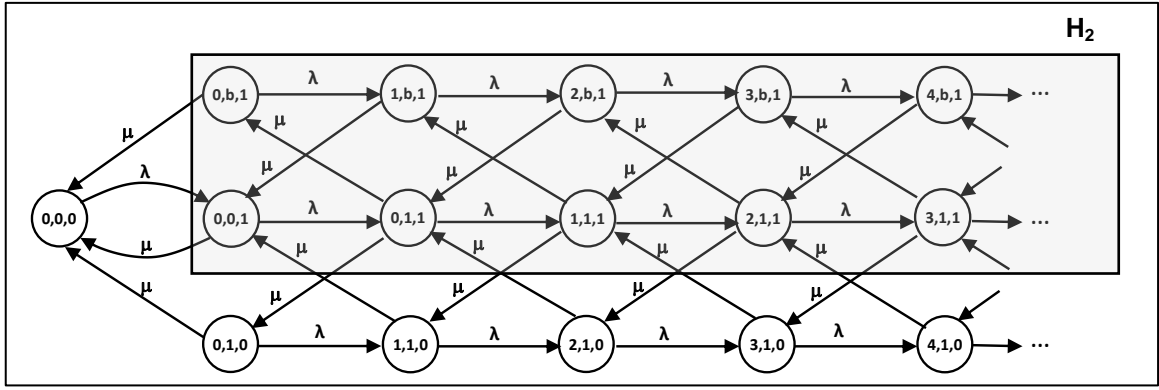


**Figura 5:**  $H_1$  indica la suma total de las probabilidades de que el canal 1 se encuentre prestando servicio.

Por su parte, el porcentaje de ocupación activa del canal 2, o también número promedio de clientes recibiendo atención en ese canal, será:

$$H_2 = \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, b, 1) + \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, 1, 1) + p(0, 0, 1) = B + A + p(0, 0, 1) \quad (5)$$

Este valor está resaltado en la Figura 6.



**Figura 6:**  $H_2$  es la suma de todas las probabilidades de los estados con una ocupación activa del canal 2.

Finalmente, considerando las ecuaciones (4) y (5), podemos definir el parámetro  $H$  que se puede interpretar idénticamente de tres modos:

- La probabilidad de que haya por lo menos un canal activo.
- La cantidad promedio de clientes recibiendo atención.
- El número promedio de canales siendo atendidos.

$$H = H_1 + H_2 = p(0,0,1) + 2A + 2B \quad (6)$$

La tasa esperada de egreso de clientes del canal 2, que ocurre en los estados  $(n_c, b, 1)$ ,  $(0, 0, 1)$  y  $(n_c, 1, 1)$ , es:

$$\bar{\mu}_2 = \mu \cdot H_2 = \mu \cdot (B + A + p(0,0,1)) \quad (7)$$

Por su parte, la tasa esperada de egresos del canal 1, correspondiente a los estados  $(n_c, b, 1)$  y  $(n_c, 1, 0)$ , y considerando la simetría entre  $(n_c, 1, 0)$  y  $(n_c, b, 1)$ , es:

$$\bar{\mu}_1 = 2 \mu B \quad (8)$$

Obsérvese que, de acuerdo a las hipótesis originales, la liberación del bloqueo produce el egreso del cliente del canal 2 que estaba atendándose y también la del cliente del canal 1 que estaba bloqueado. Sumando (7) y (8), obtendremos la tasa esperada de egreso de clientes.

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = \mu \cdot (B + A + p(0,0,1)) + 2 \cdot \mu \cdot B \\ \bar{\mu} &= \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = \mu \cdot (3 \cdot B + A + p(0,0,1)) \end{aligned} \quad (9)$$

Como el sistema está en régimen permanente, la tasa promedio de egresos debe ser igual a la tasa de servicios realizados. Obviamente, la tasa de servicios realizados es igual a la velocidad de atención de los canales multiplicada por el número promedio de canales activos ( $\mu \cdot H$ ). Luego,  $\bar{\mu} = \mu \cdot H$ .

Por tanto,

$$H = 3B + A + p(0,0,1) \quad (10)$$

De la comparación entre (6) y (10) surge que  $A=B$ . Esto significa que la probabilidad de que el sistema se encuentre en la modalidad  $(n_c, 1, 1)$  es también igual a  $B$ :

$$\sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, 1, 1) = B$$

Por lo tanto, la condición de colectividad exhaustiva de los estados será:

$$p(0,0,0) + p(0,0,1) + 3 \cdot B = 1 \quad (11)$$

La probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para comenzar su servicio es:

$$p(W_C = 0) = p(0,0,0) + p(0,0,1)$$

Por supuesto, el complemento es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar, que en virtud de (11) será:

$$p(W_C > 0) = 3 \cdot B$$

En condiciones de régimen permanente, la tasa de ingreso de clientes al sistema,  $\bar{\lambda}$ , debe ser igual a la tasa de egresos del mismo,  $\bar{\mu}$ :

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu}$$

Pero tal como se indicó más arriba, dado que no hay restricciones de capacidad ni abandonos:

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

Pero, teniendo en cuenta que  $\bar{\mu} = \mu \cdot H$ , tendremos que:

$$H = \rho$$

Observando la figura 3, se pueden consolidar las probabilidades de que el sistema se encuentre en el estado  $n$ , en función de los estados  $(n_c, n_1, n_2)$ :

$$\begin{aligned} p(0) &= p(0,0,0) \\ p(1) &= p(0,0,1) + p(0,1,0) \\ p(2) &= p(0,b,1) + p(0,1,1) + p(1,1,0) \\ p(3) &= p(1,b,1) + p(1,1,1) + p(2,1,0) \\ p(n) &= p(n_c-2, b, 1) + p(n_c-2,1,1) + p(n_c-1,1,0) \end{aligned}$$

Plantaremos a continuación las ecuaciones de estado de régimen permanente a partir de la resolución de la cadena markoviana de la Figura 3:

$$\begin{aligned} p(n_c, b, 1) &= p(n_c, b, 1) \quad \forall n_c \\ p(0,0,0) \cdot \lambda &= 2 \cdot p(0,b,1) \cdot \mu + p(0,0,1) \cdot \mu \\ p(0,b,1) \cdot (\lambda + \mu) &= p(0,1,1) \cdot \mu \\ p(n_c, b, 1) \cdot (\lambda + \mu) &= p(n_c - 1, b, 1) \cdot \lambda + p(n_c, 1, 1) \cdot \mu \quad \forall n_c > 0 \\ p(n_c, 1, 1) (\lambda + 2\mu) &= \lambda p(n_c - 1, 1, 1) + 2\mu p(n_c + 2, b, 1) \quad \forall n_c > 0 \end{aligned}$$

Resolviendo dichas ecuaciones se determinan las probabilidades de estado del sistema  $p(n_c, n_1, n_2)$  y las probabilidades consolidadas. Con todas ellas se calculan las variables características, a saber:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n_c=0}^{\infty} p(n_c, b, 1) \\ L &= \sum_0^n n \cdot p(n) \\ L_C &= L - H - B \\ H_1 &= 2 \cdot B \end{aligned}$$

Los tiempos promedio de espera en cola  $W_c$ , de permanencia en el sector de atención  $W_s$  y de permanencia en el sistema de un cliente en el sistema  $W$  se determinan por la aplicación de la ley de Little:

$$W_c = \frac{L_c}{\lambda}$$

$$W_s = \frac{H + B}{\lambda} = T_s + \frac{B}{\lambda}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

En la Tabla 1 se resumen los valores de algunas de estas variables haciendo variar el factor de tráfico  $\rho$  entre 0 y el máximo valor admisible que puede asumir en régimen permanente ( $4/3$ ), con incrementos de 0,05 puntos. Para valores intermedios de  $\rho$  se sugiere interpolar linealmente.

Es interesante comparar los valores obtenidos contra los que se tendrían con el sistema M/M/1. Para un valor de factor de tráfico bajo (por ejemplo,  $\rho = 0,3$ ), el número promedio de clientes dentro del sistema es de 0,3648 contra 0,4285, lo que significa una disminución de alrededor del 15%. Para valores de factor de tráfico alto, el beneficio es mucho más importante. Por ejemplo, para un  $\rho = 0,8$  la longitud promedio del sistema es 1,74 contra 4 que tendría un solo canal (reducción de más del 56%), mientras que para  $\rho = 0,9$  las longitudes promedios serían de 2,3645 contra 9 (decremento de más del 73%).

Puede observarse también que la ocupación del canal 2 ( $H_2$ ) es siempre mayor que la del primer canal ( $H_1$ ). A medida que el factor de tráfico aumenta, la diferencia porcentual del grado de ocupación entre los canales se va reduciendo hasta prácticamente igualarse cuando la situación se hace caótica ( $\rho = 1.3333$ ). En el Apéndice 1 pueden encontrarse ábacos con algunas variables de interés graficadas en función del factor de tráfico.

Si el sistema no tuviera capacidad de atención suficiente como para atender el requerimiento de la demanda del trabajo que se realiza en él, la longitud de la cola crecería indefinidamente. En esta situación de desequilibrio las probabilidades los estados  $(0,0,0)$  y  $(0,0,1)$  no se verificarían nunca y el sistema estaría en una permanente transición estados  $p(n_c, b, 1)$ ,  $p(n_c, 1, 1)$  y  $p(n_c, 1, 1)$  con  $n_c \gg 0$ , por lo que la ecuación (11) quedaría:

$$3 \cdot B = 1 \tag{12}$$

En consecuencia, la condición para que el sistema se encuentre en equilibrio es:

$$B < \frac{1}{3}$$

o también, observando la ecuación (10):

$$H = \rho < \frac{4}{3}$$

Esto significa que la velocidad promedio de atención de los canales debe ser:

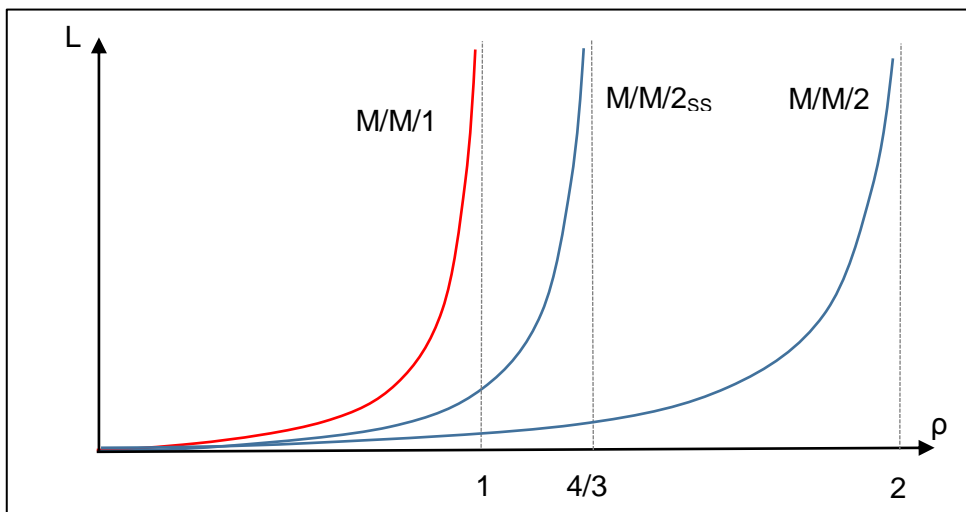
$$\mu > \frac{3}{4} \cdot \lambda \tag{13}$$



**Tabla 1:** Valores de las variables características del sistema M/M/2SS en función del factor de tráfico.

$\rho$	P(0,0,0)	P(0,0,1)	P(0,1,0)	P(0,B,1)	P(0,1,1)	H1	H2	H	L	Lc	B	3.B	p(esp)
0.00	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	0.9511	0.0454	0.0011	0.0011	0.0011	0.0023	0.0477	0.05	0.0513	0.0002	0.0011	0.0034	0.0034
0.10	0.9042	0.0831	0.0036	0.0036	0.0040	0.0084	0.0916	0.10	0.1057	0.0015	0.0042	0.0127	0.0127
0.15	0.8589	0.1146	0.0071	0.0071	0.0082	0.0177	0.1323	0.15	0.1636	0.0048	0.0089	0.0266	0.0266
0.20	0.8148	0.1407	0.0111	0.0111	0.0133	0.0296	0.1704	0.20	0.2257	0.0109	0.0148	0.0445	0.0445
0.25	0.7719	0.1623	0.0153	0.0153	0.0192	0.0438	0.2062	0.25	0.2925	0.0206	0.0219	0.0657	0.0657
0.30	0.7300	0.1799	0.0195	0.0195	0.0254	0.0600	0.2400	0.30	0.3648	0.0348	0.0300	0.0900	0.0900
0.35	0.6890	0.1939	0.0236	0.0236	0.0319	0.0780	0.2720	0.35	0.4435	0.0545	0.0390	0.1170	0.1170
0.40	0.6488	0.2047	0.0274	0.0274	0.0384	0.0977	0.3023	0.40	0.5296	0.0807	0.0488	0.1465	0.1465
0.45	0.6094	0.2124	0.0309	0.0309	0.0448	0.1188	0.3312	0.45	0.6243	0.1149	0.0594	0.1782	0.1782
0.50	0.5707	0.2173	0.0340	0.0340	0.0510	0.1413	0.3587	0.50	0.7293	0.1587	0.0707	0.2120	0.2120
0.55	0.5326	0.2196	0.0366	0.0366	0.0568	0.1652	0.3848	0.55	0.8465	0.2140	0.0826	0.2478	0.2478
0.60	0.4951	0.2195	0.0388	0.0388	0.0620	0.1902	0.4098	0.60	0.9785	0.2834	0.0951	0.2854	0.2854
0.65	0.4582	0.2171	0.0404	0.0404	0.0666	0.2164	0.4336	0.65	1.1284	0.3702	0.1082	0.3247	0.3247
0.70	0.4219	0.2125	0.0414	0.0414	0.0704	0.2437	0.4563	0.70	1.3005	0.4786	0.1219	0.3656	0.3656
0.75	0.3860	0.2058	0.0418	0.0418	0.0732	0.2721	0.4779	0.75	1.5005	0.6145	0.1360	0.4081	0.4081
0.80	0.3507	0.1972	0.0417	0.0417	0.0750	0.3014	0.4986	0.80	1.7363	0.7856	0.1507	0.4521	0.4521
0.85	0.3158	0.1867	0.0409	0.0409	0.0757	0.3317	0.5183	0.85	2.0189	1.0030	0.1658	0.4975	0.4975
0.90	0.2814	0.1743	0.0395	0.0395	0.0750	0.3628	0.5372	0.90	2.3645	1.2831	0.1814	0.5443	0.5443
0.95	0.2475	0.1602	0.0374	0.0374	0.0730	0.3949	0.5551	0.95	2.7978	1.6504	0.1975	0.5924	0.5924
1.00	0.2139	0.1444	0.0347	0.0347	0.0695	0.4278	0.5722	1.00	3.3583	2.1444	0.2139	0.6417	0.6417
1.05	0.1808	0.1270	0.0314	0.0314	0.0644	0.4615	0.5885	1.05	4.1132	2.8325	0.2308	0.6923	0.6923
1.10	0.1480	0.1080	0.0274	0.0274	0.0575	0.4960	0.6040	1.10	5.1876	3.8396	0.2480	0.7440	0.7440
1.15	0.1156	0.0875	0.0227	0.0227	0.0489	0.5313	0.6188	1.15	6.8427	5.4269	0.2657	0.7970	0.7968
1.20	0.0837	0.0656	0.0174	0.0174	0.0383	0.5669	0.6331	1.20	9.7323	8.2479	0.2838	0.8513	0.8508
1.25	0.0522	0.0422	0.0115	0.0115	0.0258	0.6010	0.6490	1.25	15.8994	14.3454	0.3024	0.9071	0.9056
1.30	0.0227	0.0190	0.0053	0.0053	0.0121	0.6387	0.6613	1.30	31.847	30.227	0.3186	0.9558	0.9584
4/3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6667	0.6667	4/3	$\infty$	$\infty$	0.3333	1.0000	1.0000

En la Figura 7 se muestra esquemáticamente la variación del número promedio de clientes en el sistema (L) en función del factor de tráfico para los sistemas M/M/1, M/M/2<sub>SS</sub>, y M/M/2, en donde se puede observar los valores límites de factor de tráfico para cada caso.



**Figura 7:** Comparación gráfica de la longitud promedio de clientes para los sistemas M/M/1, M/M/2<sub>SS</sub> y M/M/2 en función del factor de tráfico.

### 3. OPTIMIZACIÓN DE COSTOS

Si se genera un lucro cesante por cada cliente que se encuentre dentro del sistema se puede optimizar, en base a costos, la conveniencia de utilizar el sistema con un solo canal (M/M/1) o de abrir un segundo canal en serie (M/M/2<sub>SS</sub>) cuando, por supuesto, no sea posible disponerlo en paralelo (M/M/2) y siempre que se verifique que  $\rho < 1$ . Llamando:

$C_e$ : costo de permanencia de un cliente dentro del sistema (lucro cesante)  $\left( \frac{\$}{cl \cdot t} \right)$

$C_c$ : costo del canal  $\left( \frac{\$}{canal \cdot t} \right)$

En consecuencia, para un  $\rho$  determinado habrá que comparar los costos de la disposición de un solo canal:

$$c_e \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + c_c$$

contra los correspondientes a la de dos canales en serie:

$$c_e \cdot L + 2 \cdot c_c$$

y seleccionar aquella cuyo costo sea menor.

### 4. CONCLUSIONES

La disposición en serie de procesadores sobre la vía de circulación de los clientes (denominada semiserie) en una instalación de colas es una buena opción para resolver problemas de tráfico cuando no es factible un arreglo en paralelo de los canales. La eficiencia del sistema semiserie, en comparación con el de un solo canal, mejora en la medida que se incrementa el factor de tráfico.

La disposición semiserie es la única opción disponible cuando la velocidad promedio de atención se aproxima, iguala o supera a la tasa promedio de arribo de clientes al sistema.

El grado de ocupación del canal 2 (ubicado más adelante) es siempre mayor que el que se encuentra en primer lugar. La diferencia en términos porcentuales está dada por la probabilidad de que en el sistema haya un solo cliente ubicado en el canal 2, es decir:

$$H_2 - H_1 = p(0,0,1)$$

Esta diferencia de ocupación se va reduciendo a medida que se incrementa el factor de tráfico.

La formulación cuantitativa de los sistemas infinitos (sin impaciencia y sin restricciones de capacidad) es muy compleja. Se presentan aquí tablas y ábacos para resolver muy fácilmente un sistema de dos canales en serie.

Los sistemas semiserie son comunes en cadenas de montaje, como así también en muchos otros sistemas del mundo real. El presente trabajo contribuye a facilitar la determinación cuantitativa de estas instalaciones, poco estudiadas en la literatura científica.

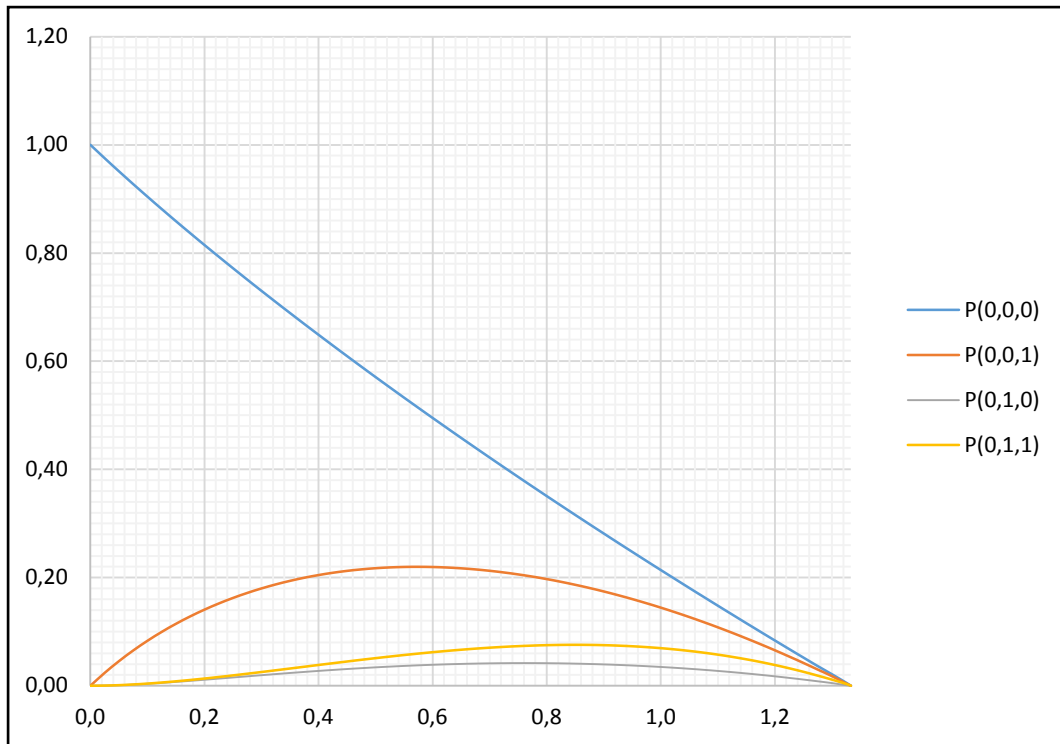
### 5. REFERENCIAS

[1] Miranda, Miguel; Carlevari, Ricardo; Rocca, Stella Maris; Massanes, Pilar; Fornes, Lucas; Perez Otero, Diógenes. (2015). "SISTEMAS DE PEAJE EN AUTOPISTAS. HABILITACIÓN DE DOBLE CABINA EN LINEAS DE PAGO". XXVIII ENDIO – XXVI EPIO – RED M VIII. Bahía Blanca, Argentina.

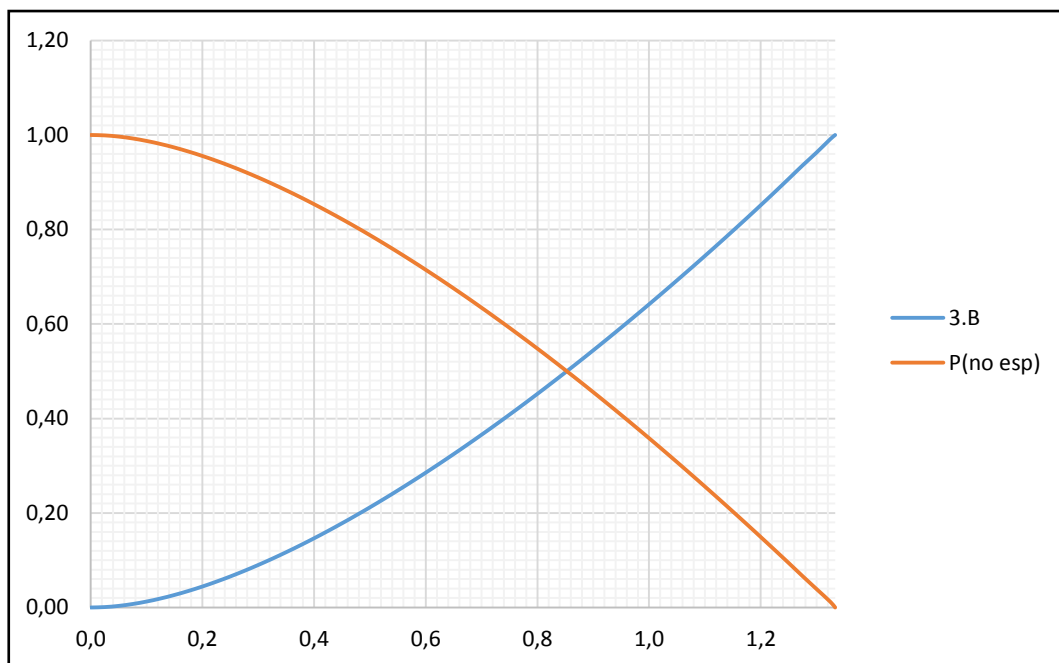
[2] Miranda, Miguel. (2013). *Teoría de Colas*. Buenos Aires. 2ª edición. Editorial: EDUCA. Buenos Aires.

## Apéndice I: Ábacos

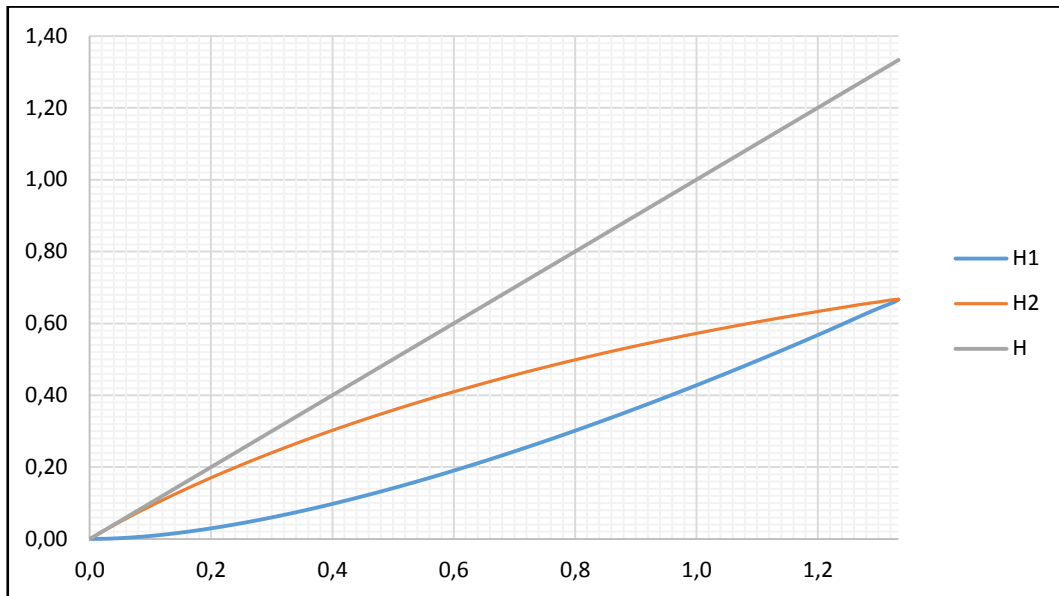
A continuación se presentan, en forma de ábacos, las variaciones de las principales variables del modelo analizado en función del factor de tráfico  $p$ .



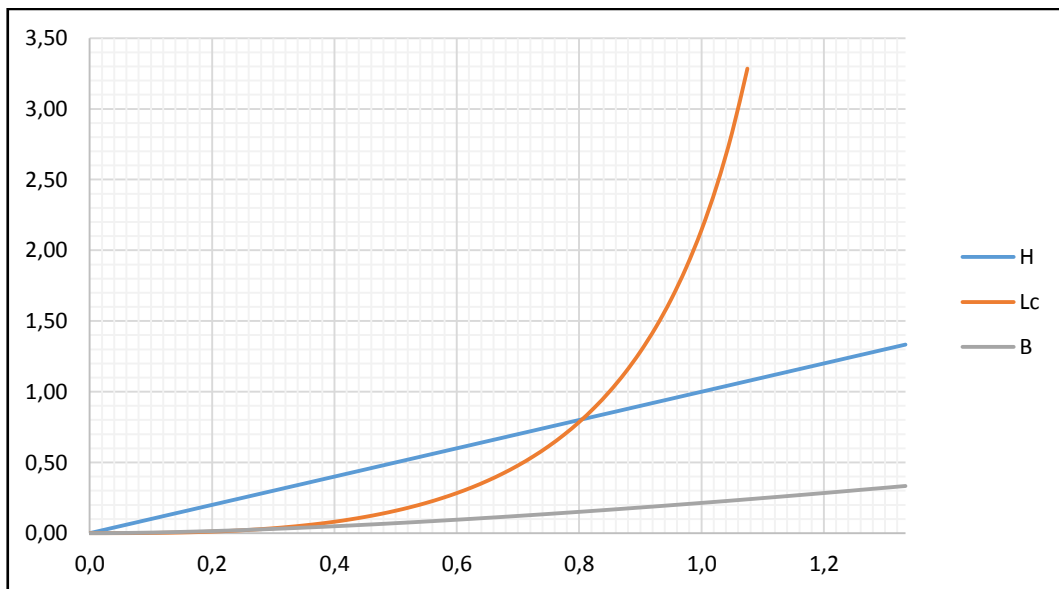
**Figura A1:** Variación de las probabilidades de algunos estados de interés en espera en función del factor de tráfico. Obsérvese que, si  $p$  tiende al valor límite de equilibrio de  $4/3$ , la probabilidad de ingresar al sistema sin espera tiende a 0.



**Figura A2:** Variación de la probabilidad de ingreso al sistema sin tener que esperar,  $P(\text{no esp}) = P(0,0,0) + P(0,0,1)$ , en función del factor de tráfico. Obsérvese que, tal como se dedujo en la expresión (12), si la probabilidad de no esperar es baja,  $3B$  tiende a 1.



**Figura A3:** Variación de todos los porcentajes de ocupación en función del factor de tráfico. Se cumple, tal como se dedujo, que  $H=\rho$ . Obsérvese y contrastese con la Figura A1 que, tal como se desprende de las expresiones (4) y (5),  $H_2 - H_1 = P(0,0,1)$



**Figura A4:** Variación de  $L_c$ ,  $H$  y  $B$  en función del factor de tráfico. Si  $\rho$  tiende al valor límite de  $4/3$ ,  $L_c$  tiende a infinito.