Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Parte VIII

Integral de Dirichlet

Ing. Ramón Abascal

Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas
y Teoría de los Circuitos II
en la UTN, Facultad Regional Avellaneda
Buenos Aires, Argentina

2006

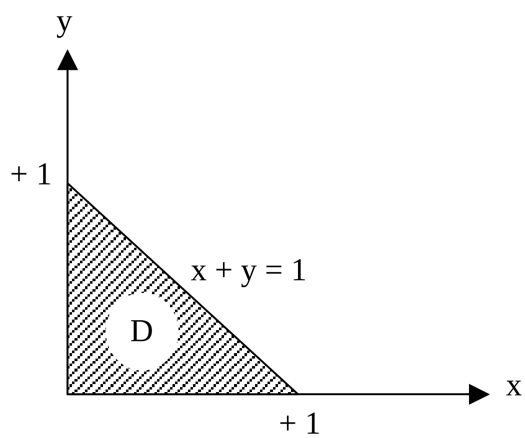
8 - Ecuación de Dirichlet.

8.1 - Momento de una superficie respecto de los ejes de coordenadas:

Consideremos el dominio, D, definido por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

que está representado por el triángulo rayado en la figura siguiente:



Se trata de calcular el momento de un cierto orden (En este caso, P y Q) de la superficie de un dominio D, respecto de los ejes x e y. Dicho momento está definido por la ecuación:

$$M = \iint_D x^P \cdot y^Q \, dx \cdot dy = \int_0^1 x^P dx \int_0^{1-x} y^Q \, dy \qquad (8.1)$$

Resolviendo la segunda de estas integrales, encontramos:

$$M = \int_0^1 x^P dx \left(\frac{y^{Q+1}}{Q+1} \right)_0^{1-x} = \frac{1}{Q+1} \int_0^1 x^P (1-x)^{Q+1} \, dx$$

Si recordamos la función Beta, o Euleriana de primera especie (Ver sección 1.13):

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \, dt$$

al aplicarla en este caso podemos hacer:

$$M = \frac{1}{Q+1} \, B(P+1, \; Q+2)$$

y, de acuerdo con la (1.14), que relaciona las funciones B y Γ entre sí:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

podemos expresar M como:

$$M = \frac{1}{Q+1} \quad B(P+1, \; Q+2) = \frac{1}{Q+1} \; \frac{\Gamma(P+1) \cdot \Gamma(Q+2)}{\Gamma(P+Q+3)}$$

Recordando la relación que existe entre dos funciones Γ cuyos argumentos son correlativos:

$$\Gamma(Q+2) = (Q+1) \cdot \Gamma(Q+1)$$

si reemplazamos y simplificamos Q + 1 en numerador y denominador, encontramos finalmente que el momento de la superficie rayada respecto de los ejes se puede expresar mediante la fórmula siguiente:

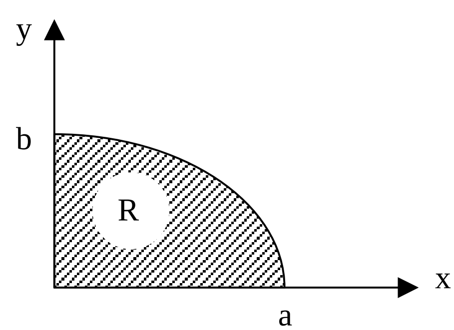
$$M = \frac{\Gamma(P+1) \cdot \Gamma(Q+1)}{\Gamma(P+Q+3)} \tag{8.2}$$

8.2 - Integral o Ecuación de Dirichlet:

En este apartado vamos a referirnos a una ecuación estrechamente relacionada con la anterior, y que se conoce como Integral de Dirichlet.

Consideremos un recinto R definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^A + \left(\dfrac{y}{b}\right)^B \leq 1 \end{cases}$$



Esta ecuación tiene como representación en el plano un sector ubicado en el primer cuadrante, como se ve en la figura adjunta.

En función de los valores de a, A, b y B, dicho sector puede ser un cuarto de elipse[(1)], un cuarto de círculo, etc. e incluso puede, eventualmente, englobar al triángulo del caso anterior.

En todos los casos se verifica que si

---

(1) En cuyo caso, A = B = 2.

$$x = 0\,, \qquad \text{entonces} \qquad 0 \leq y \leq b$$

y si $\quad y = 0\,, \qquad$ entonces $\qquad 0 \leq x \leq a$

Por su parte, la ecuación de la curva límite superior del recinto es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{A} + \left(\frac{y}{b}\right)^{B} = 1 \tag{8.3}$$

Calcularemos, como en el caso anterior, el momento de la superficie R respecto de los ejes x e y:

$$M = \iint_R x^P . y^Q \, d x . d y \tag{8.4}$$

En primer término expresaremos la variable "y" en función de "x". Para ello, despejamos "y" en la (8.3):

$$\frac{y}{b} = \left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{A}\right\}^{1/B}$$

$$y = b\left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{A}\right\}^{1/B} \tag{8.5}$$

La integral de superficie que aparece en la ecuación (8.4) puede expresarse ahora como una integral doble, cuyos límites son:

Para la primera integral, a lo largo del eje x (Véase la figura del recinto), "0" y "a". Y para la segunda, "0" y la curva límite, cuya ecuación está dada por la (8.5). Es decir:

$$M = \iint_R x^P . y^Q \, d x . d y = \int_0^a x^P d x \int_0^{b\left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{A}\right\}^{1/B}} y^Q \, d y \tag{8.6}$$

Para simplificar, vamos a llamar "v" al término encerrado entre llaves:

$$v = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{A}$$

De donde: $\qquad y = b . v^{1/B}$

y $\qquad v = \left(\frac{y}{b}\right)^{B}$

Haremos, también:

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^{A} \qquad \therefore \qquad v = 1 - u, \qquad y \qquad u + v = 1 \tag{8.7}$$

De aquí:

$$x = a \cdot u^{1/A} \qquad \therefore \qquad dx = \frac{a}{A}\, u^{(1/A)-1}\, du = a \cdot A^{-1} \cdot u^{(1-A)/A}\, du$$

$$y = b \cdot v^{1/B} \qquad \therefore \qquad dy = \frac{b}{B}\, v^{(1/B)-1}\, dv = b \cdot B^{-1} \cdot v^{(1-B)/B}\, dv$$

Ya vimos que si $y = 0$, entonces $x = a$. Además, a partir de las ecuaciones anteriores se verifica que si

$$x = a, \qquad \therefore \qquad u = 1.$$

En estas condiciones, la integral doble (8.6) puede expresarse así:

$$M = \iint_R = \int_0^1 a^P\, u^{P/A}\, a \cdot A^{-1} \cdot u^{(1-A)/A}\, du \ . \int_0^{1-u} b^Q\, v^{Q/B}\, b \cdot B^{-1} \cdot v^{(1-B)/B}\, dv$$

Operando en estas integrales, se pueden simplificar como sigue:

$$M = \iint_R = a^{P+1} \cdot b^{Q+1}\, A^{-1} \cdot B^{-1} \int_0^1 u^{[(P+1)/A]-1}\, du \ . \int_0^{1-u} v^{[(Q+1)/B]-1}\, dv$$

Obsérvese la semejanza de esta ecuación con la (8.1) con la salvedad que, en este caso, los exponentes en los integrandos, en lugar de P y Q son, respectivamente:

$$\frac{P+1}{A} - 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{Q+1}{B} - 1$$

Esto nos autoriza a aplicar el mismo resultado (8.2) que obtuvimos en la sección anterior. Que, con la modificación indicada aquí arriba resulta:

$$M = \iint_R = \frac{a^{P+1} \cdot b^{Q+1}}{A\ B} \ \frac{\Gamma\left(\dfrac{P+1}{A}\right)\ \Gamma\left(\dfrac{Q+1}{B}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{P+1}{A} + \dfrac{Q+1}{B} + 1\right)}$$

La ecuación de Dirichlet puede generalizarse para el caso de tres variables, en cuyo caso, para el dominio elíptico en el espacio de tres dimensiones es

$$\left(\frac{x}{a}\right)^A + \left(\frac{y}{b}\right)^B + \left(\frac{z}{c}\right)^C = 1$$

y cuyo momento respecto de los ejes viene expresado por la ecuación:

$$M = \iiint_V x^P \,.\, y^Q . \,z^R \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$$

se obtiene

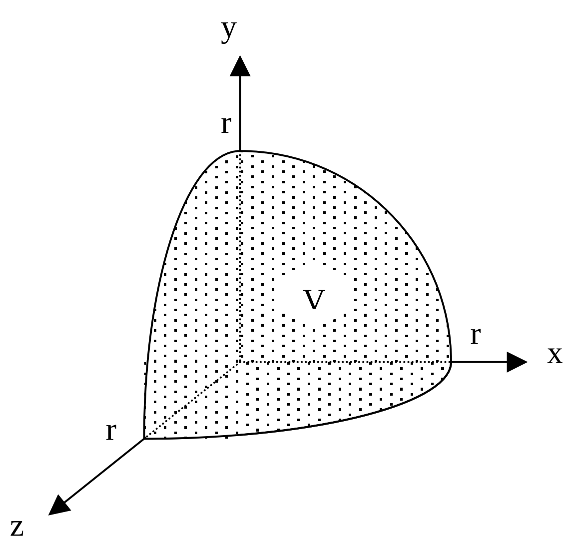
$$M = \iiint_V = \frac{a^{P+1} \,.\, b^{Q+1} \;\, c^{R+1}}{A\ B\ C} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{P+1}{A}\right)\Gamma\left(\frac{Q+1}{B}\right)\Gamma\left(\frac{R+1}{C}\right)}{\Gamma\left(\frac{P+1}{A} + \frac{Q+1}{B} + \frac{R+1}{C} + 1\right)}$$

Esta integral se conoce como *Integral de Dirichlet.*

8.3 - Volumen de un cuerpo:

Como aplicación, la ecuación de Dirichlet puede emplearse para calcular el área o el volumen de ciertas figuras o cuerpos geométricos.

Sea que, por ejemplo, queremos calcular el volumen de una esfera. Para esto, partimos del volumen correspondiente a un octante, y luego lo multiplicamos por 8:



Para calcular el volumen, debemos hacer

$$P = Q = R = 0$$

La ecuación del octante de esferoide responde a la ecuación:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^A + \left(\frac{y}{b}\right)^B + \left(\frac{z}{c}\right)^C = 1$$

El volumen del octante de esferoide está dado por la ecuación de volumen (integral triple) siguiente:

$$V = \iiint_V x\ y\ z\ \ dx\ dy\ dz = \frac{a\ b\ c}{A\ B\ C}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{A}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{B}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{C}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + 1\right)}$$

Si queremos calcular el volumen de la esfera, puesto que la ecuación de ésta es:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1$$

se han de cumplir además las relaciones siguientes:

$$a = b = c = r$$

y $$A = B = C = 2$$

Finalmente, el volumen V_e de la esfera será:

$$V_e = 8\ V$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$V_e = 8\ \frac{r^3}{2^3}\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{r^3\ 2\ \sqrt{\pi}^{\,3}}{\frac{3}{2}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$V_e = \frac{2\ r^3 \sqrt{\pi}^{\,3}}{\frac{3\ \sqrt{\pi}}{2}} = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3$$

Aplicaciones Matlab

- *Volumen de una esfera de radio R:*

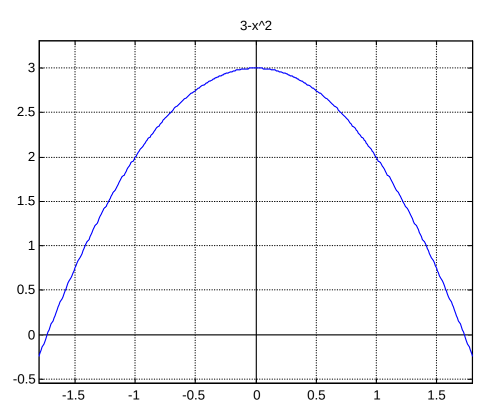
```
» % Volumen de la esfera
» syms  R
» A=2, B=2, C=2;
» Ve = 8*R^3/2^3*(gamma(.5))^3/gamma(1/A+1/B+1/C+1)
Ve =  1567344993225499/374176054803257 *R^3
» k = 1567344993225499/374176054803257
k =    4.1888
» Ve = k*R^3
Ve = 4/3*pi*R^3
```

- *Volumen de un esferoide:*

```
» % Calcular el volumen de un esferoide de semiejes:
» a = 4, b = 3, c = 2
a =     4
b =     3
c =     2
» A=2,  B=2,  C=2
A =     2
B =     2
C =     2
» V = 8*(a*b*c)*gamma(1/A)^3 / ((A*B*C)*gamma(1/A+1/B+1/C+1))
V =  100.5310
```

- *Volumen generado por la rotación de una superficie:*

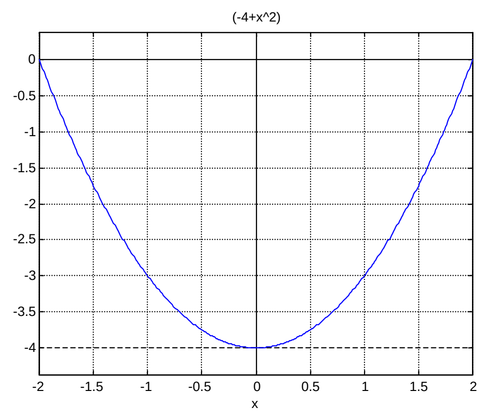
```
» % Sea la parábola y = 3 - x^2, de eje coincidente con y,
» % Que rota alrededor de dicho eje, y que está limitada por el eje x.
» % Se trata de determinar el volumen del cuerpo generado por dicha rotación.
» % V = integral (y*x^2*dx), entre 0 y raíz de 3:
» syms x y
» % gráfica de la función y (x):
» y = 3 - x^2
y =  3 - x^2
» ezplot (y, -1.8,1.8)
» grid
```



```
» % Cálculo del volumen del cuerpo de revolución:
» V = int (y*x*pi,0,3^0.5)
V =  9/4*pi
```

- *Momento de inercia de una superficie respecto de uno de los ejes de coordenadas:*

```
» % Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por
» % La parábola y = x^2, y la recta y = 4, con respecto al eje y:
» % Suponer que la densidad es igual a 1.
» % La ecuación es: M = int (y*x^2*dx), entre -2 y 2:
» syms x  y
» y = x^2
y =  x^2
» % El área indicada es:
» A = 4^2 - int (y,x,-2,2)
A =  32/3
» % El Momento de Inercia de la superficie A respecto del eje y, por razones
» % de simetría, es igual al de la figura de ecuación y = - (4 - x^2). Ver el gráfico:
» ezplot ('(- 4 + x^2)', -2, 2)
» grid
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
```




```
» % Por lo tanto, el momento buscado es:
» M = int ('(- 4 + x^2)*x^2',- 2, 2)
M =   -128/15
```