



# EL ANÁLISIS MATEMÁTICO QUE NOS ENSEÑARON NUESTROS MAESTROS

Guías de Estudio y Práctica

# GEP

Ing. Jorge J. L. Ferrante

Cátedra Análisis Matemático I  
Departamento de Ciencias Básicas  
Facultad Regional General Pacheco

# 2009

---

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - edUTecNe

<http://www.edutecne.utn.edu.ar>

correo-e: [edutecne@rec.utn.edu.ar](mailto:edutecne@rec.utn.edu.ar)

## PROLOGO

Definitivamente resulta muy difícil encasillar este trabajo bajo un determinado nombre de obra escrita.

Por cierto, no es un libro. Sin embargo contiene abundantes aspectos teóricos de Análisis Matemático tal como se lo enseñaba para ingeniería hace tantos años atrás que es mejor no recordarlo y, mucho menos, confesarlo.

En él escasean -y mucho- los teoremas. El autor está convencido que la materia puede tratarse como corresponde a una escuela de ingeniería sin hilvanar un rosario de teoremas, formando una espesa e inútil cortina que tape la enorme e irremplazable eficacia del análisis matemático para modelar y resolver -cuando corresponda - problemas de las ciencias fácticas y de la ingeniería, además de afilar la mente para alcanzar la indispensable independencia intelectual necesaria para el ejercicio de la profesión de ingeniero.

Si bien contiene multitud de ejercicios a resolver, no es una guía de trabajos prácticos porque si lo fuese no tendría incorporados los aspectos teóricos mencionados.

Tiene multitud de ejercicios porque en aquella lejana época, con sabiduría, se sabía que, de la misma manera que haciendo sistemáticamente ejercicios físicos se adquiere el estado atlético necesario para algún deporte, haciendo muchos, pero muchos ejercicios de análisis matemático, la mente, el ojo y la mano metabolizan análisis matemático, el idioma de la ingeniería.

La inmensa mayoría de los ejercicios ha sido tomada de un incunable cuya tapa debidamente copiada por medios electrónicos, figura anexa a este prólogo. Fue mi Guía de Trabajos Prácticos cuando cursaba la materia.

Por cierto que en la actualidad, basta con oprimir como corresponde una serie de teclas y ante la presión del dedo sobre aquella que diga "hágalo" con suerte de principiante se tendrá algo cuya interpretación será otra historia. A veces altamente aducativa, otras, frustrante.

Por supuesto que hay que usar el botón "hágalo" por la sencilla razón que el mundo así trabaja, pero ¡cuidado! toda servidumbre es mala, pero si lo es hacia una máquina, es mucho peor.

Además de no ser un libro ni una guía de trabajos prácticos incorpora, luego de horas de "navegación" en el espacio virtual y muchas lecturas como "A History of Mathematics" de C. Boyer y "Les Grands Mathematiciens" e "Historia de las Matemáticas" de E. T. Bell, aspectos que hacen directamente a la historia del pensamiento matemático. Esto no es un capricho ni una innecesaria demostración de conocimientos. ¿Por qué están entonces?

Por una sencilla y elemental razón. Cuando se desarrolla un curso de análisis matemático aparecen nombres, algunos en forma reiterativa, otros una única vez, pero todos ellos aparentan estar en un mismo plano histórico en el laborioso desarrollo del análisis. Arquímedes, Cauchy, Fermat, Barrow, Newton, Riemann, Leibniz, L'Hopital, Dedekind, Cantor, Galileo, Picard y tantos otros aparecen y desaparecen en épocas indefinidas o peor, como nombres que se ha asignado a

ciertas fórmulas para diferenciarlas entre sí, sin llegar a visualizar siquiera la época histórica en la que actuaron y cuales fueron sus aportes, sus dificultades, sus errores.

Tal vez, poder seguir de esta manera el desarrollo del pensamiento matemático transmita el innegable hecho que la matemática es una ciencia viva que goza de una robusta vitalidad y que, cada vez más, brinda a la ingeniería herramientas más poderosas y sofisticadas.

No es un libro de historia de la matemática, no puede ni pretende serlo. Simplemente marca puntos importantes en su desarrollo para ubicar al alumno en el tiempo y en el desarrollo del pensamiento matemático.

Por todo lo que contiene y por todo lo que no contiene, señala a quienes, semana a semana, dan clases de Análisis Matemático el camino que deben seguir en su exposición, evitando alejamientos no deseados; incursiones en temas de poco significado para ingeniería o, tal vez, considerados de poca importancia.

No está atado a discutibles concepciones pedagógicas supuestamente innovadoras en boga para la enseñanza del análisis matemático. No lo pretende ni es su objetivo.

Tampoco está atado a algún soporte lógico que permita al docente obtener y mostrar resultados como si estos emanasen de una caja mágica.

Las cajas mágicas no existen.

Lo que existen son cerebros y dedos que responden al primero y que, por ese motivo saben donde y cómo actuar para obtener un resultado, para que el cerebro y

tal vez el corazón, se deleiten cuando se cierra existosamente una apreciación previa o se rechaza por absurdo un resultado motivado por errores operativos, evidentes u ocultos; desconocimiento o fallas funcionales de arrastre.

Rescata y motiva el tesonero esfuerzo personal, bajo guía y tutela docente, como método irremplazable para alcanzar los conocimientos, habilidades y aptitudes necesarias a quien se inicia en el apasionante estudio de ingeniería.

A trabajar.

Jorge J. L. Ferrante

Centro Estudiantes de Ingeniería  
La Línea Recta

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I

TRABAJO PRACTICO



Buenos Aires, Sesenta y un

## A MODO DE AUTORIZADA OPINIÓN

### NORTE DE PROBLEMAS

#### Parte del prólogo

"En toda ocasión hemos preconizado la virtud didáctica de los países sajones y germánicos, en la que radica su evidente superioridad técnica: es la preponderancia de la realización práctica sobre la exposición oral en todos los ciclos de sus enseñanzas. Se aprende a conciencia lo que se hace y repite hasta penetrar en la subconsciencia; se asimila y se aprende menos bien lo que se ve a otro hacer muchas veces; y no se aprende ni bien ni mal lo que se oye decir cómo se haría; porque aún suponiendo imaginación bastante sensible para captar de oídas el supuesto método, la fugaz impresión se volatiliza pronto; y al proponerse por sí mismo la realización, el fracaso es inevitable. Se explica así el escaso fruto de nuestras enseñanzas, tanto menor cuanto mayor sea la cantidad de ciencia exhibida ante los pasivos oyentes."

Julio Rey Pastor

**ANALISIS MATEMATICO I**  
**Ciclo Lectivo 2009**

**Guia de estudio y práctica 01**

**CONJUNTOS NUMERICOS**

**Ing. Jorge J. L. Ferrante**

**I CONSOLIDACION DE CONCEPTOS.**

**Bases formales de razonamiento. Teoría de conjuntos. Aplicación a los elementos del análisis matemático. Números. Conjuntos numéricos.**

Se recomienda seguir el capítulo "RACCONTO SOBRE CONJUNTOS" del texto en versión electrónica (y en papel) del Ing. ROJAS LAGARDE, ALFREDO, y de DR CANZIAN, ADRIAN, ubicable en [www.edutecne.utn.edu.ar](http://www.edutecne.utn.edu.ar), libros electrónicos FUNDAMENTOS DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA.

Los números naturales  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . La necesidad de contar: por cada cabra que tengo pongo una piedrita (Calculus) Tengo tantas cabras como piedras (calculus) tiene el montón.

Mi ejército tiene tantos guerreros como piedras tiene este otro montón. Costó mucho entender que había algo que caracterizaba los montones con independencia de su naturaleza: el número. Todavía hay pueblos que llaman de distinta manera al número cuatro cuando sirve para identificar cantidad de chanchos o cantidad de golondrinas.

**Ordinales:** Real Academia "el que expresa ideas de orden o sucesión: primero, segundo, tercero, etc."

**Cardinales:** Real Academia "cada uno de los enteros en abstracto" Ejemplo: si todos los alumnos vienen con gorro de lana, el cardinal de alumnos es igual al cardinal de los gorros de lana.  $\# \text{alumnos} = \# \text{gorros de lana}$ . No interesa el orden

Paradoja de Galileo en sus Diálogos sobre un Nueva Ciencia. Groseramente puede expresarse así:



El conjunto  $N$  tiene infinitos elementos. Llámese a este cardinal  $\aleph_0$

El conjunto formado por los cuadrados de los elementos de  $N$  (los números naturales) tiene tantos elementos como elementos tiene  $N$ , es decir tiene cardinal  $\aleph_0$ .

Entonces, los elementos de  $N$  que NO son cuadrados perfectos, ¿cuántos son?. Respuesta  $\aleph_0$

Conclusión: en un conjunto infinito, el todo y una parte del todo pueden tener el mismo cardinal.

Peano, Giuseppe (1858 - 1932) define axiomáticamente los números naturales de la siguiente forma

- El uno es un número natural.
- El sucesor inmediato de un número también es un número.
- Uno no es el sucesor inmediato de ningún número.
- Dos números distintos no tienen el mismo sucesor inmediato
- Toda propiedad perteneciente a 1 y al sucesor inmediato de todo número que también tenga esa propiedad pertenece a todos los números

El quinto axioma es nada menos que el denominado **Principio de Inducción Completa**, uno de los instrumentos de demostración más poderosos de la matemática (y más difíciles de entender y aplicar). En general se dice: la propiedad  $p$  se cumple para  $n = 1$ ; supuesto que se cumple para un  $n_1$  arbitrario, se puede demostrar que se cumple para el sucesor de  $n_1$ , entonces,  $p$  es verdadera para todo el conjunto.

Año 1202, autor Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, texto *Liber Abaci* (el libro del ábaco) escribe *quod arabice zephirum appellatur* ¡El cero entra en la cultura occidental! Pasaron varios siglos hasta que se lo aceptó, pero gracias a él se puede escribir  $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

## Los enteros $Z$

Debo seis becerros al jefe de la aldea vecina y me faltan cincuenta guerreros para completar el ala izquierda de mi formación de batalla. Los enteros  $Z$ .  $Z = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, \underline{0}, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Operaciones

## Los racionales Q

Problema de la medida. Marco Tulio, ingeniero romano recibe aterrado esta orden del Emperador de turno: quiero una pista de carreras de cincuenta codos y medio. ¿Cómo se mide medio codo? Claro, con la mitad del codo (codo; RAE Medida lineal, que se tomó de la distancia que media desde el **codo** a la extremidad de la mano). Hacía falta una fracción. Una fracción es un cociente y un cociente es una razón → Números racionales. Conjunto de los números racionales Q. Numerabilidad de los números racionales Q. Es decir plantear la posibilidad de establecer la correspondencia entre los elementos de N y los elementos de Q

|               |               |               |               |     |               |     |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|-----|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | ... | $\frac{1}{n}$ | ... |
| $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | ... | $\frac{2}{n}$ | ... |
| $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | ... | $\frac{3}{n}$ | ... |
| $\frac{4}{1}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{4}$ | ... | $\frac{4}{n}$ | ... |
| ...           | ...           | ...           | ...           | ... | ...           | ... |
| $\frac{n}{1}$ | $\frac{n}{2}$ | $\frac{n}{3}$ | $\frac{n}{4}$ | ... | $\frac{n}{n}$ | ... |
| ...           | ...           | ...           | ...           | ... | ...           | ... |

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 6   | 7   | 15  | 16  | ... |
| 3   | 5   | 8   | 14  | 17  | ... | ... |
| 4   | 9   | 13  | 18  | ... | ... | ... |
| 10  | 12  | ... | ... | ... | ... | ... |
| 11  | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

## Los irracionales

Malditos números que no se pueden expresar como razón entre otros dos por eso son no razones, es decir son irracionales. Existencia de números irracionales. Ejemplo, raíz cuadrada de dos.

## Los reales R

Conjunto  $R$  de los números reales. La recta real. Representación. El eje real.

No numerabilidad de  $R$ .

Se supone la numerabilidad de  $R$ . Entonces es posible poner en correspondencia con cada número natural  $n \in N$  un real  $x \in R$ . Sea entonces la siguiente correspondencia

| $n \in N$ | $x \in R$                       |
|-----------|---------------------------------|
| 1         | $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6...a_k...$ |
| 2         | $0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6...b_k...$ |
| 3         | $0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6...c_k...$ |
| 4         | $0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6...d_k...$ |
| 5         | $0.e_1e_2e_3e_4e_5e_6...e_k...$ |
| ...       | .....                           |
| $p$       | $0.n_1n_2n_3n_4n_5n_6...n_k...$ |
| ...       | .....                           |

Donde  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, \dots, n_i$  son dígitos del sistema decimal, es decir elementos del conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Elíjase  $a \neq a_1, a \neq 0$  y  $a \neq 9$  (estos dos últimos para evitar  $0.99999... = 1.0000000...$ ); elijase  $b \neq b_2, b \neq 0$  y  $b \neq 9$ ; elijase  $c \neq c_3, c \neq 0$  y  $c \neq 9$ ; elijase  $d \neq d_4, d \neq 0$  y  $d \neq 9$ ; elijase  $e \neq e_5, e \neq 0$  y  $e \neq 9$ ; ...; elijase  $n \neq n_p, n \neq 0$  y  $n \neq 9$  y así sucesivamente.

El número  $0.abcde...n...$  no es un número de la tabla porque su primer dígito es distinto al del primero de la tabla, su segundo dígito es distinto al segundo dígito de la tabla, su tercer dígito es distinto al tercer dígito de la tabla y así sucesivamente. Entonces es un número que no está en la tabla y es un número real. En conclusión, los números reales no son numerables.

Este resultado es crítico para entender, por ejemplo, la continuidad de la recta real, que un punto de la misma no tiene sucesivo puesto que, de acuerdo a lo demostrado, entre dos números reales cualesquiera, siempre hay otros infinitos números reales.

## Los complejos

El conjunto de los números complejos  $C$ . Origen. Representación en el plano. Módulo y argumento.

Relaciones de orden en  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ . Son las relaciones que permiten decir que, por ejemplo, 4 es más grande que 2 y menor que 5. También permiten poner a un conjunto de ese clase de números en fila, de menor a mayor o viceversa.

### **Cotas**

Se supone un conjunto formado por alguno de los tipos de números mencionados, ordenado de menor a mayor. Por ejemplo

$$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

Se llama cota superior del conjunto  $A$  a un número  $M$  tal que  
 $x \in A \wedge x \leq M$

Se llama cota inferior del conjunto  $A$  a un número  $m$  tal que  
 $x \in A \wedge x \geq m$

Dado un conjunto como el  $A$ , existen infinitas cotas superiores e infinitas cotas inferiores. Por ejemplo, son cotas superiores 10, 11, 12, 13, 14,... y son cotas inferiores 1 y 2 ó 0, 1 y 2 según se use  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{N}_0$

### **Supremo e Ínfimo**

La menor de las cotas superiores se denomina Supremo y la mayor de las cotas inferiores se denomina Ínfimo. Ambos pueden ser accesibles o no accesibles. En el caso presentado, ambos son accesibles. En el siguiente no ocurre lo mismo.

$$A = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 4 \leq x < 5\}$$

En este caso el ínfimo es 4 y es accesible mientras que el supremo es 5 y es inaccesible.

### **Aritmética de t- dígitos**

Aritmética de t dígitos. Ver el capítulo del mismo nombre en [www.edutecne.utn.edu.ar](http://www.edutecne.utn.edu.ar), publicaciones, electrónicas, tutoriales, CALCULO NUMERICO, FERRANTE, Jorge J L para una idea sobre el tema.

Noción de errores de corte y de redondeo.

Propagación de errores.

## II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

### 01 Definición de conjuntos

#### 01.01 Definir por extensión los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}A &= \{x / x \text{ día de la semana} \} \\B &= \{n / n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\C &= \{n / n \in \mathbb{N}_0 \wedge n < 0\} \\D &= \{x / x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 3\} \\E &= \{1/n / n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

#### 01.02 Definir por comprensión los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}A &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\} \\B &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \\C &= \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots\right\} \\D &= \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\} \\E &= \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}\end{aligned}$$

#### 01.03 En los casos en que ello sea posible, dar el cardinal de los conjuntos anteriores.

#### 01.04 Representar mediante puntos sobre una recta soporte los elementos de los conjuntos anteriores.

#### 01.05 Idem anterior en un sistema de rectas ortogonales $(n, u_n)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $u_n \in \mathbb{Q}$

### 02 Operaciones con conjuntos

#### 02.01 Igualdad de Conjuntos Dados los conjuntos

$$A = \{\text{lunes, martes, miercoles, jueves, viernes, sabado, domingo}\}$$

$$B = \{u / u \text{ es dia de la semana}\}$$

$$C = \{\sqrt{2}, \sqrt{8}, \text{Socrates}\}$$

$$D = \{\text{Socrates}, \sqrt{8}, \sqrt{2}\}$$

$$E = \{H_2O\}$$

$$F = \{w / w \text{ es agua}\}$$

$$G = \Phi$$

$$H = \{\Phi\}$$

analizar si  $A=B$ ;  $C=D$ ,  $E=F$  y  $G=H$

## 02.02 Datos los conjuntos

$$A = \{x / x \in N \wedge 1 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{y / y \in Q \wedge 1 \leq y \leq 5\}$$

$$C = \{z / z \in R \wedge 1 \leq z \leq 5\}$$

Calcular

$$01) A \cap B \quad 02) A \cap C \quad 03) A \cup B \quad 04) A \cup C \quad 05) B - A \quad 06) C - A$$

$$07) \text{ Si } U=N \text{ determinar } C_A \quad 08) A \cup B - C \quad 09) B \cap C \quad 10) N - A$$

11)  $Q - A$       12) Esbozar en gráficos de puntos o sombreados los resultados anteriores sobre una recta real.      13) ¿Cual es el conjunto universal para el conjunto  $A$ ?      14) ¿Cual es el cardinal del conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto  $A$ ?

## 02.03 Calcular, en cada uno de los conjuntos indicados

|    |          |              |                     |                   |                 |
|----|----------|--------------|---------------------|-------------------|-----------------|
| 01 | En $N$   | a) $2+3$     | b) $3-2$            | c) $2-3$          | d) $5-5$        |
| 02 | En $N_0$ | a) $2+3$     | b) $3-2$            | c) $2-3$          | d) $5-5$        |
| 03 | En $Z$   | a) $2+3$     | b) $3/4-2/5$        | c) $2-3$          | d) $5-5$        |
| 04 | En $Q$   | a) $1/2+1/5$ | b) $8/9+7/4$        | c) $8/\sqrt{2}-1$ | d) $\ln(4)/5-5$ |
| 05 | En $R$   | a) $1/2+1/5$ | b) $8/9+7/4$        | c) $8/\sqrt{2}-1$ | d) $\ln(4)/5-5$ |
| 06 | En $C$   | a) $(2+i)^2$ | b) $(5+2i)/(1+i^2)$ |                   |                 |

02.04      Dados los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$$

calcular  $A \times B$  (producto cartesiano) es decir el conjunto de los pares ordenados  $(n, q)$  con  $n \in A$  y  $q \in B$ . y representarlo mediante puntos en dos ejes ortogonales

02.05      Dados los conjuntos

$$A = \{n / n \in N \wedge 1 \leq n \leq 5\}$$

$$B = \{q / q \in Q \wedge 1 \leq q \leq 5\}$$

- 01    Expresar el conjunto  $A \times B$  Representar en ejes coordenados ortogonales  $n, q$
- 02    Idem anterior pero  $A \times A$
- 03    Idem anterior  $B \times A$
- 04    Idem anterior  $B \times B$

02.06      Dado el conjunto

$$A = \left\{ (x, y) / x \in N, y \in Q \wedge y = \frac{1}{x^2} \right\}$$

Indicar si se trata de un subconjunto de  $N \times Q$ ; escribir algunos términos del conjunto y representarlos como puntos sobre una recta y en ejes ortogonales. ¿los pares representados en ejes coordenados ortogonales se pueden unir con un trazo continuo? ¿por qué?

02.07      Dado el conjunto

$$A = \left\{ (x, y) / x \in R - \{0\}, y \in R \wedge y = \frac{1}{x^2} \right\}$$

Indicar si se trata de un subconjunto de  $R \times R$ ; calcular algunos pares ordenados y representarlos en ejes coordenados ortogonales. ¿Cuántos

pares ordenados del conjunto hay entre los pares  $(2, 1/4)$  y  $(3, 1/9)$ ?, ¿Cuando el primer elemento del par  $(x)$  se hace muy grande, cómo es el segundo elemento del par  $(y)$ ?, ¿por qué se excluye al cero del conjunto en el que está definido el primer elemento del par ordenado?, ¿los pares representados en ejes coordenados ortogonales se pueden unir con un trazo continuo? ¿por qué?

02.08 Dado el conjunto

$$A = \{u_n\} = \left\{ (n, u_n) / n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q} \wedge u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$$

Escribir unos cuantos primeros términos y representarlos como puntos sobre una recta y sobre ejes ortogonales. ¿Que se aprecia sobre la distribución de los puntos en ambos gráficos?

02.09 Indicar el valor de verdad de las siguientes desigualdades, en cada uno de los conjuntos indicados.

- |    |                   |                                   |                                   |                           |
|----|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|
| 01 | En $\mathbb{N}$   | a) $8 > 7$                        | b) $n+0.5 > n$                    | c) $n^2 \geq n \forall n$ |
| 02 | En $\mathbb{N}_0$ | a) $0 < 7$                        | b) $n+0 > n$                      | c) $0 < n/2 \forall n$    |
| 03 | En $\mathbb{Z}$   | a) $-7 > -5$                      | b) $- p  =  -p $                  | c) $0 > -1$               |
| 04 | En $\mathbb{Q}$   | a) $1/2 \geq 2/5$                 | b) $q/(q+1/3) < 1 \forall q > 0$  |                           |
| 05 | En $\mathbb{R}$   | a) $(0.25)^{1/2} > (0.027)^{1/3}$ | b) $x^x \geq 1 \quad x \in (0,1)$ |                           |
| 06 | En $\mathbb{C}$   | a) $i \geq 0.01+0.2i$             | b) $ i  >  0.01+0.2i $            |                           |

02.10 ¿Cómo se escribe  $\sqrt[4]{8}$  en aritmética de  $t=2$  dígitos con técnica de corte y con técnica de redondeo?

03 Intervalos, entornos.

Definiciones:

03.01 Intervalo abierto

$$(a, b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$$



### 03.02 Intervalo abierto cerrado, cerrado abierto

$$(a, b] = \{x / x \in R \wedge a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x / x \in R \wedge a \leq x < b\}$$

### 03.03 Intervalo cerrado

$$[a, b] = \{x / x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$$

### 03.04 Entorno de a

En la bibliografía de origen francés, "vecindad". Termino mucho más sugerente que "entorno" a menos que se entienda por entorno, como la hace la Real Academia Española (RAE.ES) "Conjunto de puntos vecinos a otro"

$$U(a) = \{x / x \in R, \delta \in R \wedge a - \delta < x < a + \delta, \delta > 0\} = \{x / x \in R, \delta \in R \wedge |x - a| < \delta\}$$

### 03.05 Entorno reducido de a

Concepto necesario para el desarrollo del análisis matemático. Al principio sorprende, después se ve su necesidad. En palabras, un entorno reducido es un entorno del que se excluye el punto "a". Por eso, a veces en cierta bibliografía se lo denomina "Vecindad agujereada".

$$U^*(a) = \{x / x \in R, \delta \in R \wedge 0 < |x - a| < \delta\}$$

### 04 Representar en la recta real los siguientes intervalos / entornos

01 (2,7) 02 (-4,5] 03 [-3,-1] 04 [-2,5)

05 U(2) con  $\delta=2$  06 Id 05 con  $\delta=.1$  07  $U^*(3)$  con  $\delta=1$

**ANALISIS MATEMATICO I**  
**Ciclo Lectivo 2009**

**Guía de Estudio y Práctica 02**

**FUNCIONES**

**Ing. Jorge J. L. Ferrante**

**I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS.**

El concepto de función es central en todo el análisis matemático. Al recorrer la historia del pensamiento matemático este concepto fue evolucionando hasta llegar al que actualmente se considera válido.

La noción de función aparece por primera vez en una forma más general durante el siglo XIV en las escuelas de filosofía natural de Oxford y París.

Esto no quita que egipcios, babilonios y griegos tuviesen una noción bastante clara de la existencia de una relación entre variables en la que alguna o algunas de ellas dependían de otra u otras.

¿Puede pensarse acaso que no supiesen que la cantidad de vino o aceite contenido en un barril dependiese del diámetro y la altura de este?

¿Acaso los griegos no construyeron tablas de tiro de artillería (de cuerda) compilando el alcance del proyectil (piedra o flecha) en relación al diámetro de las sogas que, debidamente retorcidas, generaban la energía para el tiro?

¿Puede pensarse que algún geómetra egipcio no supiese que la superficie del terreno fertilizado por la creciente del Nilo, dependía de la longitud de la cuerda con que lo medía y del número de veces que la aplicaba?

¿Puede pensarse que los babilonios cuyos rastros de cálculos sobreviven en tabletas de arcilla cocida en caracteres cuneiformes donde resolvían ecuaciones y calculaban intereses no tuviesen una idea de la relación entre cantidades?

¿Puede pensarse en un mercader fenicio que no supiese exactamente la relación existente entre la carga del navío y su acomodamiento dentro del mismo y sus condiciones de navegación?

¿Puede pensarse que todos aquellos que comerciaron, construyeron, viajaron por tierra y mar, transportaron y conquistaron durante siglos desconociesen que ciertas cantidades dependen de otras?

Otra cosa muy distinta es formalizar ese conocimiento, hacerlo inteligible y unívoco para todos. Ese es un esfuerzo bastante próximo, en el tiempo.

Galileo estaba empezando a entender el concepto de función con claridad. Sus estudios sobre el movimiento contienen la clara comprensión de una relación entre variables. De nuevo otra parte de sus matemáticas muestra que estaba empezando a captar el concepto de mapeo entre conjuntos.

En 1638 estudió el problema de dos círculos concéntricos con centro  $O$ , el círculo más grande  $A$  con diámetro del doble que el círculo más pequeño  $B$ . Pero al tomar cualquier punto  $P$  sobre el círculo  $A$  entonces  $PA$  corta al círculo  $B$  en un punto. Así Galileo había construido una función que mapeaba cada punto de  $A$  sobre un punto de  $B$ . De modo similar, si  $Q$  es un punto sobre  $B$  entonces el segmento  $OQ$  resultante corta al círculo  $A$  en exactamente un punto. De nuevo tiene una función, esta vez de los puntos en  $B$  hacia los puntos en  $A$ . Aunque la circunferencia de  $A$  sea el doble de la circunferencia de  $B$ , ambas tienen el mismo número de puntos. También produjo la correspondencia uno-a-uno estándar entre los enteros positivos y sus cuadrados, la cual (en términos modernos) daba una bisección entre  $N$  y un subconjunto propio

Casi al mismo tiempo que Galileo llegaba a estas ideas, Descartes introducía el álgebra a la geometría en *La Géométrie* afirmando que una curva puede dibujarse al permitir que una línea tome sucesivamente un número infinito de valores distintos. Esto de nuevo lleva el concepto de función a la construcción de una curva ya que Descartes piensa en términos de la magnitud de una expresión algebraica que toma infinitos valores como en que la magnitud a partir de la cual se compone la expresión, toma un infinito número de valores

Antes de llegar a la primera vez que se usó la palabra 'función'. Es importante entender que el concepto se desarrolló con el paso del tiempo; su significado fue cambiando y también fue siendo definido con mayor precisión a través de los años. Fue sugerido que una tabla de valores, aunque defina una función, no es pensada necesariamente por su creador como una función. Los primeros empleos de la palabra 'función' sí encapsulaban ideas del concepto moderno pero de manera mucho más restrictiva

Como tantos términos matemáticos, la palabra función fue usada por primera vez con su significado no-matemático. Leibniz escribió en agosto de 1673 que:

*otros tipos de líneas que, dada una figura, llevan a cabo alguna función.*

Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz escrita el 2 de septiembre de 1694, describe una función como:

*una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes.*

En un artículo de 1698 sobre problemas isoperimétricos, Johann Bernoulli escribe sobre 'funciones de ordenadas' Leibniz le escribió a Bernoulli diciendo:

*Me agrada que use el término función en el mismo sentido que yo.*

Era un concepto cuya introducción sucedió en el momento ideal en lo que respecta a Johann Bernoulli ya que estaba estudiando problemas en cuyas soluciones aparecen funciones.

Se puede decir que en 1748 el concepto de función saltó a la fama en matemáticas. Esto se debió a Euler quien publicó *Introductio analysis infinitorum* en el año en que hace central el concepto de función en su presentación del análisis. Euler definió una función en el libro como sigue: *"Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números o cantidades constantes"*.

Más adelante añadía: "Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas las primeras también sufren cambio,

y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. así, si  $x$  denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de  $x$  en cualquier forma están determinadas por  $x$  y se les llama funciones de  $x$ ".

Esta definición de Euler si bien significó un notorio avance sobre los oscuros conceptos vigentes, generó una idea que no se compadece con el concepto de función vigente, idea que perduró durante mucho tiempo. Esta idea es que hay que hacer operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división etc.) entre variables y constantes para que este definida una función entre la variable independiente y el resultado o variable dependiente.

Bajo este punto de vista el conjunto de pares  $(x,y)$  de un punto de la circunferencia máxima de una rueda que rueda sin resbalar sobre un riel (cicloide), no sería una función. Siguiendo a Descartes y la dualidad o equivalencia función - curva a este tipo de funciones se las denominó "mecánicas"

Por el mismo motivo, hubo un enorme esfuerzo para hacer algebraicas las funciones trascendentes mediante sus respectivos desarrollos en series de potencias.

Cauchy, en 1821, dio una definición que hace de la dependencia entre variables el centro del concepto de función. Escribió en *Cours d'analyse*:  
*Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable.*

Nótese que a pesar de la generalidad de la definición de Cauchy, que está diseñada para cubrir tanto las funciones implícitas como las explícitas, aún piensa en una función en términos de una fórmula. De hecho, hace la distinción entre funciones implícitas y explícitas justo después de dar esta definición. También introduce conceptos que indican que todavía piensa en términos de expresiones analíticas.

Fourier, en *Théorie analytique de la Chaleur* en 1822, dio la siguiente definición: *En general, la función  $f(x)$  representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa  $x$ , hay un número igual de ordenadas  $f(x)$ . Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola.*

En 1838, Lobachevsky dio una definición de una función general: *Una función de  $x$  es un número que está dado para cada  $x$  y que cambia gradualmente junto con  $x$ . El valor de la función puede estar dado mediante una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida.*

Alrededor de esa época se construyeron muchas funciones patológicas. Cauchy dio un ejemplo temprano cuando notó que  $f(x) = \exp(-1/x^2)$  para  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , es una función continua cuyas derivadas en 0 son todas 0. Por lo tanto, tiene una serie de Taylor que converge en todos los puntos pero que solo es igual a la función en 0.

Poincaré estaba a disgusto con la dirección que había tomado la definición de función. En 1899 escribió: *Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas que parecen forzadas a parecerse lo menos posible a las funciones honestas que sirven a algún propósito. Antes, cuando se inventaba una nueva función era con una meta práctica. Hoy son inventadas a propósito para mostrar que el razonamiento de nuestros ancestros fallaba y nunca obtendremos más que eso de ellas. Si la lógica fuera la única guía del profesor, tendría que empezar por lo más general, es decir, las funciones más estrambóticas.*

Goursat, en 1923, dio la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día:

*Se dice que  $y$  es una función de  $x$  si a cada valor de  $x$  le corresponde un valor de  $y$ . Esta correspondencia se indica mediante la ecuación  $y = f(x)$ .*

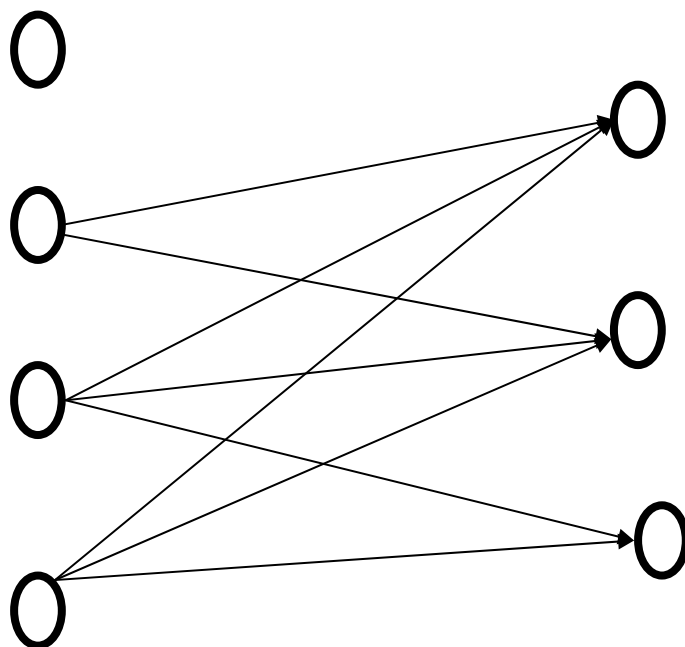
En caso de que ésta no sea lo suficientemente precisa ya que involucra conceptos como 'valor' y 'correspondencia', véase la definición dada por Patrick Suples en 1960: (¡Solo 49 años atrás!)

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  se denomina "relación"  $R$  de  $A$  en  $B$  a un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ . Es decir una relación es un conjunto de pares ordenados que la satisfacen.

Por ejemplo, sea  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  y  $B = \{1, 3, 5\}$  y la relación  $R$  "es mayor que", entonces

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (8, 1), (8, 3), (8, 5)\}$$

$$R = \{(a, b) / a \in A, b \in B \wedge (a, b) \in R\} = \{(4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (8, 1), (8, 3), (8, 5)\}$$



El conjunto de elementos de  $A$  que tienen imagen en  $B$  se llama Dominio de la relación y se puede notar  $D[R]$ . En el ejemplo  $D[R] = \{4, 6, 8\}$ ; el conjunto de elementos de  $B$  que son imagen de  $D[R]$  se llama Imagen, Codominio o Recorrido de la relación y se puede notar  $C[R]$ . En el ejemplo  $C[R] = \{1, 3, 5\}$ . Nótese que el elemento 4 de  $A$  tiene dos imágenes; el elemento 6 tiene tres imágenes y el elemento 8 también tiene tres imágenes.

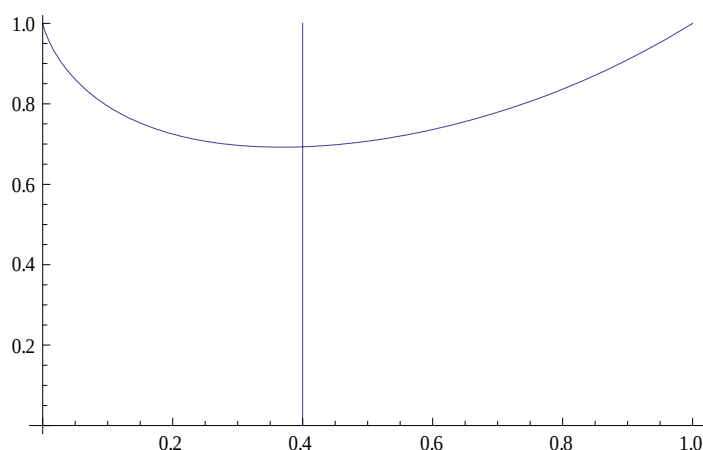
Ahora si se puede definir función  $f$ , diciendo que es una relación en la que, a cada elemento de  $D[f]$  le corresponde un y solo un elemento de  $C[f]$

Siguiendo a Gursat se escribe:

*Se dice que  $y$  es una función de  $x$  si a cada valor de  $x$  le corresponde un **y solo un** valor de  $y$ . Esta correspondencia se indica mediante la ecuación  $y = f(x)$ .*

Nótese la evolución del concepto a lo largo del tiempo. Desde un principio donde era necesario "hacer cuentas" con la variable independiente para obtener el valor de la dependiente en un punto se llega a que lo verdaderamente importante es la **correspondencia** entre esos valores, sea cual sea su forma de ser establecida.

En el caso más común en el análisis matemático, los conjuntos  $A$  y  $B$  coinciden con el conjunto de los números reales. Entonces, una función  $f$  es un subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , con la propiedad que, para un valor de  $x$  existe uno y solo uno de  $y$ . Visto esto desde la geometría, la curva representativa de  $y = f(x)$  es cortada una sola vez por la vertical trazada por  $x_0$



## Dominio

Se denomina dominio de la función  $f$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}$  (o de  $A$ )

$$D[f] = \{ x / x \in \mathbb{R} , \exists y , (x, y) \in f \} = \{ x / x \in \mathbb{R} , \exists y , y = f(x) \}$$

abandonando el lenguaje mandarín se puede decir que el dominio es el conjunto de valores de  $x$  que tienen imagen  $y$ .



En tiempos remotos, cuando los no videntes o invidentes eran ciegos, los hipoacúsicos eran sordos y los buenos siempre le ganaban a los malos, el dominio se llamaba "campo de existencia".

### Sucesiones

Otro caso se da cuando los conjuntos que intervienen en el producto cartesiano son, por un lado, de primera componente, el conjunto  $N$  ( o  $N_0$  ) de los naturales y, por el otro, de segunda componente, el conjunto  $Q$  de los racionales o el conjunto  $R$  de los reales.

Por ejemplo, el conjunto

$$\{u_n\} = \{ (n, u_n) / n \in N, u_n \in Q \wedge u_n = (-1)^n n^2 / (n^3 + 1) \} = \{-1/2; 4/9; -9/28; 16/65; \dots (-1)^k k^2 / (k^3 + 1); \dots\}$$

es una sucesión.

También lo es el conjunto

$$\{a_n\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/k, \dots\}$$

y el conjunto

$$\{p_n\} = \{2; 2^{1/2}; 2^{1/3}; 2^{1/4}; 2^{1/5}; \dots; 2^{1/k}; \dots\}$$

Las sucesiones serán tema de estudio más adelante en el desarrollo de la asignatura.

Nota: para esta introducción al concepto de función el autor tomó parte del artículo de *J. J. O'Connor y E. F. Robertson* MacTutor History of Mathematics Archive, agregándole comentarios y referencias que se estiman oportunas para una mejor interpretación del tema.

## 02 Distintas formas de presentación de funciones

### 01 En coordenadas cartesianas ortogonales

#### 01 Explícitas

La variable dependiente y se encuentra "explícitamente" despejada.

$$y = f(x)$$

#### 02 Implícitas

La variable dependiente no se encuentra explícitamente despejada.

$$F(x, y) = 0$$

#### 03 Paramétricas

Las variables independiente y dependiente establecen su relación mediante un parámetro. A veces puede encontrarse la relación entre la variable dependiente y la independiente, en otros casos ello no es posible o es demasiado trabajoso. También puede darse obtener explícitamente la variable independiente mediante una relación con la dependiente, siendo entonces necesario resolver la ecuación resultante para obtener el valor la de variable dependiente para cada valor de la independiente.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$
$$t_i \leq t \leq t_f$$

## 02 En coordenadas polares

Fórmulas de transformación

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

### 01 Explícitas

$$\rho = f(\theta)$$

### 02 Implícitas

$$F(\theta, \rho) = 0$$

### 03 Paramétricas

$$\begin{cases} \rho = \rho(\tau) \\ \theta = \theta(\tau) \end{cases} \\ \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$$

## 03 Compuestas

Cuando la relación funcional entre la variable independiente y la variable dependiente se establece a través de otra u otras funciones de la primera, la función se denomina compuesta entre esas variables.

Si dado  $x_0$  es necesario calcular  $u_0 = u(x_0)$ ; con ese valor  $u_0$  es necesario calcular  $v_0 = v(u_0)$  y, con este calcular  $w_0 = w(v_0)$  para por fin determinar  $y_0 = f(w_0)$ , la relación funcional entre  $x$  e  $y$  es compuesta. Esto se puede escribir de esta forma  $y = f(w\{v[u(x)]\})$  donde para "llegar" desde  $x_0$  hasta  $y_0$  es necesario "pasar" por las funciones intermedias  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

Naturalmente los valores intermedios necesariamente deben estar comprendidos en los dominios de cada una de esas funciones.

Por ejemplo, la siguiente función es compuesta

$$y = \sqrt[3]{(\operatorname{sen}(x))^2}$$

donde es claro que dado  $x$  es necesario calcular  $\operatorname{sen}(x)$ , este valor es argumento (variable) para una elevación al cuadrado siendo la raíz cúbica de este resultado el valor de  $y$  buscado.

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen}(x) \\ v = u^2 \\ w = \sqrt[3]{v} \end{cases}$$

## II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

En este punto se espera que mediante cálculos sencillos correspondientes a valores "fáciles" de la variable independiente  $x$  ( por ejemplo 0; 1; -1; etc. ), calculado o encontrado algunas raíces que indiquen ceros de la función o puntos en los que ella se indetermina, en base a los conocimientos previos dados en clase, se estime o imagine la forma general de la función a representar y que, luego de ese análisis, se realicen los gráficos correspondientes en el Laboratorio de Cálculo, corroborando lo estimado o resolviendo el conflicto planteado entre lo hecho en forma manual y lo que resulta de la utilización de lenguaje algebraico en uso.

### FUNCIONES ELEMENTALES

#### RECTAS

01 Representar en un mismo gráfico

$$01 \ y = x \quad 02 \ y = 2x \quad 03 \ y = 0.5x \quad 04 \ y = 3x \quad 05 \ y = 0.01x$$

02 Representar en un mismo gráfico

$$01 \ y = x + 2 \quad 02 \ y = x - 3 \quad 03 \ y = 3x - 1 \quad 04 \ y = 3x + 2$$

05 Explicar las denominaciones "pendiente" y "ordenada al origen" en la ecuación  $y = mx + h$

03 Representar las siguientes rectas dadas en forma implícita determinando pendiente y ordenada al origen en cada caso.

$$01 \ 2x + 3y - 4 = 0 \quad 02 \ -x + y - 1 = 0 \quad 03 \ x + y + 1 = 0$$

04 Representar las siguientes rectas dadas en forma segmentaria determinando pendiente y ordenada al origen en cada caso

$$01 \ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \quad 02 \ \frac{x}{-4} + y = 1 \quad 03 \ \frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$$

## PARÁBOLAS

- 05 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones (parábolas de 2º grado)

$$01 y = x^2 \quad 02 y = 2 x^2 \quad 03 y = 0.5 x^2 \quad 04 y = -x^2$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica el coeficiente de  $x^2$ ?

- 06 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones (parábolas de 2º grado)

$$01 y = x^2 + 1 \quad 02 y = x^2 - 4 \quad 03 y = -x^2 + 5 \quad 04 y = -x^2 - 5$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica el término constante?

- 07 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones (parábolas de 2º grado)

$$01 y = 2 x^2 + 3x \quad 02 y = 0.5 x^2 - 2x \quad 03 y = -x^2 + 3x \quad 04 y = -x^2 - 2x$$

¿Qué efecto tiene sobre la gráfica el término lineal?

- 08 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones (parábolas de 2º grado)

$$01 y = 2 x^2 + 3x - 5 \quad 02 y = 0.5 x^2 - 2x + 1 \quad 03 y = -x^2 + 3x - 6$$

- 09 Establecer conclusiones sobre el efecto del coeficiente de  $x^2$ ; el del término constante y el del término lineal en la gráfica de estas parábolas.

- 10 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-1,1]$

$$01 y = x \quad 02 y = x^2 \quad 03 y = x^3 \quad 04 y = x^4 \quad 05 y = x^5$$

- 11 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-1,1]$

$$01 \ y = x \quad 02 \ y = x^{1/2} \quad 03 \ y = x^{1/3} \quad 04 \ y = x^{1/4} \quad 05 \ y = x^{1/5}$$

12 Establecer conclusiones sobre el efecto del exponente de  $x$  en los ejercicios 10 y 11.

13 Con relación a los ejercicios 10 y 11 conjeturar qué ocurre con las gráficas de las funciones en el intervalo  $[1, \infty)$

14 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-1, 1]$

$$01 \ y = x^{3/2} \quad 02 \ y = x^{2/5} \quad 03 \ y = x^{3/7}$$

### EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

15 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-2, 2]$

$$01 \ y = 2^x \quad 02 \ y = 0.3^x \quad 03 \ y = (-2)^x \quad 04 \ y = -2^x \quad 05 \ y = e^x$$

16 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-2, 2]$

$$01 \ y = 2^{-x} \quad 02 \ y = 3^{-x} \quad 03 \ y = e^{-x} \quad 04 \ y = (2^x)^2 \quad 05 \ y = 0.2^{-x}$$

17 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $(0, 10]$

$$01 \ y = \log_2 x \quad 02 \ y = \log_3 x \quad 03 \ y = \log_{10} x = \log x \quad 04 \ y = \log_e x = \ln x$$

### FUNCIONES CIRCULARES

18 Representar las siguientes funciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

$$\begin{array}{lll} 01 \ y = \sen x & 02 \ y = \sen(2x) & 03 \ y = \sen(x/2) \\ 04 \ y = \sen(3x) & 05 \ y = \sen(x/3) & 06 \ y = \sen(10x) \\ 07 \ y = \sen(x/10) \end{array}$$

Comparar "período" y "frecuencia" en cada una de ellas mediante el correspondiente análisis de los gráficos obtenidos

- 19 Representar las siguientes funciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

$$\begin{array}{lll} 01 \ y = \cos x & 02 \ y = \cos (2x) & 03 \ y = \cos (x/2) \\ 04 \ y = \cos(3x) & 05 \ y = \cos(x/3) & 06 \ y = \cos(10 x) \\ 07 \ y = \cos (x/10) \end{array}$$

Comparar "período" y "frecuencia" en cada una de ellas mediante el correspondiente análisis de los gráficos obtenidos.

- 20 Representar las siguientes funciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

$$01 \ y = 5 \operatorname{sen} x \qquad 02 \ y = 2 \operatorname{sen} (2x) \quad 03 \ y = -\operatorname{sen} (x/2)$$

Analizar el efecto del coeficiente  $A$  en la expresión  $y = A \operatorname{sen} (\omega x)$

- 21 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

$$01 \ y = 2 \operatorname{sen}(x+\pi/3) \qquad 02 \ y = -\operatorname{sen} (2x-\pi/6) \qquad 03 \ y = \operatorname{sen} (x/2+2\pi)$$

Analizar el efecto del parámetro  $\alpha$  en la expresión  $y = A \operatorname{sen} (\omega x + \alpha)$

- 22 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-\pi, \pi]$

$$01 \ y = 3 \cos(x-\pi) \qquad 02 \ y = \cos (2x+\pi) \qquad 03 \ y = \cos (x/2-3\pi)$$

Analizar el efecto del parámetro  $\alpha$  en la expresión  $y = A \cos (\omega x + \alpha)$

- 23 Siendo  $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{sen} (x) / \cos (x)$  representar

$$01 \ \operatorname{tg}(x) \qquad 02 \ \operatorname{tg}(2x) \qquad 03 \ \operatorname{tg}(x/2)$$

Analizando las gráficas de senos y cosenos correspondientes y estimando la forma resultante para tangente.



24 Idem 23  $\cotg(x) = \cos(x) / \sin(x)$

01  $\cotg(x)$                       02  $\cotg(2x)$                       03  $\cotg(x/2)$

Analizando las gráficas de senos y cosenos correspondientes y estimando la forma resultante para cotangente.

25 Siendo  $\operatorname{cosec}(x) = 1/\sin(x)$  representar

01  $\operatorname{cosec}(x)$                       02  $\operatorname{cosec}(2x)$                       03  $\operatorname{cosec}(x/2)$

Mediante consideraciones y valoraciones gráficas sobre las representaciones gráficas de las correspondientes sinusoides.

26 Siendo  $\sec(x) = 1/\cos(x)$  representar

01  $\sec(x)$                       02  $\sec(2x)$                       03  $\sec(x/2)$

Mediante consideraciones y valoraciones gráficas sobre las representaciones gráficas de las correspondientes cosinusoides.

27 Representar en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  las siguientes funciones

01  $y = \arcsen(x)$     02  $y = \arccos(x)$     03  $y = \arctg(x)$

### **FUNCIONES HIPERBÓLICAS**

28 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-2, 2]$

01  $y = \operatorname{ch}x = (e^x + e^{-x})/2$                       02  $y = \operatorname{ch}(2x)$                       03  $y = \operatorname{ch}(x/2)$

29 Representar en un mismo gráfico las siguientes funciones en el intervalo  $[-2, 2]$

01  $y = \operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$                       02  $y = \operatorname{sh}(2x)$                       03  $y = \operatorname{sh}(x/2)$

30 Representar

01  $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x) / \operatorname{ch}(x)$                       02  $\operatorname{coth}(x) = \operatorname{ch}(x) / \operatorname{sh}(x)$

## 31 Representar

01  $y = \operatorname{sech}(x)$

02  $y = \operatorname{cosech}(x)$

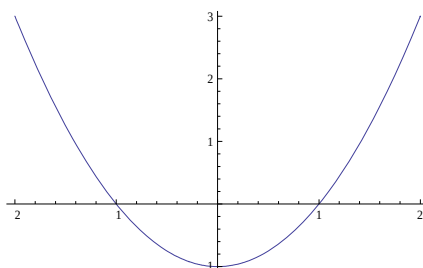
### **FUNCIONES COMPUESTAS - DOMINIO**

Una función de la forma  $y = f[g(x)]$  se denomina función compuesta. Para un valor arbitrario cualquiera  $x_0$  (de ambos dominios) es necesario evaluar primero  $g_0 = g(x_0)$  y luego evaluar  $y_0 = f(g_0) = f[g(x_0)]$ . El anidamiento de funciones puede ser tan complejo como se quiera, por ejemplo  $y = f\{g[h\{p[q[r(x)]]\}]\}$  donde hay que calcular  $r$ , luego  $q$ , luego  $p$ , luego  $h$ , luego  $g$  y, por último  $f$ . Afortunadamente cosas así no aparecen jamás, pero...

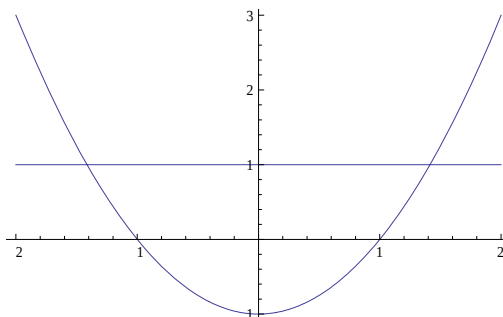
Para representar este tipo de funciones lo más sencillo es encadenar razonamientos:

Sea, por ejemplo, representar o tener una idea de la forma de esta función  $y = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$

Para ello representése primero la parábola  $x^2 - 1$

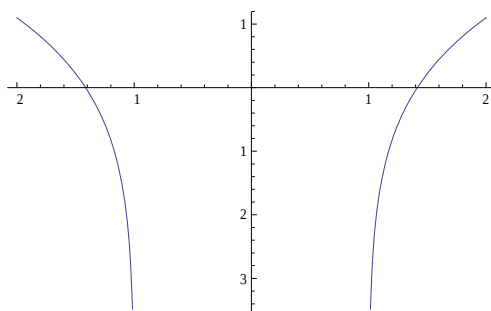


Después trázese la horizontal por 1 obteniendo

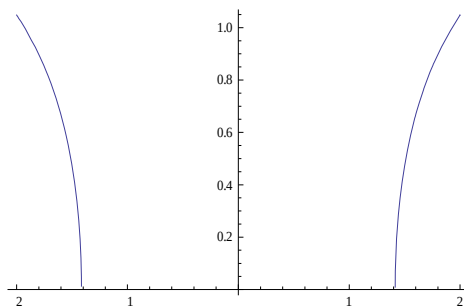


Siendo las ordenadas de este gráfico el argumento (la variable) para la función logaritmo es claro que esta función estará definida en  $(-\infty, -1)$  y en  $(1, \infty)$  y que tomará el valor 0 en la abscisa donde la horizontal

por uno corta la parábola. Entre 1 y -1 y este punto el logaritmo será negativo y, en consecuencia no será argumento válido para una raíz cuadrada.



Por último la función dada tendrá un gráfico similar al siguiente



Y su dominio estará claramente visible.

- 32 Determinar el dominio y dar una idea de la gráfica de las siguientes funciones. Verificar en el Laboratorio

01  $\sqrt[2]{1-x}$     02  $\sqrt[3]{1-x}$     03  $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$     04  $\sqrt{(x-2)(x-4)}$

05  $\ln(1-x^2)$     06  $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$     07  $\log\left(\frac{2}{2-x^2}\right)$     08  $\log\left(\frac{2}{2-x^2}\right)^{2n}, n \in \mathbb{N}$

09  $\sqrt{\sin(x)}$     10  $\sqrt{\sin(x)\cos(x)}$     11  $\ln\sqrt{\sin(x)\cos(x)}$     12  $\frac{\ln\sqrt{\sin(x)\cos(x)}}{x}$

- 33 Representar en forma aproximada las siguientes funciones racionales fraccionarias  
Analizar y representar por separado.

$$01 \quad y = \frac{2}{3x^2 - 17x + 10}$$

$$02 \quad y = \frac{x-1}{x^2 - x - 2}$$

$$03 \quad y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 8x - 4}$$

$$04 \quad y = \frac{(3+x)(5+x)(4-x)}{(4-x^2)(5-x)}$$

$$05 \quad y = \frac{(x^4 - 5x^2 + 4)(x+3)}{4x^3 + 2}$$

¿A qué valor tiende y cuando x se hace cada vez más grande?  
 ¿Hay asíntotas verticales?, ¿Hay asíntotas horizontales? ¿Hay  
 asíntotas de otro tipo? Especificar.

## FUNCIONES IMPLÍCITAS

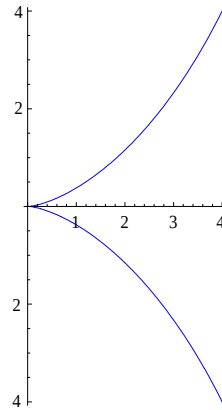
34 Representar las siguientes funciones definidas en forma implícita

$$01 \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{Elipse}$$

$$02 \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{Hipérbola}$$

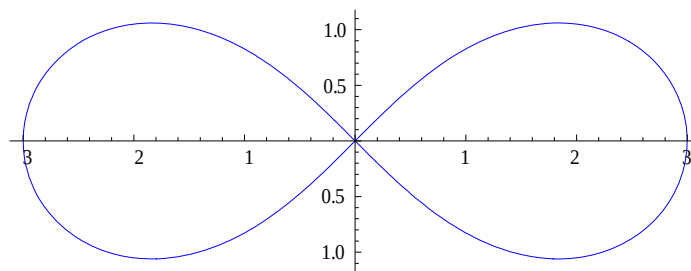
03  $y^2(2-x) = x^3$

Cisoide de Diocles



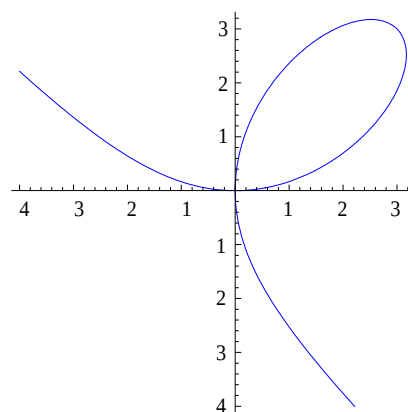
04  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

Lemniscata de Bernouilli



05  $x^3 + y^3 = 6xy$

Folio de Descartes



## COORDENADAS POLARES

35 Representar las siguientes funciones en coordenadas polares

01  $\rho = \operatorname{sen}(\theta)$

02  $\rho = \cos(\theta)$

03  $\rho = \frac{1}{3} \cos(3\theta)$

04  $\rho = 3\operatorname{sen}(2\theta)$

05  $\rho = 7 \cos(-\theta)$

06  $\rho = 4\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\theta\right)$

07  $\rho = 3\operatorname{sen}\left(4\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

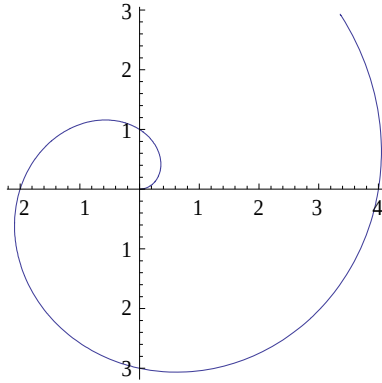
08  $\rho^2 = 25\operatorname{sen}(2\theta)$

09  $\rho^2 = 6\operatorname{sen}\left(-2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

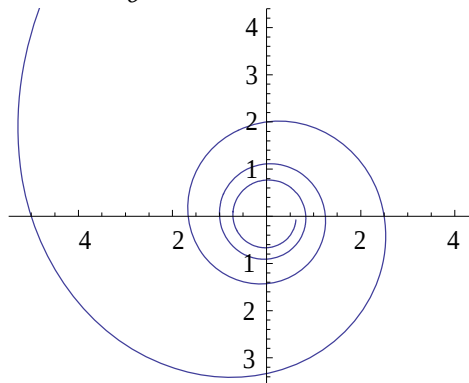
10  $\rho = 4 + 2 \cos(\theta)$

36 Representar las siguientes funciones en coordenadas polares

01  $\rho = \frac{2}{\pi} \theta$  Espiral de Arquímedes



02  $\rho = \frac{5\pi}{\theta}$  Espiral hiperbólica



03  $\rho = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\theta}$  Espiral logarítmica

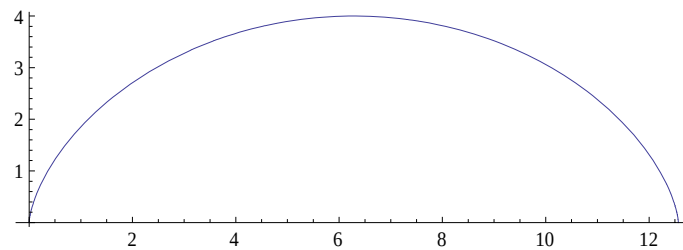
04  $\rho = \frac{3}{\pi} \sqrt{\sec(2\theta)}$

05  $\rho = \frac{\pi}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

## FUNCIONES DEFINIDAS PARAMETRICAMENTE

37 Representar gráficamente las siguientes funciones

01  $\begin{cases} x = x(t) = 2t - 2\text{sen}(t) \\ y = y(t) = 2 - 2\cos(t) \end{cases}$  Cicloide



02  $\begin{cases} x = x(t) = 5t - 3\text{sen}(t) \\ y = y(t) = 5 - 3\cos(t) \end{cases}$  Cicloide

03  $\begin{cases} x = (a+b)\cos(t) - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ y = (a+b)\text{sen}(t) - b\text{sen}\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{cases}$  Epicicloide

para las siguientes relaciones entre  $a$  y  $b$   $\frac{a}{b} = 1; \frac{a}{b} = 2; \frac{a}{b} = \frac{1}{4}, \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$

04  $\begin{cases} x = (a-b)\cos(t) + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y = (a-b)\text{sen}(t) - b\text{sen}\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$  Hipocicloide

para las siguientes relaciones entre  $a$  y  $b$   $\frac{a}{b} = 3; \frac{a}{b} = 5; \frac{a}{b} = \frac{5}{3}; \frac{a}{b} = \frac{9}{4}$

05 ¿Cual debe ser la relación deben tener los radios de la ruleta y de la base de una hipocicloide si se desea emplearla como elemento de

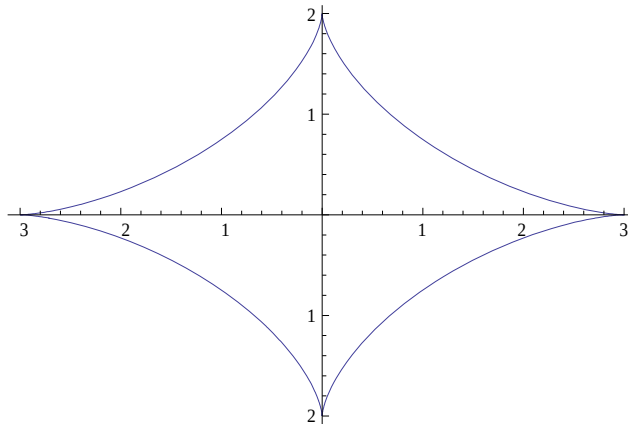


un mecanismo destinado a transformar un movimiento circular en otro rectilíneo de vaivén.?

06  $\begin{cases} x = \cos(t) + t\sin(t) \\ y = \sin(t) - t\cos(t) \end{cases}$  Evolvente del círculo

07  $\begin{cases} x = 4\ln(t) \\ y = 4\frac{t^2 + 1}{2t} \end{cases}$  Catenaria

08  $\begin{cases} x = 3\cos^3(t) \\ y = 2\sin^3(t) \end{cases}$  Evoluta de la elipse



09  $\begin{cases} x = 3\sin^2(t) \\ y = 3\sin^2(t) - \tan(t) \end{cases}$  Cisoide

10  $\begin{cases} x = 2\tan(t)\cos(t) \\ y = 2\tan(t)(1 + \sin(t)) \end{cases}$  Estrofoide

38 Parametrizar las siguientes funciones y representar

01  $y = x^2$  definida en  $[-2,2]$

02  $x^2 + y^2 = 4$

03  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

04  $\rho = 2$

05  $xy = 1$

## **FUNCIONES DEFINIDAS EN FORMA ARBITRARIA**

39 Representar gráficamente las siguientes funciones

01  $y = |x|$  Valor absoluto de  $x$

02  $y = sg(x)$  Signo de  $x$

03  $y = [x]$  Parte entera de  $x$

04  $y = M(x)$  Mantisa o parte decimal de  $x$

05  $y = |x|sg(x)$

06  $y = [x] + M(x)$

07  $y = [x]sg(x)$

$$08 \quad y = \frac{[x]}{|x|}$$

$$09 \quad y = |x| + [x]$$

$$10 \quad y = \frac{M(x)}{sg(x)}$$

## COMPOSICION DE FUNCIONES

40 Representar las siguientes funciones compuestas por adiciones y/o productos de otras funciones.

$$01 \quad y = \text{sen}(x)\text{sen}(18x)$$

$$02 \quad y = e^{-x}(\cos(x) + \text{sen}(x))$$

$$03 \quad y = \cos(x) + 0.1\cos(30x)$$

$$04 \quad y = |x-1| + |x+1|$$

$$05 \quad y = e^{.3x} \left( 1 - \frac{x}{50} \right)$$

**ANALISIS MATEMATICO I**  
**Ciclo Letivos 2009**

**Guía de Estudio y Práctica 03**

**LIMITE - CONTINUIDAD**

**Ing. Jorge J. L. Ferrante**

**I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS.**

**LIMITE**

El concepto de límite funcional forma parte de los currículos de educación en la totalidad de las escuelas de ingeniería. Es puerta de entrada al análisis diferencial e integral, y, desde siempre, su enseñanza no ha dejado de preocupar a profesores e investigadores que ven cómo fracasan sus intentos para que los alumnos comprendan su significado, y cómo esta enseñanza, en muchas ocasiones, se acaba reduciendo a un conjunto de cálculos que tienen poco sentido. Hay que partir del hecho de que la comprensión de conceptos como el de límite funcional supone la utilización de estrategias mentales de alto nivel como las que se consideran en el pensamiento matemático avanzado y que la clave reside en la creación de un diseño de enseñanza adecuado a la capacidad y nivel del alumno, que genere un mínimo de interés por el estudio y que le facilite la adquisición de tales conceptos.

**EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE**

Siguiendo las investigaciones realizadas, la evolución histórica del concepto de límite se puede dividir en cuatro etapas, que se diferencian básicamente por la concepción de límite que subyace en ellas aunque la separación no siempre sea nítida. En la larga evolución del concepto (desde la matemática griega hasta el siglo XIX) se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción, que se utiliza de forma implícita desde la época griega y que no llega a su forma actual hasta el siglo pasado, en parte para validar algunos resultados ya obtenidos y en parte para demostrar otros más generales.

### ***De Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII. Métodos infinitesimales.***

Aparece en esta etapa una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite. No existe el concepto como tal, ya que ni siquiera se ha explicitado el concepto de función, pero sí aparece como proceso implícito en algunos métodos utilizados, básicamente, para resolver cuatro tipos de problemas:

- Dada la fórmula del espacio en función del tiempo, obtener la velocidad y aceleración en cualquier instante o recíprocamente, dada la aceleración o velocidad obtener la fórmula del espacio
- Obtención de la tangente a una curva. En óptica es necesario conocer la normal a una curva y en el estudio del movimiento la dirección de la tangente. Aparecen problemas de definición de tangentes en general (cuando surgen nuevas curvas) pues la definición de tangente como recta que toca en un sólo punto o deja a un lado la curva sólo sirve para algunas cónicas.
- Estudio de máximos y mínimos de una función, relacionado con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, etc.
- Cálculo de áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, longitudes de curvas, centros de gravedad y atracción gravitatoria.

A continuación se presenta un brevísimo resumen de algunos de estos métodos infinitesimales.

*Método de exhaustión.* Se atribuye a Eudoxo, aunque su utilización más conocida la hizo Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* y en *La cuadratura de la Parábola*. El método se aplicaba al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. Consiste en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que ésta vaya aproximándose a la magnitud buscada. Por ejemplo para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de  $n$  lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de  $n$  triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscriptos y circunscriptos hasta que la diferencia queda exhausta. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

*Método de los infinitésimos de Kepler* (1571-1630). Era utilizado para resolver problemas de medidas de volúmenes o áreas como los que aparecen en *Nova stereometria doliolum vinatorum* (1615) (Nota del autor: escrito para la evaluación de la capacidad de toneles de vino.) La base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos. Galileo utilizará un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio

*Método de los indivisibles de Cavalieri* (1598-1647). Fue utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar. Lo hace en su libro *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). Este caballero merece algo más que una mención **por el daño que hizo en la conceptualización del análisis**. No fue un antecesor del cálculo, fue el que impregnó a muchos bien pensantes hombres que un infinitésimo es un "cero pequeño". Es el mismo que logró que se dijese que la tangente a una curva estaba definida por dos puntos sucesivos sobre la misma, dado que es como un collar de cuentas muy pequeñas, una al lado de otra; es el que dijo que una superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen, un montón de superficies sin espesor. Quien tenga dudas sobre esta nota del autor, diríjase a Historia de las Matemáticas, de E. T. Bell, Fondo de Cultura Económica, México, 1995, Pág. 146 y 147.

*Método de Fermat para buscar extremos de curvas*. Lo aplicó a las "parábolas e hipérbolas de Fermat" y consiste en considerar que en una "cumbre" o en un "valle" de la curva, cuando  $E$  es pequeño, los valores de la función  $f(x)$  y  $f(x+E)$  están tan próximos que se pueden tomar iguales. El método consiste en hacer  $f(x+E)=f(x)$ , dividirlo por  $E$  y tomar  $E=0$ . Si bien no habla de límite, está bastante cerca.

*Método de las tangentes*. Fermat envía a Mersenne en 1637 una memoria que se titula *Sobre las tangentes a las líneas curvas* donde parece plantear un método para calcular tangentes en un punto de cualquier curva, si bien sólo lo utiliza con la parábola. En un intento de clarificar dicho método, Descartes crea el suyo propio según reza en la carta que envía a Mersenne en Mayo de 1638 y, así, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto. Lo que pretende es dibujar la recta tangente en el punto  $P=(x, f(x))$  y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la

práctica, para obtener los segmentos necesarios se consideraba  $f(x+E)-f(x)$ , se dividía por  $E$  y se tomaba  $E=0$ , lo que equivale a hallar el límite funcional en la abscisa del punto  $P$ .

*Método de Barrow* (1630-1677). Su método es muy semejante al de Fermat, pero en él aparecen dos incrementos  $e$  y  $a$ , que equivalen a los  $\Delta x$  y  $\Delta y$  actuales.

Todos estos métodos fueron el germen del análisis infinitesimal y surgieron motivados por las exigencias de la mecánica, de la astronomía y de la física. El álgebra aportó las herramientas necesarias para que algunos de estos métodos se desarrollaran, destacando el método de las coordenadas, que facilitó el estudio de las curvas. Sin embargo, estos métodos funcionaban de forma separada y no se tenía conciencia de su generalidad; faltaba algo que les armonizara y además les diera ese carácter de universalidad,

### Faltaba el concepto de límite.

Aparecen en escena los creadores del análisis: Newton y Leibniz

El primero, Newton (1648-1727) es el creador de la teoría de las fluxiones, un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Propone el método de las fluxiones, expuesto en la obra *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (publicada en 1736), donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

La teoría de fluxiones resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones, conocidas la relación entre fluentes y el recíproco, dada la relación entre fluxiones, encontrar las fluentes. Para resolver estos problemas aplicó sendos métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Para el propio Newton en estos métodos resolutivos no se explicaban de forma satisfactoria. En 1704 en su obra *Tractatus quadratura curvarum*, explicita el

método de las "razones primeras y últimas", en la que el incremento de la variable se "desvanece", lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica. Allí resuelve el siguiente problema

*"Fluya una cantidad  $x$  uniformemente; ha de encontrarse la fluxión de la cantidad  $x_n$ . En este tiempo, la cantidad  $x$ , al fluir, se convierte en  $x+o$ , la cantidad  $x_n$  resultará  $(x+o)_n$ ; que por el método de las series infinitas es  $x_n+no x_{n-1}+((n_2-n)/2)o^2 x_{n-2}+ \text{etc.}$  Y los incrementos  $o$  y  $no x_{n-1}+((n_2-n)/2)o^2 x_{n-2}+ \text{etc.}$ , estarán entre sí como 1 y  $nx_{n-1}+((n_2-n)/2)o x_{n-2}+ \text{etc.}$  Desvanézanse ahora aquellos incrementos, y su última razón será 1 a  $nx_{n-1}$ . Y por eso, la fluxión de la cantidad  $x$  es a la fluxión de la cantidad  $x_n$  como 1 a  $nx_{n-1}$ ".*

**Obsérvese la terminología y se comprenderá de inmediato la enorme fortuna de enseñar y aprender en este siglo.**

Por si fuese necesario en su obra Principia Mathematica "aclarar" el concepto de límite:

*"Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales".*

Leibnitz (1646-1716), por su parte preocupado por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de la matemática, contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría sobre las diferenciales. Se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Usa una notación que perdura actualmente, pero no aclara lo que, para él significa "infinitamente pequeño". Para peor, a veces habla de "infinitamente, infinitamente pequeño".

La concepción que subyace en esta etapa es una concepción geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas de índole geométrica. La noción de límite en realidad se encuentra implícita, y se ve una evolución de su estatus, pasando de ser una noción que ni siquiera se explicita como útil al ser, con los infinitésimos y las razones primeras y últimas de Newton, una herramienta para resolver problemas.



Ahora bien, esta idea de límite como aproximación sin más no basta. Por una parte, la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados, pero hasta Newton esta posibilidad no se plasma claramente en el hecho de que los objetos se han de aproximar "más que cualquier diferencia dada", lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles

***Etapas 2: Segunda mitad del siglo XVIII. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal.***

Utilizando infinitésimos pequeños y grandes, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de la época obtienen solución para muchos de sus problemas. La dificultad más importante para el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones, para lo que se requería una idea clara de dependencia funcional y, para ello, fue necesario investigar el significado del concepto de función y sus manipulaciones algebraicas. Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, buscaban eliminar lagunas y clarificar los matices místicos, no se dieron cuenta de la necesidad del concepto de límite

Euler (1707-1743) toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas, que, desde entonces, se llama *Análisis* y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Se plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales

D'Alembert (1717-1783) crea la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. En el tomo IX de la *Encyclopédie*, D'Alembert escribe la siguiente definición de límite:

*Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se*

*aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable.*

En esta definición las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar, y así, aunque la aproximación es objetiva no se puede tener un control completo de la misma. Lagrange (1736-1813) trabajó con desarrollos de funciones en series de potencias. Los resultados conseguidos le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

### ***Etapas 3: Siglo XIX y principios del siglo XX. Aritmetización del análisis.***

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último, en la que fueron determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, y la evolución de la enseñanza de las matemáticas, que tras la Revolución Francesa pasa de ser una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica. (nota del autor: Napoleón Bonaparte, como buen artillero conocía y respetaba la matemática. Fue el gran impulsor de esas escuelas, que aun perduran con éxito) Los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas.

De estos matemáticos se destacan Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

Cauchy (1789-1857). Retoma el concepto de límite de D'Alembert, rechazando el planteamiento de Lagrange, prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, dándole un carácter más aritmético, más riguroso pero aún impreciso. La definición de límite que propone Cauchy (1821) es la siguiente:

*..., cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco*

*como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás*

La noción de límite dada por D'Alembert es más objetiva que la de Cauchy, ya que en ésta aparece el término "tanto como queramos" que la subjetiviza. Define además infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero

Cauchy basa todo el análisis en el concepto de límite.

Bolzano (1781-1848) da una definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Weierstrass (1815-1897) contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis, dando una definición satisfactoria de número real y otra del concepto de límite.

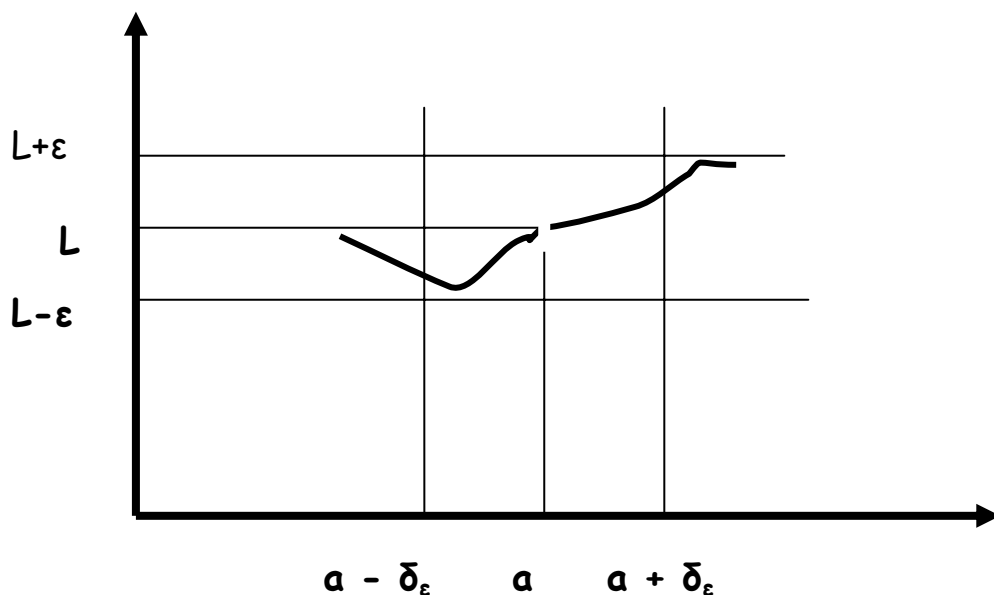
Weierstrass criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que, según él, esto sugiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, que aparece en la obra de su discípulo Heine *Elemente*, es la siguiente:

*"Si, dado cualquier  $\varepsilon$ , existe un  $n_0$ , tal que para  $0 < n < n_0$ , la diferencia  $f(x_0 \pm n) - L$  es menor en valor absoluto que  $\varepsilon$ , entonces se dice que  $L$  es el límite de  $f(x)$  para  $x = x_0$ ".*

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma. Sin embargo, esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye una cuarta etapa en el desarrollo del concepto.

Todo el esfuerzo realizado en más de dos milenios permite presentar la siguiente

**Definición:** Sea  $f$  una función y  $a$  un número real, el número  $L$  es el límite de la función  $f$  en el punto  $a$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  (se lee límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $L$ ), si cuando  $x$  tiende a  $a$ , siendo distinto de  $a$ , sus imágenes,  $f(x)$ , tienden a  $L$ .



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \varepsilon > 0$$

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$$

Esta es la famosa definición  $\varepsilon, \delta$  que desconcierta a la mayoría de los que tratan de estudiarla y sobre todo si es la primera vez que lo intentan. Varios factores son contribuyentes al desconcierto.

La humanidad empezó a lidiar con el concepto de límite, sin ser capaz de explicitarlo, desde Eudoxo hasta el siglo XX, donde llegó a lo que ahora se conoce como límite. Tratar de asimilar más de dos milenios en dos clases de Análisis Matemático es directamente una proeza intelectual, que los grandes de la historia del pensamiento matemático no lograron.

La definición de límite aceptada es psicológicamente crispante. Todo el discurso del análisis se desarrolla sobre funciones en las que, dado un valor de  $x$ , a por ejemplo, valor que, a través de la función  $f(x)$  permite obtener el valor  $f(a)$ . Es decir, se va de abscisa a ordenada o, coloquialmente, de eje horizontal a eje vertical. En la definición de límite es al revés. Se arranca por un número  $L$ , ordenada y se "baja" a abscisa. Es decir el camino inverso al usual.

## PREGUNTAS A SER CONTESTADAS EN LA PARTE II

La definición avanza diciendo "se dice que el número  $L$  es el límite de ...." , pero ¿acaso alguien dice de dónde sale ese número  $L$ ? Nadie lo dice. ¿Por qué ese valor  $L$  y no otro cercano a él?

Sigue diciendo "cuando el valor absoluto de la diferencia entre la función y el límite sea menor que un  $\varepsilon$  positivo, y algunos machacan "tan pequeño como se quiera". ¿De dónde sale  $\varepsilon$ ?, ¿Qué quiere decir pequeño?, ¿Ese  $\varepsilon$  es fijo o es variable?

El valor absoluto de la diferencia entre  $f(x)$  y  $L$  es una distancia. ¿Por qué no se lo dice?

El tema empeora. Está claro que  $x$  no puede valer  $a$  ¿por qué? Pero además el valor absoluto de  $x-a$  tiene que ser menor a un  $\delta_\varepsilon$ . ¿Qué quiere decir eso? ¿Acaso que  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ ? ¿Cómo?, entonces ¿por qué no escriben  $\delta(\varepsilon)$ ?

¿Cuál es la única forma de saber que un número  $L$  es el límite de  $f(x)$  para  $x \rightarrow a$ ?

Todas esas preguntas tienen que ser contestadas y hacerlo y mucho menos entenderlo no es cosa simple. Y hay que hacerlo porque todo, absolutamente todo el análisis está preñado de este concepto.

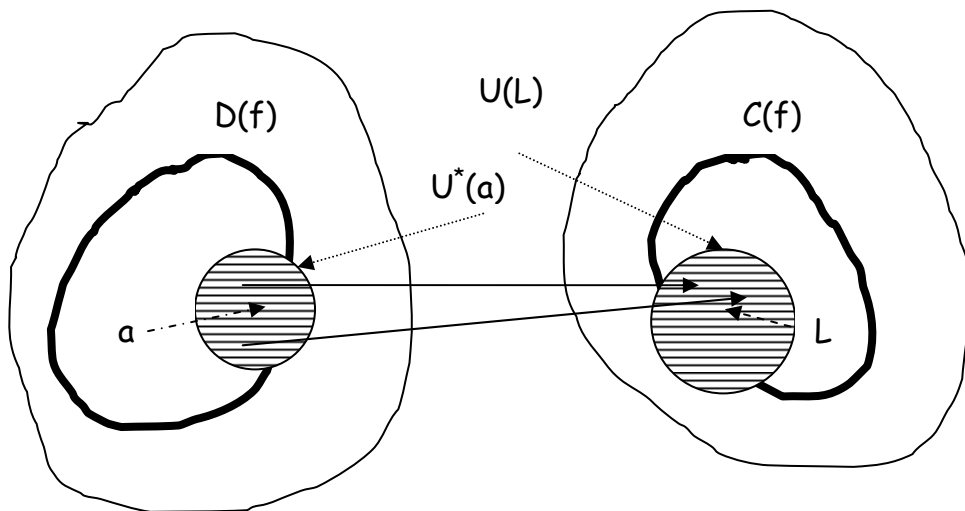
Utilizando una nomenclatura de entornos, la definición de límite funcional se reduce a lo siguiente (topológica)

**Definición:** El número  $L$  es el límite de  $f(x)$  para  $x$  tendiendo a  $a$  si para todo entorno de  $L$  existe un entorno reducido de  $a$  de forma tal que

cada  $x$  perteneciente al entorno reducido de  $a$  y al dominio de la función tiene una imagen  $f(x)$  en el entorno de  $L$

$$\forall U(L) \exists U^*(a) / \forall x \in [U^*(a) \cap D(f)], f(x) \in U(L)$$

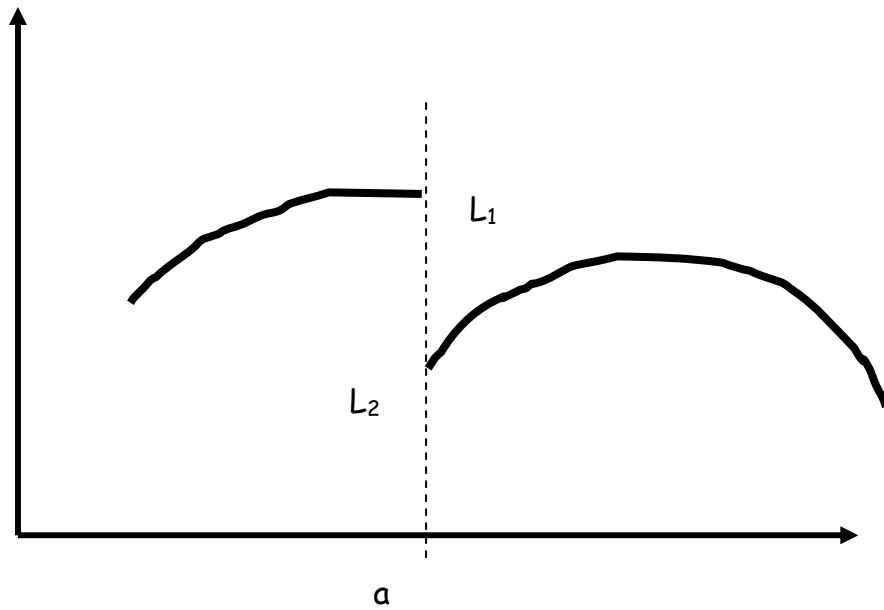
Con la siguiente interpretación gráfica



¡Más de dos milenios en un renglón! Magnífica oportunidad para reflexionar lo que cuesta lograr **una idea clara!**

## LIMITES LATERALES

Es posible también definir los límites laterales. Estos son especialmente útiles cuando hay que lidiar con funciones que presentan el siguiente aspecto.



se definen

Límite por la izquierda

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$a - \delta < x < a$$

Límite por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$a < x < a + \delta$$

Naturalmente si existe límite  $L$ , debe ser  $L_1 = L_2$

## INFINITÉSIMOS

Junto al concepto de límite se aclaran otros dos conceptos importantes: el de infinitésimo o infinitamente pequeño y el de continuidad.

Decir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

es lo mismo que decir que la diferencia  $f(x) - L$  es una nueva función  $\varphi(x)$  con límite cero(0) en  $x=a$

$$\varphi(x) = f(x) - L$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

De eso simplemente se deriva la importancia de las funciones con límite cero.

**Entonces se define: toda función con limite cero en un punto es un infinitésimo en ese punto.**

Por ejemplo,  $\sin(x)$  es infinitésimo en  $x = 0$ ,  $x = \pm\pi$ ;  $x = \pm 2\pi$ ;  $x = \pm 3\pi$ ;  $x = \pm 4\pi$ ;..., la función  $f(x) = x^2 + 1$  no es infinitésimo en ningún punto y la función  $f(x) = e^{-x}$  es infinitésimo para  $x \rightarrow +\infty$

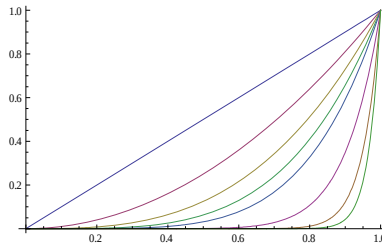
Inmediatamente se puede decir que toda función con límite es igual a este más un infinitésimo. (en un entorno de a)

$$f(x) = L + \varphi(x)$$

## COMPARACION DE INFINITESIMOS

El siguiente gráfico representa un conjunto de parábolas de la forma  $x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30$ , en  $[0,1]$ . Todas ellas infinitésimas en  $x = 0$ . Es fácil observar que la rapidez con que cada una de ellas se aproxima a cero es distinta. A mayor exponente mayor aproximación a cero, mayor "aplastamiento" de las curvas sobre el eje de abscisas.





Esta circunstancia se aprovecha para **comparar infinitésimos**

Sean entonces dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  infinitésimos en  $x = a$ . Esto quiere decir que ambas tienen límite nulo en ese punto. Para compararlas se calcula

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Caben para esta comparación dos valores significativos resultantes de la eliminación de la indeterminación.

Si este límite es nulo, se dice que el infinitésimo  $f(x)$  es de orden superior al infinitésimo  $g(x)$ . Esto quiere decir que al tender hacia cero ambas funciones cuando  $x \rightarrow a$ ,  $f(x)$  lo hace mucho más rápido que  $g(x)$ . El gráfico anterior es ilustrativo al respecto. En él es obvio que  $x^{10}$  tiende a cero mucho más rápido que  $x^2$ , por ejemplo.

Si el límite es igual a una constante  $\alpha \neq 0$  se dice que los infinitésimos  $f(x)$  y  $g(x)$  son del mismo orden y entonces en un entorno de  $a$  se puede poner  $f(x) \cong \alpha g(x)$ . Si  $\alpha = 1$  los infinitésimos  $f(x)$  y  $g(x)$  son equivalentes y entonces, en el entorno de  $a$  es  $f(x) \cong g(x)$ .

Particularmente esto ocurre con las funciones  $f(x) = \text{sen}(x)$  y  $g(x) = x$ . Calculado el límite indeterminado  $\text{sen}(x)/x$  este resulta igual a 1. En consecuencia, en un entorno del origen se puede aceptar que  $\text{sen}(x) \approx x$ . Esto ocurre hasta valores  $x = 5^\circ$  a  $7^\circ$  sexagesimales. Verificar con calculadora.

## ORDEN DE INFINITÉSIMOS

De inmediato surge el problema de determinar el orden de una función cualquiera  $f(x)$  en el punto en el que es infinitésimo.

Para ello se usa un infinitésimo de comparación o infinitésimo patrón, adoptando para el mismo la expresión  $\phi(x) = (x - a)^n$  y se calcula

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$$

para distintos valores de  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  hasta que el límite sea una constante. Cuando ello ocurre para  $n = n_0$ , se dice que  $f(x)$  es infinitésimo de orden  $n_0$  y se escribe  $f(x) = O(x^{n_0})$ .

Puede entonces decirse que, en la carrera hacia cero, la función  $f(x)$  va tan rápido como  $(x-a)^{n_0}$ . A todos los valores  $n < n_0$ ,  $f(x)$  les gana y todos los valores  $n > n_0$ ,  $(x-a)^n$  le gana la carrera a  $f(x)$ .

Recorrido el muy largo camino que necesitó el entendimiento humano para poner en claro el concepto de límite funcional, camino que empieza icuando no! en Grecia y termina (¿termina?) hace muy poco, hay un rosario de teoremas relacionados con el cálculo de límites.

#### Teorema 1

Si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen límites  $L_1$  y  $L_2$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , entonces la función  $f(x) \pm g(x)$  tiene límite  $L_1 \pm L_2$  cuando  $x \rightarrow x_0$

Entiéndase: el límite de una suma es la suma de los límites.

#### Teorema 2

Si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen límites  $L_1$  y  $L_2$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , entonces la función  $f(x)g(x)$  tiene límite  $L_1 L_2$  cuando  $x \rightarrow x_0$

Entiéndase: el límite de un producto es el producto de los límites

#### Teorema 3

Si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen límites  $L_1$  y  $L_2$  y  $L_2 \neq 0$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , entonces la función  $f(x)/g(x)$  tiene límite  $L_1 / L_2$  cuando  $x \rightarrow x_0$

Entiéndase: el límite de un cociente es el cociente de los límites. (si el límite del denominador es distinto de cero)

Hay varios más pero por favor ibasta con esto!

¿Cómo se calculan límites?

iQue pregunta!. Si se trata de una función "honesta" como por ejemplo

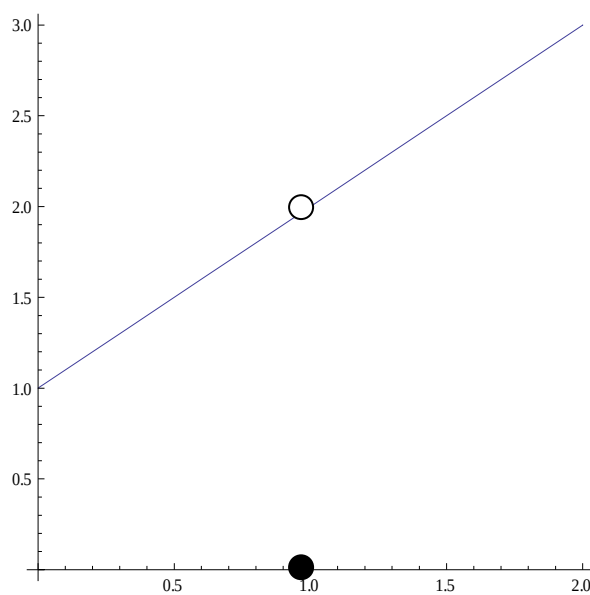
$$f(x) = 2x^3 + x - \frac{1}{x}$$

en el punto  $x = 1$ . (honesto) En este caso, simplemente se calcula el valor de la función

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 2x^3 + x - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Si la función no es "honesta" puede pasar lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \forall x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



en este caso

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

que no tiene nada que ver con el valor arbitrariamente asignado a la función en  $x = 1$ .

¿Por qué?

Porque si dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  toman los mismos valores en el entorno reducido del punto a sus límites son iguales. Por eso, en el ejemplo anterior el límite corresponde a la función  $g(x) = x + 1$  que, en el entorno reducido de  $a$  toma los mismos valores que  $f(x)$ .

Y algo más, esa propiedad es la que permite salvar las indeterminaciones, simplificando. Véase el siguiente caso.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$g(x) = x + 2$$

la función  $f(x)$  está indeterminada en  $x = a = 2$  mientras que la función  $g(x)$  no lo está en ese punto. Como  $g(x)$  es el resultado de una simplificación de  $f(x)$  válida en todo  $x \neq 2$  y toma los mismos valores que  $f(x)$  en  $U^*(2)$  su límite para  $x \rightarrow 2$  es el mismo que el de  $f(x)$ .

#### LIMITE INFINITO Y LIMITE PARA $X \rightarrow \infty$

Quedan por ver los dos casos mencionados.

En el primero se trata de aclarar el significado de

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

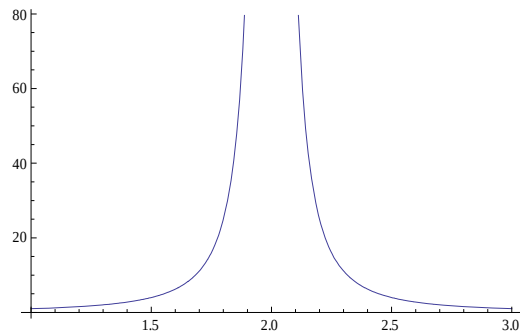
para este caso la definición anterior toma la forma

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$|f(x)| > M, M > 0$$

$$0 < |x - a| < \delta_M$$

es decir que el módulo de la función se puede hacer tan grande como se desee (mayor que cualquier constante  $M$  positiva) con tal de tomar  $x$  suficientemente próxima al punto  $a$ .



Esta es la gráfica de la función  $1/(x-2)^2$ . Cuanto más próximo a 2 está  $x$  más grande es el valor de la función que, para  $x \rightarrow 2$ , tiende a  $\infty$

En el segundo caso, se trata de aclarar el significado de

$$\lim_{x \leftarrow \infty} f(x) = L$$

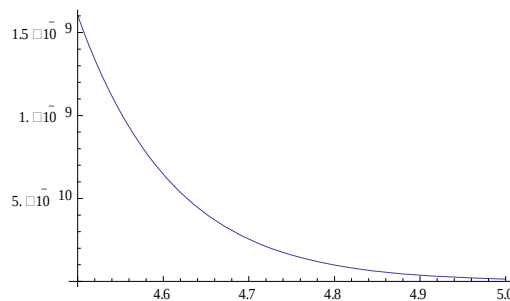
en este caso la definición correspondiente es la siguiente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|x| > N_\varepsilon$$

es decir que la diferencia en módulo entre la función y el límite se puede hacer tan chica como se desee con tal de tomar  $x$  suficientemente grande ( $> N$ )



La gráfica corresponde a la función  $e^{-x^2}$  que tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . Obsérvese la escala de ordenadas.

## INFINITOS

Así como hay funciones infinitésimos en un punto, también hay funciones infinitas. Es decir, hay funciones cuyo límite en  $x = a$  es infinito (menos infinito) (infinito,  $\infty$ , NO es un número, es un símbolo)

Estas funciones infinitas en  $a$ , también se comparan para ver cuales de ellas van más rápido hacia el infinito.

La escala es la siguiente, con  $x \rightarrow \infty$

|              |         |         |          |
|--------------|---------|---------|----------|
| $[\ln(x)]^m$ | $x^p$   | $q^x$   | $x^{kx}$ |
| $m > 0$      | $p > 0$ | $q > 1$ | $k > 0$  |

porque el límite del cociente de cada uno de ellos con el anterior tiende a infinito. De esto se deduce que las funciones potenciales exponenciales son las que más rápido tienden a infinito.

Las inversas de estas funciones son infinitésimos. Pueden ser usados como infinitésimos de comparación, además del potencial ya usado.

## CONTINUIDAD

La idea de continuidad está dentro de cada uno, porque cada uno hace su vida en un continuo llamado tiempo. El instante en que se leyó la "o" de tiempo fue un fugaz e irrepitable presente, el tiempo fluyó en forma continua y ahora el presente, único y nuevamente irrepitable, se da cuando se lea la siguiente letra, que instantáneamente se hará pasado y se preparará un futuro con las letras siguientes. El tiempo es continuo e infinitamente divisible, siendo el presente una fugaz quimera que, como si fuese un cursor, se desplaza con movimiento uniforme hacia el futuro. Atrás, está el pasado, adelante el futuro, y en el punto donde está el cursor, el inasible presente, porque cuando pensamos en él, sencillamente, ya fue.

Se supone que esta idea fue la que movió a Newton a hablar de fluentes y fluxiones dando a sus conceptos un carácter mecánico dado que el objeto de su estudio fueron los movimientos, las velocidades, aceleraciones, etc.

Esta divisibilidad infinita del tiempo se correlaciona perfectamente bien con la infinita divisibilidad de los intervalos reales. Recuérdese que fue demostrado que, entre dos reales cualesquiera, siempre hay otros infinitos números reales y compárese eso con el continuo fluir del tiempo y entonces la idea del continuo real estará clara.

El tema se complica cuando hay definida una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y es necesario ver si esta es o no es continua.

La historia del concepto es tan larga como la del concepto de límite pero este es más fácil de ser aceptado en forma intuitiva. En efecto, si  $y = f(x)$  se puede graficar con un único trazo es muy probable que sea una función continua. Obviamente esto no es una definición matemática aunque tal vez lo sea para un artista plástico. Como ese no es el caso, se continúa por el andarivel matemático.

Considérese entonces una función  $y = f(x)$  y un punto  $a$  de su dominio (primera diferencia con el límite. En el límite, como se trabaja con entornos reducidos, no interesa si el punto  $a$  está o no está en el dominio), en el estudio de la continuidad se analiza la continuidad o la discontinuidad **en un punto**, en consecuencia el punto de marras debe ser del dominio, porque si no lo es, allí no habrá función y si no hay función ¿de qué continuidad se puede hablar? Para ser hay que existir.

Siguiendo con la idea del trazo único y perfeccionándola se puede decir que "una función es continua en un punto de su dominio si, a cambios pequeños en  $x$  le corresponden cambios pequeños en  $y$ ". Bonito y digerible pero, ¿qué quiere decir cambios pequeños? ¿Acaso un poquitito así (juntando el índice con el pulgar)? No parece ser un concepto muy matemático. En consecuencia hay que seguir adelante hasta despejar formalmente el concepto.

Se sabe algo. La función  $f(x)$  existe en  $a$  y vale  $f(a)$ . Un cambio pequeño en  $f(a)$  es alejarse algo de ese valor. ¿Cuánto? Cualquier  $\varepsilon > 0$ . Entonces, por el lado de las ordenadas, cambio pequeño es

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \varepsilon > 0$$

si ese cambio (pequeño) es acompañado por un cambio pequeño en  $x$  de la forma

$$|x - a| < \delta_\varepsilon$$

estará claro que  $f(x)$  es continua en  $a$ .

Esto mismo puede escribirse de la siguiente forma

$$\Delta y = f(x) - f(a)$$

$$\Delta x = x - a$$

Ambos son infinitésimos para  $x \rightarrow a$  **y la relación entre ambos será motivo de todo lo que sigue en el curso**. Además con esto es claro qué quiere decir cambios pequeños en  $x$  dan cambios pequeños en  $y$ .

Pero todo lo dicho es sinónimo de decir para que la función sea continua en  $x = a$

1° Existe la función en  $x = a$  y vale  $f(a)$

2° Existe el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

3° Se verifica  $f(a) = L$

Con alarde de compacidad, se puede decir que una función es continua en  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Desde el punto de vista topológico la función  $f(x)$  es continua en  $a$  si

$$\forall U[f(a)] \exists U(a) / \forall x \in [U(a) \cap D(f)] f(x) \in U[f(a)]$$

obsérvese que el entorno de  $a$  no es un entorno reducido.

Se dice que  $y = f(x)$  es **continua en el  $(a,b)$**  si es continua en cada uno de los puntos del intervalo abierto  $(a,b)$ .

Se dice que  $y = f(x)$  es **continua por la derecha en  $x=a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$



Se dice que  $y = f(x)$  es *continua por la izquierda en  $x=a$*  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Se dice que  $y = f(x)$  es *continua en el  $[a,b]$*  si:

- 1°  $y = f(x)$  es continua en el intervalo abierto  $(a,b)$ .
- 2°  $y = f(x)$  es continua por la derecha en  $x=a$ .
- 3°  $y = f(x)$  es continua por la izquierda en  $x=b$ .

Como en el caso de límite, varios teoremas se refieren a las funciones continuas

#### Teorema 1 **TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL SIGNO**

Sea  $y=f(x)$  una función continua en  $x=a$  siendo  $f(a)$  distinto de 0. Entonces existe un entorno de  $x=a$  en el que los valores de  $f(x)$  tienen el mismo signo que  $f(a)$ .

#### Teorema 2 **TEOREMA DE ACOTACIÓN DE LA FUNCIÓN**

Si  $y = f(x)$  es continua en  $x = a$  entonces  $y = f(x)$  está acotada en un cierto entorno de  $x = a$ .

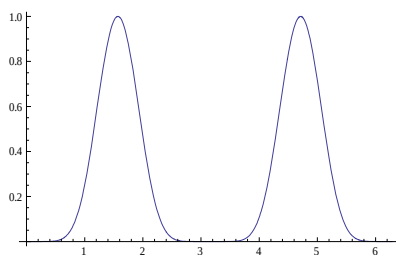
#### **Operaciones con funciones continuas.**

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones continuas en  $x=a$ , se tiene que:

- 1°  $f(x) + g(x)$  es continua en  $x=a$ .
- 2°  $f(x) g(x)$  es continua en  $x=a$ .
- 3°  $f(x) / g(x)$  es continua en  $x=a$  si  $g(a) \neq 0$
- 4°  $f(x)^{g(x)}$  es continua en  $x=a$  suponiendo que  $f(a)>0$  (para que tenga sentido la potencia).

#### Teorema 3: **CONTINUIDAD DE FUNCION DE FUNCION**

Una función continua de función continua, es continua.



La anterior es la gráfica de  $(\sin(x))^8$ . Siendo la función seno continua y también la potencia octava de una variable, la función dada es continua.

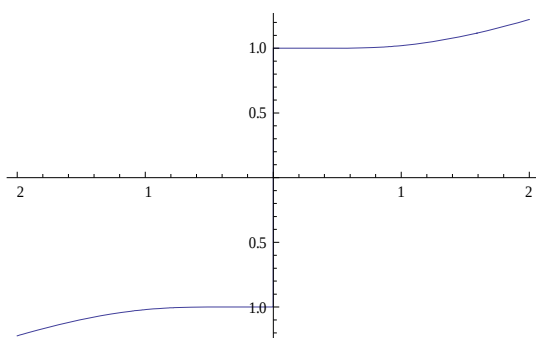
## DISCONTINUIDADES.

Se dice que una función  $y = f(x)$  es **discontinua en  $x = a$**  si no es continua en dicho valor de  $x$ , es decir, no cumple alguna de las tres condiciones de continuidad.

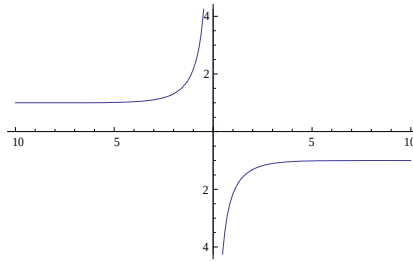
## TIPOS DE DISCONTINUIDADES

1° *Evitable:* Cuando existe el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pero no coincide con el valor de  $f(a)$  por una de estas dos razones, son distintos los valores o no existe  $f(a)$ .

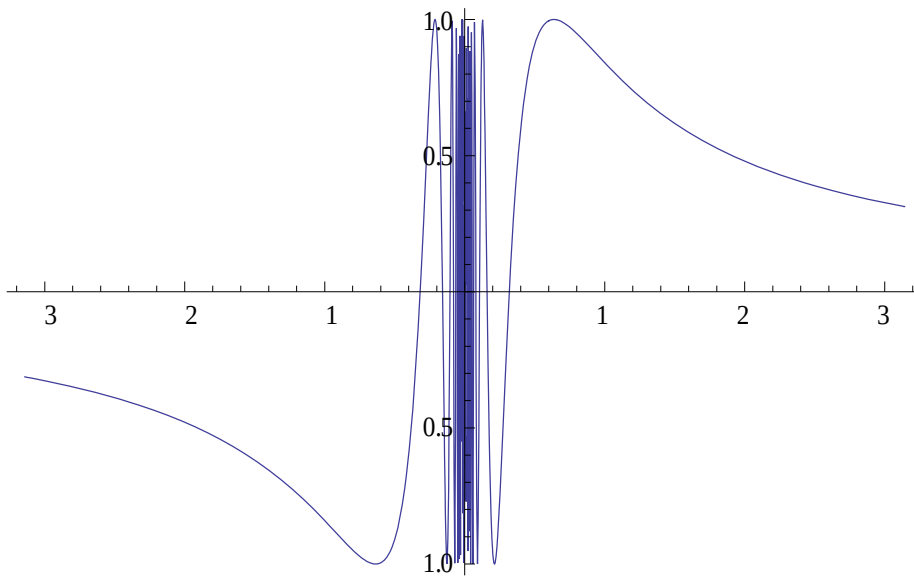
2° *De salto:* Cuando existe el límite por la derecha y por la izquierda y siendo ambos finitos no coinciden.



3° *Asintótica:* Cuando alguno de los límites laterales (o ambos) no es finito. Puede ser asintótica por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.



4° *Esencial:* Cuando no existe alguno de los límites laterales (o ambos). Puede serlo por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.



Si  $y = f(x)$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = a$ , se llama **verdadero valor de la función en  $x=a$**  al  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Dicho valor es el que convierte a la función en continua.

Si  $y = f(x)$  tiene una discontinuidad de salto en  $x=a$ , se llama **salto de la función en  $x=a$**  al valor  $|L_1 - L_2|$

## II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

Primero se discutirán las preguntas consignadas luego de la definición de límite analizando sus respuestas.

Luego se espera sean resueltos los límites indeterminados que se presentan a continuación. Si el tipo de indeterminación no está dado se puede utilizar el llamado "Método del Cubrimiento" (o de la tapadita) que consiste en cubrir uno de los operandos y ver que resulta del no cubierto. Luego se hace la operación inversa y, si los resultados son distintos, se grita ¡EUREKA! se ha encontrado una indeterminación y, además, se sabe el tipo de indeterminación.

Por ejemplo para analizar un cociente  $f(x)/g(x)$  para  $x$  tendiendo a "a". Se cubre (se tapa)  $g(x)$  y se evalúa  $f(a)$ . Resulta  $f(a) = 0$ . Se registra "cero dividido cualquier número da cero". Luego se cubre  $f(x)$  y se calcula  $g(a)$ . Resulta  $g(a) = 0$ . Se registra "Cualquier número dividido por cero es infinito". Por el primer cubrimiento da cero, por el segundo infinito. ¡Se ha encontrado una indeterminación  $0/0$ !

Se supone ahora una expresión del tipo  $f(x)^{g(x)}$ . Se tapa  $g(x)$  -el exponente- y se calcula  $f(a)$ . Resulta igual a 1. Se registra "uno elevado a cualquier potencia es uno". Se cubre  $f(x)$  y se evalúa  $g(a)$ . Resulta que tiende a infinito. Se registra "cualquier número mayor que uno elevado a una potencia que tiende a infinito, es infinito. Entonces ¿qué da? ¿Uno o infinito? ¡Indeterminación del tipo  $1^\infty$ !

De la misma forma se pueden analizar las indeterminaciones  $\infty/\infty$ ;  $\infty-\infty$ ;  $\infty^0$ ; etc.

01 Calcular los siguientes límites indeterminados de la forma  $0/0$ .

01 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{3x^2 - 4x - 4}$$

02 
$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{9x^4 + 60x^3 - 52x^2 + 16x + 32}{x^3 + 4x^2 - 5x - 20}$$

$$03 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$$

$$04 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 + 17x^2 + 20x - 75}{3x^3 + 31x^2 + 85x + 1}$$

$$05 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5}{x^4 - a^4}$$

$$06 \quad \lim_{x \rightarrow -a} \frac{a^4 - x^4}{a^5 + x^5}$$

$$07 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x-2}}$$

$$08 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$$

$$09 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3-4x}}$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d} - \sqrt{dx+c}}$$

02 Calcular los siguientes límites indeterminados de la forma  $\infty/\infty$

$$01 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x - 3x^3 + 1}$$

$$02 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 8x + x^7}{3x^2 - 2x + x^3}$$

$$03 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 9)(3x^2 + 8)}{(4x^5 - 9)(3 - 2x)}$$

$$04 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 1)(3x^2 + 2)(3x^2 + 3)}{(2x^3 - 1)(2x^3 - 2)(2x^3 - 3)}$$

$$05 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^3 - 1)^2(2x^2 - 3)}{(x^2 - 8)^2(16x^4 + 81)}$$

Generalizar para el cálculo de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  según el grado de los polinomios P y Q

03 Calcular los siguientes límites indeterminados de la forma  $0 \cdot \infty$

01 
$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - x) \sqrt{\frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^4 + x^3}}$$

02 
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^6 - 1}}$$

03 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x + 1}{x^4 - 2} \sqrt[5]{\frac{8 - 5x^2}{1 + x}}$$

04 Calcular los siguientes límites indeterminados de la forma  $\infty - \infty$

01 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x+1}{(x-1)^2} - \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4-1}} \right]$$

02 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x-2})$$

03 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$$

05 Calcular los siguientes límites teniendo en cuenta conceptos sobre infinitésimos e infinitésimos equivalentes.

01 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{bx}$$

02 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{\text{tg}(bx)}$$

03 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\text{sen}(bx)}$$

04  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{\operatorname{tg}(bx)}$

05  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{tg}^3(2x)}$

06  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3(4x)}{x \operatorname{sen}^2(6x)}$

07  $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\operatorname{sen}(x+a)}{x^3 + a^3}$

08  $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) [\cot g(2x) + \operatorname{cosec}(3x)]$

09  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) [3 \operatorname{tg}(2x) + 5 \cot g(4x)]$

10  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \sec(\pi x)$

06 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

01  $y = |x|$  Valor absoluto de  $x$ , en  $a = 0$  y en  $a = 2$

02  $y = \operatorname{sg}(x)$  Signo de  $x$ , en  $a = 0$  y en  $a = \pi$

03  $y = [x]$  Parte entera de  $x$ , en  $a \in \mathbb{N}$  y en  $a \notin \mathbb{N}$

04  $y = M(x)$  Mantisa o parte decimal de  $x$ , en  $a \in \mathbb{N}$

05  $y = \frac{10^{1/x} + 10^{-1/x}}{10^{1/x} - 10^{-1/x}}$  en  $x = a = 0$

06  $y = [x^2]$  parte entera de  $x^2$

07  $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \forall x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

08  $y = \frac{\text{sen}(x)}{|x|}$  en  $x = 0$

09  $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$  en  $x = 0$  y en  $x = 1$

10  $y = x\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$  en  $x = 0$