ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 11

SUCESIONES Y SERIES

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

Se inicia esta Guía de Estudio y Práctica con una mención especial a Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, autor de una de las más célebres sucesiones –si no la más célebre- de múltiples aplicaciones e invalorable aplicación para la interpretación de distintas manifestaciones de la naturaleza. La búsqueda de la información que se agrega se hizo a través de Internet, en especial, la página El ubicuo Fibonacci, sección zapping de Axon Nº 231

Siglo XII. En 1170, los normandos atacan a los irlandeses en Baginbun y los destrozan, mientras Gervasio de Canterbury y los astrónomos chinos documentan un tránsito de Marte frente a Júpiter. El judío sefaradí Benjamín de Tudela viaja por todo el mundo conocido para censar a los judíos existentes, y llega a la conclusión de que 8 millones de ellos están repartidos por el planeta. El Valle del Bekaá es devastado por un espantoso terremoto de más de grado 7 en la Escala de Mercalli. Ricardo Corazón de León, mientras tanto, reina en Inglaterra.

Entre tantos eventos importantes, un tal Bonaccio, residente en Pisa (donde, según Benjamín, vivían 20 judíos) celebra el nacimiento de su hijo Leonardo. Como era vástago de Bonaccio, casi nunca nadie conoció al niño como Leonardo de Pisa, sino como "el hijo de Bonaccio", esto es, **Fibonacci**.

Bonaccio, por entonces director de una aduana italiana en Argelia, necesita que su hijo sepa de números, por lo que obliga al chiquillo a estudiar aritmética posicional hindú. Milagrosamente, Fibonacci descubrió en las matemáticas el amor de su vida. Nunca más las abandonó.

El aporte de Fibonacci a la matemática es tan grande y tan profundo que prácticamente no puede ser medido. Por la época en la que vivió, el sistema de numeración arábigo era poco menos que una curiosidad: todo el mundo usaba los números romanos. Y ya se sabe lo difícil que es multiplicar por no hablar de dividir con números romanos.

Fibonacci, recordando el curso de aritmética hindú aprendido de niño, escribe, en 1202, su tratado *Liber abaci* ("El Libro del Ábaco") que es, ni más ni menos, un tratado sobre el sistema numeral indoarábigo. En él presenta al público y a los científicos europeos los signos hindúes (1, 2, 3...) y el 0 árabe, donde dice que se llama "cero" (*quod arabice zephirum appellatur*). Además, expone el método de *regula falsi* para ecuaciones de primer grado. Nada menos que eso, algo insólito para un libro del siglo XIII en una sociedad que no usaba el cero.

Nota del autor: resultaría injusto olvidar la mención de Alexandre de Villedieu, Franciscano Francés y John de Hallifax, llamado Sacrobosco quienes, junto a Fibonacci merecen el crédito de haber popularizado el "algorism" de la numeración indoarábiga. *Carmen de Algorismo* es un poema de Alexandre de Villedieu donde las operaciones con enteros están descriptas junto al uso del cero como número. Sacrobosco hace lo propio en un tratado de astronomía llamado *Algorismus Vulgaris* utilizado profusamente en la edad media.

Otro libro de Fibonacci, *De quadratis numeris* (1225) es tan avanzado que hubo que esperar a Fermat (en el siglo XVII) para superarlo

Las sucesiones de Fibonacci fueron bautizadas en honor del italiano por el teórico francés Edouard Lucas.

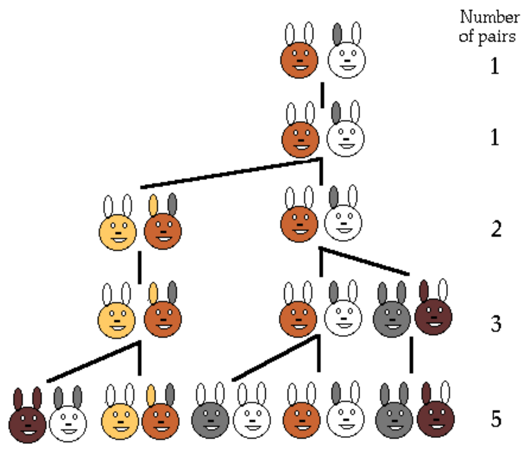
Una sucesión de Fibonacci es aquella donde cada número es el resultado de sumar los dos que lo preceden. Así, la primera y más básica sucesión de Fibonacci es

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

respondiendo a la fórmula

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

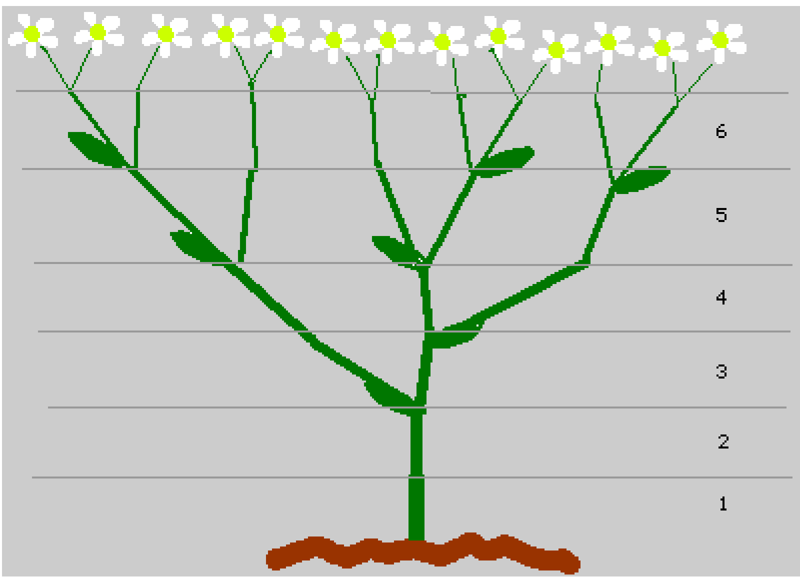
Según la historia esta sucesión surge al estudiar la … propagación de conejos.



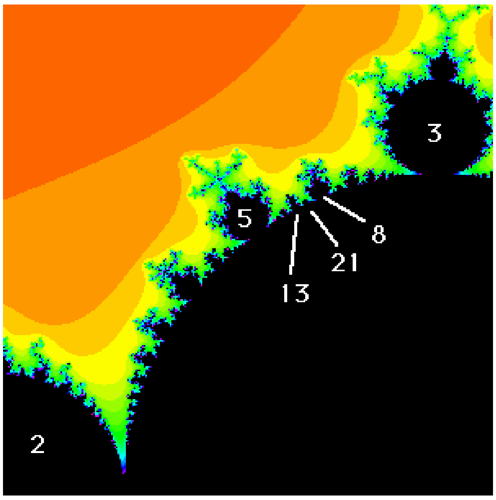
Lo interesante de las sucesiones de Fibonacci es que prácticamente cualquiera (con la sola condición de que domine la aritmética básica) puede investigarlas, descubrirles nuevas propiedades y desarrollar teoremas propios, inéditos y curiosísimos sobre ellas. Parecen existir infinitos teoremas de Fibonacci, y amateurs matemáticos casi absolutos han escrito y publicado interminable cantidad de sesudos libros acerca de ellos.

Además, las sucesiones de Fibonacci aparecen en infinidad de objetos de la naturaleza.

Si se observa un árbol, en la primera parte hay un tronco, le sigue, en la segunda, una parte más fina, en la tercera, dos ramas, en la cuarta, tres, luego cinco y ¡Fibonacci presente!



Las aplicaciones de los números de Fibonacci son también, al parecer, infinitas: se utilizan en generación de números al azar, en la búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones complejas de las que se ignora la derivada, en trabajos de clasificación de datos, en recuperación de información en computadoras, y mil etcéteras más.



Los fractales son sucesiones de Fibonacci

Entre las muchas curiosidades de las sucesiones de Fibonacci, una de las más extrañas propiedades de las mismas es que la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y por debajo de la razón áurea, y que a medida que avanzamos en la serie, la diferencia de la razón de Fibonacci con la razón áurea se va haciendo cada vez menor. En teoría, cuando llegásemos al último par de números, resultaría

1,61803...

que es, precisamente, la llamada "razón áurea".

La afirmación anterior se demuestra fácilmente. En el ejemplo,

3 / 2 = 1,5

bastante por debajo de la razón áurea. Pero

5 / 3 = 1,66

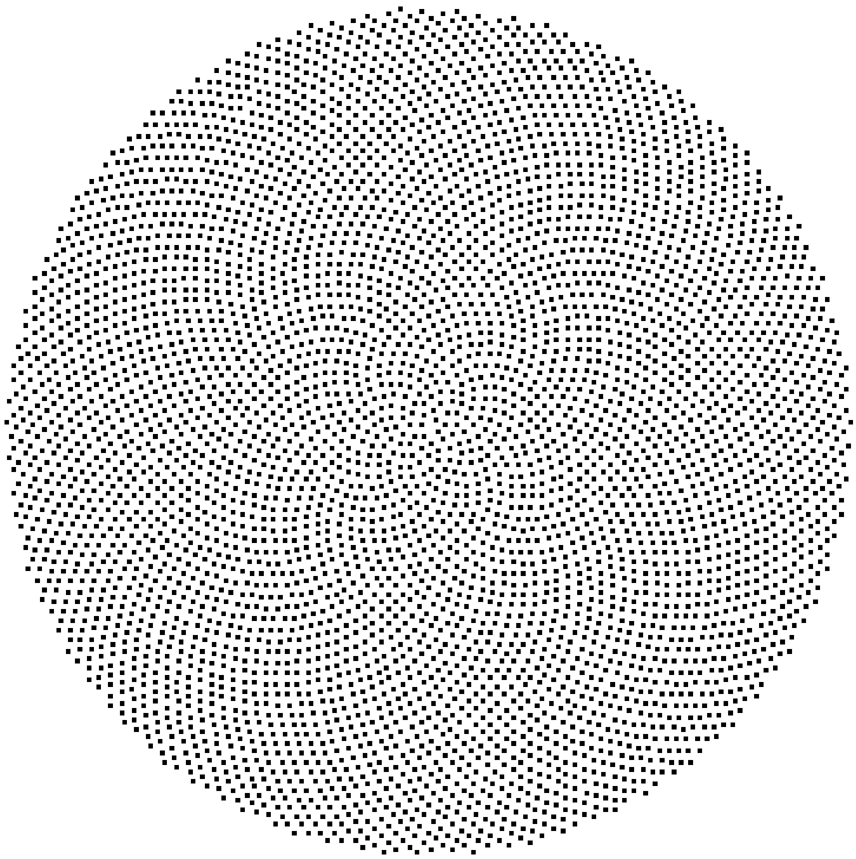
algo por encima, pero menos que antes. Siguiendo resulta

8 / 5 = 1,6 ; 13 / 8 = 1,625 ; 21 / 13 = 1,6153 y 34 / 21 = 1,61904

lo cual ya se acerca bastante.

Las extrañas apariciones de las sucesiones de Fibonacci y de la razón áurea han dado lugar a interminables especulaciones y análisis y, por supuesto, a una abundante bibliografía. Se sabe que los caparazones espirales de muchos caracoles se rigen por ella, como ciertas proporciones de la anatomía humana, animal y vegetal. También se han hallado manifestaciones de estas entidades en las artes plásticas, la arquitectura y la poesía. Varios bardos romanos, especialmente Virgilio en la Eneida, parecen haber utilizado las series de Fibonacci en la estructura de sus obras poéticas.

En las ciencias naturales, es bien conocida la estructura de Fibonacci en la disposición de las semillas en los girasoles. Las semillas, ubicadas en la gran parte central de las flores, tienen una implantación en espiral: hay dos grupos de espirales, gobernadas por dos funciones logarítmicas. Un grupo gira en sentido horario y otro en el antihorario. La cantidad de espirales logarítmicas en cada grupo sigue números de Fibonacci consecutivos.



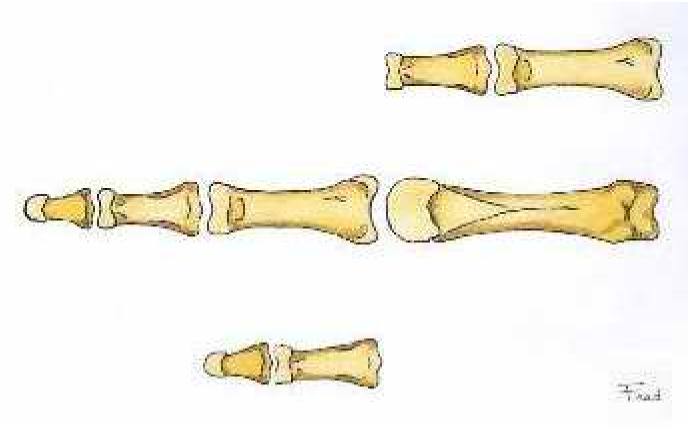
Disposición de Fibonacci de las semillas del girasol

Las abejas también tienen relación con los números de Fibonacci: si se observan las celdas hexagonales de una colmena y se coloca a una abeja en una cualquiera de ellas, y se le permite alimentar a la larva, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, hay sólo una ruta posible para la siguiente celdilla; dos hacia la segunda, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, etcétera.

Los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente una distribución de Fibonacci. En efecto, los machos no tienen padre, por lo que él (1), tiene una madre (1, 1), dos abuelos —los padres de la reina— (1, 1, 2), tres bisabuelos —porque el padre de la reina no tuvo padre— (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5) y ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8).

También la física parece adorar las sucesiones de Fibonacci. Si se colocan dos láminas planas de vidrio en contacto y se hace que unos rayos luminosos las atraviesen, algunos (dependiendo del ángulo de incidencia) las atravesarán sin reflejarse, pero otros sufrirán una reflexión. El rayo que no sufre reflexión tiene sólo una trayectoria posible de salida; el que sufre una reflexión tiene dos rutas posibles; el que sufre dos reflexiones, tres trayectorias, el que experimenta tres reflexiones, cinco, y así sucesivamente. Tenemos aquí nuevamente una sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8... Si se aumenta el número de reflexiones (n), el número de trayectorias posibles sigue una sucesión de Fibonacci.

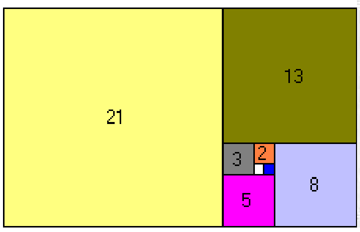
La mano humana es, también, una sucesión de Fibonacci. La longitud del metacarpo es la suma de las dos falanges proximales; la longitud de la primera falange es la suma de las dos falanges distales

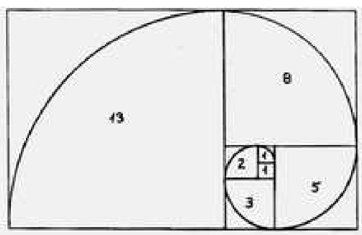


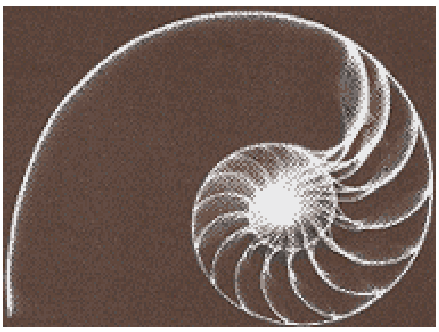
Si se toma un grupo de fichas de dominó, de tamaño 2 x 1, la cantidad de maneras de construir rectángulos de tamaño 2 x n será, por supuesto, una sucesión de Fibonacci. Hay una sola forma de armar un rectángulo de 2 x 1; dos de construir el de 2 x 2; tres de hacer el de 2 x 3, cinco para el de 2 x 4; ocho para el de 2 x 5, etc.

Desde siempre, los matemáticos se vieron perturbados por la relación entre los números de Fibonacci y los números primos. La pregunta era: ¿puede una sucesión de Fibonacci contener series infinitas de números primos? La respuesta es sí.

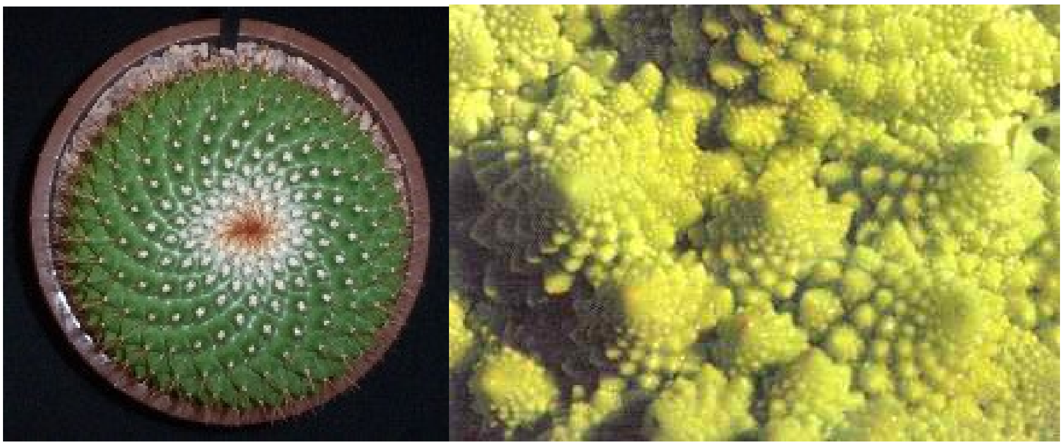
Para finalizar esta introducción se construyen dos cuadrados de lado uno, con lado dos se construye un nuevo cuadrado, con lado tres, otro y asi sucesivamente. Rápidamente se puede apreciar una espiral y esta espiral se corresponde a la caparazón de un molusco.







Fibonacci en un cactus y en verduras (también está en las piñas)



Así se lo recuerda, en mármol

Sucesiones numéricas

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto N (o, a veces, N_0) en R, de tal forma que, a cada número natural n le corresponde uno y sólo un número real denominado a_n en lugar de usar la notación a = f(n)

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...\}$$

Los números a_1, a_2, etc. son los términos de la sucesión. El término a_n es el término genérico de la sucesión. Obsérvese que los tres puntos finales colocados luego de a_n constituyen un símbolo matemático que debe ser entendido como "y así hasta infinito"

Se incluyen a continuación tres ejemplos arbitrarios de sucesiones. La primera es la sucesión $\{a_n\} = \{ 1/n\}$

$$\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10,\ldots\}$$

La segunda es la sucesión $\{a_n\} = \{ (2^n-1)/n^2\}$

$$\{1, 3/4, 7/9, 15/16, 31/25, 7/4, 127/49, 255/64, 511/81, 1023/100,\ldots\}$$

La tercera es la sucesión $\{a_n\} = \{ n^{(1/n)}\}$

$$\{1., 1.41421, 1.44225, 1.41421, 1.37973, 1.34801, 1.32047, 1.29684,\ldots\}$$

En los casos presentados se ha definido la sucesión mediante una expresión o fórmula que proporciona los términos de la misma. Otra forma de definirlas es dando alguna característica de sus términos, por ejemplo la sucesión formada por todos los números naturales cuyo dígito de unidades sea cuatro (4)

$$\{a_n\} = \{4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, \ldots\}$$

Otra forma de definirlas es mediante una expresión de recurrencia (del latín *recurrire*, volver al origen), estableciendo una relación entre el término enésimo y los anteriores a él. Por ejemplo la ya mencionada sucesión de Fibonacci está definida por la recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} & n > 2 \end{cases}$$

En este caso puede demostrarse que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Por último se pueden definir de manera completamente arbitraria siempre y cuando medie una ley de formación, por ejemplo:

Término de la sucesión	**Ley de formación**
1	Uno
11	Un uno
21	Dos unos
1211	Un dos, un uno
111221	Un uno, un dos, dos unos
21112211	Dos unos, un uno, dos dos, un uno
1221112221	Un dos, dos unos, un uno, dos dos, dos unos.
11222111221211	Un uno, dos dos, dos unos, un uno, dos dos, un dos un uno.
…………………………………………………	…………………………………………………

Monotonía de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n$$

y es estrictamente creciente si

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n$$

Obsérvese que la única diferencia entre sucesión creciente y estrictamente creciente es que en la segunda la desigualdad debe cumplirse necesariamente mientras que en las crecientes puede haber igualdad entre términos sucesivos

Una sucesión es monótona decreciente si

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n$$

y es estrictamente decreciente si

$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall n$$

Vale en este caso la misma observación anterior.

Demostrar en crecimiento o decrecimiento de una sucesión suele requerir el uso de inducción completa o de reducción al absurdo. Sin embargo, en ocasiones puede tomarse una función de variable real f tal que f(n) = a_n y estudiar el signo de la derivada primera de esta función para determinar crecimiento o decrecimiento. Si f es monótona creciente (decreciente) la sucesión $\{a_n\}$ también lo será.

Acotación

La sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n.

La sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe un número M tal que $M \leq a_n$ para todo n.

La sucesión $\{a_n\}$ está acotada si está acotada superior e inferiormente es decir si

$$|a_n| \leq M \qquad \forall n$$

Subsucesiones

Una sucesión $\{a^*_n\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ si existe una aplicación f(n) de N en N estrictamente creciente tal que $a^*_n = a_{f(n)}$

Por ejemplo, dada la sucesión

$$\{a_n\} = \{a_1, a_3, a_3, a_4, ..., a_n, ...\}$$

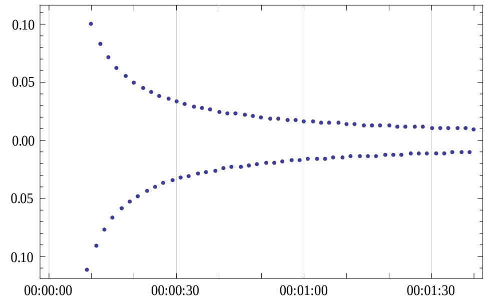
Las siguientes son subsucesiones posibles

$$\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, ..., a_{2n}, ...\}$$
$$\{a_{2n-1}\} = \{a_1, a_3, a_5, a_7, ..., a_{2n-1}, ...\}$$
....
$$\{a_{nprimo}\} = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, ...\}$$
....

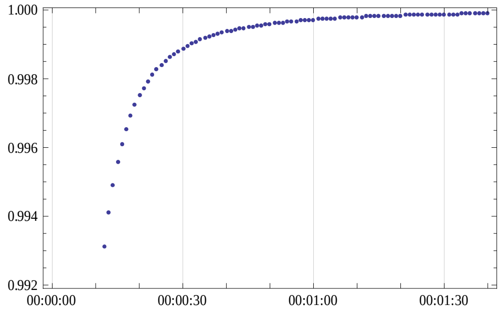
Convergencia de una sucesión

A continuación se agregan gráficos (obviamente no continuos) en los que se representan los términos de distintas sucesiones

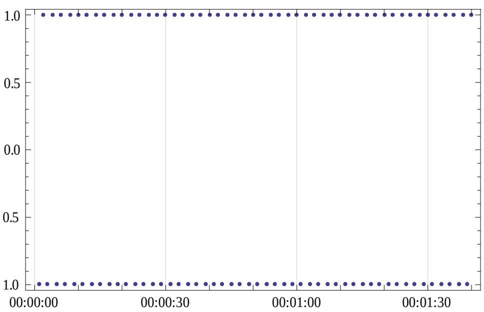
$\{a_n\} = (-1)^n / n$



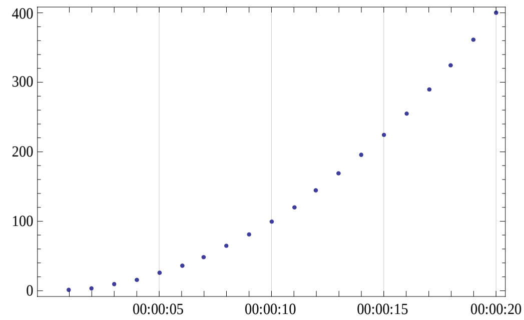
$\{a_n\} = n^2/(n^2+1)$



$\{a_n\} = (-1)^n$



$\{a_n\} = n^2$



En la primera y en forma absolutamente intuitiva puede inferirse que, al crecer n, los términos de la sucesión (los puntitos) tienden a 0; en la segunda, tienden a uno (1); en la tercera tienden a +1 o a -1 y, en la cuarta parece que crecen más allá de todo límite.

Estudiar la convergencia de una sucesión consiste precisamente en investigar a qué valor tiende el término genérico de la misma cuando $n \to \infty$.

Si tiende a un número finito l la sucesión se dice convergente, si tiende a ∞ o no existe el número l, la sucesión se dice divergente.

Los gráficos anteriores parecen indicar que las dos primeras son convergentes mientras que las restantes son divergentes.

Antes de definir límite de una sucesión (hecho que el lector debe estar sospechando hace un rato) se da un criterio general de convergencia llamado de Bolzano-Cauchy (cuando no ¡Cauchy!).

Condición necesaria y suficiente para que la sucesión

$$\{a_n\} = \{a_{1,} a_{2,} a_{3,} a_{4,} a_{5,} a_{6,} a_{7,} ..., a_{n,} ...a_{\upsilon,} ..., a_{\upsilon+p,} ...\}$$

de números reales sea convergente, es que para cada número positivo ε corresponda un valor υ de n, tal que todas las diferencias $a_n - a_{n+p}$, $n > \upsilon$, $p > 0$ entre términos posteriores a a_υ se conserva en valor absoluto menor que ε.

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, n > \upsilon, p > 0$$

Obsérvese que este criterio permite asegurar la convergencia de una sucesión sin conocer el valor del límite.

Límite de una sucesión

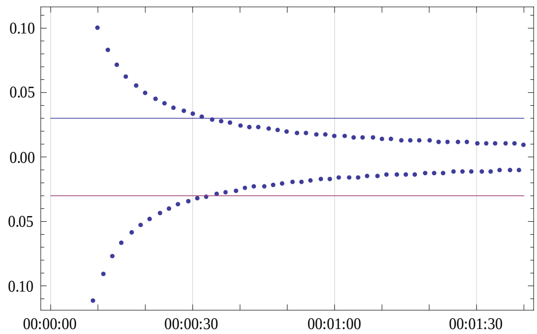
El número l es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ si se cumple que

$$\begin{aligned}&|a_n - l| < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0\\ &\forall n > N_\varepsilon\end{aligned}$$

es decir, si desde un término en adelante la diferencia entre este y el límite se puede hacer tan chica como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande (mayor que N_ε).

Por ejemplo, la sucesión $\{a_n\}=\{(-1)^n/n\}$ tiene límite cero (0) porque fijado un $\varepsilon > 0$ basta con tomar $N_\varepsilon > 1/\varepsilon$ para que la diferencia entre el término genérico y el límite sea menor que ε.

Obsérvese detenidamente que, en el intervalo $[l+\varepsilon, l-\varepsilon]$ después de N_ε hay infinitos elementos de la sucesión, mientras que, antes de $N\varepsilon$ solo hay un número finito de ellos.



Monotonía y convergencia

Se relacionan a continuación condiciones de monotonía y de convergencia:

- Toda sucesión convergente es acotada.
- Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.
- Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.
- Toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente es divergente.

El número e

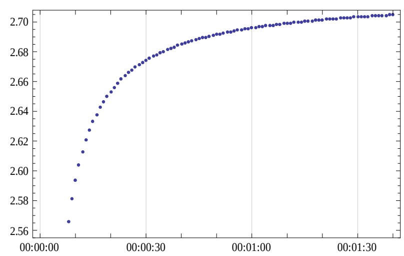
La sucesión $\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ es convergente y su límite es el número e, uno de los números más importantes de la matemática.

De acuerdo al teorema del binomio es

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n} =$$
$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

De esto surge de inmediato que $a_n < 3$ y que la sucesión es monótona creciente. En consecuencia, tiene límite finito. Ese límite es precisamente el número e, irracional y trascendente.

El siguiente gráfico indica el comportamiento de los términos de la sucesión que define al número e



Cabe señalar que la convergencia hacia el valor de e por este medio es muy lenta. A continuación se transcribe e con 40 decimales.

e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470937000…

Teorema de compresión

Este teorema es útil para estudiar la convergencia de algunas sucesiones.

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones. Se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = l$$
$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

Entonces la sucesión $\{c_n\}$ es convergente y su límite vale l

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l$$

Por ejemplo, la sucesión

$$\{c_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right\}$$

Es convergente pues está "comprimida" entre las dos sucesiones convergentes

$$\{a_n\} = \{0,0,0,0,\dots,0,\dots\}$$

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$$

Como ambas convergen a 0, $\{c_n\} \to 0$

Criterio de Stöltz César

Sea $\{b_n\}$ una sucesión creciente y divergente y $\{a_n\}$ otra sucesión. Si el límite

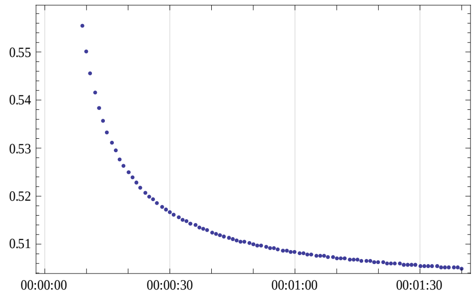
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

existe, entonces el $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ también existe y coincide con el anterior.

Por ejemplo la sucesión $\{c_n\} = \left\{ \frac{1+2+3+4+\dots+n}{n^2} \right\}$ cuyo término genérico puede interpretarse como el cociente entre la suma de los primeros n números naturales y n^2. La sucesión n^2 es creciente y divergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

Entonces, la sucesión dada converge a 1/2 . Por si queda alguna duda, se agrega el gráfico correspondiente a los cien primeros términos de $\{c_n\}$



Subsucesiones y convergencia

Una sucesión $\{a_n\}$ converge a l si toda subsucesión $\{a^*_n\}$ converge a l.

Sean $\{a^*_n\}$ y $\{a^{**}_n\}$ dos subsucesiones de $\{a_n\}$. Si

$$\lim_{n\to\infty} a^*{}_n = l$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{**}{}_n = l$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Esta propiedad puede utilizarse para demostrar la divergencia de algunas sucesiones. En efecto, si de una dada sucesión, se consideran dos subsucesiones con distinto límite, la sucesión dada es divergente.

Por ejemplo, de la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$ se pueden tomar las subsucesiones de índice impar y de índice par. La primera tiene límite menos uno (-1); la segunda uno (1), en consecuencia la sucesión dada es divergente.

Series numéricas

Dada una sucesión numérica $\{a_n\}$ se plantea el siguiente algoritmo

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots + a_k + \ldots$$

pero, como el algoritmo de la suma está definido para un número finito de términos, la expresión anterior carece de sentido. Obsérvese que nadie, ni aún la más poderosa computadora existente, puede sumar infinitos términos, pues por más rápida que sea, el tiempo requerido sería infinito y todavía le faltaría por lo menos, otro tanto y otro y...

Corresponde entonces aclarar el significado de la expresión planteada asociada a la sucesión $\{a_n\}$.

Para ello, yendo a cosas conocidas, se forma la denominada **Sucesión de Sumas Parciales** definida por

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k
\end{aligned}
$$

La sucesión $\{S_n\}$ se denomina Serie Numérica asociada a la sucesión $\{a_n\}$

Si existe $\lim_{n\to\infty} S_n = l$ la serie numérica se dice convergente y entonces (y solo entonces) se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y el número l se llama suma de la serie. En caso de tender a ∞ o no existir el límite la serie es divergente.

Obsérvese que, a través de las sumas parciales se han combinado los algoritmos de la suma y del paso al límite, permitiendo para las series convergentes extender a infinito el número de sumandos.

Casos notables

Se presentan a continuación dos casos emblemáticos de series numéricas. El primero es el de la serie denominada armónica y el segundo es el de la serie geométrica.

Serie Armónica

La serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{k}+...$ se denomina serie armónica y es **divergente.** En efecto

$$S_{2^n}=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)\geq$$

$$\geq 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2}\right)=1+n\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+n\frac{1}{2}\right)\to\infty$$

Todos los términos de la serie armónica son mayores o iguales a los de una serie divergente (minorante divergente), entonces la serie armónica diverge.

Según Sadosky (Sadosky - Guber, edición 1958, pág 523) Bernouilli y otros conocían esta característica de la serie armónica y agrega que, S_{1000} < 8; $S_{1.000.000}$ < 15; $S_{1.000.000.000.000}$ < 30 y $S_{10^{100}}$ < 232. Sin embargo esta suma puede hacerse tan grande como se quiera, superando a cualquier número por grande que este sea, tomando un número suficientemente grande de términos.

Serie geométrica

Se denomina serie geométrica a una serie donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por un factor constante q llamado razón de la serie

$$a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+...+aq^{n-1}+...$$

Se forma la suma parcial de orden n y se le resta la misma multiplicada por la razón q

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + ... + aq^{n-1}$$
$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + ... + aq^n$$
$$qS_n - S_n = aq^n - a$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Si $|q| > 1$ la serie es divergente, si $|q| < 1$ la serie es convergente y su suma vale

$$S = \frac{a}{1-q}$$

si q = 1 o q = -1 la serie es divergente.

No era tonto aquel que la historia nombra como el inventor del juego de ajedrez. El Sultán, agradecido le ofreció lo que quisiese. El inventor pidió un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera y así sucesivamente. El Sultán, poco avispado con series divergentes, accedió de inmediato. La sorpresa fue enorme cuando los contables del reino dijeron "Majestad, debemos entregarle 18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo. (Aprox. 1.019.180.000.000 tn) Tendremos hambre este año, el que viene y muchos otros más." Como a menudo ocurre, el inventor fue preso, condenado a cultivar trigo por haber osado intentar burlarse de la majestad del Sultán.

Condición necesaria de convergencia

Si una serie numérica $\{S_n\}$ asociada a la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

En efecto, dada la sucesión $\{a_n\}$ es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

la diferencia entre ambos elementos de $\{S_n\}$, $S_{n-1}-S_n = a_n$, es igual al término genérico de la serie. Pasando al límite cuando $n \to \infty$ se tiene.

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dado que S_{n-1} se puede considerar una subsucesión de $\{S_n\}$ teniendo entonces el mismo límite por ser convergente, por hipótesis, la serie numérica dada.

Un corolario importante es que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie es divergente.

Por ejemplo, la serie asociada a la sucesión $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ es divergente porque $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$

Obsérvese que la propiedad es solamente necesaria, lo que quiere decir que hay series cuyo término genérico tiende a cero y divergen. La serie armónica, por ejemplo.

Criterio general de convergencia

Se establece aplicando el criterio de Bolzano Cauchy para sucesiones a la sucesión $\{S_n\}$

$$\left|S_n - S_{n+p}\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0, n > \upsilon, p \in N$$

siendo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p} a_k$$

resulta

$$\left|S_n - S_{n+p}\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0, n > \upsilon, p \in N$$

Que puede expresarse diciendo: la condición necesaria y suficiente para que una serie numérica sea convergente es que la suma de p términos a partir de uno dado pueda hacerse tan pequeña como se quiera.

Dejando n fijo y haciendo tender p a infinito se tiene

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots + a_{n+p} + \ldots\right| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, n > \upsilon$$

lo que indica que prescindiendo de los n primeros términos de una serie convergente, la serie resultante, llamada serie resto, se puede hacer tan chica como se quiera con tal de tomar n > υ.

Esto es muy importante en las aplicaciones porque, en general, no se conoce la suma S de una serie convergente. Sólo se puede aproximar este valor mediante la suma de algunos (pocos, varios, bastantes, muchos, muchísimos, etc.) términos iniciales, cosa que se hace porque se sabe que el resto es "pequeño" y de poca influencia en los cálculos. Y que cuantos más términos iniciales se toman, más chico es el resto aunque no se lo conozca.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + T_n$$

También se puede plantear como condición de convergencia que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = 0$$

Series de términos positivos

Son las más importantes porque el estudio de las demás se reduce fácilmente al estudio de las mismas y también son las más sencillas.

La condición necesaria y suficiente para que una serie de términos positivos sea convergente es que sus sumas parciales S_n se conserven acotadas, $S_n < M$. Entonces, la suma es $S \leq M$

También se verifica que asociando o descomponiendo términos de una serie de términos positivos no varía su carácter convergente ni su suma. Lo mismo ocurre si se reordenan arbitrariamente sus términos.

Criterios de comparación.

Particularmente útiles son los denominados criterios de comparación para el estudio de la convergencia de series de términos positivos. Mediante ellos se comparan ordenadamente los términos de la serie en estudio con los de otras series cuyo comportamiento se conoce.

Mayorante convergente

Si los términos de una serie de términos positivos son menores o iguales que los correspondientes de otra serie convergente, es convergente.

Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie convergente, con suma U, verificándose que $a_k \leq u_k$, entonces $\sum a_k$ converge y su suma S es menor o igual a la suma U. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es una serie mayorante de la serie dada.

Minorante divergente

Análogamente puede decirse que, si los términos de una serie de términos positivos son mayores o iguales que los correspondientes de otra serie divergente, es divergente.

Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie divergente, verificándose que $a_k \geq u_k$, entonces $\sum a_k$ diverge. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es una serie minorante de la serie dada.

Estos criterios tienen sendos corolarios.

Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie convergente, con suma U, y la razón $\frac{a_n}{u_n} < \lambda, \lambda > 0$ entonces $\sum a_k$ converge y su suma S es menor o igual a la suma U.

Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie divergente, y la razón $\frac{a_n}{u_n} > \lambda, \lambda > 0$ entonces $\sum a_k$ diverge.

Series "patrón"

Las series que suelen tomarse como mayorantes o minorantes son la serie geométrica y la serie armónica o la armónica generalizada, siendo esta última la serie $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$, convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$

Criterios de convergencia de series de términos positivos

Se presentan a continuación criterios de convergencia de series de términos positivos cuyas demostraciones se basan en los criterios de comparación ya vistos en general con series geométricas y/o armónicas y son mucho más operativos que los criterios expuestos hasta el momento.

Criterio de D'Alembert

Sea una serie de términos positivos $\sum a_n$, se calcula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$$

Si L < 1 la serie es convergente, si L > 1 la serie es divergente y, si L = 1 el criterio no permite determinar convergencia o divergencia. En la demostración la serie de comparación es una serie geométrica.

Criterio de Cauchy

Sea una serie de términos positivos $\sum a_n$, se calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Si L < 1 la serie es convergente, si L > 1 la serie es divergente y, si L = 1 el criterio no permite determinar convergencia o divergencia. En la demostración la serie de comparación es nuevamente una serie geométrica.

Criterio de Kummer

Sea una serie de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum \frac{1}{u_n}$ una serie divergente. Se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1}\right) = L$$

Si L > 0 la serie $\sum a_n$ converge, si L < 0 la serie $\sum a_n$ diverge.

Criterio de Raabe

Consiste en tomar u_n = n en el criterio de Kummer (serie armónica) con lo que resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] = L$$

Si L > 1 la serie $\sum a_n$ es convergente, si L < 1 la serie es divergente, si L = 1 hay que recurrir a otro criterio de convergencia.

Criterio de la integral

Sea $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n + ...$ una serie de términos positivos **decrecientes**. Se toma una función f(x) tal que f(n) = a_n. La serie converge o diverge según converja o diverja la integral

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

Serie de términos alternados

Sean $a_k > 0, \forall k$. La expresión

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + ... + a_n - a_{n+1} + ...$$

se denomina serie alternada.

El estudio de la convergencia de estas series es más sencillo que el correspondiente a las series de términos positivos. En efecto, en las series alternadas, si los términos son decrecientes y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

la serie alternada es convergente.

Además y muy útil en la práctica, en las series alternadas, el error que se comete en la suma de la serie al considerar los n primeros términos es menor, en valor absoluto, que el primer término despreciado.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

$$\left| S - S_n \right| \leq \left| a_{n+1} \right|$$

Serie absolutamente convergente

Una serie se llama absolutamente convergente si es convergente la serie formada por los valores absolutos de los términos de la serie dada.

$$\sum_k a_k \quad \text{converge} \quad \text{absolutamente} \quad \Rightarrow \sum_k \left| a_k \right| \quad \text{converge}$$

Si la serie de valores absolutos, diverge, la serie dada le dice condicionalmente convergente.

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

01 Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones cuyo término genérico es

01 $a_n = \dfrac{(n-2)^2}{n!}$ 02 $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n+4} \right)^2$

03 $h_k = (-1)^{k-1} \dfrac{2k(k-2)^{k-1}}{k+1}$ 04 $b_n = (-1)^n \dfrac{(n-1)(n-3)}{\sqrt{n^n}}$

05 $p_j = \dfrac{\cos(j\pi)}{j!}$ 06 $q_i = \left[sen\left(\dfrac{i\pi}{2} \right) - \cos\left(\dfrac{i\pi}{4} \right) \right]$

02 Escribir el término general de la sucesión

01 $\{a_n\} = \{-1,3,-9,27,-81,...\}$ 02 $\{a_k\} = \left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{5},\frac{1}{7},-\frac{1}{9},...\right\}$

03 $\{p_i\} = \left\{1,-\frac{3}{2},\frac{5}{6},-\frac{7}{24},...\right\}$ 04 $\{q_k\} = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{6}{24},\frac{12}{120},\frac{20}{720},...\right\}$

03 Verificar los siguientes límites

01 $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\} \to 2$ 02 $\left\{\frac{n+1}{3n}\right\} \to \frac{1}{3}$

03 $\left\{\frac{(n+2)^2}{4n^2}\right\} \to \frac{1}{4}$ 04 $\left\{\frac{3n}{n-1}\right\} \to 3$

04 Calcular los límites de las siguientes sucesiones

01 $\left\{\frac{(-1)^n}{\cos(n\pi)}\right\}$ 02 $\left\{(-1)^n \cos(n\pi)\right\}$

03 $\left\{\sqrt[n]{n}+1\right\}$ 04 $\left\{\sqrt[n]{n-2}\right\}$

05 $\left\{\frac{(-n)^n}{n^n}\right\}$ 06 $\left\{\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n\right\}$

05 Dada la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \end{cases} \qquad n > 1$$

01 Encontrar los seis primeros términos de la misma
02 Conjeturar si es creciente o decreciente.
03 Analizar la acotación.
04 Analizar la convergencia

06 Usando el teorema de compresión calcular el límite de

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

07 Escribir en forma de sumatoria las siguientes series geométricas y calcular su suma.

01 $9-3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-...$

02 $4+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...$

03 $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+...$

04 $-\sqrt{2}-\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{9}-\frac{4}{27}-...$

08 Escribir en forma de sumatoria las siguientes series numéricas y estudiar su convergencia por el criterio de comparación con series geométricas

01 $S_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}+...$

02 $S_n=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$

03 $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{4!}+\frac{4}{6!}+\frac{8}{8!}+\frac{16}{10!}+...$

04 $S=1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[6]{3}}+\frac{1}{\sqrt[8]{3}}+...$

05 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+...$

09 Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas empleando el criterio de D'Alembert

01 $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{5*6}+\frac{1}{7*8}+\frac{1}{9*10}+...$

02 $\frac{1}{3*2}+\frac{1}{4*4}+\frac{1}{5*8}+\frac{1}{6*16}+\frac{1}{7*32}+...$

03 $\frac{10}{2}+\frac{100}{6}+\frac{1000}{24}+\frac{10000}{120}+\frac{100000}{720}+...$

04 $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{6}{10000}+\frac{24}{100000}+...$

05 $\frac{1}{10^{10}}+\frac{2}{10^{20}}+\frac{6}{10^{30}}+\frac{24}{10^{40}}+\frac{120}{10^{50}}+...$

10 Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas.

01 $\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1*3}{2*4}\right)^4+\left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^4+\left(\frac{1*3*5*7}{2*4*6*8}\right)^4+\ldots$

02 $\frac{1}{5*6*7}+\frac{1}{6*7*8}+\frac{1}{7*8*9}+\frac{1}{8*9*10}+\ldots$

03 $\frac{1}{2*5}+\frac{4}{9*5^2}+\frac{27}{64*5^3}+\frac{256}{625*5^4}+\frac{3125}{7776*5^5}+\ldots$

04 $1+2^4+\left(\frac{3}{2}\right)^9+\left(\frac{4}{3}\right)^{16}+\left(\frac{5}{4}\right)^{25}+\ldots$

05 $\sum_k \frac{4}{k^2}$ 06 $\sum_j \frac{1}{2j+2}$ 07 $\sum_n \frac{1}{(2n+2)^2}$

08 $\sum_k \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ 09 $\sum_j \frac{1}{j\sqrt{\ln(j)}}$ 10 $\sum_n \frac{1}{n[\ln(n)]^2}$

11 Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ es convergente y calcular su suma con error menor que 10^{-3}

12 Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

13 Determinar si las siguientes series alternadas son condicional o absolutamente convergentes

01 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots$

02 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$

03 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\ldots$

Por si es necesaria en los ejercicios anteriores se transcribe la Fórmula de Stirling

$$n!\approx\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$