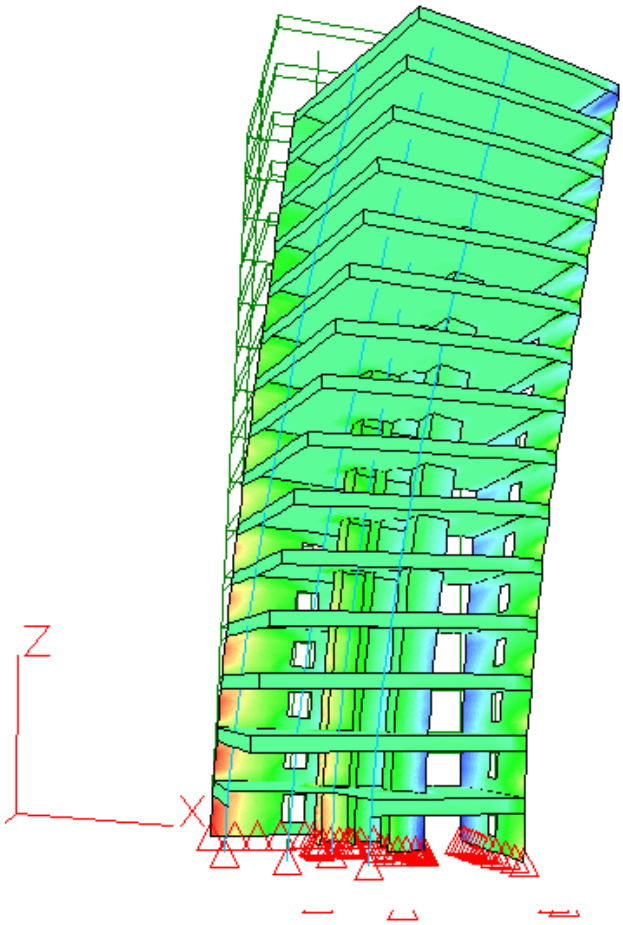
Departamento de Ingeniería Civil
Facultad Regional Paraná – Universidad Tecnológica Nacional

ANALISIS DE ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES DINÁMICAS

Arturo M. Cassano



ISBN 978-987-25360-9-1

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - edUTecNe

http://www.edutecne.utn.edu.ar

edutecne@utn.edu.ar

2009

INTRODUCCIÓN

Esta publicación pretende brindar en una forma rápida y sencilla los conceptos básicos de la dinámica de estructuras aplicada a las construcciones civiles, enfocada desde un punto de vista numérico. Su organización en capítulos se basa en la secuencia de unidades temáticas del programa de la asignatura homónima que se dicta en la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional.

Todos los temas se desarrollan como síntesis de libros y publicaciones de otros autores (ver Bibliografía) solo que organizados según la conveniencia que mejor se ajusta al curso impartido.

El Capítulo 1 hace una muy breve reseña a conceptos sobre sismología y su relación con la ingeniería estructural, caracterización, registros, etc.

El Capítulo 2 brinda una aproximación a los conceptos básicos de la dinámica estructural, la importancia de la masa, la relación entre velocidad de carga y de reacción de una estructura. Avanza sobre los modelos estructurales dinámicos, grados de libertad y la discretización espacial y temporal.

El Capítulo 3 está dedicado a la caracterización y cálculo de osciladores de un grado de libertad dinámico. Son tratadas las vibraciones libres y forzadas, éstas últimas con cargas armónicas y arbitrarias. Se presenta la resolución numérica mediante integración directa.

El Capítulo 4 está dedicado a las estructuras con múltiples grados de libertad dinámicos. Se estudian las vibraciones libres y el cálculo de modos y frecuencias propias, también se presenta la resolución de los sistemas dinámicos mediante diversos métodos como son: descomposición y superposición modal, integración directa y respuesta máxima mediante espectros de respuesta.

En el Capítulo 5 se realiza una aproximación al tratamiento dinámico de los efectos del viento sobre las construcciones teniendo como base el reglamento CIRSOC 102.

Por último en el Capítulo 6 son tratados los efectos sísmicos y el análisis estructural, desde el punto de la dinámica estructural, enfatizando en la definición de la acción sísmica y la comparación de las fórmulas vistas en capítulos anteriores con los reglamentos vigentes.

*Un agradecimiento especial a **Marlene Jaurena**, que con paciencia y dedicación realizó la transcripción de los manuscritos de este trabajo.*

TABLA DE CONTENIDOS

Capítulo 1 - NOCIONES BASICAS DE SISMOLOGIA 1-1
Causas que generan los terremotos o sismos 1-1
Los sismos desde el punto de vista de la ingeniería y su caracterización 1-2
Esteva y Rosenblueth: 1-2
Donovan: 1-3
Esteva y Villaverde: 1-3
Esteva: 1-3
Registro de ondas sísmicas. Parámetros utilizados y mapas de riesgo sísmico 1-3

Capítulo 2 - CONCEPTOS BASICOS DE DINAMICA ESTRUCTURAL 2-1
Definición de la acción dinámica 2-1
Acciones y fuerzas dinámicas 2-2
Importancia de la masa en el problema dinámico 2-3
Velocidad de reacción de una estructura 2-5
Modelos dinámicos característicos 2-6
Métodos de modelización dinámica 2-8
Discretización espacial de las estructuras 2-9
Método de las masas concentradas 2-10
Ecuaciones de movimiento 2-13
Principio de Hamilton 2-13
Principio de los trabajos virtuales 2-13
Principio de D'Alembert 2-13
Formulación de la ecuación de movimiento para un sistema de 1 GLD 2-13
Formulación de las ecuaciones de movimiento para modelos con múltiples GLD 2-15

Capítulo 3 - RESPUESTA DE UN OSCILADOR SIMPLE 3-1
Ecuación de movimiento y equilibrio dinámico 3-1
Fórmula de Geiger 3-2
Características dinámicas con amortiguamiento 3-3
Excitación periódica 3-7
Excitación armónica 3-8
Excitación arbitraria. Integral de Duhamel 3-10
Respuesta a un impulso elemental 3-10
Factor de amplificación dinámica 3-12
Espectros sísmicos de respuesta 3-12
Integración numérica de la ecuación de movimiento 3-16
Método de Newmark (1 GLD) 3-16
Desarrollo y forma operativa 3-18

Capítulo 4 - RESPUESTA DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD 4-1
Ecuaciones de movimiento y equilibrio dinámico 4-1
Vibraciones libres 4-1
Características dinámicas 4-1
Normalización de los modos 4-3
Obtención de los grados de libertad dinámicos 4-4
Condensación estática de la matriz de rigidez 4-4
Matriz de amortiguamiento 4-6
Matrices de amortiguamiento ortogonales 4-8
Determinación práctica de modos y frecuencias 4-9
Método de Stodola-Vianello 4-9
Resolución de las ecuaciones de movimiento en estructuras con múltiples GLD 4-12
Descomposición y superposición modal 4-12
Integración directa de las ecuaciones de movimiento 4-14
Respuesta máxima utilizando espectros de respuesta 4-15

Capítulo 5 - ANÁLISIS DE CONSTRUCCIONES CON EFECTOS DINÁMICOS DE VIENTO 5-1
Acciones paralelas a la dirección del viento 5-1
Acciones perpendiculares a la dirección del viento 5-3
Criterios de confort en edificios que oscilan 5-5

Capítulo 6 - ANÁLISIS DE CONSTRUCCIONES CON EFECTOS SISMICOS 6-1
Definición numérica de la acción sísmica 6-1
Definición mediante espectros de respuesta 6-2
Definición mediante acelerogramas 6-4
Métodos de análisis según INPRES – CIRSOC 103 6-6
Procedimientos con fuerzas estáticas equivalentes 6-6
Métodos dinámicos 6-6
Métodos dinámicos INPRES – CIRSOC 103 6-6

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas. Cálculo por Ordenador – A.H. Barbat, J.M. Canet – 2da. Edición, CIMNE, Barcelona, 1994.

[2] Diseño Sismorresistente de Edificios – L.M. Bozzo, A. H. Barbat, Editorial Reverté, Barcelona, 2000.

[3] Dinámica Estructural – J. Massa, C. Prato, Publicación del Departamento de Estructuras de la Facultad de Cs. Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, 1986.

[4] Finite Element Procedures – K. J. Bathe, Prentice-Hall, 1996.

[5] Finite Element Modeling in Engineering Practice – C. Spyrakos, Algor Publishing Division, Pitsburg, 1996.

[6] Linear and Nonlinear Finite Element Analysis in Engineering Practice – C. Spyrakos, J. Raftoyiannis, Algor Publishing Division, Pitsburg, 1997.

[7] Diseño Sísmico de Edificios – E. Bazán, R. Meli, LIMUSA, 2001.

CAPÍTULO 1 - NOCIONES BASICAS DE SISMOLOGIA

Causas que generan los terremotos o sismos

Los terremotos pueden definirse como movimientos de la corteza terrestre, con amplitudes y frecuencias dependientes del tiempo.

Las causas que los generan son variadas:

Terremotos de colapso: son los originados en cavidades subterráneas por el colapso de las mismas, son de baja intensidad.

Terremotos de origen volcánico: la explosión de gases durante las erupciones volcánicas puede producir terremotos que, en general, tienen una intensidad pequeña y afectan a superficies limitadas.

Terremotos tectónicos: están causados por la rotura brusca de las capas rocosas a lo largo de superficies de fractura (fallas), son los más fuertes y más frecuentes.

Terremotos causados por explosiones: las explosiones producidas por el hombre son capaces de generar vibraciones del terreno, con una intensidad tal que pueda causar movimientos en las estructuras.

En general, el movimiento de la corteza se produce por un choque o movimiento brusco ocurrido a una cierta profundidad bajo la superficie terrestre en un punto teórico denominado *foco* o *hipocentro*, a su proyección sobre la superficie terrestre se le denomina *epicentro*.

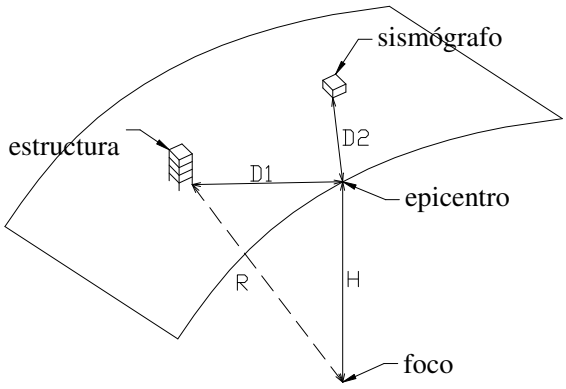


Fig. 1.1 – Definiciones geométricas de un sismo

Los sismos desde el punto de vista de la ingeniería y su caracterización

Los terremotos más importantes son los tectónicos, pues son los que traen consecuencias más desastrosas en las estructuras que afectan, debido a esto, son los que se tienen en cuenta para la elaboración de normas para la contracción de estructuras sismoresistentes.

La intensidad sísmica es una medida de los efectos de los terremotos en el entorno y en particular sobre las estructuras.

Existen diferentes escalas de intensidades que describen, para cada valor que esta tome, los efectos que produce el terremoto. Una de las más difundidas es la escala de Mercalli Modificada.

Algunos de los efectos sobre las estructuras en orden creciente de intensidad son:

1. *fisuración de las estructuras de madera*
2. *agrietamiento de las estructuras débiles de mampostería*
3. *agrietamiento de las estructuras ordinarias de mampostería*
4. *colapso parcial de estructuras ordinarias de mampostería; daño en estructuras bien ejecutadas de mampostería no diseñadas para resistir fuerzas sísmicas*
5. *colapso de estructuras ordinarias de mampostería; las estructuras con diseño antisísmico son seriamente dañadas; daños en cimientos; grietas en el terreno*

la mayoría de las estructuras son destruidas junto con sus cimientos, daños importantes en presas y diques, grandes deslizamientos del terreno destrucción casi total, grandes masas de rocas desplazadas, etc.

Un sismo se caracteriza por su **intensidad** (parámetro subjetivo) y por su **magnitud** (parámetro objetivo).

La escala objetiva más popular es la de Ritcher, en la que la magnitud M mide la energía del terremoto en el foco y es el logaritmo decimal de la amplitud del movimiento sísmico, medido en micrones a 100[km] del epicentro, por un sismógrafo Wood-Anderson estándar. La magnitud M está relacionada con la energía del terremoto, en ergios, por la expresión:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$$

Se han establecido varias relaciones empíricas entre la intensidad I_{MM} y la magnitud M, enumeramos algunas a continuación:

Esteva y Rosenblueth:

$$I_{MM} = 8{,}16 + 1{,}45\ M - 2{,}46 \log R$$

R: distancia focal en [km]

También se ha relacionado la magnitud M con los valores máximos de las características cinemáticas del movimiento, estas relaciones se han establecido estadísticamente.

Donovan:

$$a_m = \frac{1080\, e^{0,5M}}{(R+25)^{1,25}}$$

a_m: aceleración máxima del terreno en [cm/s^2]

R: distancia focal en [km]

Esteva y Villaverde:

$$\frac{a_m}{g} = \frac{5,7\, e^{0,8M}}{(R+40)^2}$$

$$v_m = \frac{32\, e^{M}}{(R+25)^{1,7}}$$

a_m: aceleración máxima en [cm/s^2]

v_m: velocidad máxima en [cm/s]

R: distancia focal en [km]

Esteva:

$$a_m = 1230\, e^{0,8M}\,(R+25)^{-2}$$

$$v_m = 15\, e^{M}\,\left(R + 0,17\, e^{0,59M}\right)^{-1,7}$$

a_m: aceleración máxima en [cm/s^2]

v_m: velocidad máxima en [cm/s]

R: distancia focal en [km]

Registro de ondas sísmicas. Parámetros utilizados y mapas de riesgo sísmico

Los terremotos son fenómenos debidos a la brusca liberación de la energía de deformación acumulada durante largos periodos de tiempo en la zona superficial de la tierra. Los sismos producen ondas de varios tipos, que se propagan desde su foco en todas las direcciones a través de la tierra. Estas ondas son registradas mediante aparatos denominados sismógrafos, diseñados para medir la aceleración, la velocidad o el desplazamiento del movimiento sísmico. Estos parámetros son relativos, ya que los valores obtenidos están afectados por las características del instrumento registrador y por las condiciones de ruido ambiental en el lugar de registro.

Los mapas de riesgo sísmico representan una síntesis de todos los datos sismológicos y geológicos de un país. Estos mapas se utilizan para determinar el nivel de protección que se debe alcanzar en las estructuras en cada zona de riesgo.

Diversos aspectos brindan la subdivisión en zonas, pero los fundamentales son:

Estudios geológicos y geotécnicos: proporcionan datos de composición y características dinámicas de las rocas y capas de suelo que componen la corteza terrestre.

Estudios sismológicos: sintetizan los parámetros que caracterizan la sismicidad de la zona:

1. *ubicación de fallas*
2. *registro de los terremotos que ocurren en la zona*
3. *mapas de epicentros*
4. *datos históricos*
5. *periodos de retorno (intervalo medio de tiempo en que se espera ocurran dos sismos de igual o mayor intensidad)*
6. *datos del mecanismo focal*
7. *correlación de la sismicidad de la zona analizada con la de la macrozona en la que se encuentra*

Estudios de Ingeniería y Sismología:

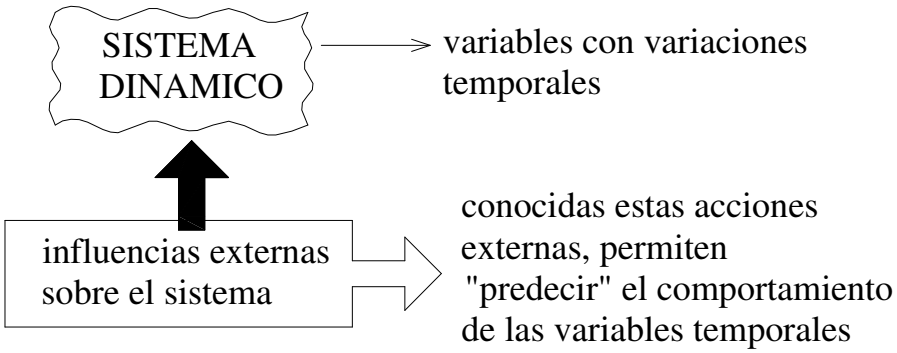
1. análisis del efecto que han producido sobre las estructuras y las personas los *terremotos ocurridos en el pasado*
2. *"predicción" estadística de las características más probables de la acción sísmica que se produzca en la zona*

Es importante destacar que la geología local de la zona puede modificar la propagación de las ondas sísmicas. Las ondas se reflejan y se refractan cuando en su recorrido aparece una discontinuidad, por ejemplo una variación de las características mecánicas del terreno, ello produce cambios en la velocidad.

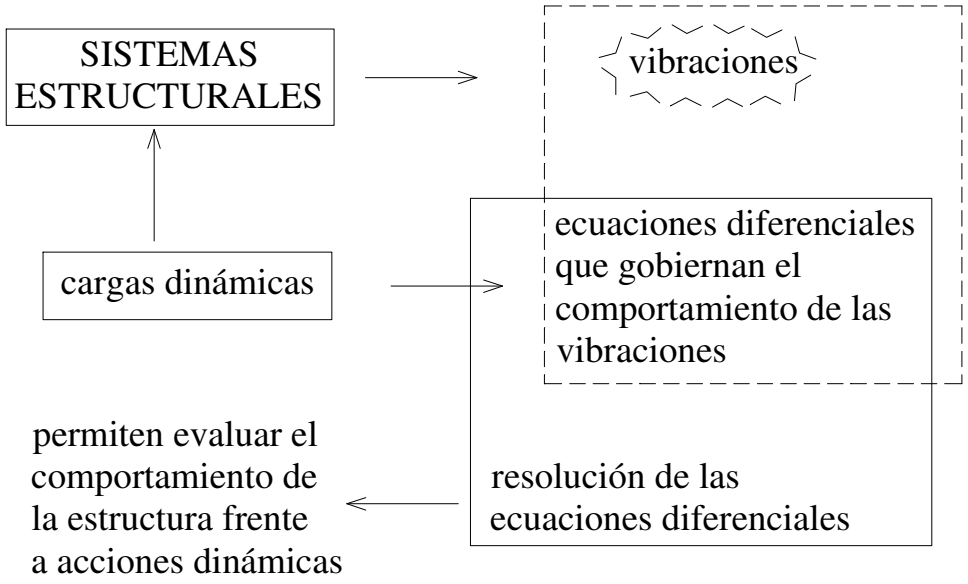
En general, el cálculo y la cuantificación de las acciones sísmicas en la estructuras se realiza en función de protocolos, secuencias y definiciones de acciones dadas por normas y reglamentos. En los capítulos siguientes se ofrecen algunas aplicaciones de este tipo.

CAPÍTULO 2 - CONCEPTOS BASICOS DE DINAMICA ESTRUCTURAL

En un sentido amplio, un sistema dinámico es aquel cuyas variables experimentan variaciones en el tiempo y, si se conocen las influencias externas que actúan sobre el sistema, podrá predecirse el comportamiento de este.



En nuestro curso, los sistemas a estudiar serán sistemas estructurales, las variaciones en el tiempo serán vibraciones producidas por cargas dinámicas.



Definición de la acción dinámica

Una acción tiene carácter dinámico cuando su variación con el tiempo es rápida y da origen a fuerzas de inercia comparables en magnitud con las fuerzas estáticas. Algunas fuentes importantes de vibraciones estructurales son:

- *sismos*
- *viento*
- *olas y corrientes de agua*
- *explosiones e impactos*
- *cargas móviles (vehículos, personas, etc.)*

La definición de estas cargas externas puede distinguirse entre: determinista y no determinista, ésta última denominada también estocástica o aleatoria.

determinista: *cuando su variación temporal es perfectamente conocida*

no determinista: *cuando alguno o todos sus parámetros son definidos estadísticamente*

En nuestro curso trabajaremos con cargas definidas en forma DETERMINISTA.

Respuesta dinámica → *cualquier magnitud que pueda caracterizar el efecto de una carga dinámica sobre la estructura*

Una carga definida determinísticamente da origen a una respuesta, también determinista.

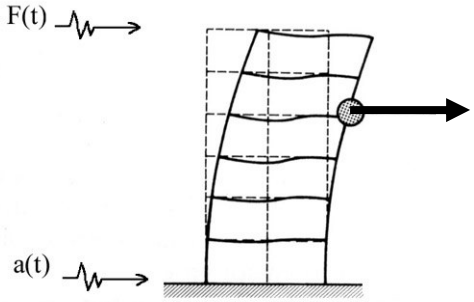


Fig. 2.1- Definición de la respuesta dinámica: para un punto considerado se calculan: deformaciones, aceleraciones, tensiones, etc.

Acciones y fuerzas dinámicas

Las acciones dinámicas definidas utilizando representaciones deterministas, son funciones del tiempo cuyo valor en cada instante ES CONOCIDO.

Este tipo de representación es apropiado para evaluar el comportamiento de una estructura A POSTERIORI del acontecimiento que dio lugar a dicha acción. Por ejemplo, evaluar el comportamiento de un edificio nuevo ante el terremoto ocurrido en México en 1986 (del que se poseen registros). El diseño de una estructura NO PUEDE encararse en base a acciones deterministas, pues nada nos asegura que la acción estudiada volverá a repetirse.

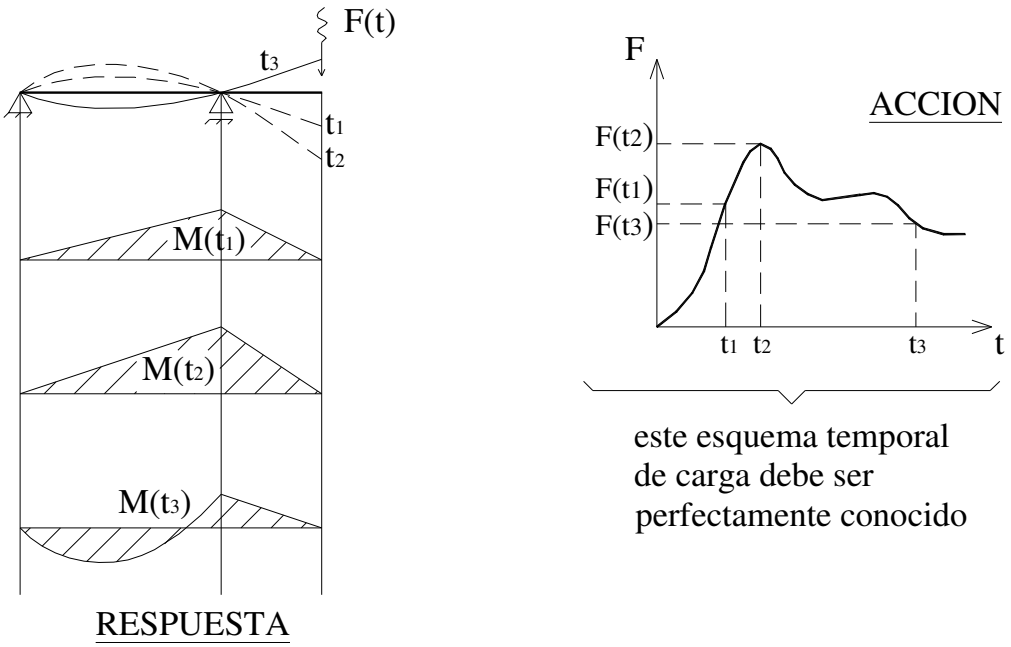


Fig. 2.2 - Acción y respuesta determinista

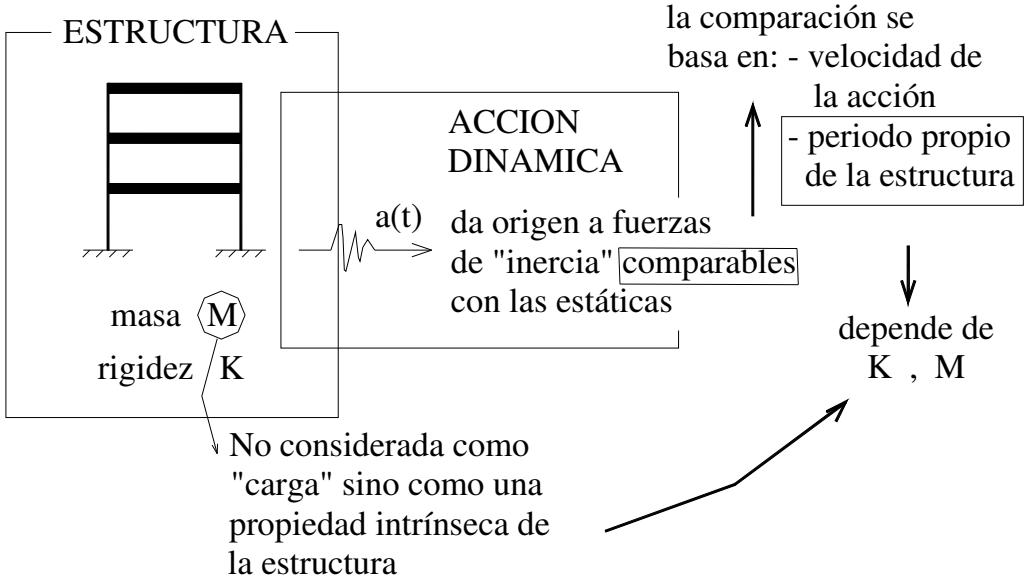
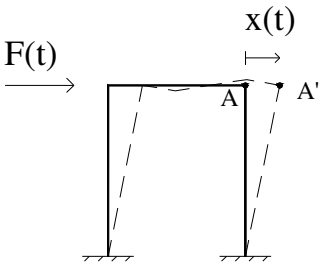


Fig. 2.3 - Acción dinámica y propiedades de la estructura

Importancia de la masa en el problema dinámico

Aunque la carga varíe con el tiempo, la respuesta de una estructura varía radicalmente según la masa que vibra con ella. Ante una misma función de carga, una estructura SIN MASA y una CON MASA responden de la siguiente manera:

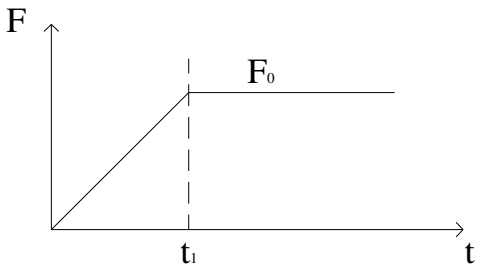
a) Estructura SIN MASA ⇒ SIN INERCIA

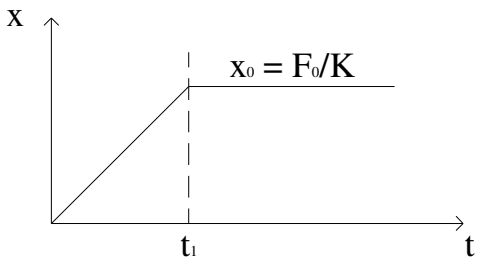


rigidez: K
masa: m = 0

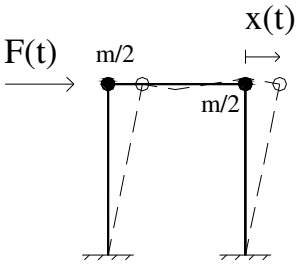
$$K\,x(t) = F(t)$$

La respuesta seguirá exactamente la forma de la carga



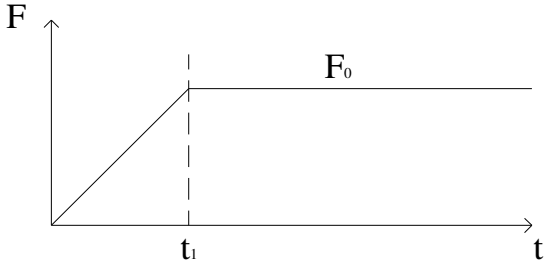


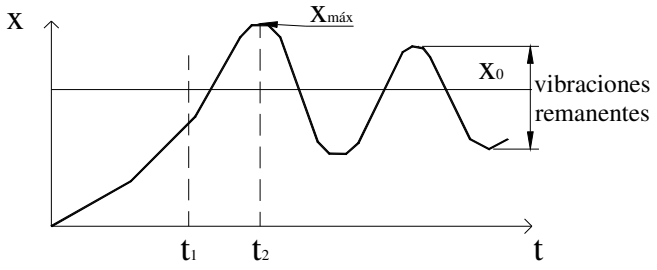
b) Estructura CON MASA ⇒ CON INERCIA



rigidez: K
masa: m

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F(t)$$





$t_2 > t_1$!!

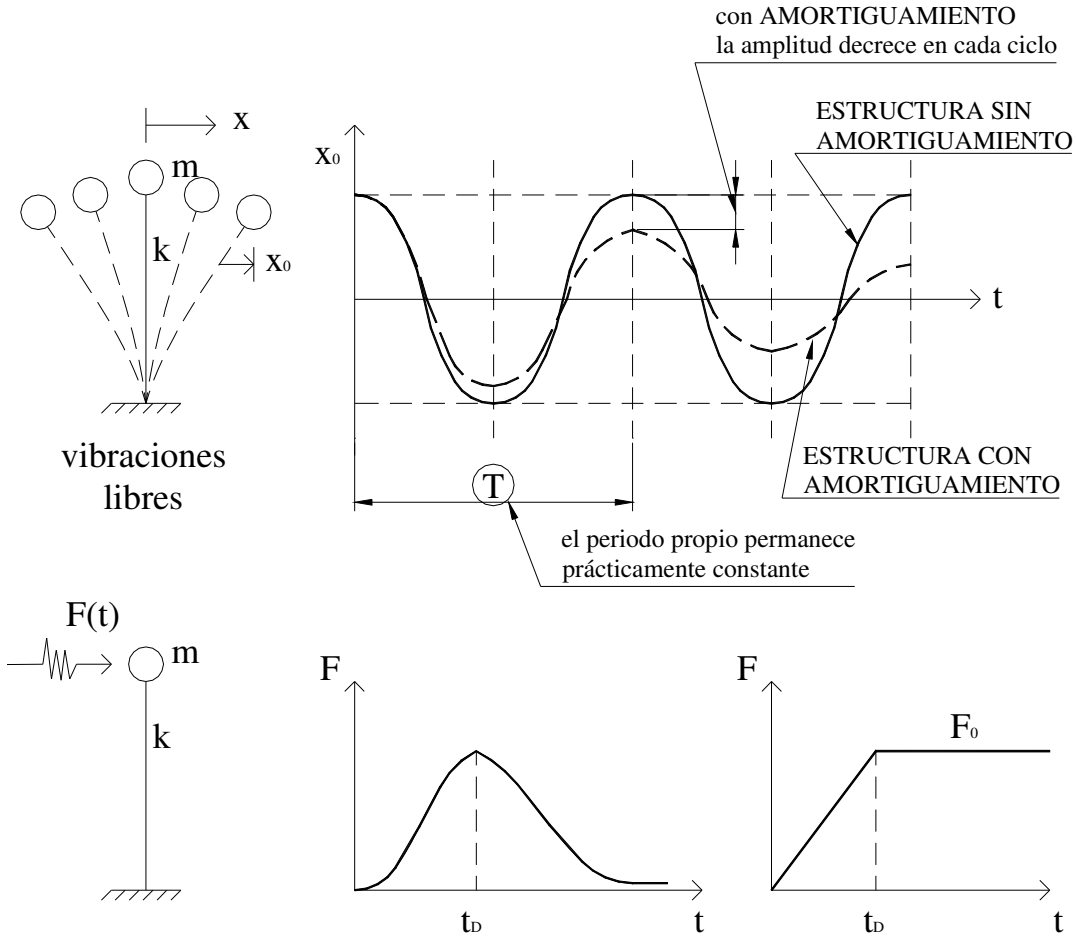
Se desarrolla energía cinética, que modifica la respuesta y deja vibraciones remanentes

Fig. 2.4 - Importancia de la masa en la respuesta

Velocidad de reacción de una estructura

Ante una acción exterior, distintas estructuras reaccionarán de formas diferentes. Esta respuesta está íntimamente relacionada con las formas o modos de vibrar y sus correspondientes frecuencias o periodos propios. En el caso de un oscilador de 1 grado de libertad, este periodo propio se obtiene fácilmente. No así para estructuras de múltiples GLD.

Como veremos en los capítulos siguientes, los periodos y formas de vibrar dependen de las características geométricas y de materiales (rigidez) y de la inercia que la estructura opone al movimiento (masa).



En general si $t_D >> T \Rightarrow$ no es necesario un análisis dinámico
si $t_D \cong T \Rightarrow$ PROBLEMA DINAMICO

Fig. 2.5 - Velocidad de reacción T vs. t_D

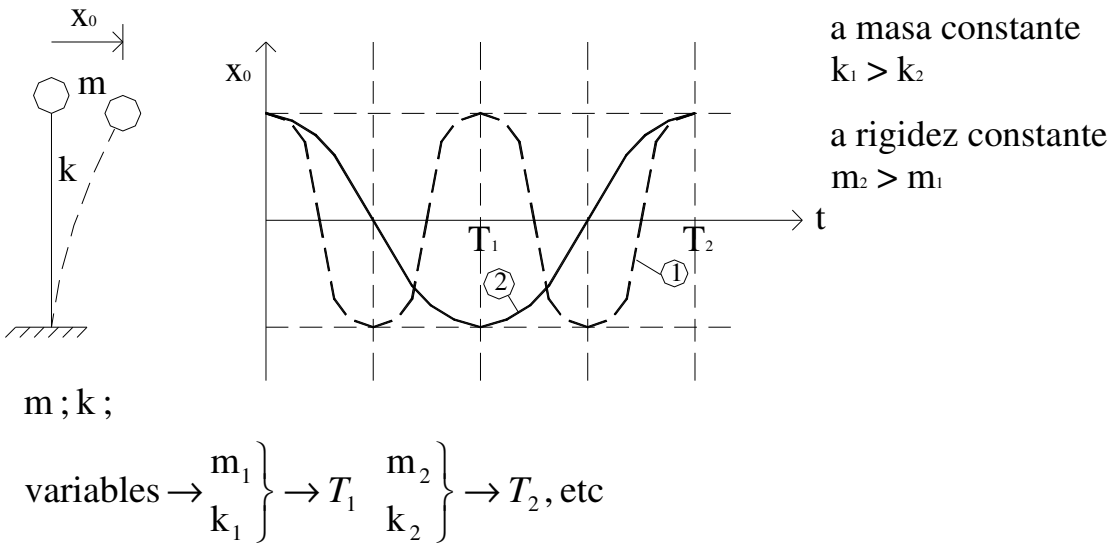


Fig. 2.6 - Velocidad de reacción; varios T_i

Modelos dinámicos característicos

Desde el punto de vista del cálculo numérico, obtener la respuesta dinámica de una estructura, es el resultado de "filtrar" la señal de excitación a través de la misma estructura y obtener las variaciones de las magnitudes de análisis (desplazamientos, velocidades, aceleraciones, momentos, tensiones, etc.) respecto del tiempo.

La obtención de la respuesta requiere, previamente, la definición del movimiento del terreno (en caso sísmico) tanto como de las características estructurales del mismo y de la estructura propiamente dicha. El análisis es practicado, no a la propia estructura sino a un modelo mecánico de la misma. La definición del modelo depende del tipo de estructura analizado y pretende brindar una serie de relaciones entre acciones y respuesta que describan un modelo matemático del problema.

Este modelo matemático puede ser resuelto mediante diversas técnicas. En nuestro caso haremos hincapié en los métodos numéricos de análisis.

Según la certeza con que fueron formulados los modelos y procedimientos o algoritmos de cálculo durante el análisis, será la precisión de la respuesta obtenida.

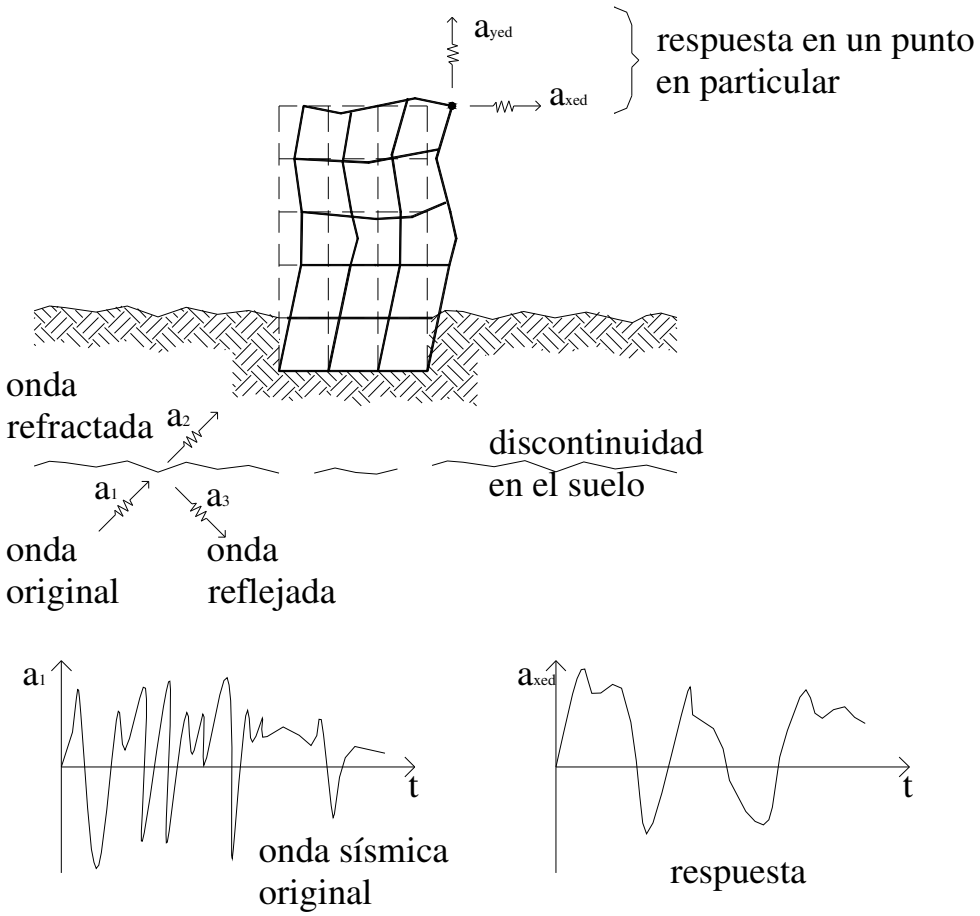


Fig. 2.7 - "Filtrado" de una señal sísmica

Se brindan, a continuación, algunas definiciones típicas del análisis estructural dinámico de una estructura:

Grados de libertad (GL)

Se definen como grados de libertad (GL) a los puntos de la estructura en los cuales se identifica algún desplazamiento y permiten brindar una deformada de la estructura.

Grados de libertad dinámicos (GLD)

Son los grados de libertad que tienen asociada masa y para los cuales puede conocerse las vibraciones o movimientos a lo largo del tiempo.

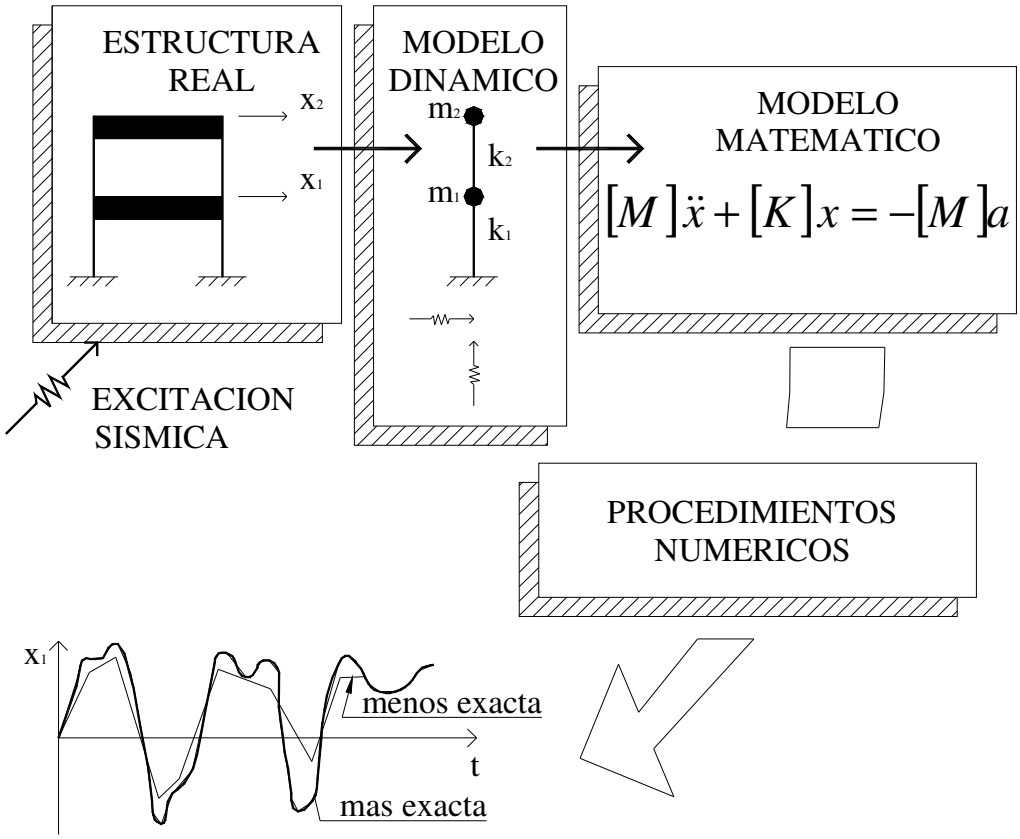


Fig. 2.8- Modelización de una estructura

Métodos de modelización dinámica

Pueden distinguirse modelos dinámicos exactos y modelos dinámicos discretos.

En general, para la primera clase, solo pueden resolverse casos muy sencillos y con poca aplicación practica, por lo que a lo largo del curso profundizaremos en modelos discretos.

Para estos métodos modelos discretos, se debe tener en cuenta que la subdivisión en dominios finitos es tanto espacial (discretización estructural) como temporal (solución para instantes de tiempo determinados).

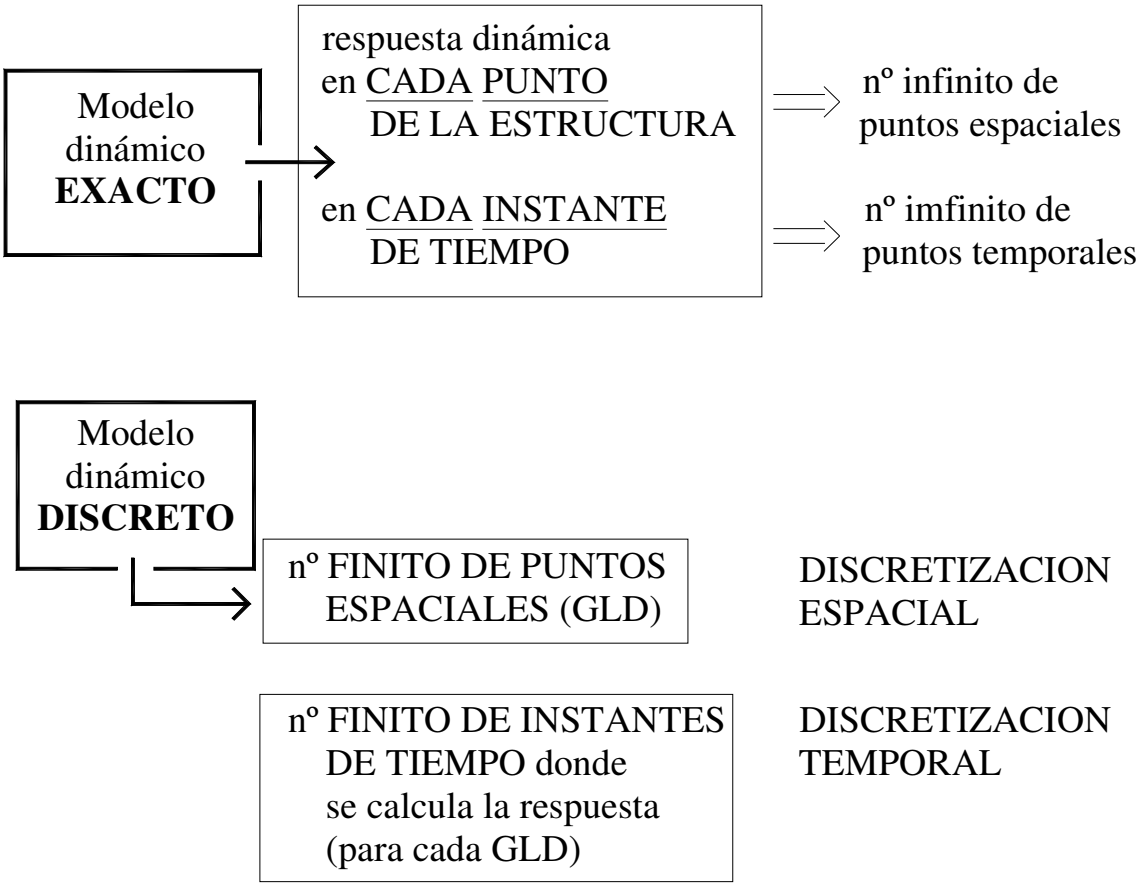


Fig. 2.9 - Modelos dinámicos

Discretización espacial de las estructuras

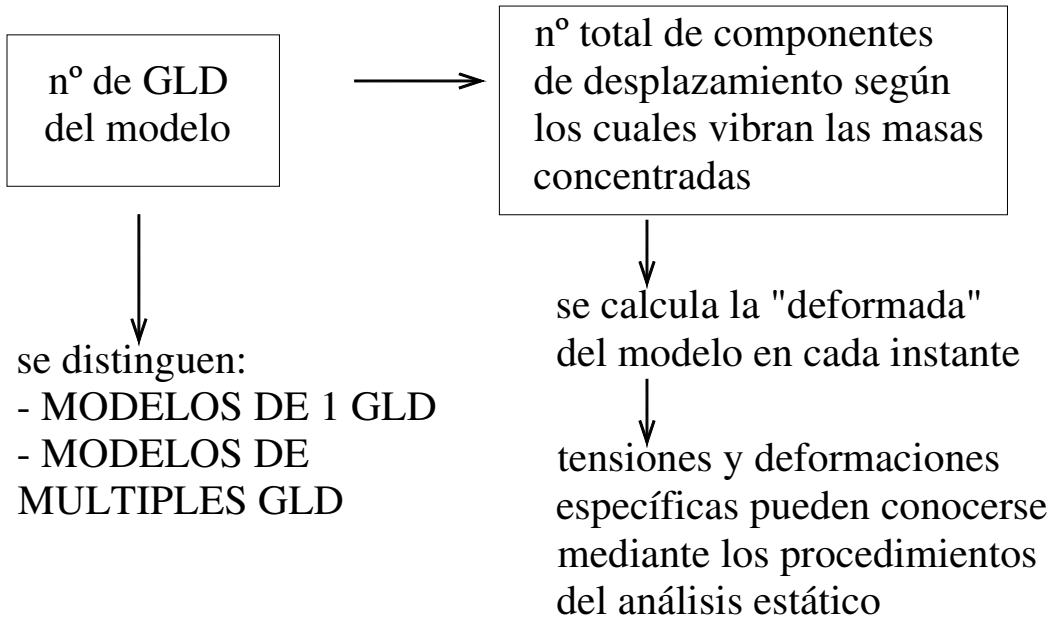
Fundamentalmente, la diferencia con lo visto en otros cursos de análisis estructural (estático) radica en que en dinámica estructural, cuando hablamos de discretizar espacialmente, nos referimos a los GLD.

Un modelo dinámico exacto (con infinitos GLD) acarrearía más inconvenientes en la resolución matemática que beneficios en su precisión. Además, en estructuras de edificios y en la mayoría de las estructuras civiles, las masas se encuentran más o menos concentradas en lugares conocidos. Es por esto que nuestro principal método de modelización dinámica será el de las MASAS CONCENTRADAS.

No obstante, existen otros, como ser:

- método de los DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS
- método de los ELEMENTOS FINITOS

Método de las masas concentradas



Modelos con 1 GLD:

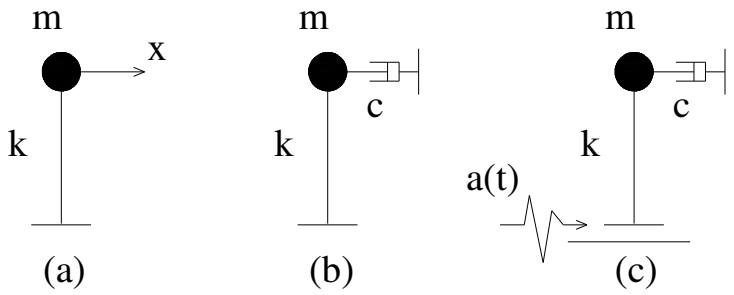


Fig. 2.10 - Modelos con un solo grado de libertad. (a) modelo conservativo; (b) modelo con amortiguamiento; (c) modelo sísmico.

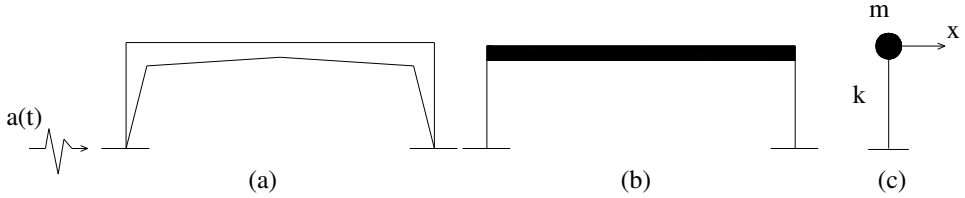


Fig. 2.11 - Estructuras modelizadas como un sistema de un solo grado de libertad. (a) pórtico; (b) el mismo pórtico con la masa concentrada al nivel de la viga; (c) modelo dinámico.

Modelos con múltiples GLD:

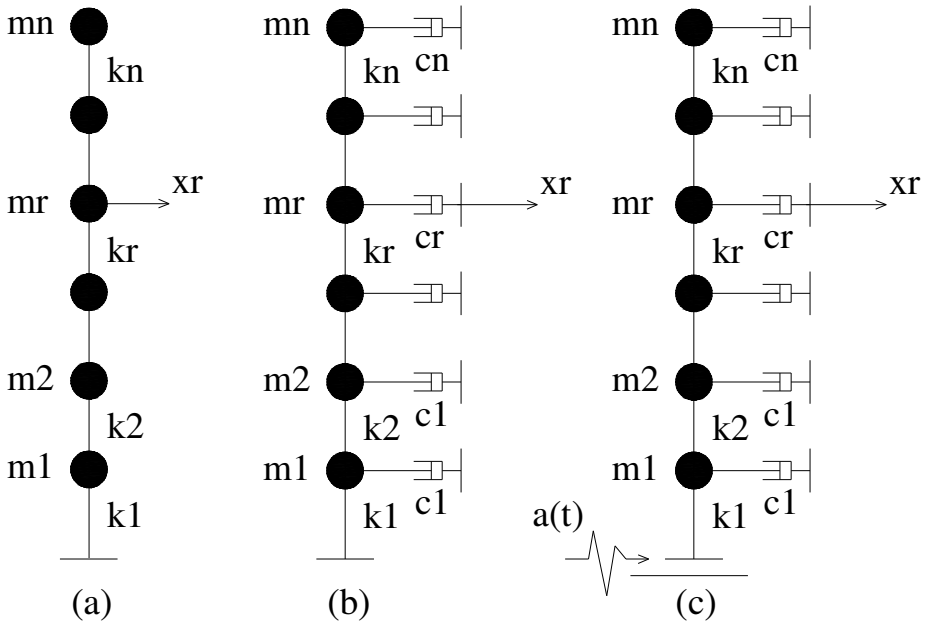


Fig. 2.12 -Modelos con varios grados de libertad. (a) modelo conservativo; (b) modelo con amortiguamiento; (c) modelo sísmico.

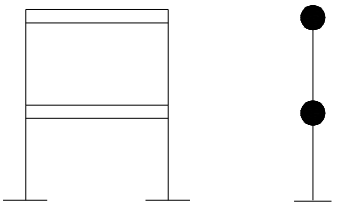


Fig. 2.13 - Estructura con dos grados de libertad: Pórtico de dos pisos y su modelo dinámico.

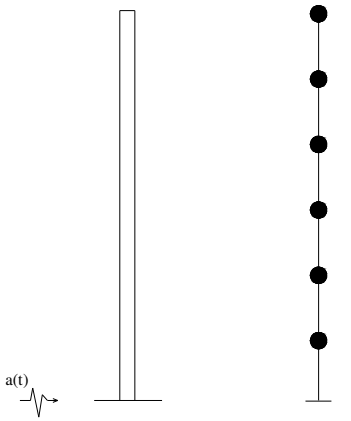


Fig. 2.14 - Estructura con masa distribuida (antena) y su modelo dinámico discreto con n grados de libertad.

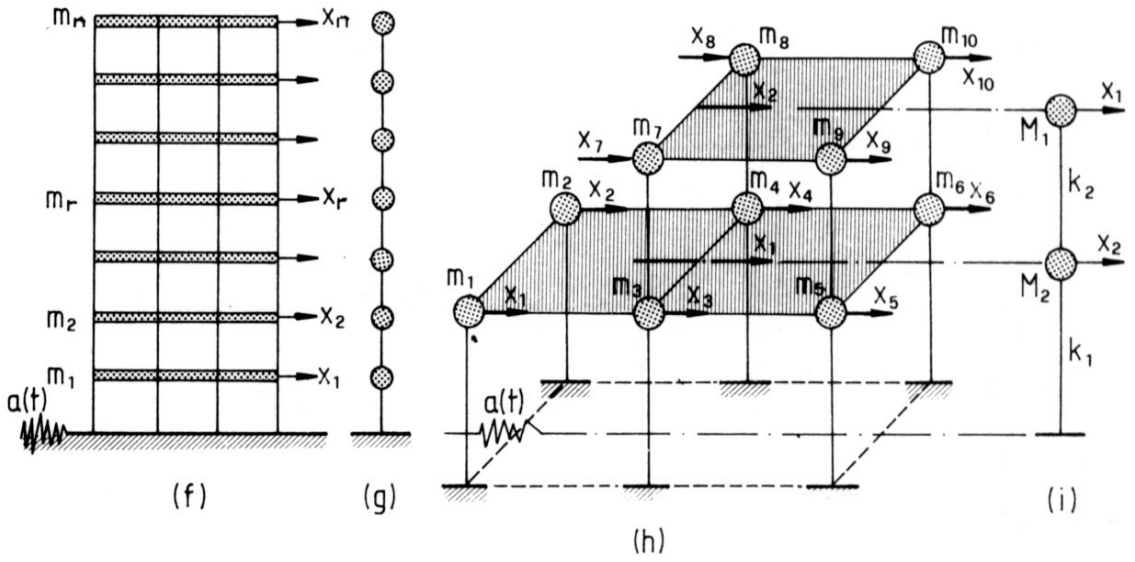


Fig. 2.15 - Modelo dinámico de un pórtico de cortante y pórtico espacial modelizado como un sistema completo (10 grados de libertad) y simplificado (dos grados de libertad).

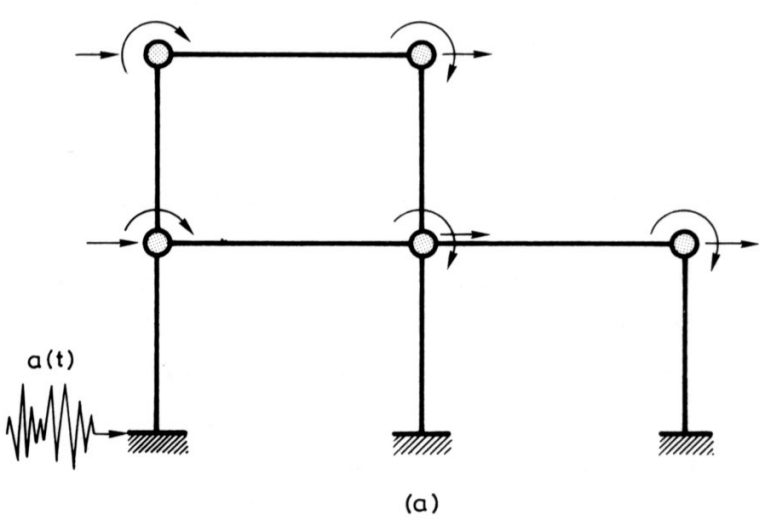


Fig. 2.16 - Modelo dinámico con grados de libertas de rotación.

Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento son las expresiones matemáticas que gobiernan la respuesta dinámica de las estructuras. Pueden obtenerse a partir de cualquiera de los principios de la mecánica clásica:

Principio de Hamilton

$$\pi_H = \int_{t_1}^{t_2} \left(E_p - E_c\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} E_d dt \quad ; \quad d\pi_H = 0 \tag{2.1}$$

La primera expresión se denomina funcional de Hamilton; donde E_p es la energía potencial, E_c es la energía cinética y E_d la correspondiente a fuerzas no conservativas. La segunda expresión permite establecer el equilibrio a través de una variación funcional nula.

Principio de los trabajos virtuales

Se trabaja en forma similar a lo visto en análisis estático pero incluyendo las fuerzas de inercia y disipativas.

$$\delta w_i = \delta w_e \tag{2.2}$$

Principio de D'Alembert

Proporciona el método más directo para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico.

Puede formularse como sigue: "un sistema dinámico esta en equilibrio cuando todas las fuerzas que actúan en el mismo, incluidas las de inercia y disipativas, cumplen las ecuaciones de equilibrio estático en cada instante de tiempo.

Formulación de la ecuación de movimiento para un sistema de 1 GLD

Tomando el sistema de la figura 2-10, podemos distinguir dos casos:

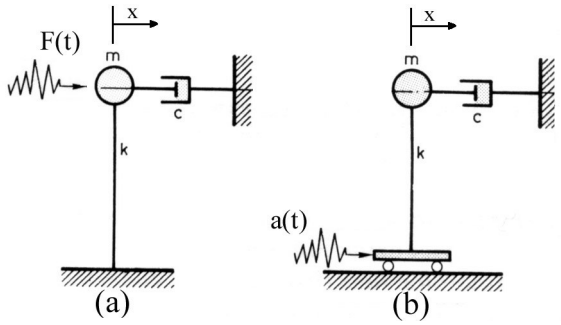


Fig. 2.17- (a) fuerza aplicada; (b) modelo sísmico

Para el modelo (a), aplicando el principio de D'Alembert, tendríamos:

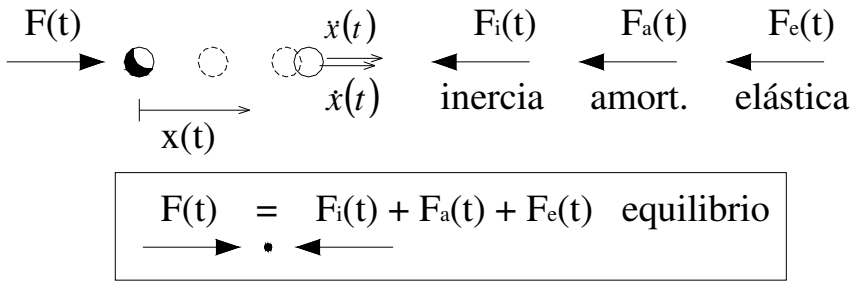


Fig. 2.18 - Equilibrio de fuerzas para 1 GLD

Al aplicar una fuerza exterior F(t), se genera aceleración, velocidad y desplazamiento para un cierto instante "t"; a causa de esto se producen fuerzas:

i- de inercia

$$F_i(t) = m\,\ddot{x}(t) \tag{2.3}$$

ii- de amortiguamiento

$$F_a(t) = c\,\dot{x}(t) \tag{2.4}$$

iii- elásticas

$$F_e(t) = k\,x(t) \tag{2.5}$$

equilibrio en el instante "t"

$$F(t) - F_i(t) - F_a(t) - F_e(t) = 0 \tag{2.6}$$

$$F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = F(t) \tag{2.7}$$

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F \tag{2.8}$$

Se omite (por simplicidad de notación) la dependencia del tiempo, pero de aquí en adelante ésta se encontrará implícita en toda variable temporal.

$$\text{ej:}\quad x(t) \to x \quad ; \quad \dot{x}(t) \to \dot{x} \quad ; \quad \ddot{x}(t) \to \ddot{x}$$
$$a(t) \to a \quad ; \quad F(t) \to F \quad ; \quad etc.$$

La ecuación (2.8) es la de movimiento correspondiente a 1 GLD con carga exterior y amortiguamiento.

Para el modelo (b) de la figura 2-17, el planteo es similar, solo que no tiene fuerza exterior aplicada y la fuerza de inercia se ve afectada por la aceleración total de la masa:

$$F_i = m\left[a + \ddot{x}\right] \tag{2.9}$$

entonces, la ecuación de movimiento queda:

$$-m\left[a + \ddot{x}\right] - c\,\dot{x} - k\,x = 0 \tag{2.10}$$

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = -m\,a \tag{2.11}$$

La (2.11) es la ecuación de movimiento para 1 GLD con aceleración de apoyo (sísmico) y amortiguamiento. Un caso general sería la inclusión de aceleración de apoyo y fuerza exterior:

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F - m\,a \tag{2.12}$$

Formulación de las ecuaciones de movimiento para modelos con múltiples GLD

El modelo con varios grados de libertad más sencillo es el de edificios de cortante (fig. 2-12). Está basado en que las plantas son infinitamente rígidas y en que los únicos movimientos posibles de éstas son los desplazamientos horizontales.

Aplicando el principio de D'Alembert en cada GLD (uno por piso) se obtiene:

$$F_r - F_{ir} - F_{ar} - F_{er} = 0 \tag{2.13}$$

para el piso (r).

Planteando el equilibrio para todos los GLD, nos queda un sistema de ecuaciones (vectorial)

$$\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{F}_e = 0 \tag{2.14}$$

#Nota: en adelante, los vectores y matrices serán representados(en general) con minúsculas y mayúsculas en negrita, respectivamente.

$\boldsymbol{F}^T = [f_1, f_2, ... f_n]$ vector de fuerzas externas

$\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{M}\{\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{J}\, a\}$ vector de fuerzas de inercia

$\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{x}}$ vector de fuerzas disipativas

$\boldsymbol{F}_e = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{x}$ vector de fuerzas elásticas

entonces, el sistema (2.14) puede escribirse:

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{M}\{\boldsymbol{J}\, a\}} \qquad (2.15)$$

$\boldsymbol{M} \rightarrow$ matriz de masas

$\boldsymbol{C} \rightarrow$ matriz de amortiguamiento

$\boldsymbol{K} \rightarrow$ matriz de rigidez

$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = [1,1,\ldots 1] \rightarrow$ vector con todos sus elementos igual a uno

Si bien la (2.15) fue deducida para un modelo de edificio cortante, es una expresión ABSOLUTAMENTE GENERAL, inclusive para modelos de elementos finitos, y solo varían las formas de $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{K}$.

Para un modelo sísmico, la (2.15) se reduce a:

$$\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{M}\{\boldsymbol{J}\, a\} \qquad (2.16)$$

Y en caso general de pórticos 3D, o modelos de elementos finitos, suele sustituirse $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{D}$ para indicar que cada GLD puede sufrir desplazamientos en 3 direcciones y respectivos giros.

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ \ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{C}\ \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{M}\{\boldsymbol{J}\, a\}} \qquad (2.17)$$

Nota: en este último caso, $\boldsymbol{J}$ llevará unos en las componentes a las cuales se quiera aplicar el acelerograma a, por ejemplo componente $\boldsymbol{x}$:

$\boldsymbol{J}$ = [1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,…..,1,0,0,0,0,0,…..,1,0,0,0,0,0] etc.

CAPÍTULO 3 - RESPUESTA DE UN OSCILADOR SIMPLE

Ecuación de movimiento y equilibrio dinámico

Las características dinámicas de un oscilador de 1 GLD pueden estudiarse mediante un modelo no amortiguado con vibraciones libres, cuya ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + k\,x = 0 \tag{3.1}$$

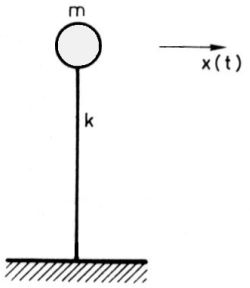


Fig. 3.1 - Modelo de 1 GLD, no amortiguado.

La vibración, del modelo de la fig. 3.1, es inducida por algunas condiciones iniciales, sean desplazamiento, velocidad o aceleración en el instante t = 0.

Luego, durante las vibraciones no recibe ningún tipo de perturbación.

Dividiendo (3.1) por m y usando la notación:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.2}$$

se obtiene:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.3}$$

ω es la "pulsación" o "frecuencia circular" o simplemente *frecuencia* del modelo estudiado. Viene expresada en radianes por segundo (1/s).

La *frecuencia cíclica* viene dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{3.4}$$

y se expresa en ciclos por segundo o hertz.

Finalmente, otra característica es el período natural

$$T = \frac{1}{f} \tag{3.5}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.6}$$

La solución general de la (3.1) o (3.3) puede escribirse:

$$x = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \Psi) \tag{3.7}$$

donde A es la amplitud del movimiento y ψ el ángulo de fase. Los valores de A y ψ se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema, por ejemplo para

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

resulta:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$$

$$tan\Psi = \frac{\omega\, x_0}{\dot{x}_0}$$

Fórmula de Geiger

Sustituyendo $m = \dfrac{G}{g}$ G: peso de m

g: aceleración de la gravedad

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{G/g}} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{1}{G/k}}$$

$\dfrac{G}{k} = X_{SG}$: desplazamiento estático producido

por el peso G en la dirección del grado de libertad

entonces:

$$\omega = \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{1}{X_{SG}}} \tag{3.9}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{X_{SG}} \qquad (3.10)$$

Utilizando unidades de S.I. la (3.10) queda:

$$T = 2{,}00\sqrt{X_{SG}} \qquad (3.11)$$

con X_{SG} expresado en metros para un peso G en Newton.

Características dinámicas con amortiguamiento

El amortiguamiento puede definirse estudiando las vibraciones libres del modelo de la figura 3-2:

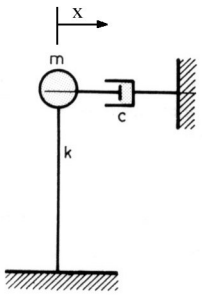


Fig. 3.2 - Modelo de 1 GLD con amortiguamiento (vibraciones libres)

Si se toma la ecuación (2.12) sin cargas ni aceleraciones de apoyo (vibraciones libres) y se divide por m se obtiene:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (3.12)$$

$$2\beta = \frac{c}{m} \qquad (3.13)$$

la solución de (3.12) está dada en la forma:

$$x = e^{rt} \qquad (3.14)$$

que proporciona la ecuación característica:

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0 \qquad (3.15)$$

Ya que (3.12) es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, homogénea a coeficientes constantes.

Las soluciones de (3.15) son

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} = 0 \qquad (3.16)$$

Según sea el radicando $\beta^2 - \omega^2$ se encuentran tres tipos de amortiguamiento:

$\beta^2-\omega^2 > 0 \rightarrow$ SUPERCRITICO: la estructura NO VIBRA

$\beta^2-\omega^2 = 0 \rightarrow$ CRÍTICO: caso límite $\beta = \omega \rightarrow c_r = -2\omega m$

$\boxed{\beta^2-\omega^2 < 0} \rightarrow$ SUBCRITICO: la estructura VIBRA con amplitud decreciente

Este es el caso más frecuente en ingeniería civil, por lo que enfatizaremos su estudio. Para este caso (subcrítico), la cantidad $(\beta^2 - \omega^2)$ es negativa, lo que hace que (3.16) tenga raíces complejas:

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} = 0 \qquad (3.17)$$

con $i = \sqrt{-1}$

Llamando frecuencia de vibración amortiguada a:

$$\omega_v = \omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad (3.18)$$

se obtiene:

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega_v \qquad (3.19)$$

$$r_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_v \qquad (3.20)$$

En las ecuaciones anteriores aparece la magnitud

$$\xi = \frac{c}{c_r} = \frac{2\beta m}{2\omega m} \qquad (3.21)$$

conocida como fracción de amortiguamiento crítico (en estructuras corrientes $0.02<\xi<0.06$), también:

$$\xi = \frac{\beta}{\omega} \qquad \text{o} \qquad \xi = \frac{c}{2m\omega}$$

Volviendo a la resolución de la ecuación de movimiento (3.12), escribimos la solución general en la forma:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.22}$$

sustituyendo r_1 y r_2 por la expresión 3.20, se obtiene

$$x = A\, e^{-\xi\omega t}\, \text{sen}\left(\omega_v t + \Psi\right) \tag{3.23}$$

Las constantes A y ψ se obtienen de las condiciones iniciales del problema.

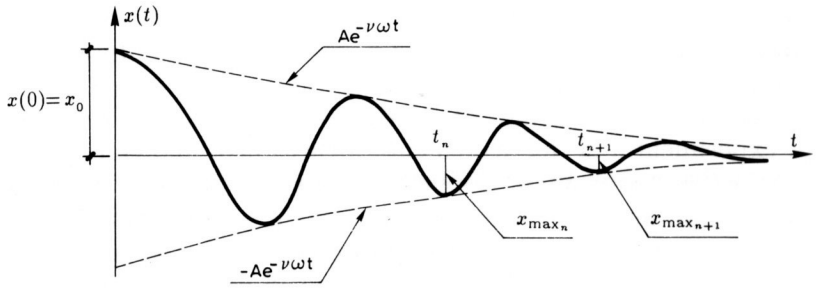


Fig. 3.3 - Vibraciones libres amortiguadas / 1 GLD

La evaluación del amortiguamiento en una estructura es un problema esencial en la dinámica estructural.

El origen de las fuerzas de amortiguamiento se debe a diferentes causas:

- *Rozamiento entre superficies de deslizamiento*, en donde la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la fuerza normal y al coeficiente de rozamiento (hipótesis de Coulomb)
- Amortiguamiento debido a *fuerzas aero o hidrodinámicas*
- *Debido a fricción interna* del material de la estructura

Generalmente, en el cálculo dinámico de estructuras, se utiliza un modelo de gran simplicidad que caracteriza el amortiguamiento de toda la estructura. Este modelo denominado de amortiguamiento viscoso se debe a Kelvin-Voigt y es proporcional a la velocidad.

$$F_a = -c\,\dot{x}$$

Los reglamentos brindan los coeficientes de amortiguamiento para cada tipo de estructura, pero puede obtenerse en forma experimental y con un método relativamente simple:

Determinación práctica de ξ

Para amortiguamientos bajos (del orden del 10% de crítico) la relación entre dos picos sucesivos puede aproximarse:

$$\frac{x_{máx}(n)}{x_{máx}(n+1)} = \frac{A e^{-\xi\omega t_n} sen(\omega_v t_n + \Psi)}{A e^{-\xi\omega t_{n+1}} sen(\omega_v t_{n+1} + \Psi)} \tag{3.24}$$

pero $t_{n+1} = t_n + T_v$; con $T_v = 2\pi/\omega_v$

$\therefore \quad t_{n+1} = t_n + \dfrac{2\pi}{\omega_v}$, entonces

$$\frac{x_{máx}(n)}{x_{máx}(n+1)} = \frac{e^{-\xi\omega t_n} sen(\omega_v t_n + \Psi)}{e^{-\xi\omega\left(t_n + \frac{2\pi}{\omega_v}\right)} sen\left(\omega_v t_n + \omega_v \frac{2\pi}{\omega_v} + \Psi\right)} \tag{3.25}$$

$$\frac{x_{máx}(n)}{x_{máx}(n+1)} = \frac{e^{-\xi\omega t_n} sen(\omega_v t_n + \Psi)}{e^{-\xi\omega t_n} e^{-\xi\omega\frac{2\pi}{\omega_v}} sen(\omega_v t_n + 2\pi + \Psi)}$$

$$\frac{x_{máx}(n)}{x_{máx}(n+1)} = \frac{1}{e^{-\xi 2\pi\omega/\omega_v}} \tag{3.26}$$

tomando logaritmo natural:

$$\ln\left[\frac{x_{máx}(n)}{x_{máx}(n+1)}\right] = \ln\left[e^{\xi 2\pi\omega/\omega_v}\right] \tag{3.27}$$

notar que para amortiguamientos del orden de

$$\xi = 0{,}1 \rightarrow \omega_v = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_v = \omega \cdot 0{,}995 \rightarrow \omega_v \approx \omega$$

Entonces

$$\ln\left[\frac{x_{\text{máx}}(n)}{x_{\text{máx}}(n+1)}\right] = 2\pi\xi \tag{3.28}$$

Para el caso de lecturas separadas por N ciclos:

$$\xi = \frac{\ln\left[x_{\text{máx}}(n)/x_{\text{máx}}(n+N)\right]}{2\pi N} \tag{3.29}$$

Excitación periódica

En la figura 3-4 pueden observarse diversas funciones de carga. De éstas, nos interesan por ahora, las periódicas y más particularmente las excitaciones armónicas ya que mediante series de Fourier cualquier excitación periódica puede llevarse a una suma de armónicas simples.

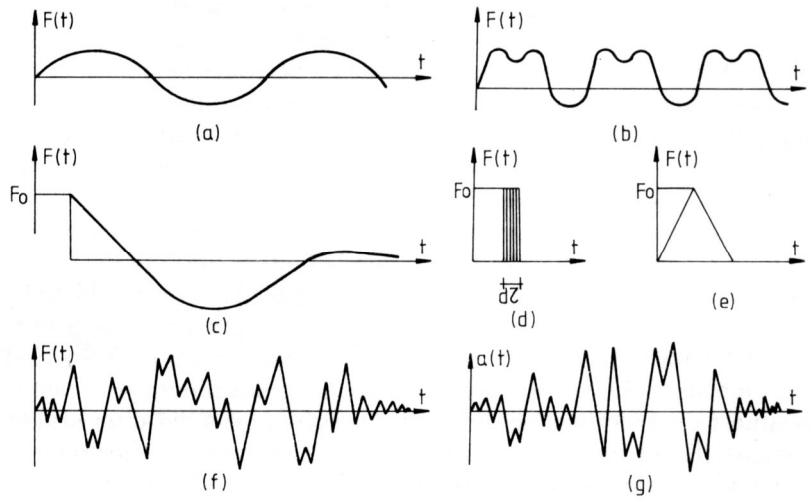


Fig. 3.4 - Tipos de cargas dinámicas. (a) armónica; (b) periódicas; (c) cuasi periódicas; (d), (e) fuerzas impulsivas; (f) carga dinámica general; (g) aceleración sísmica del terreno.

Excitación armónica

Si la carga es de tipo:

$$P = P_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$$

Entonces, la ecuación de movimiento será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = P_0 sen(\Omega t) \tag{3.30}$$

Ω: frecuencia de la excitación

la (3.30) puede escribirse también:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} sen(\Omega t) \tag{3.31}$$

La solución general de esta ecuación viene dada por

$$x_g = x_h + x_p \tag{3.32}$$

$$x_h = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.22}$$

Es la solución de la ecuación diferencial homogénea.

$$x_h = c_1 e^{-\xi\omega t} e^{i\omega_v t} + c_2 e^{-\xi\omega t} e^{-i\omega_v t} \tag{3.33}$$

Utilizando matemática para números complejos, esta última ecuación puede escribirse:

$$x_h = e^{-\xi\omega t}\left(c_1' sen\,\omega_v t + c_2' \cos\omega_v t\right) \tag{3.34}$$

x_p en la (3.32) es la solución particular y lleva la forma

$$x_p = A \operatorname{sen}\Omega t + B\cos\Omega t \tag{3.35}$$

Derivando y reemplazando en (3.30) se obtienen las constantes A y B:

$$\text{Denotando } \gamma = \frac{\Omega}{\omega} \tag{3.36}$$

$$A = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1-\gamma^2}{\left(1-\gamma^2\right)^2 + (2\xi\gamma)^2} \tag{3.37}$$

$$B = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{-2\xi\gamma}{\left(1-\gamma^2\right)^2 + (2\xi\gamma)^2} \tag{3.38}$$

Condiciones iniciales

Para el caso en que $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

Pueden calcularse las partes correspondientes a la solución particular (para t = 0)

$$x_{p(0)} = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{-2\xi\gamma}{\left(1-\gamma^2\right)^2 + (2\xi\gamma)^2} \tag{3.39}$$

$$\dot{x}_{p(0)} = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{\Omega\left(1-\gamma^2\right)}{\left(1-\gamma^2\right)^2 + (2\xi\gamma)^2} \tag{3.40}$$

Basados en éstas y en (3.32) y (3.34) podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$x_g(0) = x_0 = c_2' + x_{p0} \tag{3.41}$$

$$\dot{x}_g(0) = \dot{x}_0 = -\xi\omega x_0 + \xi\omega x_{p0} + \omega_v c_1' + \dot{x}_{p0} \tag{3.42}$$

y despejarse c_1' y c_2':

$$c_1' = \frac{1}{\omega_v}\left[\dot{x}_0 + \xi\omega x_0 - \dot{x}_{p0} - \xi\omega x_{p0}\right] \tag{3.43}$$

$$c_2' = x_0 - x_{p0} \tag{3.44}$$

Forma de operar:

1- Se calculan x_{p0} y $\dot{x}_{p0}$ con las 3.39 y 3.40

2- Se computan c_1' y c_2' con las 3.43 y 3.44

3- Se reemplaza todo en 3.32 y se tiene la respuesta en desplazamientos

4- Para obtener velocidades y aceleraciones se deriva la 3.32

Nota: la parte de la solución correspondiente a la ecuación homogénea incluye el coeficiente $e^{-\xi\omega t}$ que es una función decreciente con el tiempo, por lo que se la denomina *transitoria* y desaparece antes o después según sea el valor de ξ.

La estructura sigue vibrando con una frecuencia prácticamente igual a la de la excitación Ω. Esta parte de la solución se denomina respuesta en *régimen*.

Excitación arbitraria. Integral de Duhamel

Respuesta a un impulso elemental

Dada una carga impulsiva como la de la fig. 3-4(d), para condiciones iniciales nulas, puede calcularse la velocidad y posición al finalizar el impulso y a partir de ese instante se trata de un problema de vibraciones libres.

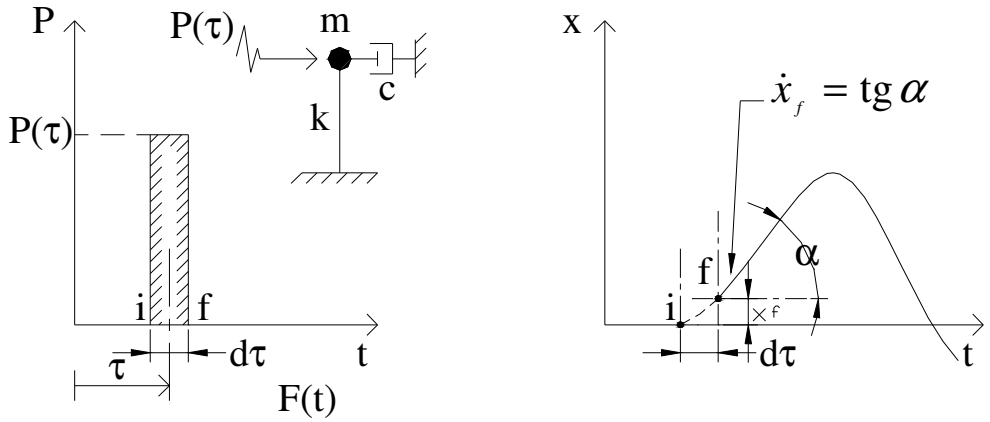


Fig. 3.5 - Respuesta a un impulso

$$\dot{x}_f = \dot{x}_i + \ddot{x}\,d\tau \qquad ; \ \ddot{x} = P(\tau)/m$$

entonces: $$\boxed{\dot{x}_f = \frac{P(\tau)}{m} d\tau} \qquad \text{(a)}$$

por otra parte

$$x_f = x_i + \dot{x}\,d\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}(d\tau)^2 \qquad \text{(b)}$$

$$\boxed{x_f = \frac{1}{2}\ddot{x}(d\tau)^2} \qquad \text{(b)}$$

Si $d\tau$ es muy pequeño, entonces (b) es despreciable frente a (a), es decir, luego de actuar un impulso la masa queda con velocidad pero prácticamente no se desplaza. La velocidad dada por (a) es la condición inicial para las vibraciones libres siguientes.

Reemplazando ésta en la (3.23), para un tiempo infinitesimal, se obtiene:

$$dx(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)}\left[\frac{P(\tau)}{m\omega_v}d\tau\ \text{sen}(\omega_v(t-\tau))\right] \qquad (3.45)$$

Si el sistema es lineal, pueden superponerse las respuestas de una sucesión de impulsos infinitesimales hasta el tiempo genérico "t". La solución dada por esta superposición es conocida como **Integral de Duhamel**

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_v}\int_0^t P(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}sen[\omega_v(t-\tau)]d\tau \qquad (3.46)$$

En el caso de excitación sísmica, se transforma en:

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_v}\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}sen[\omega_v(t-\tau)]d\tau \qquad (3.47)$$

Para el caso en que el problema tenga condiciones iniciales $\dot{x}_0 \neq 0$ y $x_0 \neq 0$, la solución se obtiene con el mismo procedimiento dado para las cargas armónicas, solo que la solución particular vendrá dada por (3.46) o (3.47).

Soluciones a la integral de Duhamel:

(a) Para ciertas funciones de P(τ) se encuentran tabuladas las primitivas de (3.46) y (3.47), así como el máximo factor dinámico (FAD) y el instante de máxima respuesta.

(b) Para funciones aproximadas por "trozos rectos", también se pueden encontrar soluciones "exactas" a dicha integral (punto 5.3.4 / pág. 154 / ref. [1])

(c) En el caso mas general se puede "integrar numéricamente" utilizando alguno de los métodos conocidos (Trapecios, Simpson, etc.)

Factor de amplificación dinámica

Es el coeficiente entre el máximo desplazamiento dinámico y el que produciría la carga en forma estática:

$$FAD = \frac{x(t)_{\text{máx}}}{x_{est}} \qquad (3.48)$$

Espectros sísmicos de respuesta

Puede definirse el espectro d respuesta (para un acelerograma dado) como los máximos valores de la respuesta de un sistema, expresado en función del periodo propio. Esto es muy útil para el diseño de estructuras donde solo los máximos son necesarios.

Para un sistema de 1 GLD:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = -m\,a(t) \qquad (2.11)$$

La solución a esta ecuación viene dada por la ec. (3.47) y el máximo valor absoluto será S_d.

Reemplazando $S_d = |x(t)|_{\text{máx}}$

Puede obtenerse, para 1 GLD, la expresión exacta del espectro de desplazamientos. Derivando una y dos veces se obtienen las expresiones para velocidad y aceleración:

$$S_v^r = |\dot{x}(t)|_{máx} \qquad ; \qquad S_a^r = |\ddot{x}(t)|_{máx}$$

(Ver ref. [1], cap. 5)

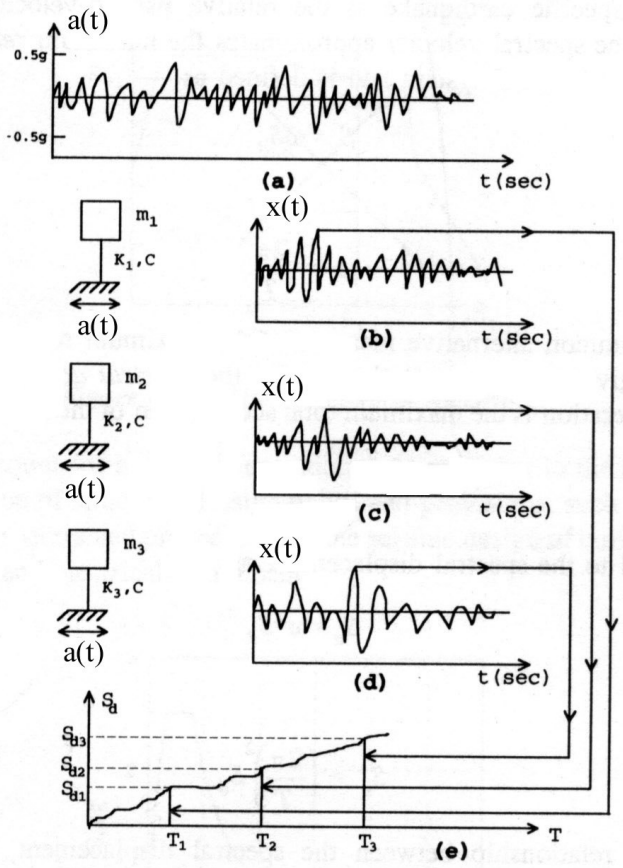


Fig. 3.6 - Espectro sísmico de respuesta para desplazamientos. $\underline{S_d}$

No obstante pueden hacerse ciertas hipótesis que simplifican las expresiones obtenidas. Estas nuevas ecuaciones definen los "Seudo espectros de respuesta".

Hipótesis simplificativas:

i- en estructuras civiles, $0{,}002 < \xi < 0{,}2$, por lo que puede reemplazarse ω_v por ω

ii- la función <u>coseno</u> que aparece en el espectro de velocidades (al derivar 3.47) puede reemplazarse, sin que ello implique grandes variaciones en los valores máximos, por una tipo <u>seno</u>

entonces:

$$s_d(\omega,\xi) = \left| -\frac{1}{\omega}\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}sen[\omega(t-\tau)]d\tau \right|_{máx} \qquad (3.49)$$

$$s_v(\omega,\xi) = \left| -\int_0^t a(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}sen[\omega(t-\tau)]d\tau \right|_{máx} \qquad (3.50)$$

$$s_a(\omega,\xi) = \left| \omega \int_0^t a(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} sen[\omega(t-\tau)] d\tau \right|_{máx} \tag{3.51}$$

definen los seudo espectros para desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Es importante notar que:

$$s_v = \omega S_d \tag{3.52}$$

$$s_a = \omega^2 S_d \tag{3.53}$$

Por lo que un espectro completo puede representarse en un gráfico tipo logarítmico como el de la figura 3-7.

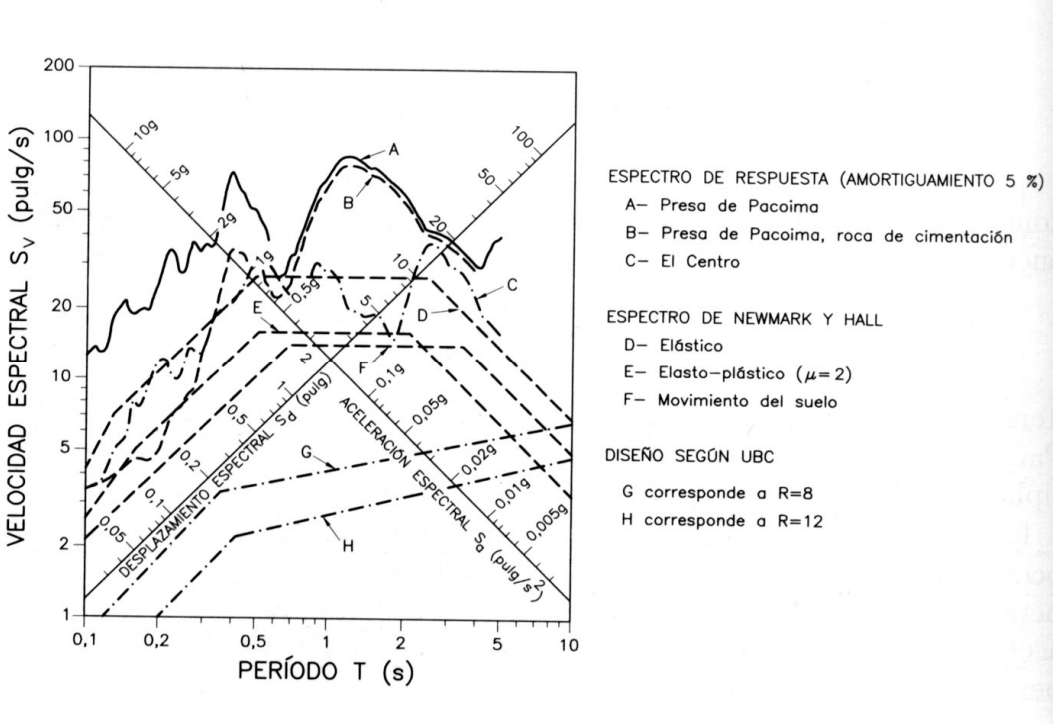


Fig. 3.7 - Comparación entre los espectros suavizados de Newmark y Hall, los espectros de diseño del UBC y los espectros elásticos para los registros de EL Centro y de la presa de Pacoima.

La normativa argentina INPRES-CIRSOC 103 establece la acción sísmica como una función del seudo espectro de respuesta de aceleraciones S_a. Es por eso que solo aparecen gráficos del tipo de la fig. 3-9, que varían según el tipo de suelo y la zona sísmica considerada.

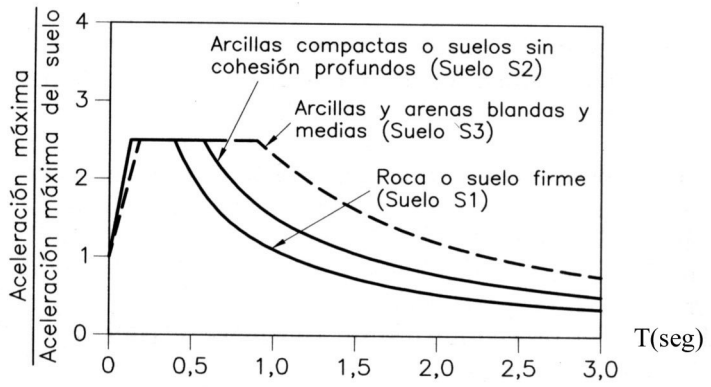


Fig. 3.8 - Espectro de diseño suavizado de Seed e Idriss (1982).

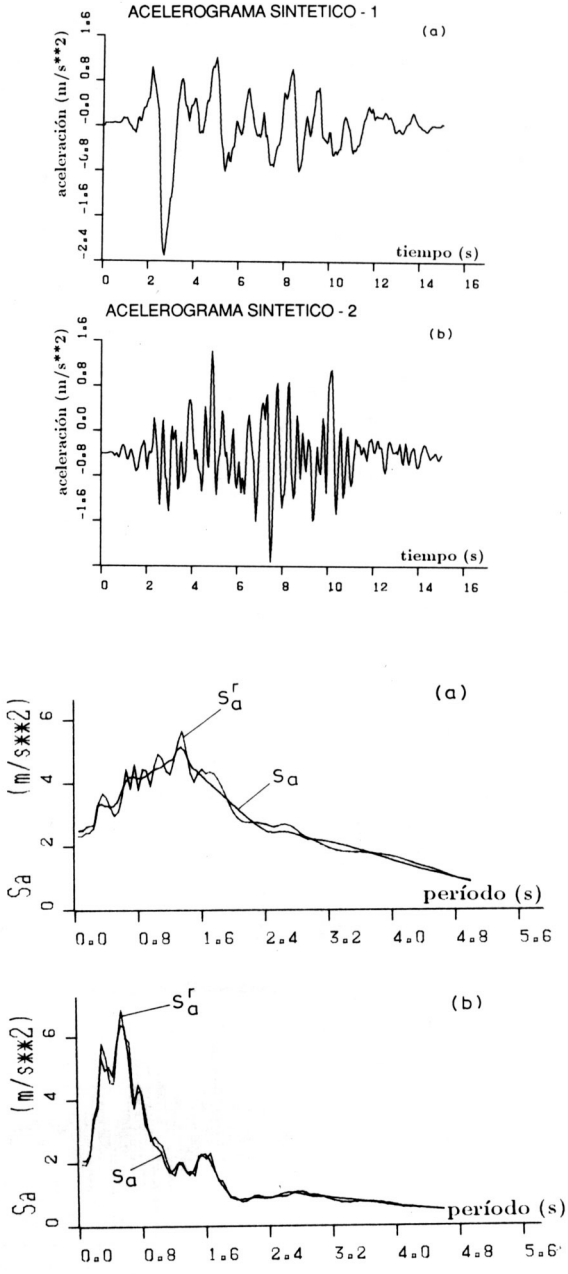


Fig. 3.9 - Seudo espectro y espectro de aceleraciones; (a) corresponde al acelerograma (1). (b) corresponde al acelerograma (2).

Integración numérica de la ecuación de movimiento

Se trata de resolver en forma discreta la ecuación de movimiento para 1 GLD dada por (2.8) y (2.11) utilizando ecuaciones en diferencias que permitan obtener x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en un instante t+Δt en función, únicamente, de los valores en el instante t.

Existen varios métodos para plantear las ecuaciones en diferencias antes mencionadas, pero solo nos dedicaremos en profundidad al de Newmark, dado que es uno de los más difundidos en software de análisis dinámico mediante FEM.

Método de Newmark (1 GLD)

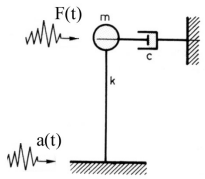
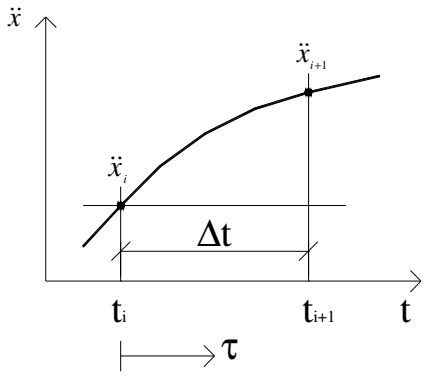


Fig. - 3.10

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = \overline{F} \qquad (3.54)$$

con $\overline{F} = f(t) + [-m\,a(t)]$



$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

haciendo el cambio de variable

$$\tau = t - t_i \quad ; \; \tau \le \Delta t$$

puede suponerse que el valor de la aceleración de respuesta en un instante τ se expresa como:

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_i + f(\tau)(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \qquad (3.55)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ para } \tau = 0 \\ 1 \text{ para } \tau = \Delta t \end{cases}$$

integrando (3.55) se obtiene la expresión de la velocidad

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i\tau + (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)\int_0^{\tau} f(\tau)\,d\tau \qquad (3.56)$$

$$g(\tau)=\int_0^{\tau} f(\tau)d\tau \tag{3.57}$$

$$\gamma\,\Delta t=\int_0^{\Delta\tau} f(\tau)d\tau \tag{3.58}$$

La expresión (3.56) queda:

$$\dot{x}(\tau)=\dot{x}_i+\ddot{x}_i\tau+(\ddot{x}_{i+1}-\ddot{x}_i)g(\tau) \tag{3.59}$$

que para $\tau=\Delta t$ resulta

$$\dot{x}_{i+1}=\dot{x}_i+\ddot{x}_i\Delta t+(\ddot{x}_{i+1}-\ddot{x}_i)\gamma\,\Delta t \tag{3.60}$$

$$\dot{x}_{i+1}=\dot{x}_i+[(1-\gamma)\ddot{x}_i+\gamma\,\ddot{x}_{i+1}]\Delta t \tag{3.61}$$

Para calcular los desplazamientos, se integra (3.59) y se obtiene

$$x(\tau)=x_i+\dot{x}_i\tau+\ddot{x}_i\frac{\tau^2}{2}+(\ddot{x}_{i+1}-\ddot{x}_i)\int_0^{\tau} g(\tau)d\tau \tag{3.62}$$

particularizando para $\tau=\Delta t$ y llamando

$$\beta\,\Delta t^2=\int_0^{\tau} g(\tau)d\tau \tag{3.63}$$

se obtiene la relación final en diferencias, propuesta por Newmark

$$x_{i+1}=x_i+\dot{x}_i\tau+\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{x}_i+\beta\,\ddot{x}_{i+1}\right]\Delta t^2 \tag{3.64}$$

Las ecuaciones (3.61) y (3.64) juntamente con la ecuación de movimiento (3.54) permiten obtener aceleraciones, velocidades y desplazamientos en un instante $t+\Delta t$ con solo conocer estas magnitudes en el instante t.

Los parámetros γ y β surgen de un análisis de estabilidad numérica que escapa a este curso (ver. ref. [1], [2] y [4]) pero pueden tomarse:

$$\gamma = 0{,}5$$
$$\beta = 0{,}25$$

Desarrollo y forma operativa

La ecuación de movimiento (3.54) valuada en $t=t_{i+1}$ toma la forma:

$$m\,\ddot{x}_{i+1} + c\,\dot{x}_{i+1} + k\,x_{i+1} = \overline{F}_{i+1} \qquad (3.65)$$

Reemplazando en ésta los valores en diferencias dados por (3.61) y (3.64), agrupando los valores que permanecen constantes en cantidades denominadas por $a_0,\ldots, a_7$; se obtiene el algoritmo de integración paso a paso.

A) <u>cálculos iniciales</u>

1- determinar las propiedades de la estructura: *m, c, k*

2- inicializar x_0, $\dot{x}_0$ y $\ddot{x}_0$ utilizando, de ser necesario, la ecuación (3.54)

3- seleccionar el paso de tiempo y los parámetros γ y β

$$\Delta t\ ;\ \gamma\ ;\ \beta \qquad\qquad \Delta t \le T/10\ ;\ \gamma=0{,}5\ ;\ \beta=0{,}25$$

4- calcular las constantes:

$$a_0 = \frac{1}{\gamma\,\Delta t^2}\ ; \qquad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\,\Delta t}\ ; \qquad a_2 = \frac{1}{\beta\,\Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1\ ; \qquad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1\ ; \qquad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right)$$

$$a_6 = \Delta t(1-\gamma) \qquad ; \qquad a_7 = \gamma\,\Delta t$$

5- formar la "rigidez efectiva"

$$\hat{k} = k + a_0\,m + a_1\,c$$

B) <u>para cada paso de integración</u>

1- formar el término de "carga efectiva" en $t+\Delta t$

$$\hat{r}_{i+1} = \overline{F}_{i+1} + m\left(a_0\,x_i + a_2\,\dot{x}_i + a_3\,\ddot{x}_i\right) + c\left(a_1\,x_i + a_4\,\dot{x}_i + a_5\,\ddot{x}_i\right)$$

2- resolver el desplazamiento en $t+\Delta t$

$$\hat{k} \cdot x_{i+1} = \hat{r}_{1+1}$$

3- calcular aceleraciones y velocidades en t+Δt

$$\ddot{x}_{i+1} = a_0 \left(x_{+1i} - x_i \right) - a_2 \, \dot{x}_i - a_3 \, \ddot{x}_i$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i - a_6 \, \ddot{x}_i + a_7 \, \ddot{x}_{i+1}$$

CAPÍTULO 4 - RESPUESTA DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

Ecuaciones de movimiento y equilibrio dinámico

Como se vio en el Capítulo 2 un modelo estructural dinámico esta dado por

- discretización espacial (por ej. masas concentradas)
- discretización temporal (por ej. Newmark)

En el Capítulo 3 se estudio el modelo discreto más sencillo (1 GLD) mientras que en la UT2 se plantearon (sin resolver) las ecuaciones de equilibrio dinámico para sistemas de múltiples GLD, utilizando el principio de D'Alembert.

En general, el sistema de ecuaciones diferenciales es del tipo

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}(t) \qquad (4.1)$$

En particular, para el caso sísmico:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{M}\{\boldsymbol{J}\,a\} \qquad (4.2)$$

Recordar que $\boldsymbol{J}$ es un vector con 1 en la posición del GLD en el que actúa la aceleración de apoyo a(t).

Vibraciones libres

Características dinámicas

El sistema que gobierna las vibraciones libres en un sistema de múltiples GLD es

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = 0 \qquad (4.3)$$

Como ya se vio, el cambio de frecuencia propia debido a considerar o no el amortiguamiento, no es relevante para estructuras civiles corrientes, por lo que seguiremos el análisis con el sistema simplificado:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = 0 \tag{4.4}$$

Una solución a este sistema puede ser de la forma

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\,sen(\omega t + \Psi) \tag{4.5}$$

$\boldsymbol{A}$: vector que contiene las amplitudes de las vibraciones

Ψ: ángulo de fase

$$\ddot{\boldsymbol{D}}(t) = -\omega^2 \boldsymbol{A}\; sen(\omega t + \Psi) \tag{4.6}$$

reemplazada en (4.4) queda:

$$-\boldsymbol{M}\,\omega^2 \boldsymbol{A}\; sen(\omega t + \Psi) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}\; sen(\omega t + \Psi) = 0$$

$$\{\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\}\boldsymbol{A}\; sen(\omega t + \Psi) = 0 \tag{4.7}$$

para que haya vibraciones, $\omega \neq 0$, por lo que

$$\text{sen}(\omega\, t + \Psi) \neq 0$$

y puede eliminarse de (4.7), quedando finalmente

$$\{\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\}\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.8}$$

Nos interesan las soluciones de $\boldsymbol{A}$ distintas de la trivial. La ecuación (su resolución) 4.8 representa un problema de autovectores y autovalores, en donde:

$$\left|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right| = 0 \tag{4.9}$$

Este determinante puede desarrollarse en la forma polinómica:

$$\omega^{2n} + \alpha_1\, \omega^{2n-2} + \alpha_2\, \omega^{2n-4} + ...\alpha_{n-1}\, \omega^2 + \alpha_n = 0 \tag{4.10}$$

obteniéndose la ecuación característica.

Cuando $\boldsymbol{K}$ y $\mathbf{M}$ son definidas positivas (caso usual en estructuras civiles), de la ecuación característica se obtienen "n" soluciones positivas ω_i^2 y en consecuencia "n" valores ω_i, siendo "n" el número de GLD de la estructura.

Los valores ω_i se denominan "frecuencias propias" o "pulsaciones" de la estructura y los "n" periodos propios se calculan

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \qquad \text{i} = 1,...\text{n} \tag{4.11}$$

Siendo T_1 el período correspondiente ω_1, que es la frecuencia de menor valor, éste se denomina *"periodo fundamental"* del sistema. Reemplazando cada ω_i en la (4.8) se obtiene el correspondiente $\boldsymbol{A}_i$ que se denomina vector de "forma" modal o simplemente "modo". Este vector "modo" contiene la forma que tomara la estructura en cada vibración. Para cada frecuencia vibratoria, la forma modal será diferente. Es importante notar que (4.8) se cumple para cualquier múltiplo de $\boldsymbol{A}_i$, por lo tanto inferimos que no interesa la magnitud de las componentes de $\boldsymbol{A}_i$ sino la relación existente entre ellas. Por esto es conveniente "normalizar" los distintos $\boldsymbol{A}_i$.

Normalización de los modos

1. Por la máxima componente

dado $\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{imáx} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ puede dividirse cada elemento por el $a_{imáx}$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{\boldsymbol{A}_i}{a_{imáx}} \tag{4.12}$$

$\boldsymbol{\varphi}_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \varphi_{in} \end{bmatrix}$ modo $\underline{\text{i}}$ normalizado

2. Según la matriz de masas

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{A}_i \left(M_i *\right)^{-1/2} \tag{4.13}$$

Con

$$M_i^* = \boldsymbol{A}_i^T [\boldsymbol{M}] \boldsymbol{A}_i \tag{4.14}$$

Esta normalización permite asegurar la condición

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T [\boldsymbol{M}] \boldsymbol{\varphi}_i = 1 \tag{4.15}$$

Expresión que será de suma importancia más adelante.

Obtención de los grados de libertad dinámicos

No siempre todos los grados de libertad estáticos que definen el comportamiento de la estructura tienen asociada "masa", es decir que no son necesarios en el análisis dinámico. Por ejemplo los pórticos de las figuras 2-15 (f) y (h) que son analizados con modelos dinámicos de menor orden que los respectivos estáticos (GLE). Lo mismo se ve en la figura 2-16. La forma más simple de reducir en número de grados de libertad sin perder precisión es mediante la:

Condensación estática de la matriz de rigidez

Dada una estructura y su modelo estático puede subdividirse la matriz de rigidez (así como el vector desplazamientos) de manera de separar las ecuaciones que tienen asociada masa (GLD) y las que no la tienen (GLE).

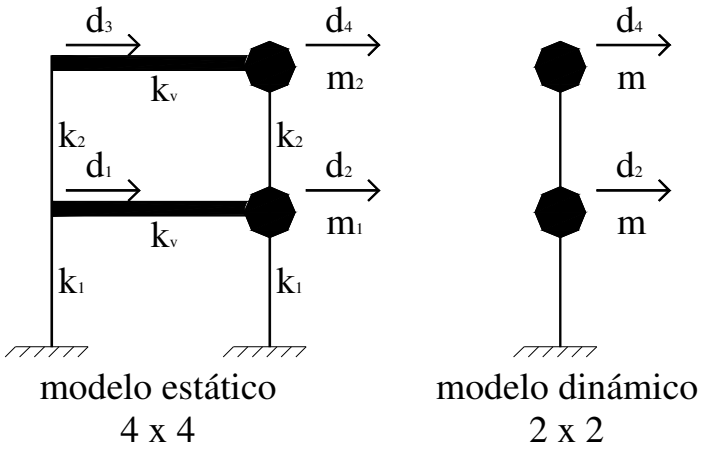


Fig. 4.1 - Condensación estática

Para el ejemplo de la figura 4-1, tenemos que, observando el vector desplazamientos estáticos $\boldsymbol{D}_s$ podemos determinar que parte queremos eliminar y cuales grados de libertad deseamos conservar como GLD.

$$\boldsymbol{D}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D}_e \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{D}$: vector con los GLD

$\boldsymbol{D}_e$: grados de libertad a eliminar

$$\boldsymbol{K}_s \boldsymbol{D}_s = \boldsymbol{F}_s \tag{4.1}$$

El sistema de ecuaciones estático puede escribirse

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}_e \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Como $\boldsymbol{F}_e$ representa las fuerzas en los grados de libertad a eliminar

$$\boldsymbol{F}_e = 0 \tag{4.17}$$

La segunda ecuación (vectorial) de (4.16) puede, entonces, expresarse como

$$\boldsymbol{K}_{21} \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}_{22} \boldsymbol{D}_e = 0 \tag{4.18}$$

de donde

$$\boldsymbol{D}_e = -\boldsymbol{K}_{22}^{-1} \boldsymbol{K}_{21} \boldsymbol{D} \tag{4.19}$$

Desarrollando ahora la primera ecuación de (4.16) tendremos

$$\boldsymbol{K}_{11} \boldsymbol{D} - \boldsymbol{K}_{12} \left\{ \boldsymbol{K}_{22}^{-1} \boldsymbol{K}_{21} \boldsymbol{D} \right\} = \boldsymbol{F} \tag{4.20}$$

reordenando

$$\left\{ \boldsymbol{K}_{11} - \boldsymbol{K}_{12} \boldsymbol{K}_{22}^{-1} \boldsymbol{K}_{21} \right\} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{F} \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{F} \tag{4.22}$$

donde $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez condensada y vale

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{11} - \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{21} \tag{4.23}$$

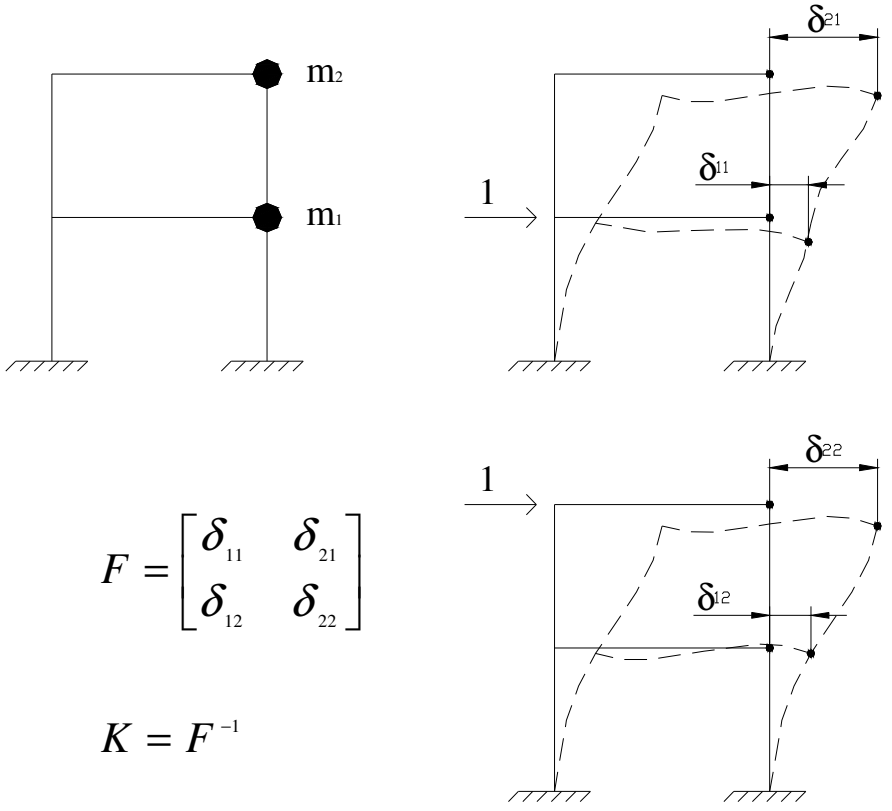
Finalmente el sistema dinámico de la fig. 4-1 estará representado matemáticamente por

$$\underset{2\times2}{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{D} + \underset{2\times2}{\boldsymbol{M}}\,\ddot{\boldsymbol{D}} = 0$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_4 \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

Otra forma de obtener la matriz de rigidez del modelo dinámico es invirtiendo la matriz de flexibilidad de los GLE que tienen asociada masa.

Este método, si bien menos formal, puede ser de más sencilla aplicación para procedimientos manuales. Para nuestro ejemplo:



$$F = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$K = F^{-1}$$

Fig. 4-2 - Obtención de $\boldsymbol{K}$ *mediante* $\boldsymbol{F}^{-1}$

Matriz de amortiguamiento

Dado el sistema

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}(t) \tag{4.1}$$

solo nos resta conocer (para encarar la resolución) la matriz $\boldsymbol{C}$, puesto que en el apartado anterior se mostraron dos maneras de obtener $\boldsymbol{K}$ y sabemos (porque usamos un modelo discreto de masas concentradas) que:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & m_i & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & m_n \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Conviene definir matrices de amortiguamiento ortogonales, pero para esto debemos, primero incursionar un poco en las condiciones de ortogonalidad de los modos propios.

Condiciones de ortogonalidad

Las frecuencias y modos propios pueden ordenarse en matrices denominadas *espectrales* y *modales*, que son, respectivamente:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N \end{bmatrix}; \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \ldots \boldsymbol{\varphi}_n] \tag{4.26}$$

Puede demostrarse (ver ref. [1], [2], [3], [4]) que

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = 0} \quad \text{i} \neq \text{j} \tag{4.27}$$

Esta condición para los modos puede extenderse a

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \quad \text{i} \neq \text{j} \tag{4.28}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \qquad \text{i} \neq \text{j} \tag{4.29}$$

Si los vectores $\boldsymbol{\varphi}_i$ fueron normalizados según (4.13) las condiciones de ortogonalidad y normalización pueden expresarse como una única condición de *ortonormalidad*

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{K}^* \tag{4.31}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y $\boldsymbol{K}^*$ es una matriz diagonal

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} k_1^* & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k_i^* & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_n^* \end{bmatrix} ; \; k_i^* = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathrm{K} \boldsymbol{\varphi}_i \tag{4.32}$$

Matrices de amortiguamiento ortogonales

Una de las hipótesis para lograr una representación numérica del amortiguamiento de una estructura está dada por suponer que existe un mecanismo de disipación uniforme de energía. En tal caso puede desarrollarse una matriz de amortiguamiento que cumpla las condiciones de ortogonalidad respecto a la matriz modal.

El "amortiguamiento proporcional" permite definir una matriz que sea proporcional a la de las masas, a la de rigidez o a ambas.

$$\boldsymbol{C} = \alpha_1 \boldsymbol{M} + \alpha_2 \boldsymbol{K} \tag{4.33}$$

La condición de ortogonalidad:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \qquad \text{i} \neq \text{j} \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varphi}_i = 2\omega_i \xi_i \tag{4.35}$$

Los coeficientes α_1 y α_2 se calculan a partir de las ecuaciones anteriores (4.35) y (4.33)

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \left[\alpha_1 \boldsymbol{M} + \alpha_2 \boldsymbol{K}\right] \boldsymbol{\varphi}_i = 2\omega_i \xi_i \tag{4.36}$$

$$\alpha_1 \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}_i + \alpha_2 \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}_i = 2\omega_i \xi_i \tag{4.37}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \omega_i^2 = 2\omega_i \xi_i \tag{4.38}$$

Recordar que si la normalización de los autovectores $\boldsymbol{\varphi}_i$ fue hecha según (4.13) y (4.14) el producto

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2 \tag{4.39}$$

Esto se debe a que la (4.8) puede expresarse para $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\varphi}_i$ y premultiplicarse por $\boldsymbol{\varphi}_i^T$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \left[\boldsymbol{K} - \omega_i^2 \boldsymbol{M}\right] \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \tag{4.40}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}_i - \omega_i^2 \underbrace{\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}_i}_{1} = 0 \tag{4.41}$$

Determinación práctica de modos y frecuencias

Este es, por sí mismo, uno de los problemas más complejos de la dinámica estructural. Generalmente no es necesaria la resolución de todas las frecuencias y sus modos, sino que solo interesan las primeras "q" que representan las posibilidades ciertas de vibrar pues necesitan menos energía de excitación.

Cuando el problema es de pocos GLD es posible resolver el determinante de (4.9) o (4.10) obteniéndose las "n" ω_i y luego los "n" $\boldsymbol{\varphi}_i$, donde "n" es el número de GLD. Para problemas con muchos GLD se utilizan técnicas numéricas (aproximadas) para obtener los primeros "q" pares de (ω_i; $\boldsymbol{\varphi}_i$). En la mayoría de los casos prácticos de ingeniería q << n.

En las referencias bibliográficas pueden encontrarse descripciones detalladas de varios métodos. Nosotros desarrollaremos solo uno que es relativamente simple y preciso.

Método de Stodola-Vianello

Partiendo de la (4.8) y recordando que se cumple para cualquier múltiplo del autovector $\boldsymbol{A}$ podemos escribir

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A} - \omega^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.42}$$

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A} = \omega^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A} \tag{4.43}$$

Suponiendo un vector inicial $\boldsymbol{A}^0$ conocido (cercano a $\boldsymbol{A}$)

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}} = \omega^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{0}} \tag{4.44}$$

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}} \approx \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{0}} \tag{4.45}$$

que lleva a la fórmula de recurrencia

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}} \approx \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}} \tag{4.46}$$

Nota: una descripción detallada de este método puede encontrarse en [4], parte 11.2 "Vector Iteration Methods", así como prueba de la convergencia del método.

Procedimiento de cálculo

1- Se propone un vector $\boldsymbol{A}^0$ inicial. Conviene que los valores correspondan a una deformada suave, no obstante esto solo acelera la convergencia.

2- Se calcula

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{0}} \tag{4.47}$$

3- Se normaliza $\boldsymbol{A}^1$

$$\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}} \left\{ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1T}} \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}} \right\}^{-1/2} \tag{4.48}$$

i=1

4- Se mejora la solución

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}} = \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{M}\,\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i}}} \tag{4.49}$$

5- Se normaliza la nueva solución

$$\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}} \left\{ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1,T}} \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}} \right\}^{-1/2} \tag{4.50}$$

6- Se calcula la frecuencia correspondiente

$$\omega^{i+1} = \left(\frac{\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}}}^{T} \boldsymbol{K}\,\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}}}}{\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}}}^{T} \boldsymbol{M}\,\overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{i+1}}}} \right)^{1/2} \tag{4.51}$$

7- Se controla la convergencia

$$\left|\frac{\omega^{i+1}-\omega^{i}}{\omega^{i+1}}\right| \le TOL \xrightarrow{NO} \text{se vuelve al paso 4} \qquad (4.52)$$

$\downarrow$SI

$$\varphi_1 = \overline{A^{i+1}} \quad ; \quad \omega_1 = \omega^{i+1} \qquad (4.53)$$

Se obtuvo el primer autovalor y su correspondiente autovector.

Siempre: $i \to \infty$; $\overline{A^{i}} \to \varphi_1$; $\omega^{i} \to \omega_1$

Obtención de modos y frecuencias superiores

El procedimiento es el mismo que para el modo 1, solamente debemos garantizar que el vector de "arranque" sea ortogonal a φ_1

Se supone que un vector inicial

$$A_2^0 = \sum_{j=1}^{n} q_j \varphi_j \qquad (4.54)$$

que para hacerlo ortogonal a φ_1 le "restamos" la componente $q_1 \varphi_1$

$$A^*{}_2^0 = A_2^0 - q_1 \varphi_1 \qquad (4.55)$$

Para determinar q_1, premultiplicamos la (4.54) por $[\varphi_1{}^T M]$ y aplicando las propiedades de ortogonalidad nos queda

$$\left[\varphi_I^T M\right] A_2^0 = \left[\varphi_I^T M\right] \sum_{j=1}^{n} q_j \varphi_j \qquad (4.56)$$

$$q_1 = \frac{\varphi_1{}^T M A_2^0}{\varphi_1{}^T M \varphi_1} \qquad (4.57)$$

y en general

$$q_i = \frac{\varphi_i{}^T M A_{i+1}^0}{\varphi_i{}^T M \varphi_i} \qquad (4.58)$$

y para los vectores de arranque (ortogonales a los previamente calculados)

$$A^*{}_i^0 = A_i^0 - \sum_{j=1}^{i-1} q_j \varphi_j \qquad (4.59)$$

Procedimiento:

1. Se estima $\boldsymbol{A}_i^{0k}$
2. Se calcula q_i con (4.58)
3. Se calcula $\boldsymbol{A_i}^{*0k}$ con (4.59)
4. Se sigue con el método de Stodola propiamente dicho

Resolución de las ecuaciones de movimiento en estructuras con múltiples GLD

Descomposición y superposición modal

Si bien desarrollaremos el método para el caso sísmico, todo lo expuesto es valido para el caso general.

La ecuación que gobierna el comportamiento de una estructura de múltiples GLD es la

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{M}\{\boldsymbol{J}\,a\} \tag{4.2}$$

Las vibraciones libres no amortiguadas se estudian mediante

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0} \tag{4.4}$$

al cual, según lo expuesto en puntos anteriores, le corresponden "n" pares de frecuencias y "modos" que son solución del sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left[\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right]\boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{4.8}$$

Recordemos que los autovectores φ_i son ortogonales respecto a las matrices de masa y rigidez. Es por esto que pueden formar una base completa para el espacio de los desplazamientos estructurales, es decir, es posible escribir

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_i\, y_i(t) \tag{4.60}$$

Donde $y_i(t)$ es un escalar función del tiempo a determinar, llamado "respuesta generalizada".

Sustituyendo (4.60) en (4.2) obtenemos

$$\boldsymbol{M}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_i\,\ddot{y}_i(t)+\boldsymbol{C}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_i\,\dot{y}_i(t)+\boldsymbol{K}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_i\,y_i(t)=-\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}\,a \qquad (4.61)$$

Premultiplicando (4.61) por un $\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}$ cualquiera, se cumple que:

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{M}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j=M_j\,* \qquad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{K}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_j=K_j\,* \qquad (4.63)$$

Y si, como es habitual, se está frente a matrices de amortiguamiento proporcionales y ortogonales (ver punto 4.4)

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{C}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_j=C_j\,* \qquad (4.64)$$

Entonces la (4.61) premultiplicada por un $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}$ cualquiera queda como una ecuación de 1 GLD

$$M_j\,*\,\ddot{y}_j(t)+C_j\,*\,\dot{y}_j(t)+K_j\,*\,y_j(t)=-\boldsymbol{\varphi}_j^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}\,a(t) \qquad (4.65)$$

Recordando que:

$$\boldsymbol{\varphi}_j{}^T\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\varphi}_j=C_j*=2\omega_j\xi_j \qquad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j{}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\varphi}_j=K_j*=\omega_j{}^2 \qquad (4.39)$$

Y dividiendo ambos miembros por $M_j*=\boldsymbol{\varphi}_j{}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\varphi}_j$

$$\ddot{y}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\,\dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = -\frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}\;a(t)}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\varphi}_j} \qquad (4.66)$$

Al valor

$$Q_j = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\varphi}_j} \qquad (4.67)$$

se lo denomina "coeficiente de participación modal".

Finalmente, el sistema (4.2), al ser "proyectado" según la base formada por la matriz modal $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots\ \boldsymbol{\varphi}_n]$, queda en "n" ecuaciones diferenciales de 1 GLD, del tipo:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\,\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = -Q_i\,a(t) \qquad (4.68)$$

Esta ecuación puede resolverse con cualquiera de los métodos vistos en la UT3. Una vez obtenidos los "n" $y_i(t)$, puede obtenerse la solución estructural mediante (4.60).

En general, los modos bajos son los que contienen menos energía elástica de deformación y por ende los que más contribuyen a la respuesta estructural.

Usualmente

$$\boldsymbol{D}(t) = \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{\varphi}_i\; y_i(t) \quad ; \quad q < n \qquad (4.69)$$

Procedimiento de cálculo

1- Se determinan los "q" primeros modos y frecuencias
2- Se resuelven las "q" ecuaciones (4.68) i=1,…q
3- Se obtiene la historia en el tiempo según (4.69) y sus derivadas
4- Se obtienen las fuerzas elásticas, de inercia y de amortiguamiento para cada instante

Integración directa de las ecuaciones de movimiento

Como su nombre lo indica, este método no requiere ninguna transformación previa de las ecuaciones de movimiento. Consiste, básicamente en obtener la solución en una cierta cantidad (discreta) de pasos de tiempo. Es por esto que también es llamada integración "paso a paso".

Como ya adelantamos, existen numerosas variantes y algoritmos para la integración numérica de las ecuaciones de movimiento, pero nuestros desarrollos estarán dados en el método de Newmark.

En esencia es igual al planteo dado en el Capítulo 3, solo que en vez de tratarse de una ecuación de 1 GLD se trata de un sistema de "n" GLD.

Procedimiento de cálculo

A) Iniciales

1. Ensamblar las matrices $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{K}$
2. Inicializar $\boldsymbol{D}_0$, $\dot{\boldsymbol{D}}_0$ y $\ddot{\boldsymbol{D}}_0$
3. Seleccionar el paso de tiempo y los parámetros γ y β

$$\Delta t \leq T_{mín}/10 \quad ; \quad \gamma=0{,}5 \quad ; \quad \beta=0{,}25$$

4. Calcular las constantes $a_0,\ldots a_7$
5. Formar la matriz de rigidez efectiva:

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} + a_0\boldsymbol{M} + a_1\boldsymbol{C} \tag{4.70}$$

B) Para cada paso de tiempo

1. Formar el término de "carga efectiva" en t+Δt (*1)

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}}_{i+1} = \overline{\boldsymbol{F}}_{i+1} + \boldsymbol{M}\left(a_0\boldsymbol{D}_i + a_2\dot{\boldsymbol{D}}_i + a_3\ddot{\boldsymbol{D}}_i\right) \\ + \boldsymbol{C}\left(a_1\boldsymbol{D}_i + a_4\dot{\boldsymbol{D}}_i + a_5\ddot{\boldsymbol{D}}_i\right)\end{aligned} \tag{4.71}$$

2. Resolver el desplazamiento en t+Δt

$$\hat{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{D}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{r}}_{i+1} \tag{4.72}$$

*1: el término $\overline{\boldsymbol{F}}_{i+1} = \overline{\boldsymbol{F}}_i + \{-\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}\,a(t)\}$ se refiere a fuerzas generalizadas

3. Calcular aceleraciones y velocidades en t+Δt

$$\ddot{\boldsymbol{D}}_{i+1} = a_0\left(\boldsymbol{D}_{i+1} - \boldsymbol{D}_i\right) - a_2\dot{\boldsymbol{D}}_i - a_3\ddot{\boldsymbol{D}}_i \tag{4.73}$$

$$\dot{\boldsymbol{D}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{D}}_i - a_6\ddot{\boldsymbol{D}}_i + a_7\ddot{\boldsymbol{D}}_{i+1} \tag{4.74}$$

 # Notar que para cada paso de tiempo se debe resolver el sistema (4.72) lo que puede hacer excesivo el costo de cálculo y almacenamiento.

Respuesta máxima utilizando espectros de respuesta

Las ecuaciones desacopladas (4.68) pueden resolverse utilizando los espectros de respuesta: la máxima aceleración será

$$\left|\ddot{y}_i(t)\right|_{máx} = Q_i\left(S_a\right)_i \tag{4.75}$$

entonces, el máximo desplazamiento es

$$\left|y_i(t)\right|_{\text{máx}} = \frac{Q_i}{\omega_i^2}\left(S_a\right)_i \tag{4.76}$$

Podemos, entonces calcular los máximos desplazamientos (en todos los GLD) para el modo "j":

$$\boldsymbol{D}^j_{máx} = \boldsymbol{\varphi}_j\left|y_j(t)\right|_{máx} = \boldsymbol{\varphi}_j\frac{Q_j}{\omega_j^2}\left(S_a\right)_j \tag{4.77}$$

$$\boldsymbol{D}^j_{máx} = \boldsymbol{A}_j\frac{\left(S_a\right)_j}{\omega_j^2} \tag{4.78}$$

Donde $\boldsymbol{A}_j$ es el vector de coeficientes de participación modal correspondientes al modo de vibración "j". Puesto que el máximo en cada grado de libertad no se produce en el mismo instante, la respuesta total máxima *no es la suma* de los máximos de cada modo!!

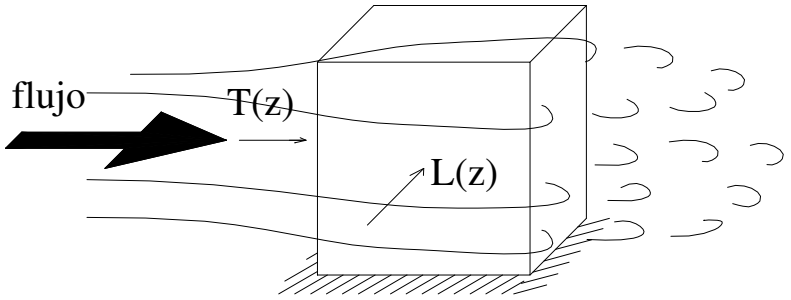
$$\boldsymbol{D}_{máx} \neq \sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{D}^i_{máx} \tag{4.79}$$

Una forma muy utilizada (y precisa) de evaluar la respuesta máxima (desplazamientos, velocidades, aceleraciones y esfuerzos) como combinación de los máximos modales es:

$$\boldsymbol{R}_{máx} = \sqrt{\sum_{j=1}^{q}\left(\boldsymbol{R}^j_{máx}\right)^2} \tag{4.80}$$

denominada SRSS

CAPÍTULO 5 - ANÁLISIS DE CONSTRUCCIONES CON EFECTOS DINÁMICOS DE VIENTO



T(z): fuerza aerodinámica de empuje, paralela a la dirección del flujo

L(z): fuerza aerodinámica de deriva, perpendicular a la dirección del flujo

Generalmente son dominantes las fuerzas de empuje, pero para ciertas estructuras:

- bajo amortiguamiento
- acusada flexibilidad (poca rigidez)
- construcciones livianas (poca masa)

las acciones perpendiculares de "deriva" pueden tener efectos significativos que deben ser contemplados en el análisis.

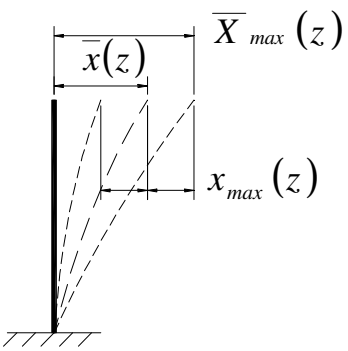
CIRSOC 102-1 → procedimientos simplificados

Validez:

a) construcciones prismáticas o cuasiprismáticas
b) primer modo dominante y de forma aproximadamente lineal
c) periodo fundamental $T_1 > 1$ seg
d) amortiguamiento $\xi < 0{,}01$

Acciones paralelas a la dirección del viento

(procedimiento basado en el "factor de ráfaga")



$\overline{X}_{max}(z) = \bar{x}(z) + x_{max}(z)$

$\bar{x}(z)$: desplazamiento medio

$x_{max}(z)$: desplazamiento fluctuante debido a la turbulencia variable con el tiempo

Se define como factor de ráfaga

$$G(z) = 1 + \frac{x_{max}(z)}{\bar{x}(z)}$$

entonces

$$\overline{X}_{max}(z) = G(z) \cdot \bar{x}(z)$$

Hipótesis básicas para poder reemplazar la acción dinámica del viento turbulento por un procedimiento estático equivalente.

a) Comportamiento elástico lineal de la estructura.

b) El modo fundamental de vibración es una función lineal de la altura.

c) La contribución de los modos superiores al primero en respuesta se considera despreciable, por lo que G(z) = G = cte.

d) La velocidad media del viento es promediada sobre intervalos de una hora.

e) La variación de la velocidad media del viento varía según

$$V(z) = V_0 \cdot \frac{\ln\left(\frac{z}{z_{0,i}}\right)}{\ln\left(\frac{10}{z_{0,i}}\right)} \cdot \left(\frac{z_{0,i}}{z_{0,1}}\right)^{0,0706}$$

V_0: velocidad básica de diseño (m/seg)

$z_{0,i}$: parámetro que depende de la rugosidad i

$z_{0,1}$: $z_{0,i}$ para rugosidad I (referencia)

Procedimiento de cálculo

I) Presiones

La presión dinámica que incluye el efecto de la turbulencia del viento se determina mediante

$$q'_z = G \cdot c_z \cdot c_2 \cdot q_0$$

G: factor de ráfaga

c_z: variación por rugosidad y altura (art. 5.2.4.2, CIRSOC 102)

c_2: factor por cambio de tiempo en velocidad media

(Tabla 3/pág. 20, CIRSOC 102-1)

q_0: presión dinámica básica (art. 5.2.3, CIRSOC 102)

$$G = 1 + 1{,}234 \cdot K \cdot \frac{\sqrt{B + r}}{J} \Bigg\} \rightarrow$$

se calcula mediante tablas y ábacos que utilizan una serie de parámetros auxiliares

En cada nivel se comparará:

$q'_z > q_z$ → NO → se adopta q_z para los esfuerzos

→ SI → se adopta q'_z para los esfuerzos

CIRSOC 102 → $q_z = c_z \cdot c_d \cdot q_0$

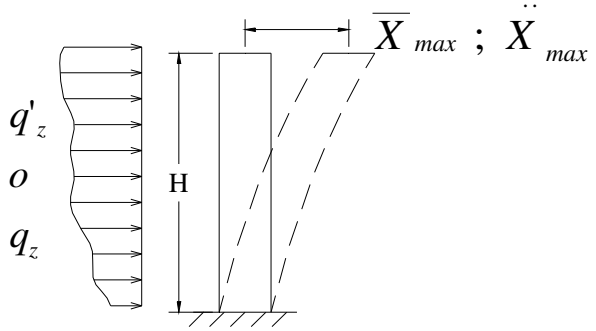
II) Aceleraciones

$\ddot{X}_{max}(z) = K \cdot \sigma_{\ddot{X}}(z)$ (paralela al viento)

K → fig. 13, CIRSOC 102-1

$\sigma_{\ddot{X}}(z)$ → valor medio cuadrático de las aceleraciones (pág. 21)

III) Verificaciones (paralelas al viento)



a- Dimensionado estructural

b- Verificación de confort con gráficos y tablas en función de X_{max}, $\ddot{X}_{max}$ y T

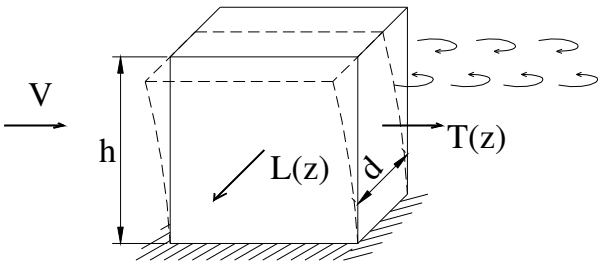
c- Verificación de deformaciones admisibles

$$\frac{H}{500} < X_{max} < \frac{H}{350}$$

Acciones perpendiculares a la dirección del viento

I) Resonancia

torbellinos de Bèrnard - Karman



La velocidad crítica del viento que produce el fenómeno de resonancia es

$$V_{cr} = \frac{d}{S \cdot T}$$

d: ancho de la superficie maestra (puede ser variable)

S: nº de Strouhal $\begin{cases} \text{cilindros} \approx 0{,}20 \\ \text{prismas} \approx 0{,}25 \text{ a } 0{,}30 \end{cases}$

T: período propio $\begin{cases} V_{cr} \,//\, \rightarrow T \,// \\ V_{cr} \perp \rightarrow T \perp \end{cases}$

Si $V_{cr} > 25$ m/seg, entonces puede prescindirse del cálculo de la resonancia.

De lo contrario:

Fuerzas de deriva:

(a la velocidad crítica)

$$L(z) = \frac{0{,}08}{\xi} \cdot q_{cr} \cdot \frac{z}{h} \cdot d$$

ξ: fracción del amortiguamiento

$$q_{cr} = 0{,}000613 \cdot V_{cr}^2 \left[\frac{kN}{m^2}\right]$$

$$V_{cr} = V_{cr} \perp$$

Fuerzas de empuje: se admite distribución uniforme

(a la velocidad crítica)

$$T(z) = T_z = 0{,}8 \cdot C_E \cdot G \cdot q_{cr} \cdot d$$

C_E: coeficiente global de empuje CIRSOC 102

G: factor de ráfaga correspondiente a V_{cr}

$q_{cr} \rightarrow$ con V_{cr}//

Las fuerzas L(z) y T_z obtenidas para la velocidad crítica (correspondientes al período perpendicular y paralelo respectivamente) se suman de la siguiente manera:

$$F(z) = \sqrt{L(z)^2 + T_z^2}$$

y se debe comparar con las correspondientes obtenidas con q'_z o q_z dadas para la velocidad de diseño.

Criterios de confort en edificios que oscilan

El confort de los ocupantes de los edificios de gran altura que soportan la acción del viento es un tema de primordial importancia en el diseño.

La respuesta humana al movimiento oscilatorio de las construcciones abarca una extensa gama de reacciones, con efectos psicológicos y fisiológicos tales como mareos, ansiedad, molestias visuales o temor, llegando hasta náusea aguda.

Por el contrario, otras persones sienten placer por el movimiento y la experiencia poco usual de estar en una construcción que oscila. Adicionalmente, las oscilaciones excesivas producen fisuración de la tabiquería, rotura de vidrios de ventanas y caída de revestimientos, lo cual incide negativamente en el valor de una propiedad y su rentabilidad.

Sin embargo, un edificio resultaría demasiado costoso si se construye o equipa de modo que pueda soportar sin movimientos perceptibles una tormenta con vientos huracanados o un fuerte sismo.

En consecuencia, los movimientos son casi inevitables y el problema del diseño consiste en mantenerlos dentro de los límites aceptables para no perturbar el confort y el bienestar de los usuarios. Por otra parte, el costo del edificio no debe superar los valores normales de una aceptable economía.

Los factores que pueden producir vibraciones en un edificio son numerosos, tales como maquinaria en funcionamiento defectuoso, paso de vehículos pesados por el lugar, impactos en rampas, vientos fuertes, sismos, etc. los cuales pueden variar durante la vida de servicio de la estructura.

En general la aceleración es el parámetro predominante para determinar aproximadamente la naturaleza de la respuesta humana a las vibraciones. Las curvas de la fig. 5.3.1 grafican los límites de confort obtenidos del análisis de un gran número de edificios altos, indicando las máximas aceleraciones aceptables para diferentes frecuencias, dependiendo del uso o destino del edificio.

Los datos se obtuvieron para las aceleraciones pico de las más fuertes tormentas ocurridas durante un periodo de retorno de mas de 5 años.

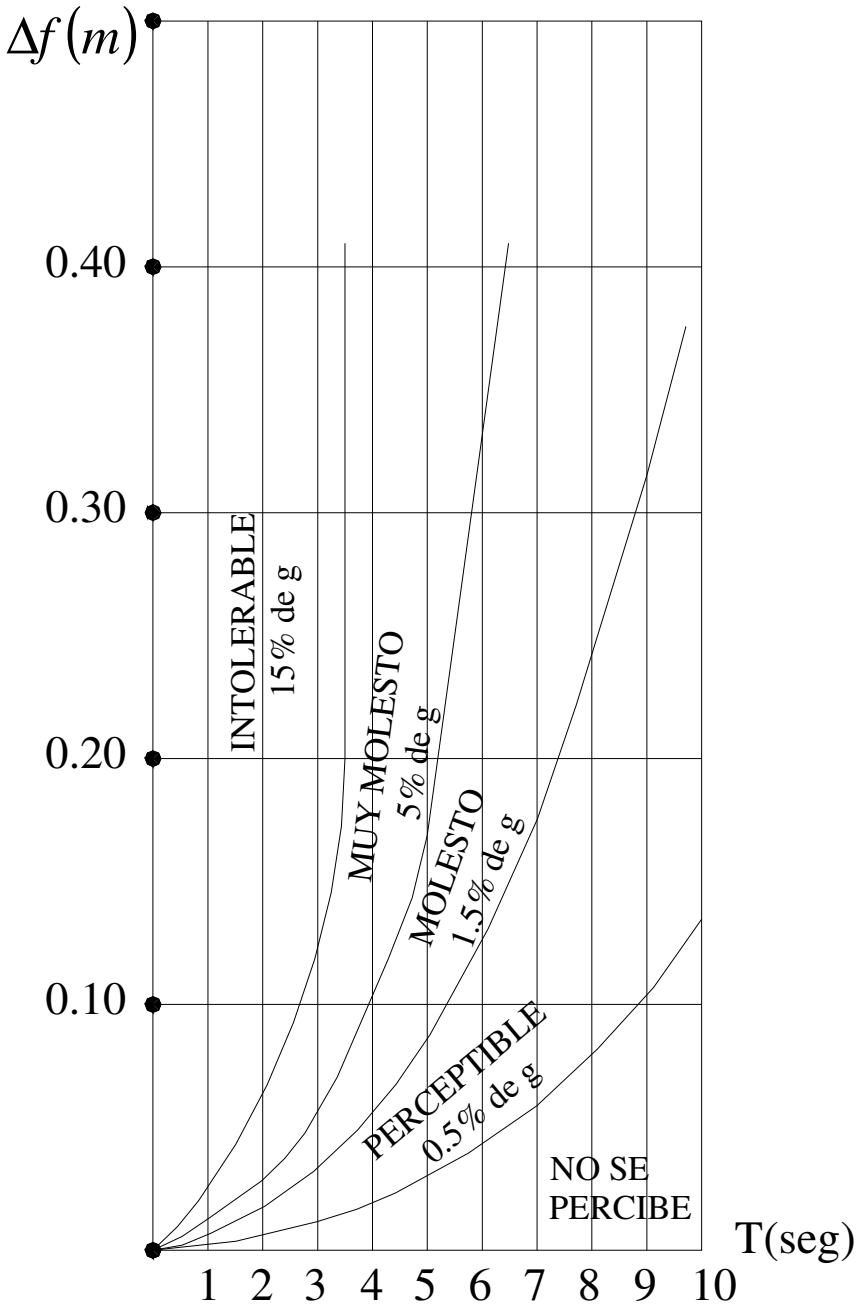


fig. 5.3.1

GRAFICA DE CONFORT

AMPLITUD DE OSCILACION EN FUNCION DEL PERIODO
PARA DISTINTOS VALORES DE LA ACELERACION
EN PORCENTAJE DE g

La tabla 5.3.1 a continuación da idea de la magnitud de las percepciones que se obtuvieron en experimentos realizados para diferentes niveles de aceleraciones (según Khan Parmelec y según Chang).

TABLA 5.3.1

PERCEPCION HUMANA	ACELERACION ü (m/seg^2)
(según Khan y Parmelec)	
No perceptible	ü ≤ 0,004 g
Levemente perceptible	0,004 g < ü ≤ 0,0075 g
Perceptible	0,0075 g < ü ≤ 0,02 g
Molesta	0,02 g < ü
(según Chang)	
No perceptible	ü ≤ 0,005 g
Perceptible	0,005 g < ü ≤ 0,015 g
Desagradable	0,015 g < ü ≤ 0,05 g
Muy desagradable	0,05 g < ü ≤ 0,15 g
Intolerable	0,15 g < ü

La sensación subjetiva y el comportamiento humano afectado por las diferentes aceleraciones se indica en la tabla 5.3.2 (según Yamada y Goto).

TABLA 5.3.2

NIVEL DE PERCEPCION HUMANA

RANGO	ACELERACION (m/seg^2)	EFECTO
1	0,05	La gente no percibe el movimiento.
2	0,05 – 0,10	Las personas sensibles perciben el movimiento. Los objetos colgantes pueden moverse algo.
3	0,10 – 0,25	La mayoría de las personas perciben el movimiento. La oscilación puede afectar el trabajo de oficina. La exposición de larga duración puede producir malestar.
4	0,25 – 0,40	El trabajo de oficina se vuelve difícil o casi imposible. Aun se puede caminar.
5	0,40 – 0,50	Se percibe fuertemente el movimiento. Hay dificultad para caminar normalmente. Las personas de pie pueden perder el equilibrio.
6	0,50 – 0,70	No se tolera el movimiento y no se puede caminar.
7 - 8	> 0,85	Los objetos caen y pueden lastimar a las personas.

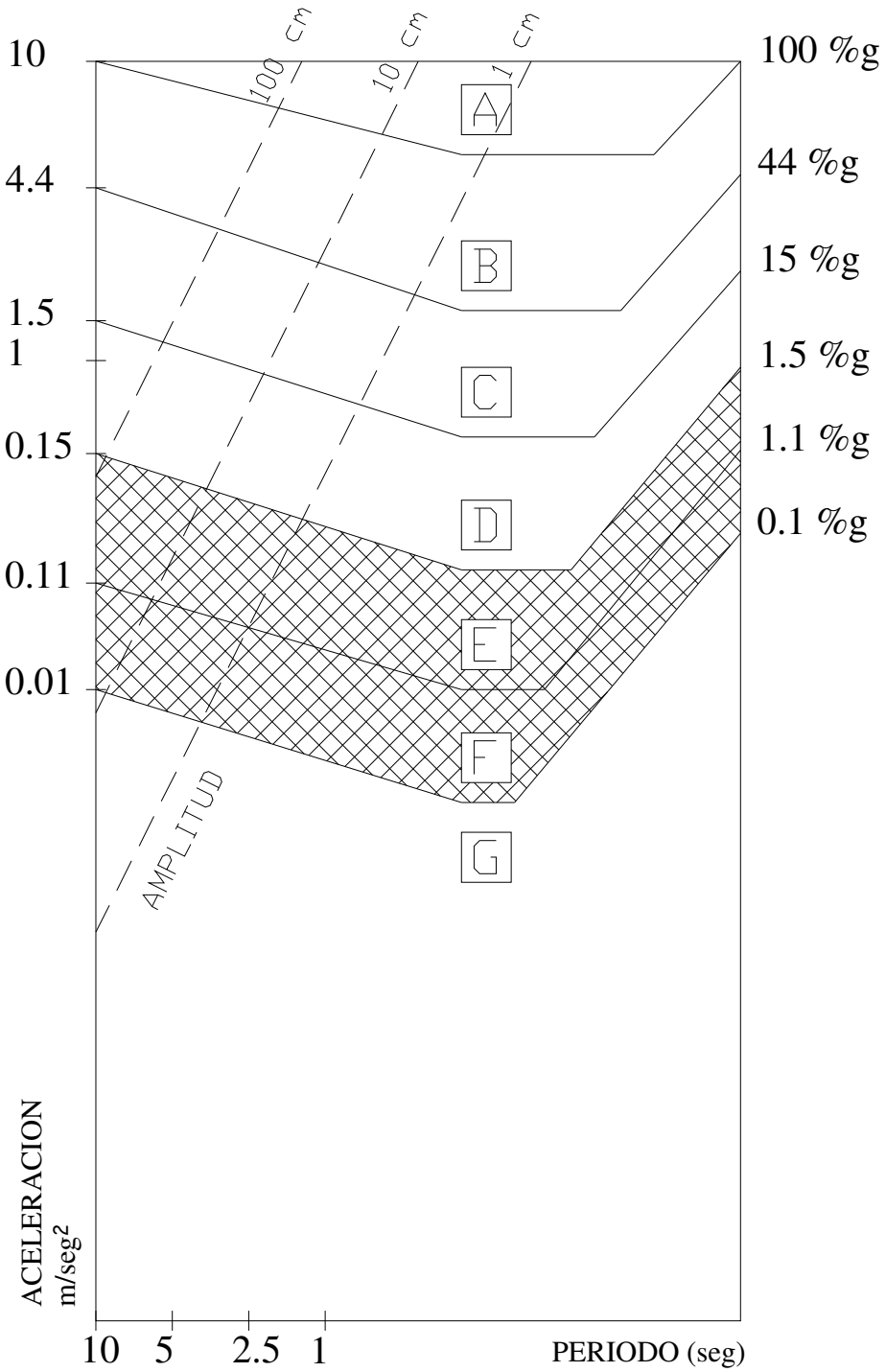


fig. 5.3.2

GRAFICA DE CONFORT

INTERACCION DE LAS VARIABLES:

PERIODO (T), AMPLITUD (Δf) Y ACELERACION (x'')

GRADUACIÓN DEL EFECTO SOBRE LAS PERSONAS	ACEPTABILIDAD EN EDIFICIOS	ESTADO PREVISIBLE DE LA ESTRUCTURA
A INTOLERABLE	NO	COLAPSO
B MUY POCO TOLERABLE	NO	DAÑOS LOCALES
C DEMASIADO PERCEPTIBLE	SITUACION LIMITE	FORMACION DE GRIETAS
D MUY PERCEPTIBLE	EN TAREAS INDUSTRIALES PESADAS	FORMACION DE FISURAS
E PERCEPTIBLE	EN PERIODOS BREVES EN VIVIENDAS	SIN INFLUENCIA EN ESTRUCTURAS CORRIENTES
F ESCASAMENTE PERCEPTIBLE	PERIODOS LARGOS EN VIVIENDAS	SIN INFLUENCIAS
G NO PERCEPTIBLE	PERIODOS LARGOS EN VIVIENDAS	SIN INFLUENCIAS

CUADRO ADJUNTO A GRAFICA DE LA fig. 5.3.2

CAPÍTULO 6 - ANÁLISIS DE CONSTRUCCIONES CON EFECTOS SISMICOS

Definición numérica de la acción sísmica

La definición correcta de la acción sísmica es un problema al que se le debe dar la mayor importancia en un análisis estructural sísmico.

La solución a este problema parte, generalmente, de los datos experimentales proporcionados por la sismología.

Parámetros de terremotos pasados en una región	⟶	Predicción de las características sísmicas de los terremotos que afectarán dicha región

Tradicionalmente, la fuerza destructiva de un terremoto ha sido expresada en función de la aceleración máxima del terreno, pero se han observado daños moderados a aceleraciones muy altas.

Por lo tanto, se deben tener en cuenta otras características:

- intensidad, duración
- contenidos de frecuencias
- secuencia de choques, etc.

Por ejemplo, se han utilizado, además de los valores máximos de la aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno, el espectro de amplitudes de Fourier, el espectro de seudovelocidades, intensidad espectral (Housner), el valor medio cuadrático de las aceleraciones en la fase "fuerte" de un acelerograma, etc.

Además, la acción definida estará totalmente relacionada al tipo de análisis estructural que se va a realizar:

Análisis lineal	→	desacoplamiento modal	→	espectros de respuesta
Análisis no lineal	→	integración directa	→	acelerogramas

También existen definiciones de acciones sísmicas a partir de la teoría de procesos estocásticos, en donde la respuesta estructural en sí se obtiene probabilísticamente.

No profundizaremos sobre estos temas, pues escapan a nuestro curso. (ver ref. [1 y 2])

Definición mediante espectros de respuesta

Es la forma más usual de definir una acción sísmica, dado que se obtienen descripciones de las características más importantes de la respuesta estructural sin la necesidad de disponer de una historia en el tiempo de la excitación y la respuesta.

Otra ventaja es que un espectro puede "modificarse" en base a las características del lugar de emplazamiento de la estructura, sin necesidad de conocer los detalles de la excitación.

Espectro de respuesta $\longrightarrow$ representaciones gráficas de valores aproximados de la respuesta máxima de un sistema de 1 GLD lineal y elástico:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = -a(t) \tag{2.11}$$

$$S_d(a,\omega,\xi) = \left| -\frac{1}{\omega} \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{-\xi\omega\cdot(t-\tau)} \cdot \operatorname{sen}\omega\cdot(t-\tau)\cdot d\tau \right|_{max} \tag{3.49}$$

$$S_v(a,\omega,\xi) = \omega \cdot S_d(a,\omega,\xi) \tag{3.52}$$

$$S_a(a,\omega,\xi) = \omega^2 \cdot S_d(a,\omega,\xi) \tag{3.53}$$

Puede realizarse un análisis de las variaciones de los valores de las curvas S_d, S_v, S_a, en función de las características de la estructura.

Recordar que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Para frecuencias propias altas (en comparación con la del movimiento del terreno), la (2.11) quedaría (despreciando los dos primeros términos):

estructuras muy rígidas $\begin{cases} \omega^2 \cdot x \approx -a(t) \\ \therefore \text{si } \omega \to \infty; \mathrm{S_a} \to \mathrm{a_{max}} \\ \text{(copia la aceleración máxima del terreno)} \end{cases}$

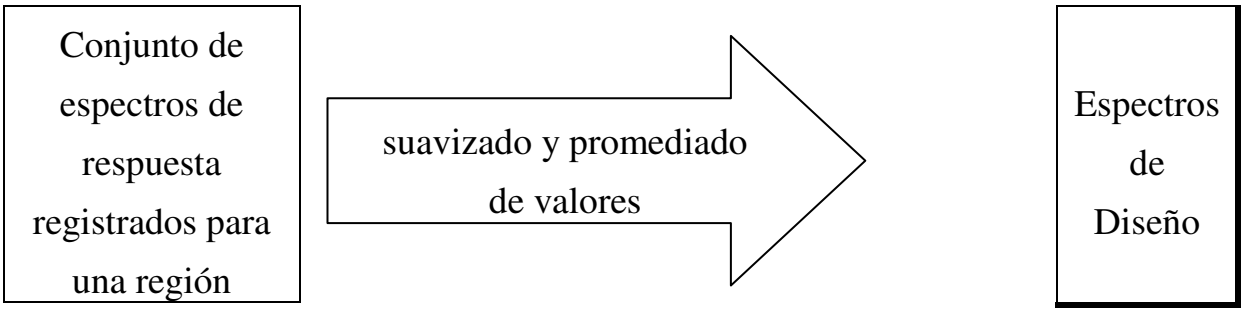
Para frecuencias bajas, por el contrario, la (2.11) queda:

$$\text{estructuras muy flexibles} \begin{cases} \ddot{x} \approx -a(t) \\ \text{si } \omega \to 0; \mathrm{S_d} \to \mathrm{d_{max}} \\ \text{(copia los desplazamientos máximos del terreno)} \end{cases}$$

Para frecuencias intermedias, se produce una amplificación del movimiento del terreno en su paso a través del filtro estructural.

$$\beta_a(\xi,T)=\frac{S_a}{a_{max}};\quad \beta_v(\xi,T)=\frac{S_v}{v_{max}};\quad \beta_d(\xi,T)=\frac{S_d}{d_{max}}; \tag{6.1}$$

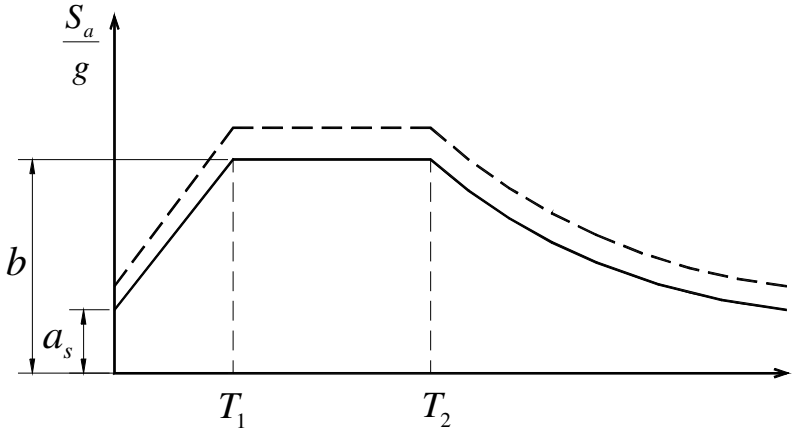
Las condiciones locales del terreno, tales como grosor y propiedades de los estratos que se encuentran entre la roca firme y la estructura modifican los espectros de respuesta.



↓

INPRES – CIRSOC 103

Parte 1 / Cap. 7



Para $\xi = 0{,}05$ (línea llena)

$$S_a = a_s + (b - a_s)\cdot\frac{T}{T_1} \qquad \mathrm{T} \le \mathrm{T_1}$$

$$\boxed{S_a = b} \qquad T_1 < T \leq T_2$$

$$\boxed{S_a = b \cdot \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3}} \qquad T_2 < T$$

$$a_s, b, T_1 \ y \ T_2 \rightarrow \text{tabla } 4 \rightarrow f\begin{pmatrix}\text{zona sísmica}\\ \text{suelo}\end{pmatrix}$$

Para casos con $0{,}005 \leq \xi < 0{,}05$ (línea a trazos)

$$\boxed{S_a = a_s + \left(f_A \cdot b - a_s\right) \cdot \frac{T}{T_1}} \qquad T \leq T_1$$

$$\boxed{S_a = f_A \cdot b} \qquad T_1 < T \leq T_2$$

$$\boxed{S_a = \left[1 + \left(f_A - 1\right) \cdot \frac{T_2}{T}\right] \cdot \left[b \cdot \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3}\right]} \qquad T_2 < T$$

f_A: factor de amplificación por amortiguamiento

$$f_A = \sqrt{\frac{5}{\xi}} \ (\text{expresado en } \%)$$

Definición mediante acelerogramas

a) Acelerogramas reales

Basar un cálculo sísmico en uno o varios registros disponibles en una zona implica un alto riesgo de definición incorrecta de la acción.

b) Acelerogramas sintéticos

Tiene grandes ventajas respecto al anterior:

- posibilidad de generar señales de corta duración que tengan el mismo efecto en las estructuras que el del terremoto real que se quiere simular $\Rightarrow$ economía computacional
- al estar generados en función de un espectro de diseño, se tiene en cuenta (aprox.) las condiciones locales del suelo

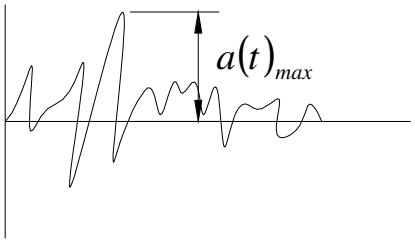
La generación de acelerogramas sintéticos requiere procedimientos matemáticos basados en procesos estocásticos y expansiones en series sinusoidales.

Existen muchos procedimientos y algoritmos que permiten generar acelerogramas sintéticos a partir de un espectro dado.

INPRES – CIRSOC 103 (Parte 1 – Cap. 14.3.1)

Los acelerogramas deben satisfacer:

a)

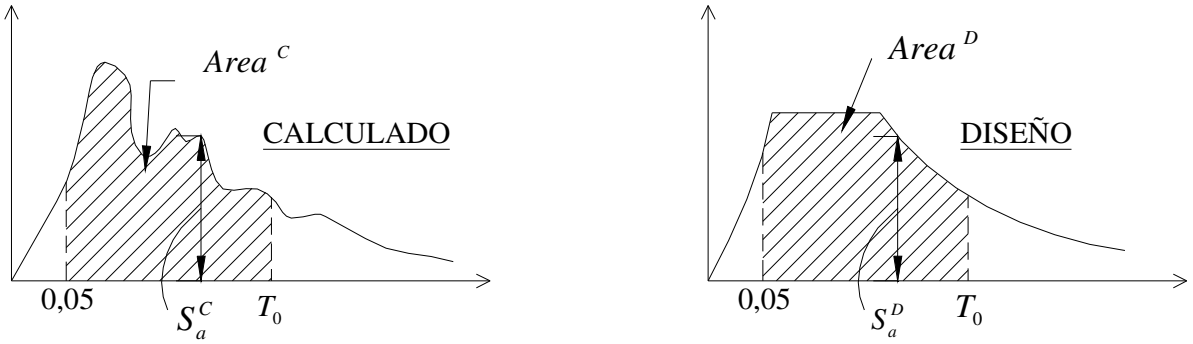


$$a(t)_{max} \geq a_S \cdot \gamma_d$$

a_S: ordenada al origen del espectro correspondiente

γ_d: factor de riesgo, art. 5.2

b) El espectro elástico (para $\xi = 0{,}05$) deberá cumplir:



$$Area^C \geq \gamma_d \cdot Area^D$$

$$S_a^C \geq 0{,}7 \cdot S_a^D \cdot \gamma_d$$

para todos los puntos

Cantidad de acelerogramas a emplear:

Grupo A y B	nº ≥ 3 acelerogramas
Grupo A_0	nº ≥ 4 acelerogramas

Para diseño y verificaciones se promediarán las envolventes de solicitaciones y deformaciones obtenidas para cada acelerograma, pero en dicho promedio no se incluirán valores inferiores al 85% del máximo encontrado.

Métodos de análisis según INPRES – CIRSOC 103

Procedimientos con fuerzas estáticas equivalentes

a) Método estático (art. 14.1)

b) Procedimiento aproximado (cap. 16)

Métodos dinámicos

a) Análisis modal espectral

b) Superposición modal paso a paso

c) Integración directa paso a paso

6... Métodos dinámicos INPRES – CIRSOC 103

a) Análisis modal espectral

- excitación sísmica traslacional
- materiales lineales y elásticos (según art. 12.1 / pág. 47)
- $(S_a)_i = \overline{S_a} \cdot \gamma_d \cdot g$

  $\overline{S_a}$: del espectro correspondiente

  γ_d: factor de riesgo

  g: aceleración de la gravedad

- se podrá considerar capacidad de disipación de energía por deformaciones anelásticas de la estructura

$$\frac{(S_a)_i}{g} = \frac{\overline{S_a} \cdot \gamma_d}{R}$$

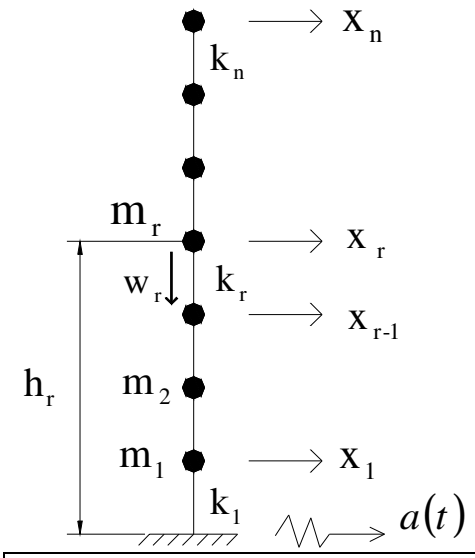
  - las deformaciones calculadas con este criterio deberán ser amplificadas multiplicándolas por la ductilidad global μ
  - para el caso anterior, es imprescindible que la estructura se comporte en forma uniforme, de manera de garantizar la ausencia de concentración de rótulas plásticas

Se debe verificar que el corte (con análisis modal espectral) en cada dirección no resulte inferior al 75% del corte obtenido con el método estático; de no verificarse se incrementaran los efectos del análisis modal de la siguiente manera:

$$R^*_{\substack{\text{modal}\\\text{espectral}}} = \frac{0{,}75 \cdot V_{0\,\text{est}}}{V_{0\;\substack{\text{modal}\\\text{espectral}}}} \cdot R_{\substack{\text{modal}\\\text{espectral}}}$$

Modos a considerar: q ≥ 3, pero además se deberán incluir todos los modos cuya contribución al total sea mayor que 5% de la contribución del modo fundamental.

Modelo de edificio de cortante



$$Q_i = \frac{\varphi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \{1\}}{\varphi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi_i} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m_r \cdot \varphi_{ri}}{\sum_{i=1}^{n} m_r \cdot \varphi_{ri}^2} \qquad (6.1)$$

$$\text{con } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cdots & & 0 \\ & \ddots & \\ & m_r & \\ & & \ddots \\ 0 & & m_r \end{bmatrix}; \quad \varphi_i = \begin{Bmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ri} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{Bmatrix}$$

observar que si en (6.1) se sustituye la masa m_r por el peso w_r el valor de Q_i no cambia

si $\varphi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi_i = 1$

$$Q_i = \sum_{i=1}^{n} m_r \cdot \varphi_{ri} = \sum_{i=1}^{n} w_r \cdot \varphi_{ri}$$

Peso efectivo modal

$$\mathbf{W}_i = \frac{\left[\sum_{r=1}^{n} w_r \cdot \varphi_{ri}\right]^2}{\sum_{r=1}^{n} w_r \cdot \varphi_{ri}^2} \quad \rightarrow \quad \text{si} \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{q} \mathbf{W}_i \geq 0{,}9 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_r}_{\substack{\text{peso total de la}\\\text{estructura}}} \qquad (6.4)$$

q ⇒ apto

Desplazamientos modales máximos

$$(\mathbf{x}_i)_{max} = \varphi_i \cdot y_i(t)_{max} = \varphi_i \cdot Q_i \cdot \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \qquad (6.5)$$

Desplazamientos modales relativos entre pisos

$$\Delta_{ri} = (x_r)_i - (x_{r-1})_i \tag{6.6}$$

Fuerzas sísmicas equivalentes (modales)

$$F_{ri}^S = \left(\ddot{x}_{ri}\right)_{max} = m_r \tag{6.7}$$

r: nivel
i: modo

pero

$$\left(\ddot{x}_{ri}\right)_{max} = \varphi_{ri} \cdot \ddot{x}_i(t)_{max} \tag{6.8}$$

Como

$$\ddot{x}_i(t)_{max} = Q_i \cdot (S_a)_i$$

$$\left(\ddot{x}_{ri}\right)_{max} = \varphi_{ri} \cdot Q_i \cdot (S_a)_i \tag{6.9}$$

$$F_{ri}^S = \varphi_{ri} \cdot Q_i \cdot (S_a)_i \cdot m_r = \varphi_i \cdot Q_i \cdot \frac{(S_a)_i}{g} \cdot w_r \tag{6.10}$$

fuerza sísmica equivalente en el nivel r para oscilaciones en el modo i

en función del peso w_r y la fracción de g

Vectorialmente:

$$\mathbf{F}_i^S = \begin{Bmatrix} F_{1i}^S \\ \vdots \\ F_{ri}^S \\ \vdots \\ F_{ni}^S \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \varphi_i \cdot \frac{\varphi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}}{\varphi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \varphi_i} \cdot (S_a)_i \tag{6.11}$$

$$\downarrow$$

$$Q_i$$

$$\mathbf{F}_i^S = \mathbf{M} \cdot \varphi_i \cdot Q_i \cdot (S_a)_i \tag{6.11}$$

Cortante modal

En nivel "r":

$$V_{ri} = \sum_{j=r}^{n} F_{ji}^{S} \qquad (6.12)$$

En la base:

$$V_i = \sum_{r=1}^{n} F_{ri}^{S} \qquad (6.13a)$$

o también:

$$V_i = \mathbf{W}_i \cdot \frac{(S_a)_i}{g} \qquad (6.13b)$$

Comparación con INPRES – CIRSOC 103

$V_m = \frac{\gamma_d}{R} \cdot S_{am} \cdot \mathbf{W}_m$ (Fórmula reglamento)

γ_d: factor de riesgo

R: coeficiente de reducción por disipación

i = m

$V_i = f_1 \cdot \frac{(S_a)_i}{g} \cdot \mathbf{W}_i$ (Fórmula 6.13b, multiplicada por un factor f_1)

Distribución en altura de V_m según INPRES – CIRSOC_103:

$$F_{km} = \frac{W_k \cdot \phi_{km}}{\sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \phi_{im}} \cdot V_m$$

m: modo

k: nivel

F_{km}: fuerza sísmica equivalente para el modo m en el nivel k

Según la fórmula (6.10) y (6.13a):

$$V_i = \sum_{r=1}^{n} \varphi_{ri} \cdot Q_i \cdot w_r \cdot \frac{(S_a)_i}{g} = \frac{Q_i \cdot (S_a)_i}{g} \cdot \sum_{r=1}^{n} \varphi_{ri} \cdot w_r$$

si queremos emplear la notación

$$F_{ri}^{S} = \xi_{ri} \cdot V_i \qquad \Rightarrow \qquad F_{ri}^{S} = \xi_{ri} \cdot \frac{Q_i \cdot (S_a)_i}{g} \cdot \sum_{r=1}^{n} \varphi_{ri} \cdot w_r$$

comparándola con (6.10) se deduce que

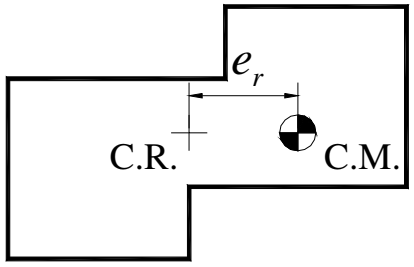
$$\xi_{ri} = \frac{\varphi_{ri} \cdot w_r}{\sum_{r=1}^{n} \varphi_{ri} \cdot w_r} = \frac{W_k \cdot \phi_{km}}{\sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \phi_{im}}$$ notación INPRES - CIRSOC 103

Momento de vuelco modal (para el nivel r)

$$M_{ri}^{v} = \sum_{j=r+1}^{n} F_{ji}^{S} \left(h_j - h_r\right)$$

si r = 0 → M_{0i}^{v} = momento de vuelco en la fundación

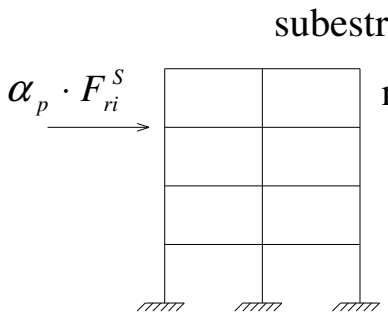
Momento de torsión modal



$M_{ri}^{t} = e_r \cdot V_{ri}$ corresp. al piso "r"

Esfuerzos seccionales modales

Para cada subestructura vertical con la parte proporcional a su rigidez que le corresponde de la fuerza sísmica equivalente, se calculan los esfuerzos seccionales para cada modo en estudio.



$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_P + \ldots \alpha_m = 1$

m: nº de subestructuras verticales

(se deben adicionar los efectos torsionales si los hubiese)

CALCULO DE LA RESPUESTA TOTAL

$$R_{max} = \sqrt{\sum_{j=i}^{q} \left(R_j\right)_{max}^{2}}$$