Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

Guía de estudio

UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LIMITE
(DOS MIL AÑOS EN UN RENGLÓN)

Ing. Jorge J. L. Ferrante

Análisis Matemático I
Facultad Regional General Pacheco
Universidad Tecnológica Nacional

2009

edUTecNe - Editorial de la U. T. N.
http://www.edutecne.utn.edu.ar
edutecne@utn.edu.ar

UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE LIMITE
(DOS MIL AÑOS EN UN RENGLÓN)

Ing. Jorge J. L. Ferrante

PROLOGO

Año 2009. Al frente de la cátedra de Análisis Matemático I, me encontré frente a un grupo poco homogéneo de docentes, de esos que, con tiza y pizarrón conforman día a día con sus alumnos una sociedad para el aprendizaje. Algunos experimentados y de años de trayectoria en la materia y otros, para decir lo mínimo indispensable, no tanto como los primeros.

El discurso, necesariamente debía ser único porque única es la cátedra y sus procesos de ejercitación y evaluación.

Rápidamente comprendí que una Guía de Trabajos Prácticos no bastaba para los fines buscados por la sencilla razón que faltaba el elemento por el cual quedase en claro, para todo el mundo, cual era la profundidad con que pretendía tratar cada tema y cual o cuales no había que tratar. Es bastante obvio que esto no se logra con enunciados de carácter general en algún cronograma o con algunas ausencias en el mismo. Además, había que hacerlo rápido porque las clases empezaban ya.

Así nacieron las Guías de Estudio y Práctica donde, además de los ejercicios propuestos para cada tema se incluyen aspectos teóricos, muchas veces incompletos, para que sea el profesor quien los trate en forma definitiva con sus alumnos, quienes tienen en sus manos las llamadas GEP.

Además, como nunca se aprecia cómo ha evolucionado el pensamiento matemático a través del tiempo y los nombres aparecen y desaparecen sin que el alumno tome conciencia del tiempo en que actuaron y aportaron a la matemática, me pareció adecuado incluir en las GEP, aspectos que hacen al desarrollo histórico del pensamiento matemático.

Esto implica consultar textos de historia de la matemática. Entre ellos, los clásicos, de C. Boyer, revisado por Merzbachd, editorial Wiley "A History of Mathematics" y los de E. T. Bell "Les Grands Matematiciens" e "Historia de las Matemáticas" y además pasar horas y horas navegando (o resbalando) entre la multitud de trabajos y referencias que arroja como resultado cualquier incursión en el espacio virtual con claves a veces mal puestas.

De todo eso, fue tomando forma, por descarte y selección, un collage para cada GEP en donde junto a los "cortar pegar" ya clásicos puse mis opiniones o criterios.

En este trabajo, extracto de GEP03 LIMITE - CONTINUIDAD, mucho proviene de NUEVA DEFINICIÓN DE LIMITE FUNCIONAL de Blázquez S. y Ortega T, Barcelona y de la consulta de los textos antes mencionados y otros muchos, cuyo contenido tuve que comprimir en términos inteligibles para docentes y alumnos. Las preguntas perversas son exclusivamente mías así como las Notas del Autor y algunos párrafos en negrita. Asumo la responsabilidad que, por ellos, me cabe.

Lo que sigue, definitivamente, no es una definición de límite funcional pero puede llegar a ayudar a quien en dos o tres clases tiene que lograr la proeza intelectual de entender junto a sus alumnos qué es el límite.

Jorge J. L. Ferrante

LIMITE

El concepto de límite funcional forma parte de las currícula de educación en la totalidad de las escuelas de ingeniería. Es puerta de entrada al análisis diferencial e integral, y, desde siempre, su enseñanza no ha dejado de preocupar a profesores e investigadores que ven cómo fracasan sus intentos para que los alumnos comprendan su significado, y cómo esta enseñanza, en muchas ocasiones, se acaba reduciendo a un conjunto de cálculos que tienen poco sentido. Hay que partir del hecho de que la comprensión de conceptos como el de límite funcional supone la utilización de estrategias mentales de alto nivel como las que se consideran en el pensamiento matemático avanzado y que la clave reside en la creación de un diseño de enseñanza adecuado a la capacidad y nivel del alumno, que genere un mínimo de interés por el estudio y que le facilite la adquisición de tales conceptos.

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Siguiendo las investigaciones realizadas, la evolución histórica del concepto de límite se puede dividir en cuatro etapas, que se diferencian básicamente por la concepción de límite que subyace en ellas aunque la separación no siempre sea nítida. En la larga evolución del concepto (desde la matemática griega hasta el siglo XIX) se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción, que se utiliza de forma implícita desde la época griega y que no llega a su forma actual hasta el siglo pasado, en parte para validar algunos resultados ya obtenidos y en parte para demostrar otros más generales.

De Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII.

Aparece en esta etapa una idea muy intuitiva del proceso del paso al límite. No existe el concepto como tal, ya que ni siquiera se ha explicitado el concepto de función, pero sí aparece como proceso implícito en algunos métodos utilizados, básicamente, para resolver cuatro tipos de problemas:

- Dada la fórmula del espacio en función del tiempo, obtener la velocidad y aceleración en cualquier instante o recíprocamente, dada la aceleración o velocidad obtener la fórmula del espacio

- Obtención de la tangente a una curva. En óptica es necesario conocer la normal a una curva y en el estudio del movimiento la dirección de la tangente. Aparecen problemas de definición de tangentes en general (cuando surgen nuevas curvas) pues la definición de tangente como recta que toca en un sólo punto o deja a un lado la curva sólo sirve para algunas cónicas.

- Estudio de máximos y mínimos de una función, relacionado con el movimiento de los planetas, el movimiento de proyectiles, etc.

- Cálculo de áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, longitudes de curvas, centros de gravedad y atracción gravitatoria.

A continuación se presenta un brevísimo resumen de algunos de estos métodos infinitesimales.

Método de exhaución. Se atribuye a Eudoxo, aunque su utilización más conocida la hizo Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* y en *La cuadratura de la Parábola*. El método se aplicaba al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. Consiste en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que ésta vaya aproximándose a la magnitud buscada. Por ejemplo para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de n lados cuya superficie se conoce (en definitiva es la de n triángulos isósceles) luego se duplica el número de lados de los polígonos inscriptos y circunscriptos hasta que la diferencia queda exhausta. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

Método de los infinitésimos de Kepler (1571-1630). Era utilizado para resolver problemas de medidas de volúmenes o áreas como los que aparecen en *Nova stereometria doliolum vinatorum* (1615) (Nota del autor: escrito para la evaluación de la capacidad de toneles de vino.) La base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos. Galileo utilizará un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio

Método de los indivisibles de Cavalieri (1598-1647). Fue utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar. Lo hace en su libro *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). Este caballero merece algo más que una mención **por el daño que hizo en la conceptualización del análisis.** No fue un antecesor del cálculo, fue el que impregnó a muchos bien pensantes hombres que un infinitésimo es un "cero pequeño". Es el mismo que logró que se dijese que la tangente a una curva estaba definida por dos puntos sucesivos sobre la misma, dado que es como un collar de cuentas muy pequeñas, una al lado de otra; es el que dijo que una superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen, un montón de superficies sin espesor. Quien tenga dudas sobre esta nota del autor, diríjase a Historia de las Matemáticas, de E. T. Bell, Fondo de Cultura Económica, México, 1995, Pág. 146 y 147.

Método de Fermat para buscar extremos de curvas. Lo aplicó a las "parábolas e hipérbolas de Fermat" y consiste en considerar que en una "cumbre" o en un "valle" de la curva, cuando E es pequeño, los valores de la función $f(x)$ y $f(x+E)$ están tan próximos que se pueden tomar iguales. El método consiste en hacer $f(x+E)=f(x)$, dividirlo por E y tomar $E=0$. Si bien no habla de límite, está bastante cerca.

Método de las tangentes. Fermat envía a Mersenne en 1637 una memoria que se titula *Sobre las tangentes a las líneas curvas* donde parece plantear un método para calcular tangentes en un punto de cualquier curva, si bien sólo lo utiliza con la parábola. En un intento de clarificar dicho método, Descartes crea el suyo propio según reza en la carta que envía a Mersenne en Mayo de 1638 y, así, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto. Lo que pretende es dibujar la recta tangente en el punto P=(*x*, *f(x)*) y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la práctica, para obtener los segmentos necesarios se consideraba $f(x+E)-f(x)$, se dividía por E y se tomaba $E=0$, lo que equivale a hallar el límite funcional en la abscisa del punto P.

Método de Barrow (1630-1677). Su método es muy semejante al de Fermat, pero en él aparecen dos incrementos e y a, que equivalen a los Δx y Δy actuales.

Todos estos métodos fueron el germen del análisis infinitesimal y surgieron motivados por las exigencias de la mecánica, de la astronomía y de la física. El álgebra aportó las herramientas necesarias para que algunos de estos métodos se desarrollaran, destacando el método de las coordenadas, que facilitó el estudio de las curvas. Sin embargo, estos métodos funcionaban de forma separada y no se tenía conciencia de su generalidad; faltaba algo que les armonizara y además les diera ese carácter de universalidad,

Faltaba el concepto de límite.

Aparecen en escena los creadores del análisis: Newton y Leibniz

El primero, Newton (1648-1727) es el creador de la teoría de las fluxiones, un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Propone el método de las fluxiones, expuesto en la obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (publicada en 1736), donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

La teoría de fluxiones resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones, conocidas la relación entre fluentes y el recíproco, dada la relación entre fluxiones, encontrar las fluentes Para resolver estos problemas aplicó sendos métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Para el propio Newton en estos métodos resolutivos no se explicaban de forma satisfactoria. En 1704 en su obra *Tractatus quadratura curvarum*, explicita el método de las "razones primeras y últimas", en la que el incremento de la variable se "desvanece", lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica. Allí resuelve el siguiente problema

> *"Fluya una cantidad* x *uniformemente; ha de encontrarse la fluxión de la cantidad* x^n*. En este tiempo, la cantidad* x*, al fluir, se convierte en* $x+o$*, la cantidad* x^n *resultará* $(x+o)^n$*; que por el método de las series infinitas es* $x^n+nox^{n-1}+((n^2-n)/2)o^2x^{n-2}+$ *etc. Y los incrementos* o *y* $nox^{n-1}+((n^2- n)/2)o^2x^{n-2}+$ *etc., estarán entre sí como* 1 *y* $nx^{n-1}+((n^2-n)/2)ox^{n-2}+$ *etc. Desvanézcanse ahora aquellos incrementos, y su última razón será 1 a* nx^{n-1}*. Y por eso, la fluxión de la cantidad* x *es a la fluxión de la cantidad* x^n *como* 1 *a* nx^{n-1} ".

Obsérvese la terminología y se comprenderá de inmediato la enorme fortuna de enseñar y aprender en este siglo.

Por si fuese necesario en su obra Principia Mathematica "aclara" el concepto de límite:

> "*Cantidades, y la razón de cantidades*[5]*, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales*".

Leibnitz (1646-1716), por su parte preocupado por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de la matemática, contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría sobre las diferenciales. Se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Usa una notación que perdura actualmente, pero no aclara lo que, para él significa "infinitamente pequeño".Para peor, a veces habla de "infinitamente, infinitamente pequeño".

La concepción que subyace en esta etapa es una concepción geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas de índole geométrica. La noción de límite en realidad se encuentra implícita, y se ve una evolución de su estatus, pasando de ser una noción que ni siquiera se explicita como útil al ser, con los infinitésimos y las razones primeras y últimas de Newton, una herramienta para resolver problemas.

Ahora bien, esta idea de límite como aproximación sin más no basta. Por una parte, la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados, pero hasta Newton esta posibilidad no se plasma claramente en el hecho de que los objetos se han de aproximar "más que cualquier diferencia dada", lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles

Segunda mitad del siglo XVIII. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal.

Utilizando infinitésimos pequeños y grandes, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de la época obtienen solución para muchos de sus problemas. La dificultad más importante para el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones, para lo que se requería una idea clara de dependencia funcional y, para ello, fue necesario investigar el significado del concepto de función y sus manipulaciones algebraicas. Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, buscaban eliminar lagunas y clarificar los matices místicos, no se dieron cuenta de la necesidad del concepto de límite

Euler (1707-1743) toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas, que, desde entonces, se llama *Análisis* y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Se plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales

D'Alembert (1717-1783) crea la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. En el tomo IX de la *Encyclopédie,* D´ Alembert escribe la siguiente definición de límite:

> *Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se*

aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable.

En esta definición las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar, y así, aunque la aproximación es objetiva no se puede tener un control completo de la misma. Lagrange (1736-1813) trabajó con desarrollos de funciones en series de potencias Los resultados conseguidos le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

Siglo XIX y principios del siglo XX. Aritmetización del análisis.

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último, en la que fueron determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, y la evolución de la enseñanza de las matemáticas, que tras la Revolución Francesa pasa de ser una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica. (nota del autor: Napoleón Bonaparte, como buen artillero conocía y respetaba la matemática. Fue el gran impulsor de esas escuelas, que aun perduran con éxito) Los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas.

De estos matemáticos se destacan Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

Cauchy (1789-1857). Retoma el concepto de límite de D'Alembert, rechazando el planteamiento de Lagrange, prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, dándole un carácter más aritmético, más riguroso pero aún impreciso. La definición de límite que propone Cauchy (1821) es la siguiente:

..., cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco

como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás

La noción de límite dada por D'alembert es más objetiva que la de Cauchy, ya que en ésta aparece el término "tanto como queramos" que la subjetiviza. Define además infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero

Cauchy basa todo el análisis en el concepto de límite.

Bolzano (1781-1848) da una definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Weierstrass (1815-1897) contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis, dando una definición satisfactoria de número real y otra del concepto de límite.

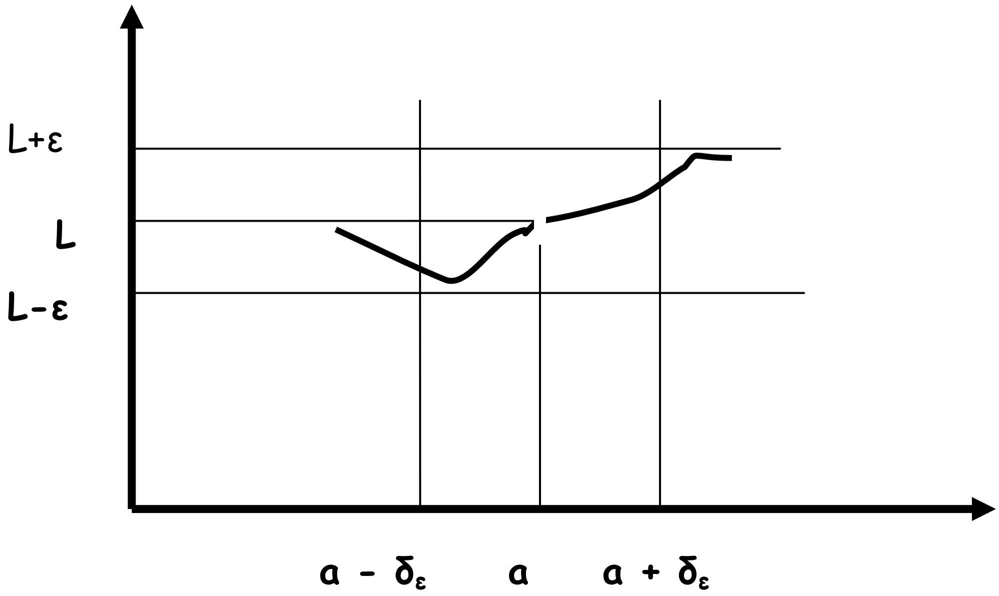
Weierstrass criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que, según él, esto sugiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, que aparece en la obra de su discípulo Heine *Elemente*, es la siguiente:

> *"Si, dado cualquier* ε*, existe un* n_0*, tal que para* $0<n<n_0$*, la diferencia* $f(x_0 \pm n)-L$ *es menor en valor absoluto que* ε*, entonces se dice que* L *es el límite de* $f(x)$ *para* $x=x_0$*".*

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma. Sin embargo, esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye una cuarta etapa en el desarrollo del concepto.

Todo el esfuerzo realizado en más de dos milenios permite presentar la siguiente

Definición: Sea *f* una función y *a* un número real, el número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (se lee límite de *f(x)* cuando *x* tiende a *a* es *L*), si cuando *x* tiende a *a*, siendo distinto de *a*, sus imágenes, *f(x)*, tienden a *L*.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon, \varepsilon > 0$$

$$0 < \left| x - a \right| < \delta_{\varepsilon}$$

Esta es la famosa definición ε,δ que desconcierta a la mayoría de los que tratan de estudiarla y sobre todo si es la primera vez que lo intentan. Varios factores son contribuyentes al desconcierto.

La humanidad empezó a lidiar con el concepto de límite, sin ser capaz de explicitarlo, desde Eudoxo hasta el siglo XX, donde llegó a lo que ahora se conoce como límite. **Tratar de asimilar más de dos milenios en dos o tres clases de Análisis Matemático es directamente una proeza intelectual, que los grandes de la historia del pensamiento matemático no lograron.**

La definición de límite aceptada es psicológicamente crispante. Todo el discurso del análisis se desarrolla sobre funciones en las que, dado un valor de x, a por ejemplo, valor que, a través de la función f(x) permite obtener el valor f(a). Es decir, se va de abscisa a ordenada o, coloquialmente, de eje horizontal a eje vertical. En la definición de límite es al revés. Se arranca por un número L, ordenada y se "baja" a abscisa. Es decir el camino inverso al usual.

PREGUNTAS A SER CONTESTADAS EN EL AULA

La definición avanza diciendo "se dice que el número L es el límite de ...." , pero ¿acaso alguien dice de dónde sale ese número L? Nadie lo dice. ¿Por qué ese valor L y no otro cercano a él?

Sigue diciendo "cuando el valor absoluto de la diferencia entre la función y el límite sea menor que un ε positivo, y algunos machacan "tan pequeño como se quiera". ¿De dónde sale ε?, ¿Qué quiere decir pequeño?, ¿Ese ε es fijo o es variable?

El valor absoluto de la diferencia entre f(x) y L es una distancia. ¿Por qué no se lo dice?

El tema empeora. Está claro que x no puede valer a ¿por qué? Pero además el valor absoluto de x-a tiene que ser menor a un δ_ε . ¿Qué quiere decir eso? ¿Acaso que δ depende de ε? ¿Cómo?, entonces ¿por qué no escriben $\delta(\varepsilon)$?

¿Cuál es la única forma de saber que una número L es el límite de f(x) para x->a?

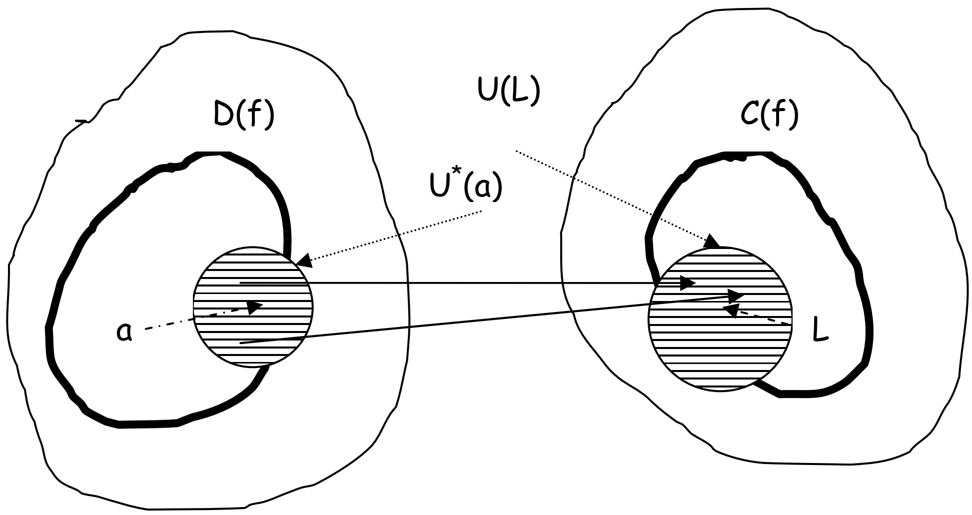
Todas esas preguntas tienen que ser contestadas y hacerlo y mucho menos entenderlo no es cosa simple. Y hay que hacerlo porque todo, absolutamente todo, el análisis está preñado de este concepto.

Utilizando una nomenclatura de entornos, la definición de límite funcional se reduce a lo siguiente (topológica)

Definición: El número L es el límite de f(x) para x tendiendo a a si para todo entorno de L existe un entorno reducido de a de forma tal que cada x perteneciente al entorno reducido de a y al dominio de la función tiene una imagen f(x) en el entorno de L

$$\forall U(L) \exists U^*(a) / \forall x \in \left[U^*(a) \wedge D(f)\right], f(x) \in U(L)$$

Con la siguiente interpretación gráfica



¡Más de dos milenios en un renglón! Magnífica oportunidad para reflexionar lo que cuesta lograr

¡una idea clara!