EDITORIAL DE LA
UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
NACIONAL (UTN)

SERIES NUMÉRICAS

Silvina Cafferata Ferri
Andrea Campillo
Yalile Srour

Facultad Regional Buenos Aires
Universidad Tecnológica Nacional

2017

INDICE

SERIES NUMÉRICAS

1. Introducción

En el siglo V a.C. el filósofo griego Zenón de Elea propuso cuatro problemas que se conocen como *Paradojas de Zenón*, que desafiaban algunas de las ideas de su época acerca del espacio y del tiempo. Una de esas paradojas Aristóteles la transmitió del siguiente modo:

Una persona de pie en un recinto no puede caminar directamente hasta la pared. Para hacerlo, primero tiene que caminar la mitad de la distancia, después la mitad de la distancia restante, y después otra vez la mitad de lo que queda. Este proceso se puede continuar y nunca acabar.

La distancia total se puede expresar en forma de suma de una cantidad infinita de distancias cada vez más pequeñas:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Por consiguiente, tiene significado definir con cuidado algunos conceptos tales como sumas parciales, sumas infinitas o suma de una serie infinita, etc.

La importancia de estos conceptos en el Cálculo se inicia a partir de la idea de Newton de representar las funciones como sumas de series infinitas. Muchas de las funciones que surgen en Física y en Química se definen a través de ellas, por lo que resulta importante aprender las series numéricas.

2. Definición

Dada la sucesión $\left(a_n\right)_{n\in N}$ = $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ puede definirse una nueva sucesión de sumas parciales $\left(S_n\right)_{n\in N}$ tal que:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

.

.

.

La nueva sucesión es de la forma $\left(S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_n, ...\right)$ y se la denomina **serie numérica**. Se la simboliza $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

A los números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ se los denomina **términos de la serie**, y a $S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_n$ **sumas parciales de la serie**.

2.1 Ejemplo

Dada la sucesión $\left(a_n\right)_{n\in N} / a_n = \dfrac{1}{n\cdot\left(n+1\right)}$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, ..., \frac{1}{n\cdot\left(n+1\right)}, ...\right)$$

Puede definirse la sucesión de sumas parciales $\left(S_n\right)_{n\in N}$ de modo que:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

.

.

.

Es decir $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., S_n, ... \right)$

En este caso, puede inferirse que $S_n = \frac{n}{n+1}$

3. Convergencia de la serie

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se denomina **convergente** si converge la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n \in N}$

Es decir, si $\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad (S \in R)$ la serie es convergente, y el valor S se denomina **suma de la serie**. En este caso, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

En el ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, si consideramos $S_n = \frac{n}{n+1}$ entonces $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$; por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ es convergente y su suma es 1.

Es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + ... = 1$

Si $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ la serie se denomina **divergente**.

Si $\nexists \lim_{n \to \infty} S_n$, ni finito ni infinito, la serie se denomina **oscilante**.

3.1 Ejercicio

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sabiendo que $S_n = \frac{4n+1}{n+3} - \frac{1}{3}$, se pide:

a) Analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) Hallar el término a_{20}

a) Para analizar la convergencia de la serie, calculamos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{n+3} - \frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y su suma es $S = \frac{11}{3}$

b) Para calcular a_{20}, tengamos en cuenta que:

$$S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{19} + a_{20}$$

$$S_{19} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{19}$$

Entonces, $a_{20} = S_{20} - S_{19}$

$$a_{20} = \left(\frac{4\cdot 20+1}{20+3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4\cdot 19+1}{19+3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{46}$$

4. Condición necesaria para la convergencia de una serie

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración: Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ por lo que también $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Entonces:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$$

La proposición:

"Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$"

es equivalente a su contrarrecíproca:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente.

4.1 Ejemplos

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+3} = \frac{1}{5} + \frac{4}{11} + \frac{9}{21} + \ldots$

Podemos analizar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+3}$ no es convergente.

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n}$ podemos observar en este caso que al analizar

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n}$ hay una indeterminación del tipo $(\to 1)^{(\to\infty)}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1+4}{2n-1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{4}{2n-1}\cdot 3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{12n}{2n-1}} = e^6$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n}$ no es convergente.

Algo similar sucede en los siguientes ejemplos:

$\sum_{n=5}^{\infty} \left(2+\frac{3}{n^3}\right)$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{3}{n^3}\right) = 2$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^3}\right)$ no es convergente.

$\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+3}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+3} = \dfrac{1}{2}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+3}$ no es convergente.

4.2 Consideración importante

No es válida la proposición recíproca de la condición necesaria de convergencia

Es decir: si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ no es suficiente para asegurar que la serie sea convergente.

Por ejemplo: consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0$, por lo que la serie cumple la condición necesaria de convergencia. Este dato no alcanza para determinar si la serie converge o no.

En resumen: si no se cumple la condición necesaria entonces la serie no es convergente, pero si se cumple no es suficiente para asegurar su convergencia.

5. Propiedades de las series numéricas

5.1 Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge con suma S y k es un número real, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot S$$

Demostración: Si la serie es convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Por definición $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ entonces $k \cdot S_n = k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + k \cdot a_3 + ... + k \cdot a_n$.

Por propiedad de los límites finitos, $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot S_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} S_n = k \cdot S$

5.2 Si dos series son convergentes, tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

Demostración: Si $S'_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = A$

$S''_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = B$

Entonces $S_n = S'_n + S''_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n)$

Por propiedades del límite finito, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S'_n + S''_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S'_n + \lim\limits_{n\to\infty} S''_n = A + B$

5.3 Si dos series son convergentes, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, y k_1 y k_2 son dos números reales, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot b_n) = k_1 \cdot A + k_2 \cdot B$

Se denomina **Propiedad Lineal** y es consecuencia de las dos propiedades anteriores.

5.4 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ es una serie divergente.

Observación: Nada puede asegurarse si las dos series son divergentes.

5.5 Si en una serie se suprime un número finito de términos iniciales, de suma *K*, entonces la nueva serie tiene el mismo carácter que la primera.

Si la primera es convergente, y de suma *S*, la nueva serie tiene suma *S* – *K*.

6. Series telescópicas

Se denomina **serie telescópica** a aquella cuyo término general a_n puede escribirse de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ o $a_n = b_{n+1} - b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) + \ldots$$

El nombre de telescópica se debe a que si desarrollamos la suma parcial S_n los sumandos se van cancelando dos a dos:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

6.1 Ejemplo

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ podemos hallar la expresión de la suma parcial S_n utilizando el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A \cdot (n+1) + B \cdot n}{n\,(n+1)} \;\rightarrow\; 1 = A \cdot (n+1) + B \cdot n$$

Si $n = 0 \quad \rightarrow A = 1$

Si $n = -1 \;\rightarrow B = -1$

Entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + ...$

Desarrollando y analizando los términos de la serie:

$S_1 = a_1 \qquad\qquad S_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 \qquad\qquad S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad\qquad S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

.

.

.

Entonces $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Esto permite a su vez calcular $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ es convergente y su suma S es igual a 1.

7. Series geométricas

Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ...$ se denomina una **serie geométrica**, donde a representa el primer término de la serie, y q es la razón de esa serie geométrica.

Es decir, cada término de la serie se obtiene multiplicando al término anterior por una constante, que se denomina razón de la serie geométrica: $a_{n+1} = q \cdot a_n \rightarrow q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Por ejemplo $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots$ es una serie geométrica, donde 2 es el primer término de la serie, y su razón q es $\frac{1}{4}$

7.1 Suma parcial de una serie geométrica

Dada la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n + a \cdot q^{n+1} + \ldots$ puede definirse la suma parcial de los n primeros términos

$$S_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1}$$

Y de ello se puede deducir:

$$S_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1}$$

$$q \cdot S_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \ldots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n \qquad (q \neq 0)$$

Restando: $S_n - q \cdot S_n = a - a \cdot q^n$

$$S_n \cdot (1 - q) = a \cdot (1 - q^n)$$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

Por ejemplo, si queremos hallar S_5 en $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots$$

$$S_5 = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{341}{256} = \frac{342}{128}$$

7.2 Convergencia de una serie geométrica

Dado que para analizar la convergencia de una serie, se calcula $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, en el caso de una geométrica resulta:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Si $|q|<1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \to \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$ la serie es convergente.

Si $|q|>1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \to \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} = \infty$ la serie no es convergente.

Si $q=1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n$ resulta de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a = a+a+a+\ldots$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a = \infty$, es decir, es una serie con todos sus términos constantes, por lo que la es divergente.

Si $q=-1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n$ resulta de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot(-1)^n = a-a+a-a+\ldots$ es decir, una serie oscilante.

En resumen, una serie geométrica de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n$ sólo es convergente si $|q|<1$ y su suma es $S=\dfrac{a}{1-q}$ donde a es el primer término de la serie y q es la razón.

En el ejemplo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ la serie es convergente porque su razón es $\dfrac{1}{4}$ y su suma es

$$S=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$$

Es decir, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{8}{3}$

Si se considera ahora la serie la serie iniciada a partir de $n = 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\ldots$$

Puede considerarse, por un lado, el resultado obtenido en el cálculo anterior para la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots$ y los dos términos en los que difieren.

Es decir, puede indicarse que $\sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots$ es igual a $\frac{8}{3} - \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$

Pero también, por otro lado, puede considerarse que en la fórmula obtenida $S = \frac{a}{1-q}$,

a representa el primer término de la serie cuando la misma está inicializada en n = 0; si ahora se inicia en n = 2 el primer término es $\frac{1}{8}$ por lo que la suma resulta

$$S = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

Podemos entonces concluir que una serie geométrica de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n$ sólo es convergente si $|q| < 1$ y su suma es $S = \frac{a}{1-q}$ donde a es el primer término de la serie, de acuerdo al valor en el que esté inicializada la variable n, y q es la razón de esa serie geométrica.

7.3 Ejemplo

La expresión decimal periódica $0{,}\hat{4}$ puede expresarse como una serie ya que

$$0{,}\hat{4} = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \ldots$$

$$0{,}\hat{4} = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \ldots$$

$$0{,}\hat{4} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ es una serie geométrica cuyo primer término es $\frac{4}{10}$ y la razón es $\frac{1}{10}$, por lo que su suma es $S = \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}$

Es decir, $0,\hat{4} = \frac{4}{9}$

8. Criterios para analizar la convergencia de una serie de términos no negativos

En el **Ejemplo 3.1** se trabajó con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conociendo la expresión de la suma parcial $S_n = \frac{4n+1}{n+3} - \frac{1}{3}$. Para analizar la convergencia de la serie, basta con calcular $\underset{n\to\infty}{lím}\, S_n$.

En otros ejemplos, como pueden ser las series telescópicas o las series geométricas, es posible calcular esa expresión de S_n tal como se ha desarrollado en las secciones anteriores.

Pero no siempre es posible hallar S_n cuando se conoce sólo la expresión del término a_n al definir una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Para aquellos casos en que no conocemos la expresión de la suma parcial S_n tendremos en cuenta otros conceptos y algunos criterios que nos permitirán analizar si la serie es convergente.

La ventaja que brindan los criterios es que para analizar la convergencia o divergencia de una serie no se necesita la expresión de la suma parcial S_n sino que se trabaja con la expresión del término a_n. La debilidad de los criterios es que sólo clasifica cada serie según sea convergente o divergente, pero en caso de ser convergente no se conoce a qué valor S converge.

8.1 Criterio de comparación. Series minorantes y series mayorantes

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series numéricas de términos no negativos, es decir $\forall n \in N : a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, tal que $a_n \leq b_n$.

- Si la serie $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ también converge.

  En ese caso, se dice que $\sum a_n$ es una **serie minorante** de $\sum b_n$, es decir, una serie minorante de una serie convergente, también es convergente.

- Si la serie $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ también diverge.

  En ese caso, se dice que $\sum b_n$ es una **serie mayorante** de $\sum a_n$, es decir, una serie mayorante de una serie divergente, también es divergente.

8.1.1 Ejercicios

Analizar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$

Para la comparación, puede considerarse la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ que es una serie geométrica de razón $q = \frac{1}{3}$ por lo que es una serie convergente.

Además, se verifica que $\forall n \in N : 3^n + 1 > 3^n \ \rightarrow \ \frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n}$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ es una serie minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ y sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ también es convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$

En este caso, puede compararse con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ que es una serie geométrica de razón $q = \frac{1}{2}$ por lo que es una serie convergente.

$\forall n \in N : n + 2^n > 2^n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n+2^n} < \frac{1}{2^n}$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ es una serie minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ y sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ también es convergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + 2^n\right)$

En este caso, puede compararse con $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ que es una serie geométrica de razón $q = 2$ por lo que es una serie divergente.

$\forall n \in N : n + 2^n > 2^n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + 2^n\right)$ es una serie mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ y sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + 2^n\right)$ también es divergente.

8.2 Criterio de D´Alembert

Sea $\sum a_n$ una serie tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ entonces la serie es convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ entonces la serie es divergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nada puede asegurarse respecto de la convergencia de la serie utilizando este criterio.

8.2.1 Ejercicios

Analizar la convergencia de:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}$

Aplicando el criterio de D’Alembert, se calcula:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4(n+1)+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+2}}}{\dfrac{4n+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+6)\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}{(4n+2)\left(\sqrt{5}\right)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+6)\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}{(4n+2)\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}\left(\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+6)}{\sqrt{5}\,(4n+2)}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}$ es convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}-1}}{\dfrac{n!}{3^n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^n-1\right)(n+1)!}{\left(3^{n+1}-1\right)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^n-1\right)(n+1)\,n!}{\left(3^n\cdot 3-1\right)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3\cdot 3^n-1}\cdot(n+1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n-1}{3^n}}{\dfrac{3\cdot 3^n-1}{3^n}}\cdot(n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{3-\dfrac{1}{3^n}}\cdot(n+1)=\infty$$

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n-1}$ es divergente.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+1)!(2n)!}{n!\,n!\,[2(n+1)]!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n!(n+1)\,n!(2n)!}{n!\,n!(2n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)(2n)!}{(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$$

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ es convergente.

8.3 Criterio de la raíz n-ésima de Cauchy

Sea $\sum a_n$ una serie tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ entonces la serie es convergente.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ entonces la serie es divergente.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nada puede asegurarse respecto de la convergencia de la serie utilizando este criterio.

8.3.1 Ejercicios

Analizar la convergencia de:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n}\right)^n$

Aplicando el criterio de la raíz de Cauchy se calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n}\right)^n$ es convergente.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n.\cdot(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ es convergente.

8.4 Criterio de la integral de Cauchy

Sea $\sum a_n$ una serie de términos decrecientes tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$, y sea f una función continua, no negativa y decreciente para $x \geq 1$ tal que $\forall n \in N : f(n) = a_n$

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.

Se considera 1 como el extremo inferior de la integral si la serie está definida desde n = 1; si la serie se iniciara en otro valor de n, el análisis sería análogo considerando ese valor como el extremo inferior de la integral.

8.4.1 Ejercicio

Analizar la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$

El término general de la serie se asocia a la función con variable real, $f: R \to R \,/\, f(x) = \frac{x}{2x^2+3}$ continua en R.

Cuando $x > 0$, la función f es positiva.

Y teniendo en cuenta que $f'(x) = \frac{3-2x^2}{\left(2x^2+3\right)^2}$, la función f es decreciente cuando $x \geq 2$ considerando un valor entero.

Puede aclararse que, si bien el enunciado del criterio indica que la función sea decreciente si $x \geq 1$ para que coincida con la definición de la serie, nada varía respecto del análisis de la convergencia que tanto la serie como la función asociada sea decreciente a partir de un cierto valor, como en este caso, a partir de 2.

Teniendo en cuenta que la serie está definida desde n = 0 puede asociarse a la integral $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. Si se quiere considerar que las condiciones del criterio se verifican a partir de 2, puede analizarse $\int_2^{+\infty} f(x)dx$. No varía este cálculo respecto del análisis de la convergencia o divergencia de la integral, así que se puede realizar un cálculo o el otro indistintamente.

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_2^{a} \frac{x}{2x^2+3}\,dx$$

Cálculo Auxiliar: $\int \frac{x}{2x^2+3}\,dx$

Si $z = 2x^2 + 3 \rightarrow dz = 4xdx \rightarrow \frac{1}{4}dz = x\,dx$

$$\int \frac{x}{2x^2+3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{4}\ln|z| + C = \frac{1}{4}\ln|2x^2+3| + C$$

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_2^a \frac{x}{2x^2+3}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \left.\frac{1}{4}\ln|2x^2+3|\right|_2^a = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\ln|2a^2+3| - \frac{1}{4}\ln|11|\right) = \infty$$

La integral $\int_2^{+\infty} \frac{x}{2x^2+3}\,dx$ es divergente; entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$ es divergente y en consecuencia, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$ es divergente.

8.4.2 Serie armónica

Este criterio de la integral permite analizar la convergencia de una serie que se denomina **serie armónica**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

El término general de la serie puede asociarse a la función $f : R - \{0\} \rightarrow R / \; f(x) = \frac{1}{x}$.

Puede verificarse que si $x \geq 1$, la función es continua, positiva y decreciente. Entonces:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \left.\ln|x|\right|_1^a = \lim_{a\to+\infty}\left(\ln|a| - \ln|1|\right) = \infty$$

Como la integral es divergente, *la serie armónica es divergente*.

8.4.3 Series armónicas generalizadas

De manera similar a lo desarrollado en el punto anterior, son conocidas las series que se denominan **series armónicas generalizadas** o también llamadas **series "p"** por su expresión general: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Ya está analizado el caso del exponente $p = 1$, que corresponde a la serie armónica, por lo que se puede analizar qué sucede si $p \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a x^{-p}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^a = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right)$$

Si $-p+1 > 0$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \infty$ Es divergente

Si $-p+1 < 0$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = -\frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$ Es convergente

Resumiendo lo visto acerca de la serie armónica y las series armónicas generalizadas o series "*p*", puede indicarse que:

Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es divergente si $p \leq 1$

es convergente si $p > 1$

8.4.4 Ejercicio

Analizar la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{n}} \right)$

Si analizamos las series:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ por ser una serie armónica generalizada o serie "*p*", con $p = 2$ entonces la serie es convergente por ser $p > 1$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n}} = 3.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 3.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ es también una serie "*p*", con $p = \frac{1}{3}$; entonces es divergente por ser $p < 1$.

De acuerdo con los resultados obtenidos y las propiedades enunciadas acerca de las series numéricas, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{n}} \right)$ es divergente.

Estas series "*p*" pueden utilizarse de manera muy frecuente junto al criterio de comparación visto: ya que en estas series es fácil analizar su convergencia sólo considerando su exponente, luego resulta sencillo en algunos casos utilizarlas para comparar con otras series que se quieran analizar.

8.5 Criterio de Raabe

Sea $\sum a_n$ una serie tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$

Si $\underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] > 1$ entonces la serie es convergente.

Si $\underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] < 1$ entonces la serie es divergente.

Si $\underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = 1$ nada puede asegurarse respecto de la convergencia de la serie utilizando este criterio.

8.5.1 Ejercicio

Dada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n(n+1)}$

Aplicando el criterio de Raabe, debe calcularse

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(1-\frac{\frac{12}{(n+1)(n+2)}}{\frac{12}{n(n+1)}}\right)\right] = \underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(1-\frac{n}{n+2}\right)\right] = \underset{n\to\infty}{lím}\left[n.\left(\frac{2}{n+2}\right)\right] =$$

$$= \underset{n\to\infty}{lím}\frac{2n}{n+2} = 2$$

Entonces la serie es convergente.

8.6 Criterio de comparación en el límite

Dadas las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ de términos no negativos. Si $\underset{n\to\infty}{lím}\frac{a_n}{b_n} \neq 0$ y $\underset{n\to\infty}{lím}\frac{a_n}{b_n} \neq \infty$, lo cual puede resumirse en que $\underset{n\to\infty}{lím}\frac{a_n}{b_n} = l$ con $l \in R^+$, entonces las series tienen el mismo comportamiento; es decir, ambas convergen o ambas divergen.

8.6.1 Ejemplo

Por ejemplo, si resolvemos el ejercicio anterior en el que la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n(n+1)}$ se puede comparar con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que por ser una serie "*p*" con $p = 2$, es convergente.

Al aplicar este criterio de comparación en el límite, se calcula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{12}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2}{n^2+n} = 12$$

Entonces las dos series tienen el mismo comportamiento. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n(n+1)}$ también es convergente.

Se puede apreciar que una misma serie puede analizarse utilizando distintos criterios, no variando la clasificación de la misma.

Podemos notar que cuando el término general de la serie es un cociente de expresiones polinómicas, es sencillo utilizar este criterio. Cuando se calcula el límite, se sabe que el resultado es cero o es infinito dependiendo del grado de los polinomios. Para que el resultado del límite no sea cero ni infinito, se busca comparar con una serie de forma tal que al calcular el límite quede un cociente de dos polinomios del mismo grado.

8.6.2 Ejercicios

Analizar la convergencia de:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$

Esta serie ya fue analizada por el criterio de la integral de Cauchy. En este caso, utilizaremos el criterio de comparación en el límite, considerando la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente.

Luego: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n}{2n^2+3}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2+3} = \dfrac{1}{2}$

Entonces, las dos series tienen el mismo comportamiento, por lo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2n^2+3}$ también es divergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

Puede compararse con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, una serie armónica generalizada, con $p=\dfrac{1}{2}$, por lo que es divergente. Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Como ambas series tienen el mismo comportamiento, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ también es divergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}} - \dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)$

Podemos analizar las series:

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}} = 2.\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ es divergente por ser una serie "*p*", con $p=\dfrac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 3.\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente por ser una serie "*p*", con $p=\dfrac{1}{2}$

Pero considerando los resultados obtenidos, nada puede asegurarse hasta el momento acerca de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}} - \dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)$ si se considera como la resta de dos series divergentes.

Utilizando entonces otras herramientas puede indicarse que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{\frac{2}{3}}-3n^{\frac{1}{2}}}{n}$$

Si se la compara con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, es divergente por ser una serie "*p*", con $p=\frac{1}{3}$. Luego,

$$\underset{n\to\infty}{lím}\frac{\frac{2n^{\frac{2}{3}}-3n^{\frac{1}{2}}}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}=\underset{n\to\infty}{lím}\frac{n^{\frac{1}{3}}\left(2n^{\frac{2}{3}}-3n^{\frac{1}{2}}\right)}{n}=\underset{n\to\infty}{lím}\frac{2n-3n^{\frac{5}{6}}}{n}=2$$

Entonces, por tener ambas el mismo comportamiento, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ también es divergente.

9. Series de términos negativos

Hasta acá hemos trabajado sólo con series de términos no negativos, pero también podemos definir series con términos negativos.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ , \quad \forall n\in N: a_n<0$$

Para analizar la convergencia de este tipo de series podemos extraer factor común (-1):

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=(-1)\sum_{n=1}^{\infty}-a_n$$

Para esta nueva serie, ahora de términos positivos, disponemos de todos los criterios ya vistos.

10. Series alternadas

Puede definirse una serie alternada a través de la expresión $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$. Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ o una expresión equivalente que defina una serie donde sus términos tienen signos alternados.

Para analizar la convergencia de las series alternadas contamos con un único criterio que se indica a continuación.

10.1 Criterio de Leibniz

Dada una serie alternada de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$, tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$, si se verifica que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) los términos a_n son decrecientes, es decir, $a_n \geq a_{n+1}$

entonces la serie es convergente.

10.1.1 Ejemplo

Dada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ podemos indicar que: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2+1}$, es decir, $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ tal que $\forall n \in N : a_n \geq 0$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0$

b) $n < n+1 \quad \rightarrow$ Como $n > 0$: $n^2 < (n+1)^2 \quad \rightarrow \quad n^2+1 < (n+1)^2+1 \quad \rightarrow$ $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} \rightarrow a_n > a_{n+1}$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ es convergente.

10.2 Convergencia absoluta y condicional

Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ es **absolutamente convergente**.

Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ es **condicionalmente convergente**.

10.3 Propiedades

Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ no es convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tampoco es convergente.

Si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ también es convergente.

10.4 Ejemplo

La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ ya analizada es convergente. Para clasificar dicha convergencia falta analizar la convergencia de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, disponemos de todos los criterios de convergencia para el análisis de dichas series.

Utilizando el criterio de comparación en el límite, puede compararse la serie dada con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ que es convergente por ser una serie "p", con $p = 2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

Como las dos series tienen el mismo comportamiento, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ también es convergente.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ es absolutamente convergente.

10.5 Ejercicio

Analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+10}$. En caso de ser convergente clasificar en absoluta o condicional.

Utilizamos el criterio de Leibniz:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+10} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+10}$, es decir, $a_n = \frac{n}{n^2+10}$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+10} = 0$

b) ¿Para qué valores es verdadera la desigualdad $a_n \geq a_{n+1}$?

Tengamos en cuenta que $a_n = \frac{n}{n^2+10}$ y $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+10}$

¿Para qué valores se verifica que $\frac{n}{n^2+10} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+10}$?

$$\frac{n}{n^2+10} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+10}$$

Como los denominadores son positivos:

$$n((n+1)^2+10) \geq (n+1)(n^2+10)$$

$$n(n^2+2n+11) \geq (n+1)(n^2+10)$$

$$n^3+2n^2+11n \geq n^3+10n+n^2+10$$

$$n^2+n-10 \geq 0$$

Hallando las soluciones de la ecuación $n^2 + n - 1 = 0$ puede deducirse que $\forall n \in N / n \geq 3 : n^2 + n - 10 \geq 0$, es decir, si $n \geq 3$ los términos a_n son decrecientes.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+10} = 0$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+10}$ es convergente.

Si analizamos la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+10}$ podemos utilizar el criterio de comparación en el límite y compararla con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente por ser la serie armónica o una serie "*p*", con *p* = 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+10}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+10} = 1$$

Como las dos series tienen el mismo comportamiento, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+10}$ también es divergente.

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+10}$ es condicionalmente convergente.

10.6 Propiedad

Como una consecuencia del Teorema de Leibniz se puede aproximar el valor de la suma *S* de una serie alternada por una suma parcial S_n considerando que el error cometido será menor que el primer término a_{n+1} despreciado. Es decir, si

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} \cdot a_n \quad \text{entonces} \quad |S - S_n| < a_{n+1}$$

10.6.1 Ejemplo

Consideremos la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

Si aplicamos el criterio de Leibniz:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $\forall n \in N : n < n+1 \;\rightarrow\; \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \;\rightarrow\; a_n > a_{n+1}$

Entonces la serie es convergente.

Además:

$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 - a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Si consideramos a S_3 como una aproximación de la suma de la serie *S* se verifica que:

$$|S - S_3| < a_4 \Rightarrow \left|S - \frac{5}{6}\right| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7}{12} < S < \frac{13}{12}$$

11. Referencias bibliográficas

- Apostol, T. (1984): *Calculus*. Barcelona, Reverté.
- De Burgos, J. (1996): *Cálculo infinitesimal de una variable*. Madrid, McGraw-Hill.
- Leithold, L. (1990): *Cálculo con Geometría Analítica*. México, Harla.
- Piskunov; N (1980): *Cálculo Diferencial e Integral.* Moscú. Mir.
- Rabuffetti, H. (1978): *Introducción al Análisis Matemático*. *Cálculo I*. Buenos Aires, El Ateneo.
- Sadosky, M., Guber, R (1982): *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Buenos Aires. Alsina
- Spivak, M, (1990): *Calculus*. Barcelona, Reverté.
- Stewart, J. (1998): *Cálculo de una variable*. México, Thomson Editores.