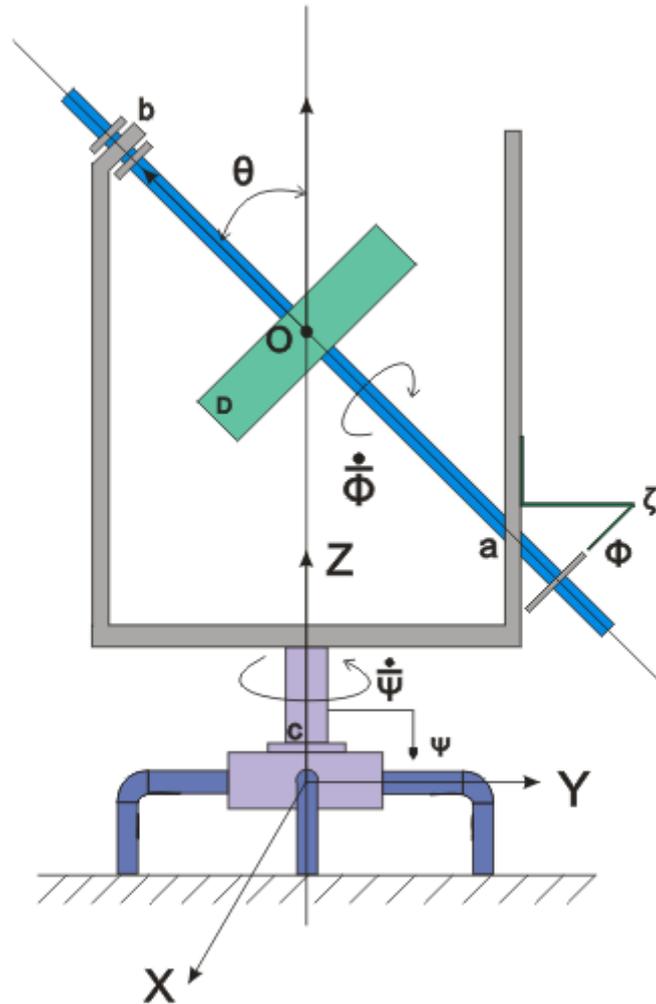


Problema

El disco uniforme D de la figura gira con velocidad angular $\dot{\phi}$ con respecto al marco de soporte, midiéndose el ángulo Φ con respecto al indicador ζ . Simultáneamente, el marco gira con velocidad angular $\dot{\psi}$ alrededor del eje vertical, midiéndose el ángulo Ψ entre el eje fijo Y y el plano cOa.



Datos numéricos

Espesor del disco $e = 20$ mm
 Diámetro del disco $D = 150$ mm
 $aO = bO = 300$ mm
 $\theta = \pi/4$ rad
 $\dot{\psi} = 20$ rad/s
 $\dot{\phi} = 60$ rad/s
 Masa del disco = 1000 gramos

Encontrar

1. Invariantes escalar, vectorial y tipo de movimiento del disco D
2. Velocidad y aceleración de un punto P de la periferia del disco, utilizando los conceptos de
 - a. Movimiento absoluto, formas impropias de las leyes de distribución de velocidad y aceleración
 - b. Movimiento relativo
 - c. Verificar resultados de ambos métodos
3. Aceleración angular del disco D
4. Expresar el tensor de inercia en O y graficarlo
5. Energía cinética del disco
6. Momento giroscópico en O
7. Reacciones dinámicas, estáticas y totales en a y b

El marco de referencia absoluto respecto del cual interesa conocer el movimiento del disco rígido está representado por los ejes $\{c, X, Y, Z\}$ fijos a las patas del marco soporte.

Para expresar las magnitudes vectoriales, se adoptará la terna móvil $\{O, X_1, Y_1, Z_1\}$ solidaria al marco soporte rotando con ψ , como ilustra la Figura 1.

Desarrollo

1. a. Invariante vectorial:

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i \quad (1)$$

El vector rotación $\bar{\omega}$ es la resultante de todas las rotaciones que afectan al cuerpo cuyo movimiento se desea conocer, y será la misma cualquiera sea el centro de reducción adoptado, por lo que se la suele llamar ***invariante vectorial del sistema***.

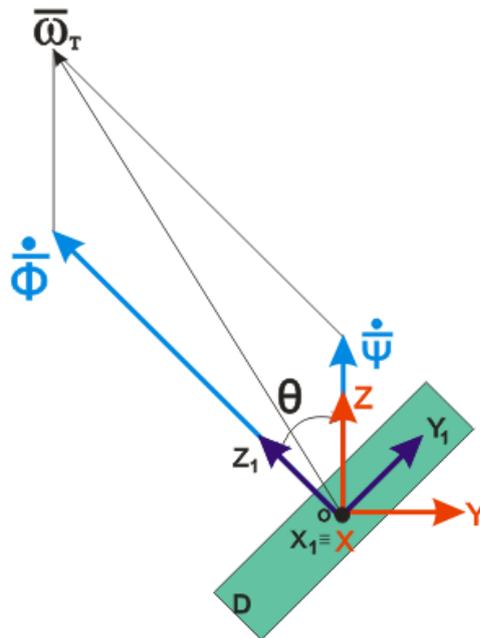


Figura 1: Resultante de las rotaciones del sistema

Siendo

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= 20\vec{K} = 14,14\vec{K}_1 + 14,14\vec{J}_1 \\ \dot{\phi} &= 60\vec{K}_1 \end{aligned} \quad (2)$$

con (1) y (2) se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 14,14\vec{J}_1 + 74,14\vec{K}_1 \\ |\bar{\omega}| &= \sqrt{74,14^2 + 14,14^2} \end{aligned}$$

$$|\dot{\omega}| = 75,5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

b. Invariante escalar:

Los módulos de los vectores velocidad de un sistema material rígido proyectados en un determinado instante sobre la dirección del vector rotación son iguales, y reciben el nombre de “invariante escalar μ ”

$$\mu = \vec{V}_{O_1} \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{O_1} \cdot \frac{\dot{\omega}}{|\dot{\omega}|} \quad (3)$$

Donde O_1 es el centro de reducción del movimiento. Tomando $O_1 = O$, la velocidad del centro de reducción $\vec{V}_{O_1} = \vec{V}_O = 0$, por lo tanto

$$\mu = \vec{V}_{O_1} \cdot \hat{\omega} = 0$$

Los invariantes vectorial y escalar suministran importante información, ya que definen el tipo de movimiento; en este caso particular se trata de un **movimiento de rotación instantánea**, ya que $\mu=0$ y las dos rotaciones son concurrentes en el punto O del eje de rotación propia.

2. Velocidad y aceleración de un punto P de la periferia del disco

a. Método del movimiento absoluto (formas impropias de las leyes de distribución de la velocidad y la aceleración)

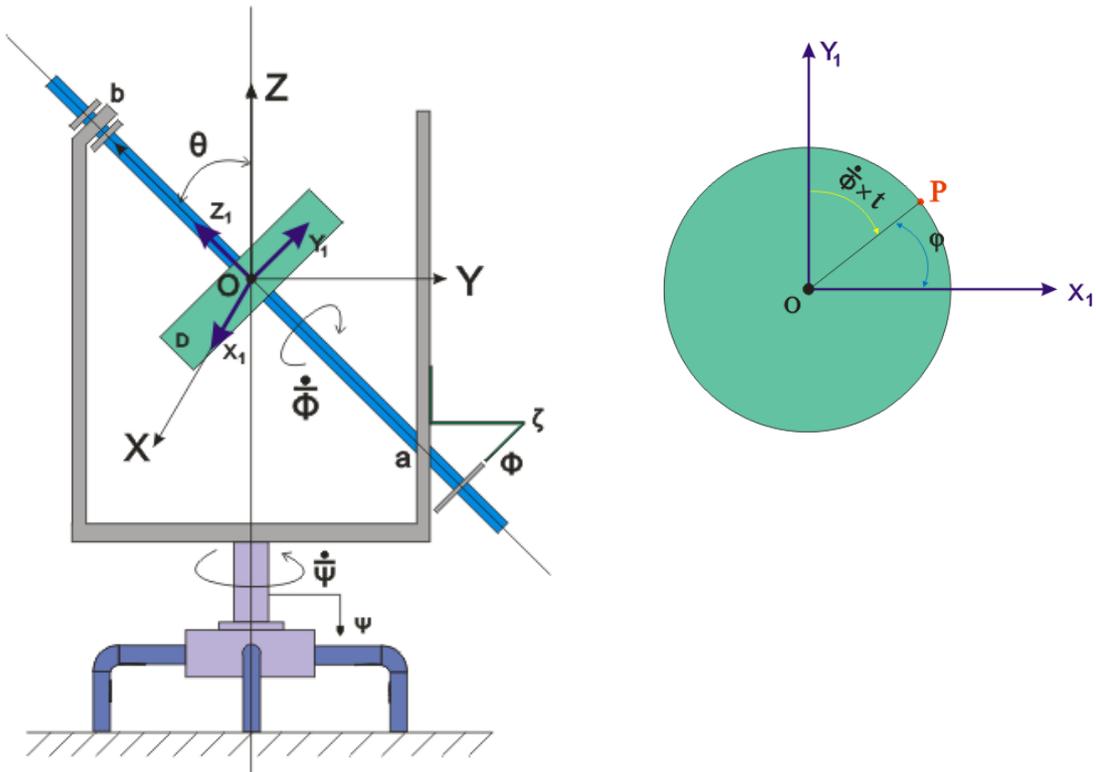


Figura 2: Sistemas de referencia adoptados

Estado de velocidad:

Aplicando la forma impropia de la ley de distribución de velocidades:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge \bar{r}_{O_1/P} \quad (4)$$

y tomando $O_1 \equiv O$, resulta

$$\bar{V}_{O_1} = 0 \quad \therefore \quad \bar{V}_p = \bar{\omega} \wedge \bar{r}_{O_1/P}$$

$$\bar{V}_p = \begin{bmatrix} 0 & 14,14 & 74,14 \\ 0,075 \cos \phi & 0,075 \sin \phi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{V}_p = (-5,56 \sin \phi \bar{i}_1 + 5,56 \cos \phi \bar{j}_1 - 1,06 \cos \phi \bar{k}_1) \frac{m}{seg}$$

Estado de aceleración:

Análogamente, aplicando la forma impropia de la ley de distribución de aceleración:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{01} + \bar{\gamma}_T \wedge \bar{r}_{01P} + \bar{\omega}_T \wedge (\bar{\omega}_T \wedge \bar{r}_{01P}) \quad (5)$$

Donde:

$\bar{a}_{01} = 0$ (aceleración del centro de reducción)

$\bar{\omega}_T \wedge \bar{r}_{01P} = \bar{V}_P$

$\bar{\gamma}_T$ = aceleración angular del disco.

$$\bar{\gamma}_T = \frac{d\bar{\omega}_T}{dt} = \frac{d(\dot{\psi} + \dot{\phi})}{dt} \quad (6)$$

pero $\frac{d\dot{\psi}}{dt} = 0$ porque $\dot{\psi} = 20\check{k} = cte$

$$\bar{\gamma}_T = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d(\dot{\phi}\check{k}_1)}{dt} = \dot{\phi} \times \frac{d\check{k}_1}{dt} \quad (7)$$

Este último se resuelve mediante la utilización de las fórmulas de Poisson que permiten expresar las derivadas de los versores en función de un producto vectorial entre la $\bar{\Omega}$ impuesta a la terna móvil y el mismo versor:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}_1}{dt} &= \bar{\Omega} \wedge \hat{i}_1 \\ \frac{d\hat{j}_1}{dt} &= \bar{\Omega} \wedge \hat{j}_1 \\ \frac{d\hat{k}_1}{dt} &= \bar{\Omega} \wedge \hat{k}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Físicamente, la derivada del versor representa la velocidad de la punta de este debido a la imposición de la rotación.

Por lo que la expresión (7) queda:

$$\bar{\gamma}_T = \dot{\phi} \times [\dot{\psi} \wedge \check{k}_1] = \dot{\phi} \times [(\dot{\psi} \text{sen} \theta \check{j}_1 + \dot{\psi} \text{cos} \theta \check{k}_1) \wedge \check{k}_1]$$

$$\bar{\gamma}_T = 60 \times (14,14\check{i})$$

$$\bar{\gamma}_T = 848,52 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \check{i}$$

Retomando la ecuación (5) y utilizando los parámetros hallados anteriormente:

$$\bar{a}_p = \bar{\gamma}_T \wedge \bar{r}_{01p} + \bar{\omega}_T \wedge \bar{V}_p$$

$$\bar{a}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 848,52 & 0 & 0 \\ 0,075 \cos \phi & 0,075 \operatorname{sen} \phi & 0 \end{bmatrix}}_{(63,64 \operatorname{sen} \phi) \check{k}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 14,14 & 74,14 \\ -5,56 \operatorname{sen} \phi & 5,56 \cos \phi & -1,06 \cos \phi \end{bmatrix}}_{(-427,22 \cos \phi) \check{i} + (-412,22 \operatorname{sen} \phi) \check{j}_1 + (78,62 \operatorname{sen} \phi) \check{k}_1}$$

$$\bar{a}_p = -427,22 \cos \phi \check{i} - 412,22 \operatorname{sen} \phi \check{j}_1 + 142,26 \operatorname{sen} \phi \check{k}_1$$

b. Método del movimiento relativo:

Se analiza el movimiento del disco desde la terna que se mueve respecto a la considerada fija y a la cual se desea referir el movimiento.

Estado de velocidad: Siendo $\bar{\Omega} = \dot{\psi}$ el vector rotación absoluta de la terna móvil y \bar{V}_{01} la velocidad de dicho punto también absoluta, pueden distinguirse tres movimientos:

- **Movimiento relativo:** es el movimiento del cuerpo con respecto a la terna móvil como si esta estuviese fija.

$$\bar{V}_{rel} = \dot{\phi} \wedge \bar{r}_{01P} \quad (9)$$

- **Movimiento de arrastre:** Es el movimiento del cuerpo como si este estuviera solidariamente unido a la terna móvil y ésta lo arrastrase en su movimiento.

$$\bar{V}_{arr} = \bar{V}_{01} + \bar{\Omega} \wedge \bar{r}_{01P} \quad (10)$$

- **Movimiento absoluto:** Es el movimiento del sistema rígido respecto a la terna absoluta como consecuencia de la simultaneidad de los dos movimientos anteriores

$$\bar{V}_p = \bar{V}_{rel} + \bar{V}_{arr} \quad (11)$$

Resolviendo las expresiones (9) y (10):

$$\bar{V}_{rel} = \dot{\phi} \wedge \bar{r}_{01P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 0,075 \cos \phi & 0,075 \sen \phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_{rel} = -4,5 \sen \phi \bar{i}_1 + 4,5 \cos \phi \bar{j}_1$$

$$\bar{V}_{arr} = \bar{V}_{01} + \bar{\Omega} \wedge \bar{r}_{01P} = \begin{bmatrix} 0 & 14,14 & 14,14 \\ 0,075 \cos \phi & 0,075 \sen \phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_{arr} = -1,06 \sen \phi \bar{i}_1 + 1,06 \cos \phi \bar{j}_1 - 1,06 \cos \phi \bar{k}_1$$

Y sumando ambos vectores

$$\vec{V}_p = (-5,56 \operatorname{sen} \phi \check{i}_1 + 5,56 \cos \phi \check{j}_1 - 1,06 \cos \phi \check{k}_1) \frac{m}{\operatorname{seg}}$$

Que como puede observarse, coincide con la obtenida con el método anterior.

Estado de aceleración

Derivando respecto del tiempo la ecuación (11), se obtiene la expresión de la aceleración.

$$\bar{a}_p = \bar{a}_{01} + \dot{\bar{\Omega}} \wedge \bar{r}_{01/P} + \bar{\Omega} \wedge (\bar{\Omega} \wedge \bar{r}) + \bar{a}_{rel} + 2 \cdot \bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{rel} \quad (12)$$

Esta expresión se puede desmembrar en tres partes bien definidas:

- **Aceleración relativa:** es la aceleración correspondiente a cualquier punto del cuerpo con respecto a la terna móvil como si esta estuviese fija. En este caso de estudio está dada por

$$\bar{a}_{rel} = \bar{\gamma}_\varphi \wedge \bar{r}_{01P} + \dot{\bar{\varphi}} \wedge (\bar{\varphi} \wedge \bar{r}_{01P}) \quad (13)$$

$$\dot{\bar{\varphi}} = 60 \check{k}_1 = cte \quad \therefore \quad \bar{\gamma}_\varphi = 0 \quad y \quad \dot{\bar{\varphi}} \wedge \bar{r}_{01P} = \bar{V}_{rel}$$

$$\bar{a}_{rel} = \dot{\bar{\varphi}} \wedge (\bar{V}_{rel}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \\ -4,5 \operatorname{sen} \phi & 4,5 \cos \phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{rel} = (-270 \cos \phi \check{i}_1 - 270 \operatorname{sen} \phi \check{j}_1) \frac{m}{\operatorname{seg}^2}$$

- **Aceleración de arrastre:**
Se determina con la forma impropia de la ley de distribución de aceleración en un sistema rígido tal como si éste fuese arrastrado por la terna móvil,

$$\bar{a}_{arr} = \bar{a}_{01} + \dot{\bar{\Omega}} \wedge \bar{r}_{01/P} + \bar{\Omega} \wedge (\bar{\Omega} \wedge \bar{r}) \quad (14)$$

$$\bar{a}_{arr} = \bar{a}_{01} + \bar{\gamma}_\psi \wedge \bar{r}_{01P} + \dot{\bar{\psi}} \wedge (\bar{\psi} \wedge \bar{r}_{01P})$$

Donde:

$\bar{a}_{01} = 0$ (aceleración del centro de reducción)

$$\dot{\psi} = 14,14\check{j}_1 + 14,14\check{k}_1 = cte \quad \therefore \bar{\gamma}_\psi = 0$$

$$\dot{\psi} \wedge \bar{r}_{01P} = \bar{V}_{arr}$$

$$\bar{a}_{arr} = \begin{bmatrix} 0 & 14,14 & 14,14 \\ -1,06\text{sen}\phi & 1,06\text{cos}\phi & -1,06\text{cos}\phi \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{arr} = -30\text{cos}\phi\check{i}_1 - 15\text{sen}\phi\check{j}_1 + 15\text{sen}\phi\check{k}_1$$

- **Aceleración complementaria o de Coriolis:**
Aparece por la rotación de los ejes de la terna móvil

$$\bar{a}_{cor} = 2 \cdot \bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{rel} \quad (15)$$

$$\bar{a}_{cor} = 2 \cdot \dot{\psi} \wedge \bar{V}_{rel} = 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 14,14 & 14,14 \\ -4,5\text{sen}\phi & 4,5\text{cos}\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_{cor} = -127,27\text{cos}\phi\check{i}_1 - 127,27\text{sen}\phi\check{j}_1 + 127,27\text{sen}\phi\check{k}_1$$

Así resulta:

$$\bar{a}_p = \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{arr} + \bar{a}_{com} \quad (16)$$

$$\bar{a}_p = -427,27\text{cos}\phi\check{i}_1 - 412,27\text{sen}\phi\check{j}_1 + 142,28\text{sen}\phi\check{k}_1$$

Que comprueba el resultado obtenido previamente.

Conclusiones:

Es interesante notar que los resultados obtenidos mediante ambos métodos (absoluto y relativo) no varían. Esto es lógico, ya que el movimiento del disco respecto del marco de referencia es único, y su estado de velocidad y aceleración es independiente de los modelos y herramientas matemáticas que se utilicen para obtenerlos.

3. Aceleración angular del disco D

El cálculo de la aceleración angular del disco ha sido desarrollado al obtener el estado de aceleración por medio del método absoluto.

$$\bar{\gamma}_T = \frac{d\bar{\omega}_T}{dt} = \frac{d(\dot{\psi} + \dot{\phi})}{dt}$$

pero $\frac{d\dot{\psi}}{dt} = 0$ porque $\dot{\psi} = 20\check{k} = cte$

$$\bar{\gamma}_T = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d(\dot{\phi}\check{k}_1)}{dt} = \dot{\phi} \times \frac{d}{dt}\check{k}_1$$

Esta última expresión es posible resolverla mediante la utilización de las expresiones de Poisson **(8)**, con lo que la anterior queda:

$$\bar{\gamma}_T = \dot{\phi} \times [\dot{\psi} \wedge \check{k}_1] = \dot{\phi} \times [(\dot{\psi} \text{sen} \theta \check{j}_1 + \dot{\psi} \text{cos} \theta \check{k}_1) \wedge \check{k}_1]$$

$$\bar{\gamma}_T = 60 \times (14,14\check{i})$$

$$\bar{\gamma}_T = 848,52 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \check{i}$$

4. Tensor de inercia en O

El elipsoide de inercia posee 3 ejes de simetría por lo cual será posible orientar las direcciones coordenadas de manera que coincidan con dichos ejes, obteniéndose la ecuación canónica.

Los momentos de inercia respecto a estos ejes reciben el nombre de momentos principales de inercia I_{11} , I_{22} , I_{33} y a los ejes se los llama ejes principales de inercia.

La matriz $\bar{\bar{I}}_{01}$ es el TENSOR DE INERCIA respecto de O y se encuentra referido a la terna con respecto a la cual se expresa la velocidad angular $\bar{\omega}$; por lo tanto, las componentes de la diagonal principal son los momentos principales de inercia, y además son nulos los momentos centrífugos.

$$\bar{\bar{I}}_{01} = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Siendo:
M=1 kg y R=0,075m,
resulta

$$\bar{\bar{I}}_{01} = \begin{bmatrix} 1,406 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1,406 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 2,812 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para esta orientación de los ejes la ecuación cuadrática resulta:

$$1 = I_{11} \cdot x_1^2 + I_{22} \cdot x_2^2 + I_{33} \cdot x_3^2 \quad (19)$$

Como la ecuación canónica de un elipsoide es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (20)$$

Siendo a, b y c sus semiejes, en la (20) se tiene:

$$\frac{x_1^2}{1/I_{11}} + \frac{x_2^2}{1/I_{22}} + \frac{x_3^2}{1/I_{33}} = 1 \quad (21)$$

Luego, los semiejes del elipsoide de inercia están dados por:

$$a = \sqrt{\frac{1}{I_{11}}}$$

$$a = 26,67$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{I_{22}}}$$

$$b = 26,67$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{I_{33}}}$$

$$c = 18,85$$

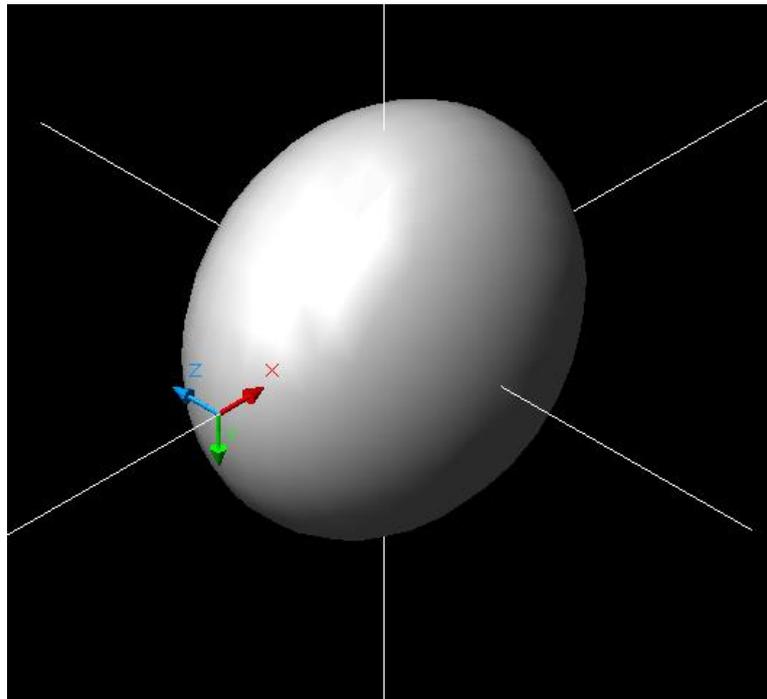


Figura 3: Elipsoide de inercia

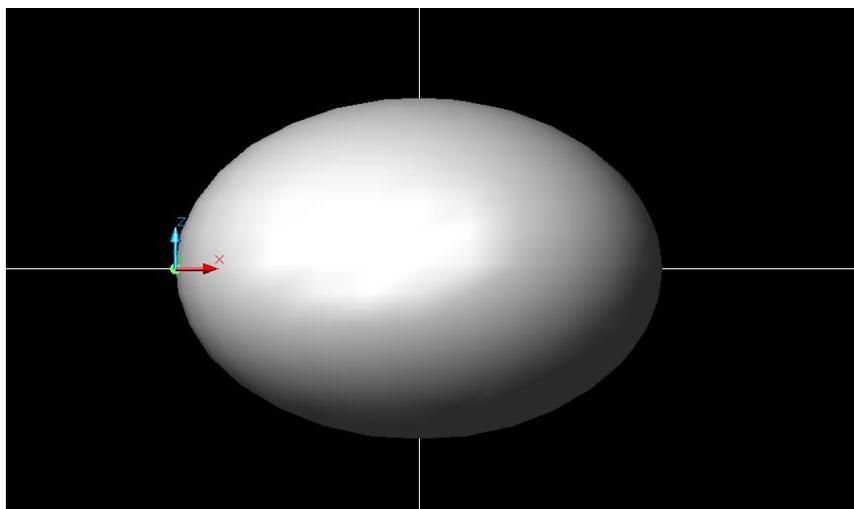


Figura 4: Elipsoide de inercia – Plano $i_1 - k_1$

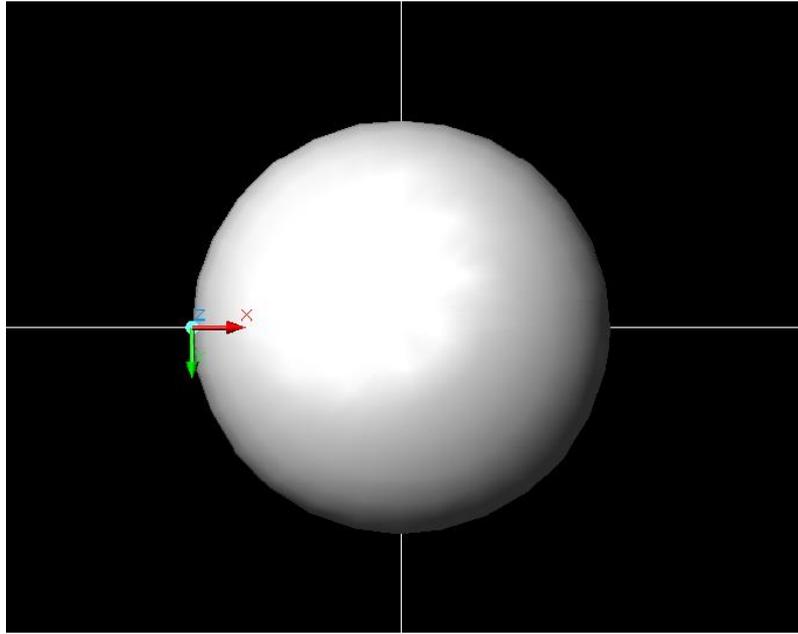


Figura 5: Elipsoide de inercia – Plano $i_1 - j_1$

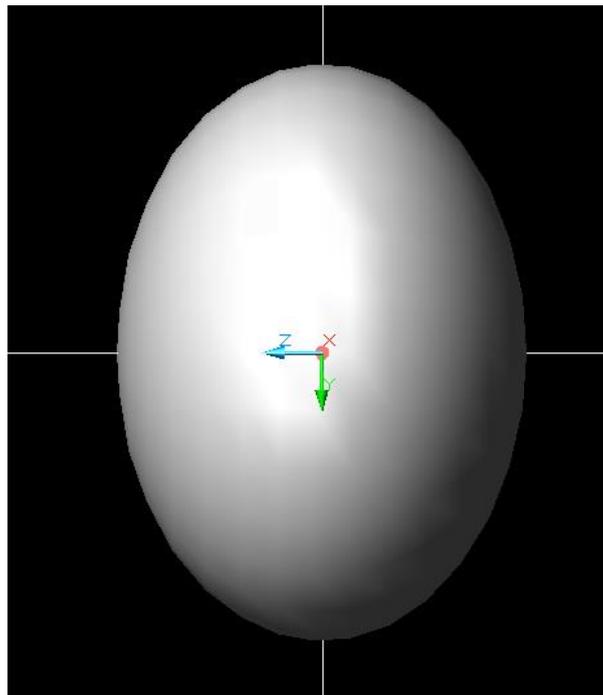


Figura 6: Elipsoide de inercia – Plano $k_1 - j_1$

5. Energía cinética del disco

La expresión general de la energía cinética para un sistema material rígido establece:

$$e = \frac{1}{2}mV_{01}^2 + \frac{1}{2}I\omega\omega_{01} \cdot \omega^2 + m\bar{V}_{01} \cdot \bar{\omega} \wedge \bar{r}_g \quad (22)$$

Los tres términos de la derecha de la expresión (22) se denotarán con e_1 , e_2 y e_3 respectivamente y se analizan por separado para luego ejecutar la suma total.

El primer término e_1 se denomina energía cinética de arrastre o de traslación, y es la que tendría el sistema en el supuesto que toda la masa estuviera concentrada en el centro de reducción, y viajase a la velocidad de este último.

Tomando como centro de reducción el punto O_1 , es $V_{01} = 0$ y por lo tanto:

$$e_1 = \frac{1}{2}mV_{01}^2 = 0 \quad (23)$$

El segundo miembro e_2 se denomina energía cinética relativa o de rotación y esta originada por el movimiento relativo de cada punto respecto del centro de reducción:

$$e_2 = \frac{1}{2}I\omega\omega_{01} \cdot \omega^2 \quad (24)$$

Es

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 14,14\bar{j}_1 + 74,14\bar{k}_1$$

$$\omega = \sqrt{74,14^2 + 14,14^2}$$

$$\omega = 75,5 \frac{rad}{seg}$$

En e_2 aparece $I\omega\omega_{01}$ que es el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje paralelo al vector $\bar{\omega}$ pasante por el centro de reducción. Para su cálculo se parte del tensor de inercia para ejes principales (17) - (18)

$$\bar{\bar{I}}_{01} = \begin{bmatrix} 1,406 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1,406 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 2,812 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Y utilizando la transformación lineal por rotación de ejes mediante la notación de Einstein

$$I''_{ij} = c_{im}c_{jn}I'_{mn}$$

Donde los c_{ij} son los cosenos directores entre los ejes rotados y los originales
En la Figura 7, k'_1 representa la dirección del eje ω

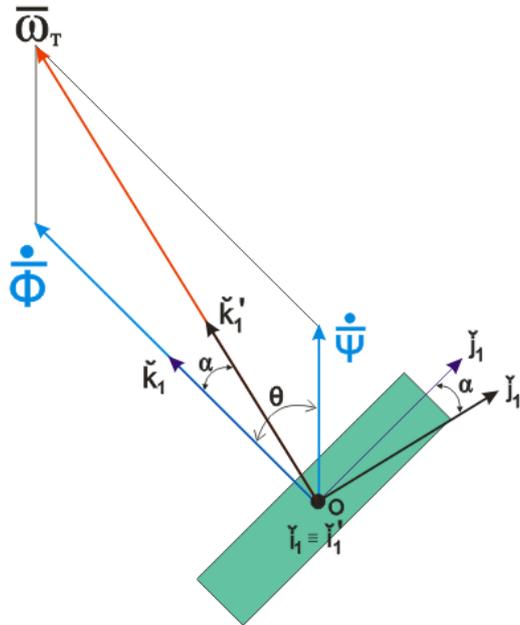


Figura 7: Rotación de ejes para expresar el momento de inercia en la dirección de ω pasante por O

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{14,14}{74,14} \Rightarrow \alpha = 10,8^\circ$$

Los cosenos directores que interesan en este caso son:

$$\begin{aligned} c_{31} &= \cos 90^\circ = 0 \\ c_{32} &= \cos(90 - \alpha) = 0,1873 \\ c_{33} &= \cos(360 - \alpha) = 0,9823 \end{aligned}$$

Y el momento de inercia respecto de $\bar{\omega}$ que pasa por O es:

$$I_{\omega \omega_0} = I_{33}' = c_{31}^2 \cdot I_{11} + c_{32}^2 \cdot I_{22} + c_{33}^2 \cdot I_{33}$$

$$I_{\omega \omega_0} = 0,002762 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Con lo que el término de energía cinética relativa (24) queda:

$$e_2 = \frac{1}{2} I \omega \omega_{01} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \times 0,002762 \times 75,5^2$$

$$e_2 = 7,8739 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

El tercer miembro e_3 de la ecuación de energía se denomina fuerza viva compuesta

$$e_3 = m \bar{V}_{01} \cdot \bar{\omega} \wedge \bar{r}_g \quad (25)$$

Su valor depende del centro de reducción elegido. En este caso particular, $\bar{V}_{01} = 0$. Además, el centro de reducción es coincidente con el centro de masa G, y como se puede apreciar en la expresión (25), r_g es nulo, por lo que el producto vectorial también. Luego

$$e_3 = m \bar{V}_{01} \cdot \bar{\omega} \wedge \bar{0}$$

$$e_3 = 0$$

La energía cinética total resulta entonces:

$$e = \frac{1}{2} m V_{01}^2 + \frac{1}{2} I \omega \omega_{01} \cdot \omega^2 + m \bar{V}_{01} \cdot \bar{\omega} \wedge \bar{r}_g$$

$$e = \cancel{\frac{1}{2} m V_{01}^2} + \frac{1}{2} I \omega \omega_{01} \cdot \omega^2 + m \cancel{\bar{V}_{01} \cdot \bar{\omega} \wedge \bar{r}_g}$$

$$e = e_2 = 7,8739 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

El resultado expresa la consecuencia lógica de que, tratándose de un movimiento de rotación instantánea, la única energía cinética del cuerpo es la debida a su rotación alrededor del eje del movimiento.

6. Momento giroscópico en O

El sistema aquí estudiado es un ejemplo de un giróscopo, con la característica particular de que no existe el movimiento de nutación, ya que θ permanece constante. Sin embargo, existe un movimiento de precesión $\dot{\psi}$ constante alrededor del eje fijo \check{k} y un movimiento de rotación propia (spin) $\dot{\phi}$ constante alrededor de \check{k}_1 .

Debido a estas características el cuerpo en estudio posee un movimiento de precesión estable.

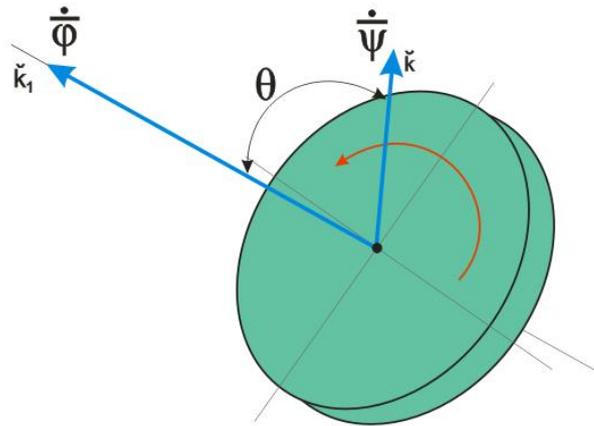


Figura 8: Componentes de ω expresados en función de los ángulos de Euler

$$\begin{aligned}\theta &= 45^\circ = (cte) \quad \therefore \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \\ \dot{\psi} &= 20 \frac{rad}{seg} = (cte) \quad \therefore \quad \ddot{\psi} = 0 \\ \dot{\phi} &= 60 \frac{rad}{sed} = (cte) \quad \therefore \quad \ddot{\phi} = 0\end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones de Euler para determinar el movimiento de un giróscopo, resulta:

$$\begin{aligned}M_x &= [I_{zz} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - I \dot{\psi} \cos \theta] \dot{\psi} \sin \theta \\ M_y &= 0; \quad M_z = 0\end{aligned} \quad (26)$$

$$I_{zz} = 2,812 \times 10^{-3}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I = 1,406 \times 10^{-3}$$

$$M_{O1} = 2,666 \check{i}_1 [N.m]$$

7. Reacciones dinámicas, estáticas y totales en a y b

Se utilizarán las ecuaciones cardinales de la cinética

$$\bar{F}_E = \left[\frac{d\bar{Q}}{dt} \right]_{rel} + \bar{\omega} \wedge \bar{Q} \quad (27)$$

$$\bar{M}_{E(0)} = \left[\frac{d\bar{K}_{(01)}}{dt} \right]_{rel} + \bar{\omega} \wedge \bar{K}_{(01)} + \bar{V}_{01} \wedge \bar{Q} \quad (28)$$

Comenzando con la ecuación 27

$$\bar{Q} = m \times \bar{V}_G \quad \text{pero} \quad \bar{V}_G = \bar{V}_O = 0$$

$$\therefore \bar{Q} = 0$$

$$\left[\frac{d\bar{Q}}{dt} \right]_{rel} = m \times \frac{d\bar{V}_G}{dt} \quad \text{pero} \quad \frac{d\bar{V}_G}{dt} = 0$$

$$\therefore \left[\frac{d\bar{Q}}{dt} \right]_{rel} = 0$$

Luego, la ecuación de Newton (27) queda

$$\bar{F}_E = 0$$

Tomando ahora la ecuación de Euler (28)

$$\bar{K}_G = \bar{I}_G \times \bar{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I_{xx}\omega_x\check{i}_1 + I_{yy}\omega_y\check{j}_1 + I_{zz}\omega_z\check{k}_1 \quad (29)$$

$$\bar{K}_G = 1,406 \times 10^{-3} \times 0 \check{i}_1 + 1,406 \times 10^{-3} \times 14,14 \check{j}_1 + 2,8125 \times 10^{-3} \times 74,14 \check{k}_1$$

$$\bar{K}_G = 0,0198\check{j}_1 + 0,208\check{k}_1$$

Resulta $\left[\frac{d\bar{K}_G}{dt} \right]_{rel} = 0$

$$\bar{\psi} \wedge \bar{K}_G = \begin{bmatrix} 0 & 14,14 & 14,14 \\ 0 & 0,0198 & 0,208 \end{bmatrix} = 2,666\bar{i}_1$$

$$\bar{V}_0 \wedge \bar{Q} = 0$$

Habiendo obtenido los términos que constituyen la ecuación de Euler (28), se tiene el valor del momento de las fuerzas exteriores (activas más reactivas) respecto del centro de momentos O:

$$\bar{M}_{E(O)} = 2,666 \text{ N.m } \bar{i}_1$$

Debido a este momento, las reacciones dinámicas en los apoyos a y b serán:

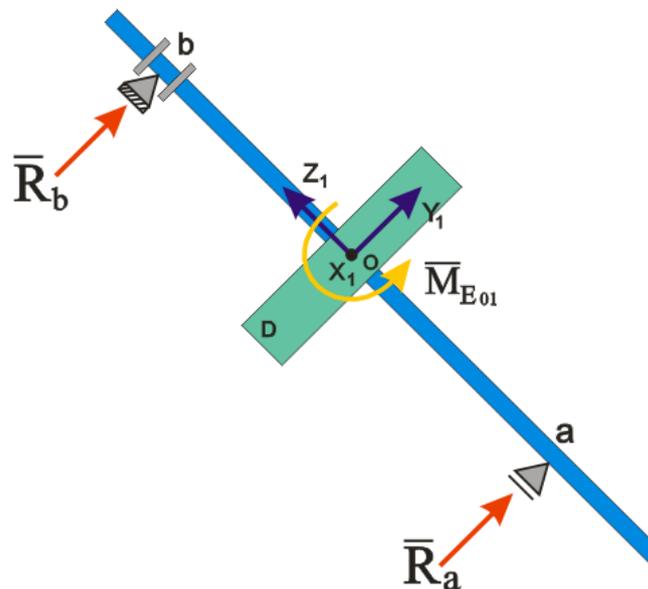


Figura 9: Esfuerzos dinámicos en los apoyos debido al momento producido en O

$$\bar{R}_a(-\bar{j}_1) \wedge \bar{r}_{a/o}(-\bar{k}_1) = \bar{M}_O\bar{i}_1$$

$$\bar{R}_a = \frac{\bar{M}_O}{\bar{r}_{a/o}} = \frac{2,666 \text{ N.m}}{0,3 \text{ m}} = 8,88 \text{ N } (-\bar{j}_1)$$

$$\bar{R}_a = -8,88 \bar{j}_1$$

$$\bar{R}_b\bar{j}_1 \wedge \bar{r}_{b/o}\bar{k}_1 = \bar{M}_O\bar{i}_1$$

$$\bar{R}_b = \frac{\bar{M}_o}{\bar{r}_{b/o}} = \frac{2,666 \text{ N.m}}{0,3 \text{ m}} = 8,88 \text{ N } (\check{j}_1)$$

$$\bar{R}_b = 8,88 \check{j}_1$$

Las reacciones estáticas sobre los apoyos serán

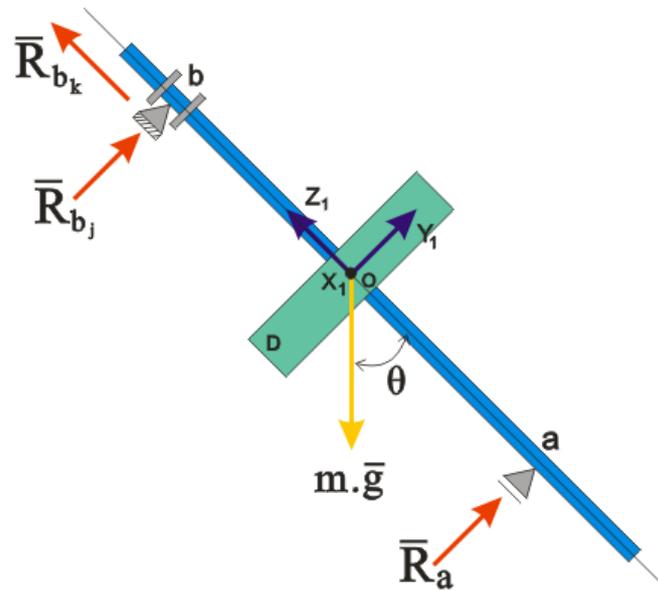


Figura 10: Esfuerzos estáticos en los apoyos producidos por el peso propio del disco

$$\sum \vec{F}_z = R_B \check{k}_1 - m.g. \cos \theta = 0 \Rightarrow R_B \check{k}_1 = 6,936 \text{ kg}$$

$$\sum \vec{F}_y = R_B \check{j}_1 + R_A - m.g. \cos \theta = 0 \Rightarrow R_A = 3,468 \text{ kg } \check{k}_1$$

$$\sum M_A = R_B \check{j}_1 \times 600 \text{ mm} - m.g. \cos \theta \times 300 = 0 \Rightarrow R_B \check{j}_1 = 3,468 \text{ kg}$$

$$\bar{R}_A = 3,468 \text{ kg } \check{j}_1$$

$$\bar{R}_R = 3,468 \text{ kg } \check{j}_1 + 6,936 \text{ kg } \check{k}_1$$

Por último, las reacciones totales en los apoyos serán la suma vectorial de las reacciones estáticas y dinámicas:

$$\vec{R}_{AT} = 3,468 \text{ kg } \vec{j}_1 - 8,88 \vec{j}_1$$

$$\vec{R}_{AT} = -5,41 \text{ kg } \vec{j}$$

$$\vec{R}_{RT} = 3,468 \text{ kg } \vec{j}_1 + 8,88 \vec{j} + 6,936 \text{ kg } \vec{k}_1$$

$$\vec{R}_{RT} = 12,35 \text{ kg } \vec{j}_1 + 6,936 \text{ kg } \vec{k}_1$$

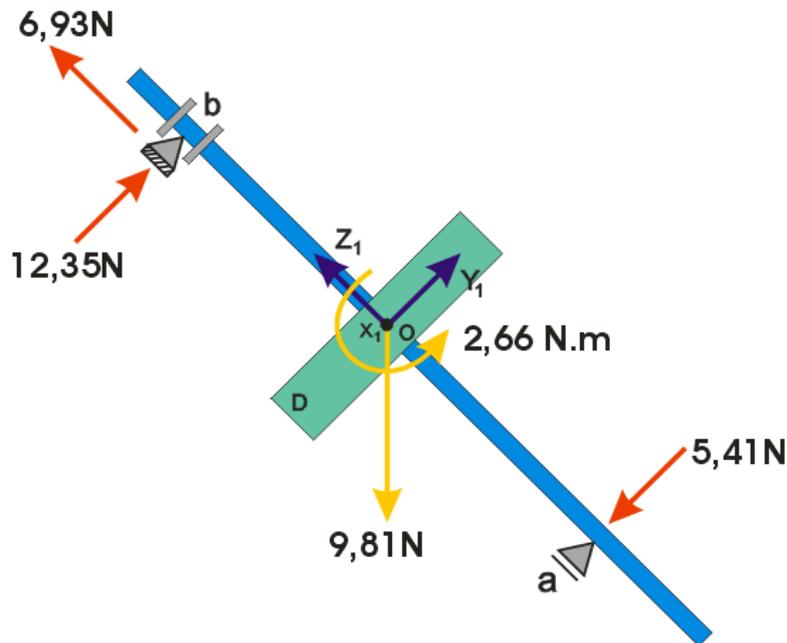


Figura 11: Esfuerzos totales en los apoyos

Estas reacciones se encuentran expresadas en el sistema de referencia móvil $(0, x_1, y_1, z_1)$.

Es posible expresarlas en el sistema de referencia absoluto, para lo cual es necesario realizar una transformación lineal que vincula las componentes de un vector en cada una de las bases de los sistemas de coordenadas de origen común (x, y, z) fijo o absoluto y (x', y', z') móvil o solidaria al cuerpo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (30)$$

También pueden expresarse las componentes de un vector en la base (x, y, z) (fijo) en términos de las componentes en la base (x', y', z') (móvil). Como la matriz A es ortogonal (por ser producto de matrices ortogonales) entonces su inversa es igual a su transpuesta. Por consiguiente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (31)$$

La matriz A es la composición de tres matrices ortogonales, cada una caracterizando una rotación en uno de los ángulos de Euler. Esto es

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}^{(1)} \times \begin{bmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

El caso particular de este problema, el ángulo θ no varía en el tiempo, por lo tanto, la matriz indicada como (1) de la expresión (32) es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz A queda expresada de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi & \cos \psi \operatorname{sen} \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \psi \cos \phi & \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \psi \\ -\operatorname{sen} \psi \cos \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \operatorname{sen} \phi & -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \cos \phi & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \phi & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \phi & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Y su transpuesta:

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi & -\operatorname{sen} \psi \cos \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \operatorname{sen} \phi & \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \phi \\ \cos \psi \operatorname{sen} \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \psi \cos \phi & -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \cos \phi & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \phi \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \psi & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Las reacciones en el apoyo A y B referidas al sistema absoluto se obtienen utilizando la expresión (31):

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_{A_x} \\ \bar{R}_{A_y} \\ \bar{R}_{A_z} \end{bmatrix} = A^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ -5,41 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,41 \times \left(\text{sen} \psi \cos \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \text{sen} \phi \right) \\ -5,41 \left(-\text{sen} \psi \text{sen} \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \cos \phi \right) \\ -5,41 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_{B_x} \\ \bar{R}_{B_y} \\ \bar{R}_{B_z} \end{bmatrix} = A^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 12,35 \\ 6,936 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,35 \times \left(\text{sen} \psi \cos \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \text{sen} \phi \right) + 6,936 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen} \phi \right) \\ 12,35 \times \left(-\text{sen} \psi \text{sen} \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \cos \phi \right) - 6,936 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \phi \right) \\ \left[12,35 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \right) + 6,936 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \end{bmatrix} \quad (36)$$

Verificación de las expresiones para las condiciones iniciales ($\psi = \phi = 0$) comparándolas con las que se obtienen al descomponer las fuerzas de la Figura 11 según un sistema de referencia como el de la Figura 12:

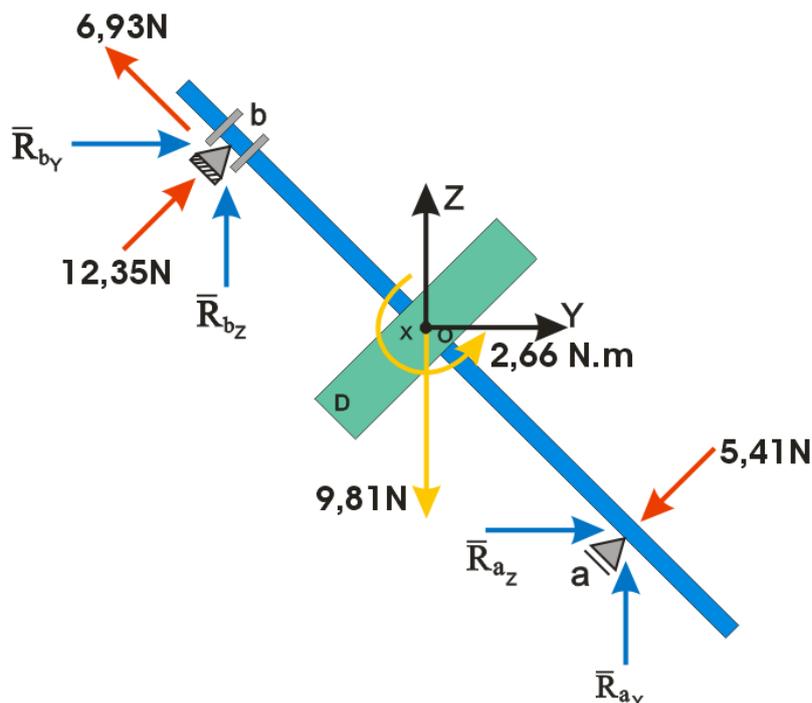
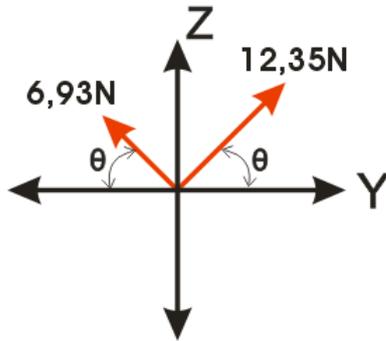


Figura 12: Esfuerzos referidos a la terna (X,Y,Z)

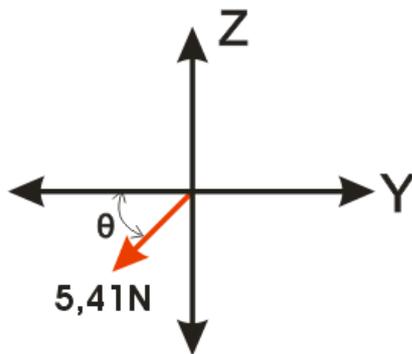


$$RB_y = 12,35 \times \cos\theta - 6,93 \times \cos\theta \quad ; \quad \theta = 45^\circ$$

$$RB_y = 3,83N$$

$$RB_z = 12,35 \times \cos\theta + 6,93 \times \cos\theta$$

$$RB_z = 13,63N$$



$$RA_y = -5,41 \times \cos\theta$$

$$RA_y = -3,825N$$

$$RA_z = -5,41 \times \cos\theta$$

$$RA_z = -3,825N$$

Y utilizando las expresiones (35) y (36) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{R}A_x \\ \bar{R}A_y \\ \bar{R}A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,41 \times \left(\sin\psi \cos\phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\psi \sin\phi \right) \\ -5,41 \left(-\sin\psi \sin\phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\psi \cos\phi \right) \\ -5,41 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3,825 \\ -3,825 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{R}B_x \\ \bar{R}B_y \\ \bar{R}B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,35 \times \left(\text{sen}\psi \cos\phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\psi \text{sen}\phi \right) + 6,936 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen}\phi \right) \\ 12,35 \times \left(-\text{sen}\psi \text{sen}\phi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\psi \cos\phi \right) - 6,936 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\phi \right) \\ \left[12,35 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\psi \right) + 6,936 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,83 \\ 13,63 \end{bmatrix}$$

Como se quería demostrar.

Notar que los valores numéricos obtenidos por ambos métodos -gráfico y analítico- son idénticos para la condición analizada. Las expresiones (35) y (36) permiten convertir los esfuerzos expresados en la terna móvil a la terna fija para cualquier instante.

Bibliografía consultada:

- ✓ Mecánica Racional, edUTecNe, UTN 2014 Liberto Ercoli y Virginia Azurmendi
- ✓ Mecánica, Answer Just in Time, ITBA 2003 Mecánica – Luis R. Argüello

Material de apoyo:

- ✓ Apuntes tomados en clase. Mecánica Racional, Prof. Dr. Ing. Ercoli. UTN – FRBB.
- ✓ Apuntes tomados en clase. Geometría Analítica. Prof. Ing. Muñoz UTN – FRBB.

Softwares utilizados:

- ✓ Mathcad
- ✓ AutoCAD
- ✓ Mechanical Desktop
- ✓ CorelDRAW
- ✓ Microsoft Word