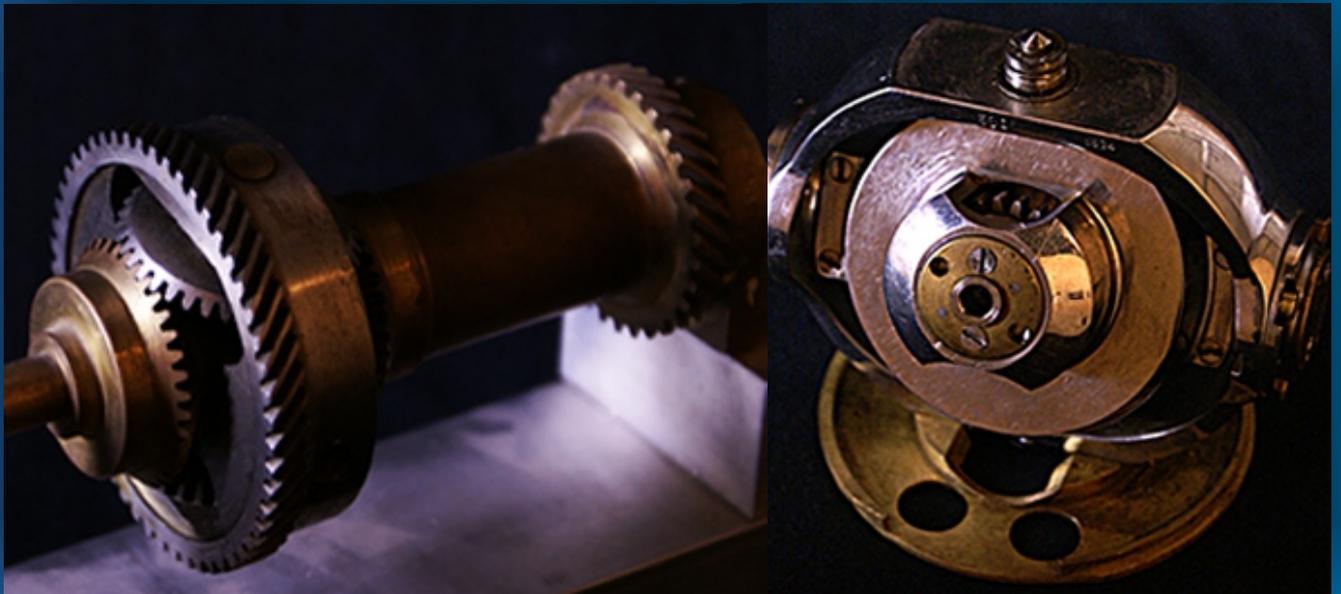
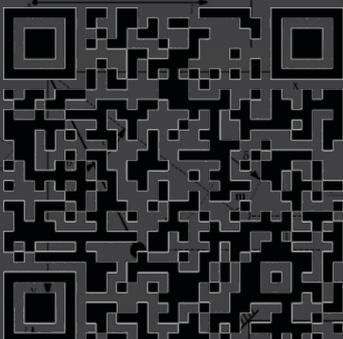


Liberto Ercoli  
Virginia Azurmendi

# MECÁNICA



# RACIONAL



Universidad  
Tecnológica  
Nacional **UTN**



# **MECÁNICA RACIONAL**

**Liberto Ercoli - Virginia Azurmendi**

edUTecNe  
Buenos Aires, 2018

Ercoli, Liberto *Mecánica racional* / Liberto Ercoli y Virginia Azurmendi. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2018. 270 p. ; 30x21 cm.

ISBN 978-987-1896-23-3

1. Ingeniería Mecánica. I. Azurmendi, Virginia II. Título

CDD 621

Diseño de Tapa e Interior: Carlos Busqued, Fernando Cejas

*Ilustraciones: Martín Calvento*

*Fotos de Portada: Macarena Verna*

*Ilustraciones del Apéndice 2: Cristian Vrizz*



**Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina**

**Rector:** Ing. Héctor Eduardo Aiassa

**Vicerrector:** Ing. Haroldo Avetta

**Secretaria Académica:** Ing. Liliانا Raquel Cuenca Pletsch

**Secretaria Ciencia, Tecnología y Posgrado:** Dr. Horacio Leone



**Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Paraná**

**Decano:** Dr. Ing. Liberto ÉRCOLI

**Vicedecano:** Ing. Alejandro STAFFA



**edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional**

**Coordinador General a cargo:** Fernando H. Cejas

**Área de edición y publicación en papel:** Carlos Busqued

**Colección Energías Renovables, Uso Racional de Energía, Ambiente:** Dr. Jaime Moragues.



[www.edutecne.utn.edu.ar](http://www.edutecne.utn.edu.ar)

**CiN REUN**

Red de Editoriales  
de Universidades Nacionales  
de la Argentina

ISBN 978-987-1869-23-3



Queda hecho el depósito que marca la Ley Nº 11.723

© edUTecNe, 2020

Sarmiento 440, Piso 6 (C1041AAJ) Buenos Aires, República Argentina

Publicado Argentina – Published in Argentina



Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

*El Agradecimiento  
a nuestras familias, por su generosa cesión de  
tiempo que pudo haber sido compartido.*

# **Contenido**

Capítulo 1: **Cinemática del Punto**

Capítulo 2: **Cinemática de los Sistemas de Puntos**

Capítulo 3: **Cinética del Punto Material**

Capítulo 4: **Cinética de los Sistemas Materiales**

Capítulo 5: **Dinámica Analítica**

Apéndice 1: **Tensores Cartesianos**

Apéndice 2: **Problema Integrador**

## **AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS**

El presente libro ha sido previsto para actualizar y expandir su contenido por medio de videos y otros recursos didácticos. Se accede a los mismos vía internet con dispositivos móviles o PCs

### **Video Introductorio**

Presentación del libro por los autores, Dr. Ing. Liberto Ercoli e Ing. Virginia Azurmendi



<http://www.youtube.com/embed/CzXyQSxWWOc>

### **Videos y Complementos didácticos (en actualización permanente)**



[http://www.edutecne.utn.edu.ar/mec\\_racional/mec\\_racion-anexos.html](http://www.edutecne.utn.edu.ar/mec_racional/mec_racion-anexos.html)

### **Información sobre los autores**



[http://www.edutecne.utn.edu.ar/mec\\_racional/mec\\_racion-cv.html](http://www.edutecne.utn.edu.ar/mec_racional/mec_racion-cv.html)

## PRÓLOGO

El presente trabajo sobre *Mecánica Racional* constituye un aporte que es fruto de muchos años de experiencia en la materia y que ha sido concebido como una solución para el alumno en lo que respecta al seguimiento de las clases con un único texto. Busca evitar la necesidad de tomar apuntes que distraen la atención y a dejar abierta la opción de anotar en los márgenes conceptos o detalles sustanciales surgidos durante las clases teóricas y prácticas.

Siendo el objeto de la Mecánica la comprensión del movimiento de los cuerpos, la obra está organizada en cinco unidades: Cinemática del Punto Material, Cinemática de los Sistemas de Puntos Materiales y del Cuerpo Rígido, Cinética del Punto Material, Cinética de los Sistemas y del Cuerpo Rígido y Dinámica Analítica.

La asignatura pertenece al tercer nivel del diseño curricular de Ingeniería Mecánica y se halla inserta en el área de materias Tecnológicas Básicas, enlazando las materias del área de Ciencias Básicas como Física, Geometría Analítica, Álgebra y Cálculo y las del área de asignaturas Tecnológicas Generales, en las cuales se estudian las maquinarias e instalaciones que el ingeniero encontrará a lo largo de su vida profesional. Se trata de una materia integradora, en la cual confluyen no sólo los conocimientos previos analítico – teóricos adquiridos, sino también la capacidad técnica del alumno para tener en cuenta la realidad física

El carácter formativo de la Mecánica está vinculado con su capacidad para proveer bases conceptuales adecuadas para la incorporación de otros conocimientos de disciplinas como las que se desarrollan en las asignaturas de niveles superiores.

Así, la asignatura constituye un nexo entre el complejo físico – matemático creado por el Hombre en su búsqueda permanente de explicación racional para los fenómenos naturales y la realidad concreta de los mecanismos y sus movimientos, los que luego se reflejarán en cada parte de maquinaria.

Debido al constante avance en la tecnología de los materiales y a los modernos métodos de fabricación, se ha hecho posible fabricar máquinas cada vez más veloces con componentes livianos que soportan esfuerzos dinámicos significativos.

Tratándose en Mecánica Racional contenidos de naturaleza puramente dinámica –se excluye la Estática en su programa sintético- resulta obvio que el Ingeniero Mecánico debe acreditar los conocimientos enunciados en los objetivos de la asignatura para lograr la resolución de problemas tecnológicos en su área de conocimiento específica.

La presente versión constituye una actualización de la monografía original “Teoría de Mecánica” editada por el Laboratorio de Técnicas Educativas de la Facultad en 1998 y que merced al Programa Bibliotecas del Fondo para el Mejoramiento de la Educación –FOMEC 333- se halla disponible en internet desde entonces. En ésta se han incluido contenidos inherentes al cambio de nombre de la asignatura -de Mecánica del Sólido a Mecánica Racional- luego del primer proceso de acreditación ante la CONEAU de la carrera Ingeniería Mecánica que concluyera en 2004.

Así, se ha agregado un nuevo Capítulo –el quinto- sobre Dinámica Analítica, brindando otro punto de vista –el escalar- al del tratamiento eminentemente vectorial que predominaba hasta aquí; se han completado temas y corregido errores tipográficos presentes en la obra original.

Se ha reordenado y ampliado el Apéndice 1 sobre Tensores Cartesianos, con la intención de promover el aprendizaje significativo al relacionar las propiedades de las magnitudes tensoriales con los conocimientos previos de transformaciones lineales adquiridos en Álgebra Lineal.

Con el doble objeto de coadyuvar a la mejor comprensión de conceptos teóricos y de hacer hincapié en que los alumnos experimenten con total intensidad la excluyente relación teoría-práctica, valorando la consecuente necesidad de abordar las prácticas munidos de las herramientas brindadas por la teoría, se han agregado problemas ejemplos resueltos al final de cada apartado teórico sustantivo.

Con los mismos objetivos, también se ha sumado en un nuevo Anexo –el 2- un problema integrador ejemplo resuelto, el cual requiere para su análisis la aplicación progresiva de los conceptos principales de cinemática y cinética del cuerpo rígido con la intención de relacionar los temas estudiados en los distintos capítulos. Para cada expresión utilizada, se hace referencia a su localización en la teoría.

Se advierte a los alumnos la conveniencia de recurrir a la profusa bibliografía de la asignatura cuantas veces les sea necesario para una necesaria complementación y cabal comprensión de los temas.

La obra está dirigida a los cursantes de la asignatura Mecánica Racional del tercer nivel de la carrera de grado Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica Nacional, aunque podría ser usada como base por alumnos de otras ingenierías, quienes deberían adaptarla a los contenidos de sus programas.

**Liberto Ercoli**  
**Virginia Azurmendi**

Departamento Ingeniería Mecánica  
Facultad Regional Bahía Blanca  
Universidad Tecnológica Nacional

## INTRODUCCIÓN

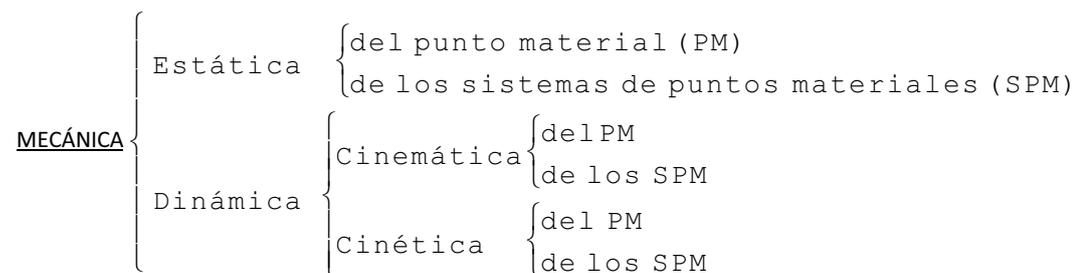
La Mecánica tiene por objeto el estudio del movimiento de los cuerpos, busca sus causas y las leyes que lo rigen, atendiendo las fuerzas que lo provocan.

El concepto de movimiento es relativo; para hablar de él debe tenerse en cuenta que un cuerpo se mueve cuando su posición cambia con respecto a otro cuerpo tomado como referencia.

Para la Mecánica, cuerpo es un conjunto continuo o discreto de puntos materiales o de partículas, que son entes desprovistos de dimensiones (punto geométrico en el sentido del tamaño), aunque se admite la abstracción de que pueden poseer masa.

En cuanto a las fuerzas que intervienen y que provocan el movimiento, son las de origen gravitatorio (acción de un cuerpo sobre otro), elástico, de rozamiento, de resistencia fluidodinámica; pero no entran bajo la consideración de la Mecánica las de origen electromagnético o térmico.

Es costumbre dividir a la Mecánica según el siguiente cuadro:



Con respecto al cuadro precedente, el presente curso de Mecánica Racional no contempla en su programa el estudio de la Estática (la cual, por otra parte, resulta un caso particular de la Dinámica).

De acuerdo a la definición de Mecánica dada más arriba, resulta que la misma es esencialmente Dinámica (movimiento).

La Cinemática consiste en estudiar el movimiento sin hacer referencia a las fuerzas que lo originan, mientras que la Cinética relaciona la acción de las fuerzas que se ejercen sobre los cuerpos con los movimientos resultantes.

Los avances en el conocimiento del movimiento de los cuerpos reconocen una concatenación de aportes por parte de diversos científicos con el correr del tiempo. Sólo por mencionar algunos hitos de la rica historia de la Mecánica, se presenta a continuación un breve resumen.

**Leonardo da Vinci** (1542-1519) relacionó los momentos estáticos con el equilibrio de los cuerpos. Prefiguró el trabajo de Galileo sobre el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Se admite que la iniciación del conocimiento racional de la dinámica se debe a **Galileo** (1564-1642) para quien la falta de precisión en la medición del tiempo constituyó una seria dificultad. Enunció y verificó experimentalmente las leyes cinemáticas de la caída de los cuerpos, y otros movimientos

uniformemente acelerados. Descubrió la ley de inercia que más tarde fue formalizada por Newton. Observó que las fuerzas producen aceleraciones. Descubrió la composición vectorial del paralelogramo y obtuvo la trayectoria de un proyectil. Construyó el primer telescopio y con él efectuó profundos descubrimientos astronómicos.

Un contemporáneo de Galileo, **Kepler** (1571-1642), descubrió tres leyes empíricas fundamentales del movimiento planetario a partir de las observaciones del danés Tycho Brahe. Concibió la gravedad como la análoga de la atracción magnética.

La invención del reloj a péndulo por **Huygens** (1629-1695) en 1657 permitió posteriores avances de gran importancia en dinámica. Creó además la teoría del centro de oscilación, determinó el valor de  $g$  mediante mediciones pendulares, dedujo las ideas de fuerza centrífuga y aceleración centrípeta, estableció la conexión entre el trabajo y la energía cinética.

Es **Newton** (1642-1726) quien formula con precisión las leyes del movimiento y fundamenta sólidamente la dinámica. Descubrió la ley de gravitación universal. En 1686 enunció formalmente como axiomas las “leyes del movimiento”, que forman la base para describir matemáticamente la dinámica de un sistema. Generalizó la idea de fuerza; introdujo el concepto de masa; formuló claramente el principio del paralelogramo de fuerzas; estableció la ley de acción y reacción.

Después de Newton, aportaron grandes contribuciones a la Mecánica, Bernoulli (Jacob, John y Daniel), Euler, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Poisson, Coriolis, Hamilton y otros.

**Einstein** (1878-1955), en sus teorías de la relatividad especial (1905) y general (1916), introdujo los nuevos conceptos de espacio-tiempo necesarios en el estudio de las partículas atómicas que se mueven en espacios muy pequeños a altas velocidades. La masa variable (dependiente de la velocidad) y el tiempo variable son conceptos originales.

La importancia de la Dinámica en la ingeniería se ha tornado superlativa con el desarrollo de las tecnologías en las últimas décadas; las máquinas y estructuras de soporte funcionan a grandes velocidades y con aceleraciones apreciables, mientras que los materiales que las constituyen se tornan más y más livianos y resistentes. Este hecho induce a pensar que excepcionalmente un ingeniero, cualquiera sea su campo de especialización, podrá prescindir de conocimientos básicos sobre Dinámica.

# Capítulo 1

# CINEMÁTICA DEL PUNTO

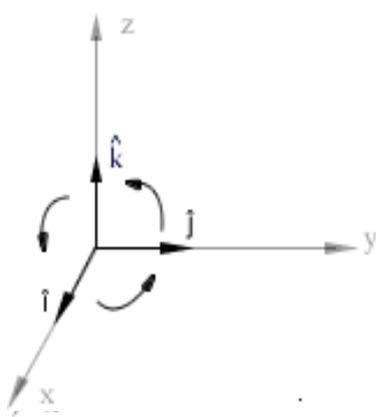
## 1. CINEMÁTICA DEL PUNTO

La Cinemática consiste en estudiar el movimiento sin hacer referencia a las fuerzas que lo originan analizando las sucesivas posiciones del punto en el espacio en función del tiempo.

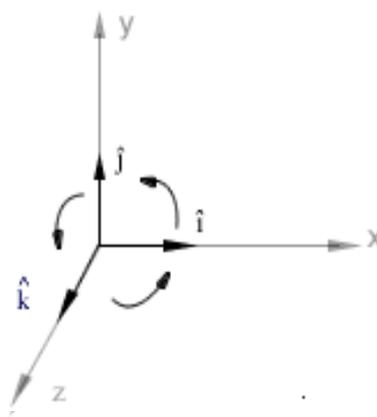
El movimiento de los puntos puede describirse especificando las coordenadas lineales y angulares y sus derivadas respecto a marcos de referencia que pueden ser *considerados* “fijos” (análisis del movimiento absoluto), o “móviles” (análisis del movimiento relativo).

Los sistemas de coordenadas se eligen arbitrariamente en el marco de referencia adoptado en función de la geometría del problema en cuestión. Las coordenadas más corrientes son: cartesianas, polares, cilíndricas, esféricas, intrínsecas y generalizadas.

Coordenadas cartesianas: (x, y, z)



a) Terna derecha o dextrógira



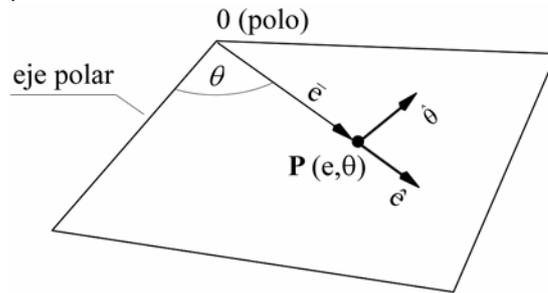
b) Terna izquierda o levógira

Mirando desde el afijo (flecha) de uno de los versores, el sentido de giro en el plano de enfrente debe ser antihorario.

Mirando desde el afijo (flecha) de uno de los versores, el sentido de giro en el plano de enfrente debe ser horario.

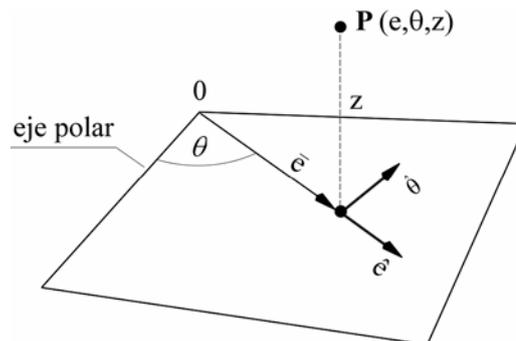
Como convención, se acuerda que en el caso de dibujar solamente dos ejes, el tercero sale de la hoja hacia el lector.

Coordenadas polares: Se define un polo, un eje polar y a partir de ellos, la posición lineal y angular de un punto.



La base está constituida por el versor radial  $\hat{e}_r$  que tiene sentido positivo alejándose del polo en la dirección del vector posición  $\vec{e}$  (con origen en el polo y extremo en el punto), y por el versor transversal  $\hat{e}_\theta$  que es perpendicular al  $\hat{e}_r$  con sentido positivo en la dirección creciente del ángulo  $\theta$ .

Coordenadas cilíndricas: Son las coordenadas polares  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$  más la posición de la partícula en la dirección perpendicular ( $\hat{k}$ ) al plano polar (cota  $z$ ).

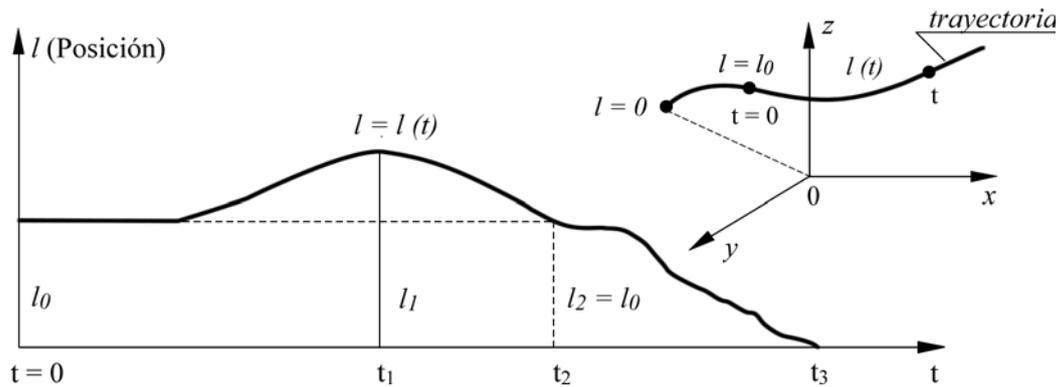


Como se verá más adelante, todos los sistemas coordenados son relacionables entre sí.

Trayectoria: es el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por un punto móvil con el transcurso del tiempo.

Ecuación del movimiento sobre la trayectoria:

Una forma de dar la posición de un móvil es suministrar el valor del camino recorrido sobre la trayectoria (o posición de la partícula respecto de un punto tomado como referencia). Es una forma escalar y gráficamente se tiene:



$l = l(t)$  es la ecuación del movimiento en forma escalar. Para el instante inicial ( $t = 0$ ), el móvil ocupará en general una posición dada por el arco  $l_0$  (espacio inicial) respecto al origen de la posición.  $l_1$  es una posición de alejamiento máximo desde el punto tomado como referencia.

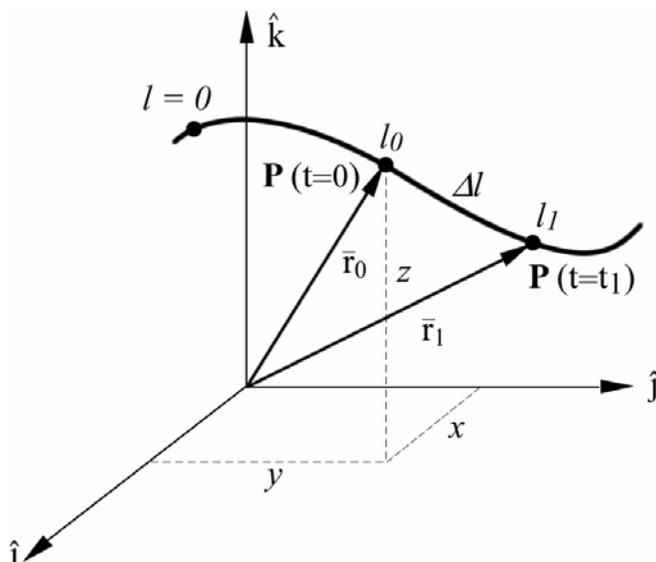
En  $t_2$  el móvil está en la posición donde se comenzaron a medir los tiempos ( $l_2 = l_0$ ). En  $t_3$  el móvil pasa por el punto tomado como referencia para medir las posiciones.

La función  $l = l(t)$  es continua por cuanto un punto no puede ocupar más de una posición para un instante dado. Esta forma de dar la posición se usa cuando se conoce la trayectoria.

Ley del movimiento:

Otra forma de dar la posición de un móvil es a través del vector posición  $(P - 0) = \vec{r}$

En un sistema de coordenadas cartesianas se tiene:



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Esta es la ecuación del movimiento en forma vectorial.

Cada una de las coordenadas será una función continua del tiempo, siendo las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

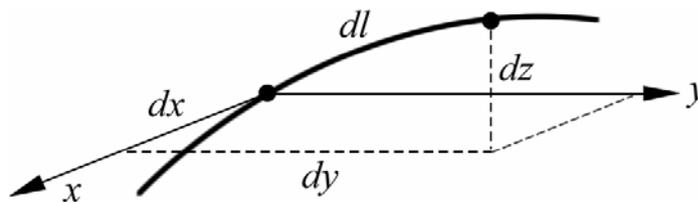
Las proyecciones del móvil sobre cada eje coordenado constituyen los movimientos proyectados:

$$\vec{r}_x = x(t) \cdot \hat{i} \quad ; \quad \vec{r}_y = y(t) \cdot \hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_z = z(t) \cdot \hat{k}$$

Al moverse el punto en su trayectoria, sus proyecciones sobre los ejes serán movimientos rectilíneos. El movimiento real puede así ser pensado como la composición de los 3 rectilíneos simultáneos.

La relación entre  $l(t)$  y  $\vec{r}$  viene dada por:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \equiv |d\vec{r}| \quad ; \quad l - l_0 = \int_{t=0}^{t=t} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$



### 1.1 Concepto de velocidad:

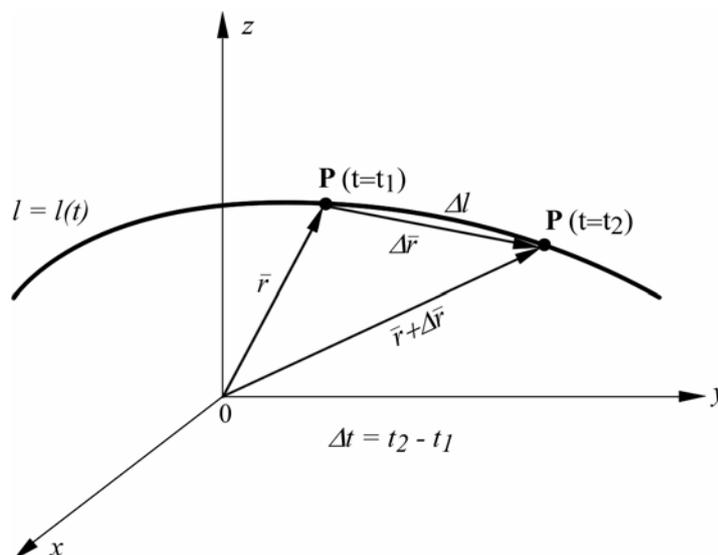
Sea el punto P que se mueve describiendo la trayectoria indicada en la figura según la ley  $l = l(t)$

$$\text{en: } t = t_1 \rightarrow l_1 = l(t_1)$$

$$\text{en: } t = t_2 \rightarrow l_2 = l(t_1 + \Delta t)$$

En el intervalo de tiempo el móvil habrá recorrido un camino:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l(t_1 + \Delta t) - l(t_1)$$



A la relación  $\frac{\Delta l}{\Delta t}$  se la denomina expresión escalar de la velocidad media

$$Vm = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Luego, esta velocidad es una magnitud escalar y es la rapidez con que se recorren los espacios en el tiempo. Cuando esta expresión se mantiene constante cualquiera sea  $t$  y  $\Delta t$ , el movimiento es uniforme. De igual forma:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}m = \text{expresión vectorial de la velocidad media}$$

Para intervalos de tiempo muy pequeños ( $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt} = V \text{ expresión escalar de la velocidad instantánea.}$$

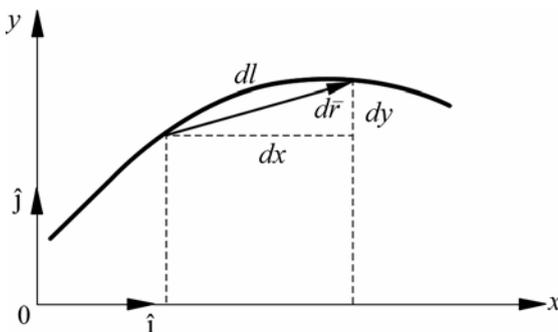
$$\text{y } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \text{ expresión vectorial de la velocidad instantánea. Veamos}$$

si ambas expresiones se relacionan entre sí. Siendo  $r$  una función del tiempo a través de  $l$ , se tiene:

$$\vec{r} = \vec{r} [l(t)]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dl} \frac{dl}{dt} = V \frac{d\vec{r}}{dl}$$

pero en el límite  $d\vec{r}$  es tangente a la curva y  $dl$  es el módulo de  $d\vec{r}$  (y un vector sobre su módulo es un versor):

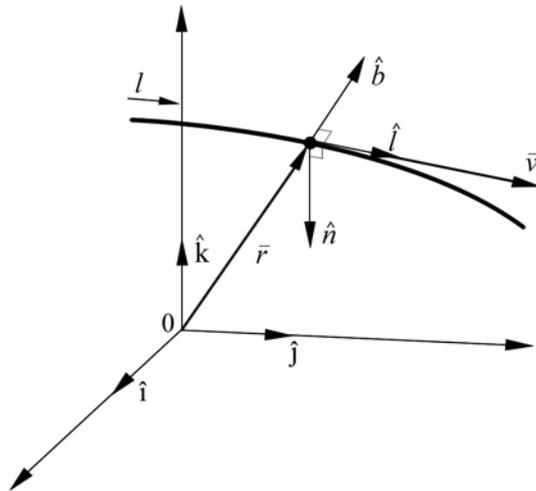


En el límite, es  $|d\vec{r}| \equiv dl$

Luego,  $\frac{d\vec{r}}{dl} = \hat{l}$  versor tangente a la trayectoria

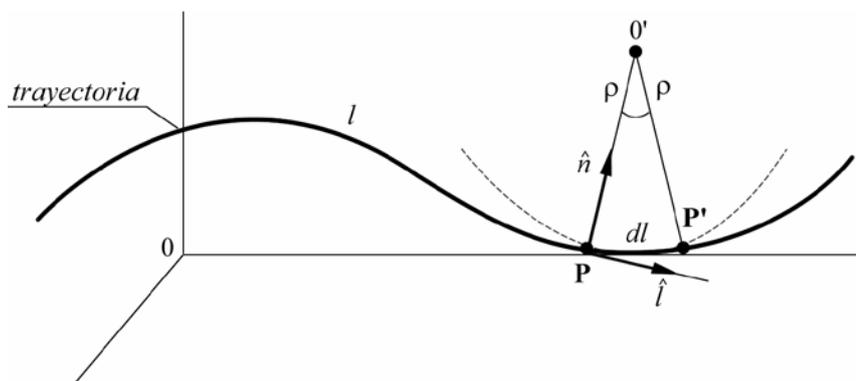
$$\text{y } \vec{V} = V \cdot \hat{l} \quad (1.1)$$

Es decir, el vector velocidad tiene siempre la dirección tangente a la trayectoria en el punto considerado, un sentido concordante con el del movimiento y un módulo dado por la expresión escalar de la velocidad. La ecuación (1.1) es la **expresión vectorial de la velocidad referida a una terna intrínseca**. Gráficamente:



Esta terna acompaña al punto en su movimiento. El versor tangente  $\hat{i}$  positivo está dirigido a lo largo de la curva espacial (trayectoria) en el sentido en que se incrementa  $l$  ( $t$ ). Esta dirección está siempre unívocamente especificada.

En cuanto a la dirección normal, sin embargo, hay un número infinito de rectas perpendiculares a  $\hat{i}$  por  $P$ . Para hacer una elección única del versor  $\hat{n}$  es necesario considerar el hecho de que geoméricamente la curva consiste de una serie de "segmentos de arco diferencial"  $dl$ , cada uno de los cuales se construye según el arco de un "circulo único" que tiene un radio de curvatura  $\rho$  y un centro de curvatura  $O'$ .



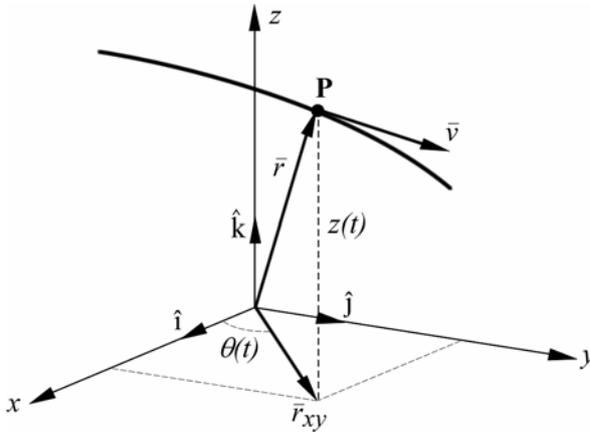
El versor normal  $\hat{n}$  que se elegirá está dirigido de  $P$  a  $O'$  y su recta de acción coincide con la normal principal a la curva en  $P$ .

El plano que contiene a  $\hat{i}$  y  $\hat{n}$  se llama "plano osculador", el cual se mantiene fijo si el movimiento es plano, por lo que es en este tipo de movimiento donde estas coordenadas tienen su mayor aplicación.

El tercer versor de la terna, denominado binormal, queda definido por:

$$\hat{b} = \hat{l} \wedge \hat{n}$$

**Expresión vectorial de la velocidad referida a una terna cartesiana:**



Sea  $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$

Luego

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = V_x \cdot \hat{i} + V_y \cdot \hat{j} + V_z \cdot \hat{k}$$

ó

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$

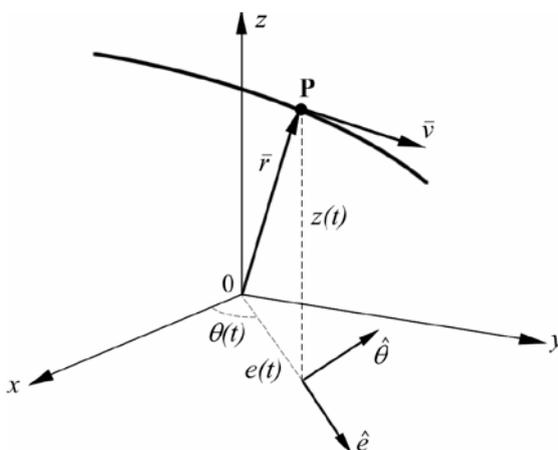
$V_x, V_y, V_z$ , representan las proyecciones de la velocidad del punto sobre los ejes coordenados, siendo a su vez las

velocidades en los movimientos proyectados.

El módulo de  $\vec{V}$  es el valor encontrado para la velocidad escalar, ya que:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \text{y} \quad \frac{dl}{dt} = V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.1')$$

**Expresión vectorial de la velocidad en coordenadas cilíndricas:**



Sea  $\hat{e}$  = versor radial

$$\hat{e} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} = \hat{e}(t)$$

y  $\vec{r}(t) = e \cdot \hat{e} + z \cdot \hat{k}$

luego:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{de}{dt} \hat{e} + \frac{d\hat{e}}{dt} e + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

pero:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} \\ &= \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \end{aligned}$$

donde  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  y  $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$

Como se observa,  $\hat{\theta}$  es un versor girado  $\pi/2$  con respecto al versor  $\hat{e}$  en su plano y recibe el nombre de versor transversal. Así  $\frac{d\hat{e}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$  y por lo tanto:

$$\vec{V} = \frac{de}{dt} \hat{e} + e \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad (1.2)$$

ó

$$\vec{V} = V_e \cdot \hat{e} + V_\theta \cdot \hat{\theta} + V_z \cdot \hat{k}$$

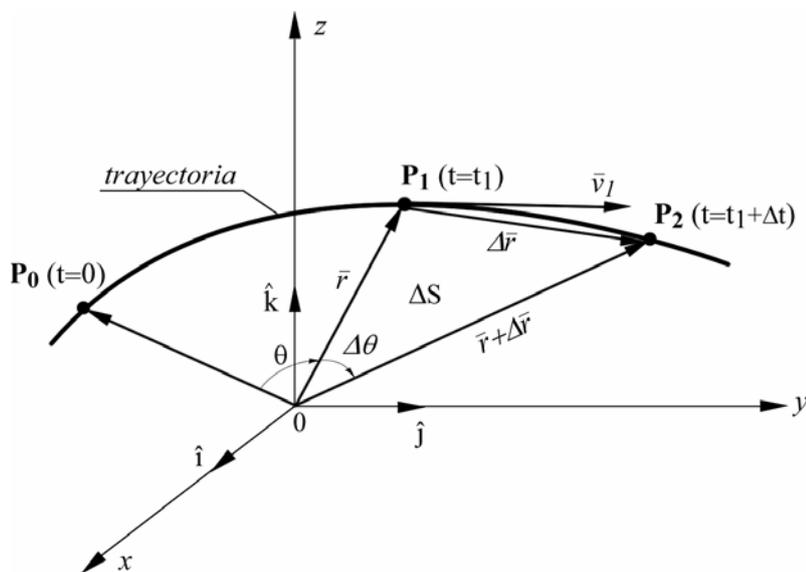
$V_e$  se denomina velocidad radial o de desplazamiento y  $V_\theta$  transversal o de circulación

El valor del módulo será: 
$$\sqrt{\left(\frac{de}{dt}\right)^2 + (e \cdot \dot{\theta})^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.2')$$

### 1.2. Concepto de velocidades angular y areolar:

Al pasar el punto  $P_1(t=t_1)$  a la posición  $P_2(t=t_1+\Delta t)$  el vector  $\vec{r}$  experimenta una variación de dirección medida por el ángulo  $\Delta\theta$  en el lapso  $\Delta t$ .

A la relación  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_m$  se la denomina velocidad angular media en el lapso  $t_1$  a  $t_1 + \Delta t$



Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (1.3)$$

que se denomina velocidad angular instantánea

Estas expresiones valen para trayectorias planas (solo se necesita intensidad y sentido). Si la trayectoria es alabeada es necesario representar a  $\omega$  por un vector normal al plano determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{r} + \Delta \vec{r}$  y cuyo módulo es la velocidad angular escalar.

El área  $\Delta s$  que describe  $r$  en  $\Delta t$  puede representarse por el semi producto vectorial entre  $\vec{r}$  y  $\Delta \vec{r}$  (área de un triángulo).

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \Delta \vec{r}$$

obteniéndose un vector representativo del área. Armando el cociente incremental, se tiene:

$$\frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

que es el vector velocidad areolar media y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{V} = \dot{\vec{S}}; \quad \dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.4}$$

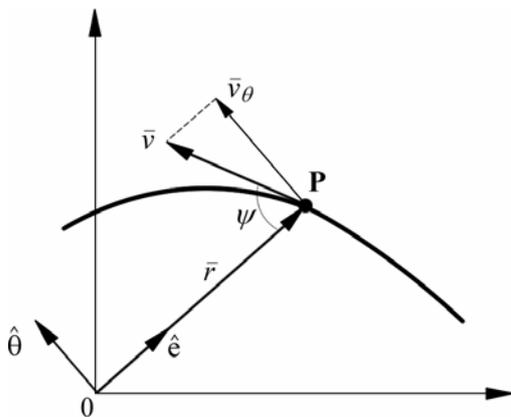
vector velocidad areolar instantánea (perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{V}$ , aplicado al punto 0, puesto que  $\vec{r}$  es aplicado).

El módulo será:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r V \text{sen} \psi = \frac{1}{2} r V_{\theta}$$

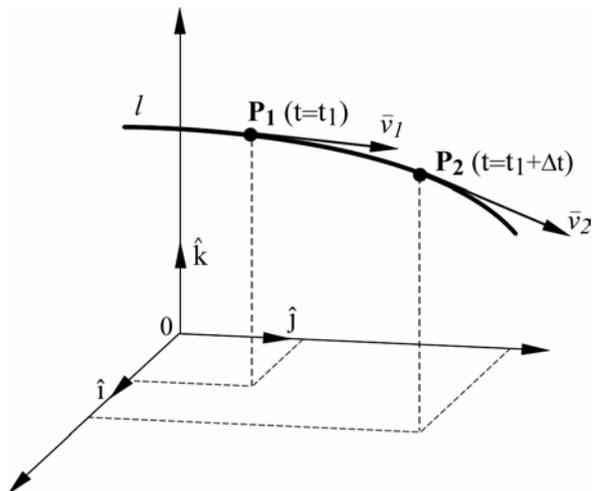
Por lo tanto:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \dot{\theta} \tag{1.4'}$$



### 1.3. Concepto de aceleración:

Se analizará ahora la rapidez con que varía la velocidad en el tiempo.



Para pasar de  $P_1$  a  $P_2$  la velocidad varió de  $\vec{V}_1$  a  $\vec{V}_2$  en:

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

A la relación  $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{a}_m$

se la denomina expresión vectorial de la aceleración media.

Tomando límite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.5)$$

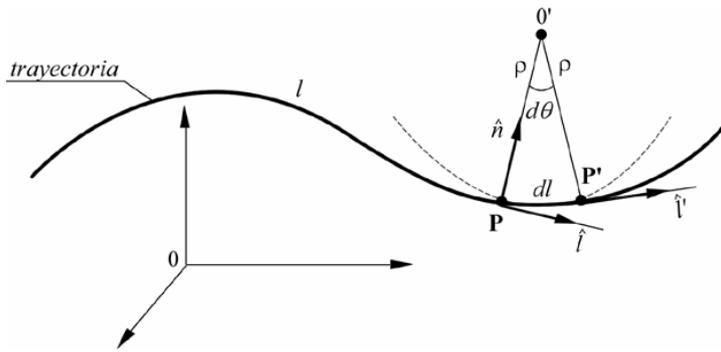
Pero, ¿qué dirección tendrá este vector? En la terna intrínseca, se sabe,

$$\vec{v} = V \cdot \hat{l} = \frac{dl}{dt} \hat{l}$$

luego: 
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \frac{dV}{dt} \hat{l} + V \cdot \frac{d\hat{l}}{dt}$$

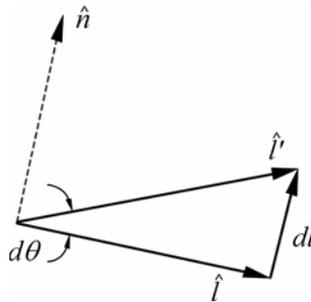
El primer sumando recibe el nombre de aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2}; \quad \vec{a}_t = \frac{dV}{dt} \hat{l}$$



Para calcular  $\dot{\hat{l}} = \frac{d\hat{l}}{dt}$  nótese que cuando la partícula se mueve a lo largo del arco  $dl$  en el tiempo  $dt$ ,  $\hat{l}$  conserva su magnitud unitaria cambiando sin embargo su dirección, de modo que se vuelva  $\hat{l}'$ .

Si se grafica a continuación el cambio (variación)  $d\hat{l}$  de  $\hat{l}$  :



Aquí  $d\hat{l}$  se extiende entre dos puntos que están sobre un arco infinitesimal  $d\theta$  de radio  $|\hat{l}|=1$

Por lo tanto,  $d\hat{l}$  tiene un módulo  $dl = l d\theta$  y su dirección se define por  $\hat{n}$ . Consecuentemente:

$$d\hat{l} = d\theta \hat{n} \quad \text{ó} \quad \frac{d\hat{l}}{dt} = \dot{\hat{l}} = \dot{\theta} \hat{n}$$

y como:  $dl = \rho d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{\dot{l}}{\rho} = \frac{V}{\rho}$

por lo tanto  $\dot{\hat{l}} = \frac{\dot{V}}{\rho} \hat{n}$

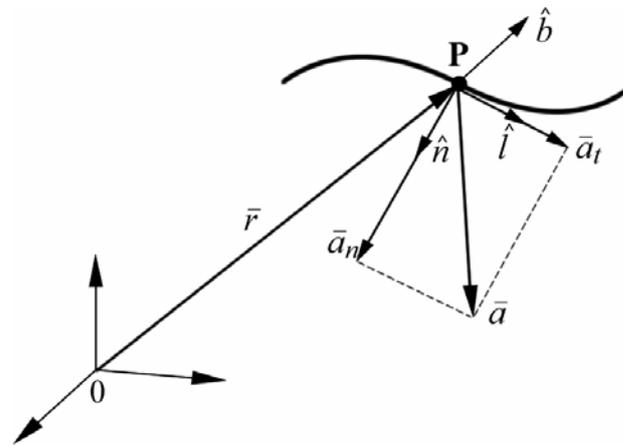
Por lo tanto, la expresión final del vector  $\vec{a}$  cuando se lo refiere a la terna intrínseca es

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \cdot \hat{l} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \hat{n} \tag{1.6}$$

Con  $\vec{a}_t = \frac{dV}{dt} \hat{l}$  y  $\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \hat{n}$

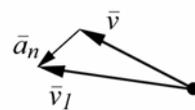
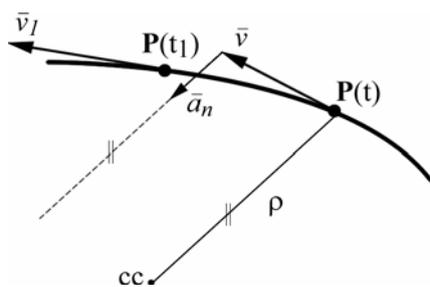
donde  $\vec{a}_n$  es la aceleración normal o centrípeta.

Gráficamente:



Conclusiones:

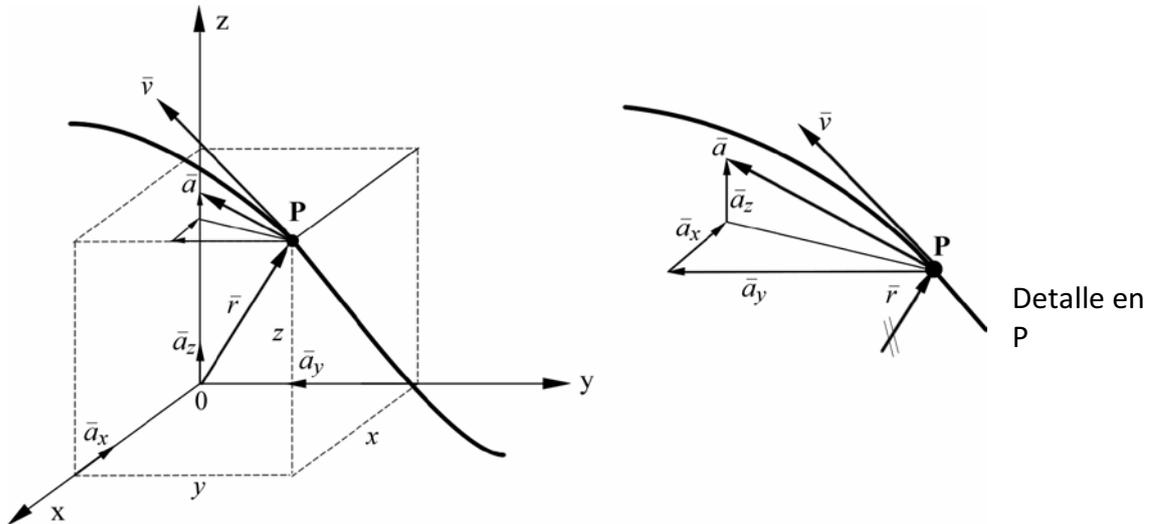
- El vector  $\vec{a}$  no tiene componente según la binormal y por lo tanto está contenido en el plano osculador en el punto considerado.
- La  $\vec{a}_t$  tendrá siempre la dirección de la velocidad y define la variación del módulo de la misma.
- La  $\vec{a}_t$  puede tener el mismo sentido o contrario que la  $\vec{V}$  de donde resultan los movimientos acelerados y desacelerados respectivamente.
- La  $\vec{a}_n$  está siempre orientada hacia el centro de curvatura y define el cambio de dirección del vector velocidad a lo largo de la trayectoria.



Análisis del cambio de dirección del vector velocidad en dos puntos próximos de la trayectoria

**Componentes del vector aceleración cuando se lo refiere a un sistema de coordenadas cartesianas.**

Si la ecuación del movimiento se refiere a una terna  $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , es decir:



$$\vec{r} = P - O = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = V_x \cdot \hat{i} + V_y \cdot \hat{j} + V_z \cdot \hat{k} \quad y \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{r}^2}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} = \\ &= \frac{dV_x}{dt} \hat{i} + \frac{dV_y}{dt} \hat{j} + \frac{dV_z}{dt} \hat{k} \end{aligned}$$

luego:  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  (1.7)

y su módulo  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

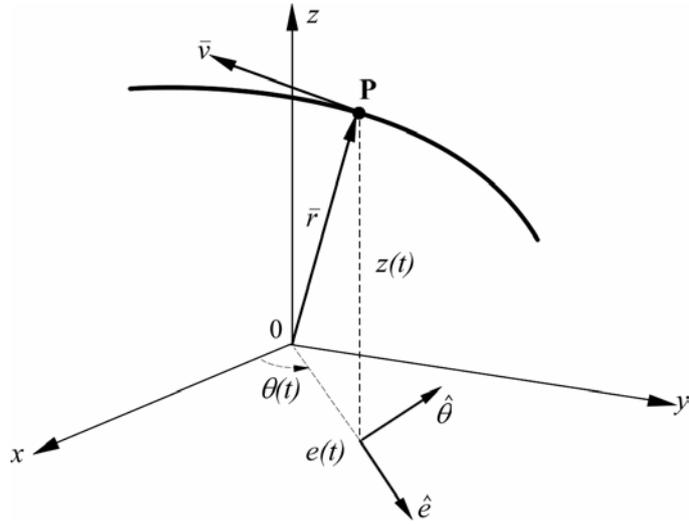
$a_x, a_y, a_z$  son las aceleraciones de los movimientos proyectados.

**Componentes del vector aceleración referido a un sistema de coordenadas cilíndricas:**

Sea  $\vec{r}(t) = e \cdot \hat{e} + z \cdot \hat{k}$

donde:  $\hat{e} = \cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{de}{dt} \cdot \hat{e} + e \cdot \frac{d\hat{e}}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

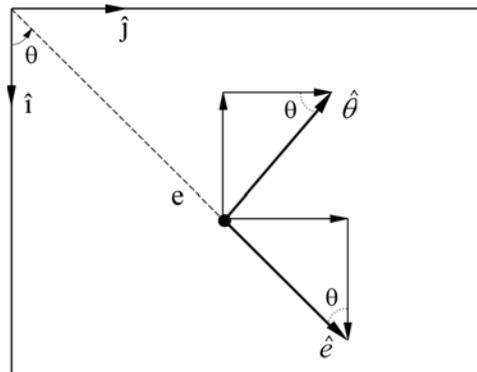


Analizando el plano polar:

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \cdot \hat{i} + \cos \theta \cdot \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

con  $\hat{\theta} \perp \hat{e}$

Luego:  $\vec{V} = \frac{de}{dt} \hat{e} + e \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$



Y derivando:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2} \hat{e} + \frac{de}{dt} \frac{d\hat{e}}{dt} + \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + e \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + e \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

Pero:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) = -\frac{d\theta}{dt} \hat{e}$$

Luego:

$$\vec{a} = \frac{d^2e}{dt^2} \hat{e} + \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + e \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - e \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{e} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

Y agrupando:

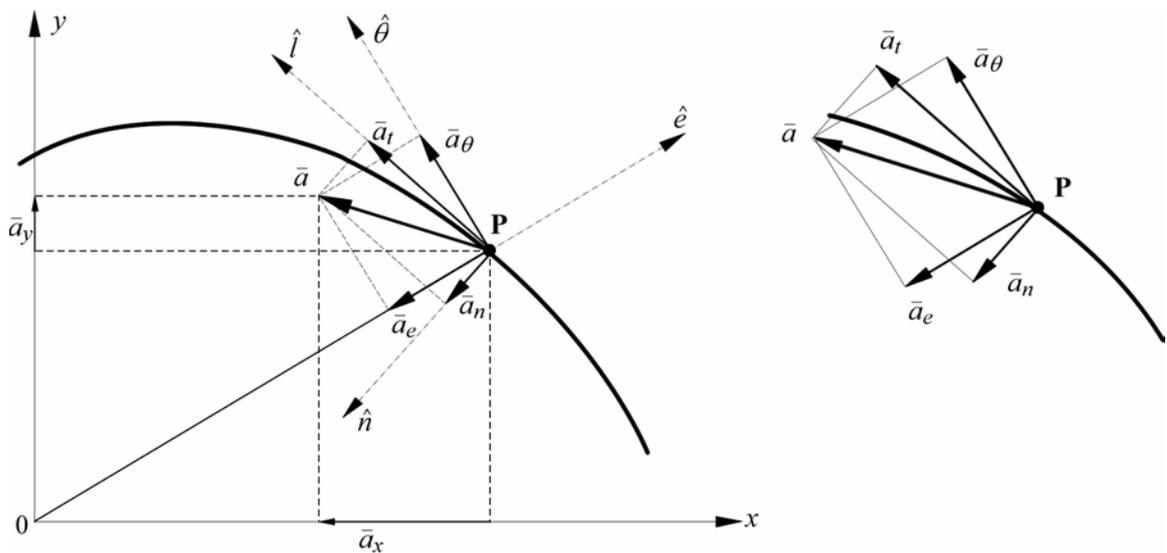
$$\vec{a} = \left[ \frac{d^2 e}{dt^2} - e \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{e} + \left[ 2 \frac{de}{dt} \frac{d\theta}{dt} + e \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \hat{\theta} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k} \quad (1.8)$$

ó  $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z$

donde:  $\vec{a}_e$  es la aceleración radial y  $\vec{a}_\theta$  la transversal

$\vec{a}_z$  es la aceleración en el sentido de la cota y coincide en coordenadas cartesianas o cilíndricas.

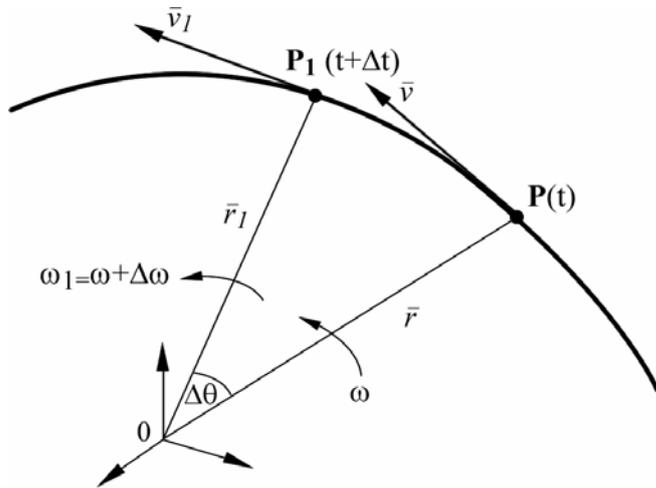
En resumen, para una trayectoria plana:



Este gráfico muestra las componentes de un mismo vector aceleración en los distintos sistemas de coordenadas. Obsérvese que las componentes varían de un sistema a otro, pero el vector  $\vec{a}$  es único.

**1.4. Conceptos de aceleraciones angular y areolar**

Repitiendo conceptos anteriores y teniendo en cuenta el apartado 1.2:



Al pasar de P(t) a P<sub>1</sub>(t + Δt) la velocidad angular se incrementa de  
 $\omega$  a  $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$

A la relación:  $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \gamma_m$  se la denomina aceleración angular media en el lapso Δt.

Si  $\gamma_m$  es **constante** cualquiera sea Δt el **movimiento angular es uniformemente variado**. En el límite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.9}$$

Que se denomina aceleración angular instantánea y refleja la rapidez de variación de la velocidad angular en el tiempo.

Sean  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}$  las velocidades areolares en los instantes (t + Δt) y t respectivamente. El vector:

$$\frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{\vec{S}_1 - \vec{S}}{\Delta t} \text{ define la } \underline{\text{aceleración areolar media.}}$$

y:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} = \ddot{\vec{S}} \tag{1.10}$$

es la aceleración areolar instantánea

Conociendo que  $\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{V}$  y derivando:

$$\ddot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{a} \rightarrow \ddot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{a} \tag{1.10'}$$

### 1.5. Expresiones de Gaston Darboux

Estas expresiones son sumamente importantes, puesto que permiten calcular en forma rápida las componentes de los vectores velocidad y aceleración según un sistema coordenado dado, cuando se tienen las ecuaciones horarias del movimiento en otro sistema, constituyendo una herramienta de transformación.

Sean dadas por ejemplo:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \\ \vec{V}(t) &= V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \\ \vec{a}(t) &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}\end{aligned}$$

Considerando las expresiones de  $\vec{V}$  y  $\vec{a}$  referidas a la terna intrínseca:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V \cdot \hat{t} \\ \vec{a} &= a_t \hat{t} + a_n \hat{n}\end{aligned}$$

Y efectuando el siguiente producto escalar:

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = V a_t$$

$$\text{luego: } a_t = \frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{V} \quad (1.11)$$

Utilizando ahora el producto vectorial:

$$\vec{V} \wedge \vec{a} = V a_n \cdot \hat{b} = \frac{V^3}{r} \cdot \hat{b} \quad \therefore a_n = \frac{|\vec{V} \wedge \vec{a}|}{V} \quad (1.12)$$

También puede determinarse el radio de curvatura de la trayectoria:

$$\rho = \frac{V^3}{|\vec{V} \wedge \vec{a}|} \quad (1.13)$$

Con esta expresión se puede hallar el radio de curvatura de una curva dada con independencia del movimiento. En efecto, suponiendo un movimiento según una de las coordenadas y conociendo la curva, se tiene la otra coordenada; luego se hallan  $\vec{V}$  y  $\vec{a}$  y se aplica la última expresión.

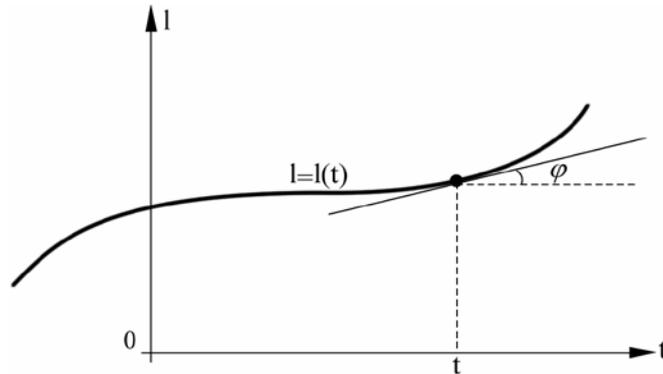
El mismo procedimiento puede emplearse para pasar de coordenadas cartesianas a polares o de polares a intrínsecas.

Para una mejor comprensión de las expresiones de Darboux se sugiere realizar la gráfica de la trayectoria y en el punto dibujar los vectores posición, velocidad y aceleración con sus respectivas componentes.

**1.6. Diagramas:**

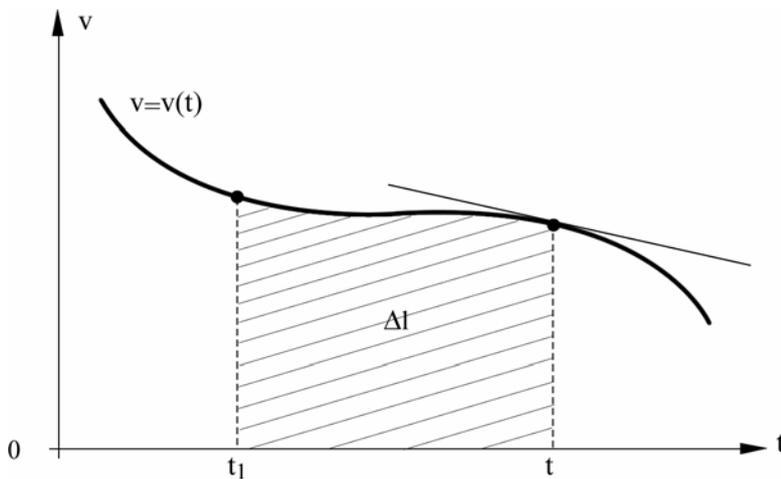
Es común en la mecánica representar gráficamente algunos de los parámetros estudiados. Los diagramas usados más comúnmente son:

a) Diagrama posición - tiempo:



Como  $\frac{dl}{dt} = V$ , la pendiente de la tangente a la curva  $l = l(t)$  en cualquier instante representa el módulo de la velocidad instantánea:  $V = \text{tg } \varphi$

b) Diagrama Velocidad-Tiempo:



aquí es  $V = V(t)$

pero  $V = \frac{dl}{dt}$

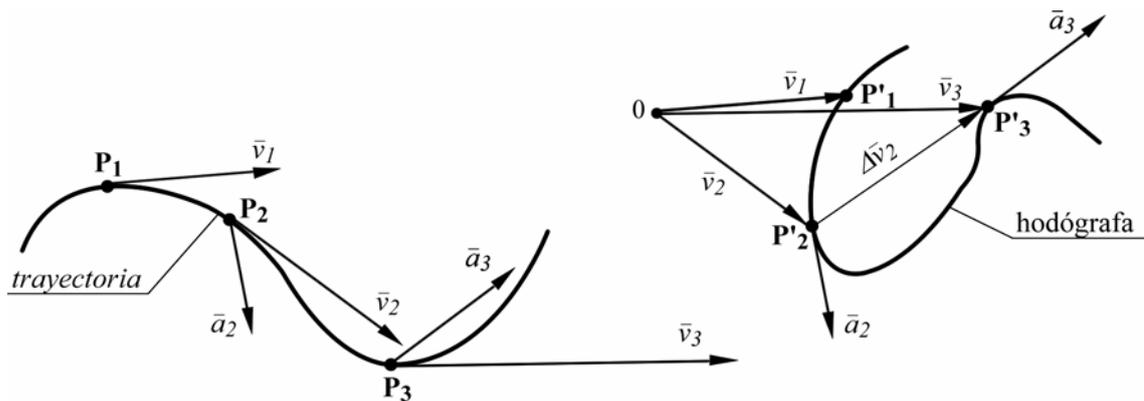
$\therefore dl = V dt$

$$l - l_1 = \int_{t_1}^t V dt$$

la superficie debajo de la curva  $v = v(t)$  representa el desplazamiento sobre la trayectoria desde  $t_1$  a  $t$ ; además, siendo  $a_t = \frac{dv}{dt}$ , la pendiente de la tangente en un punto representa el módulo de la aceleración tangencial:  $tg\psi = a_t$ .

c) Curva Hodógrafa:

Sea una trayectoria cualquiera sobre la que se dibujan los vectores velocidad;

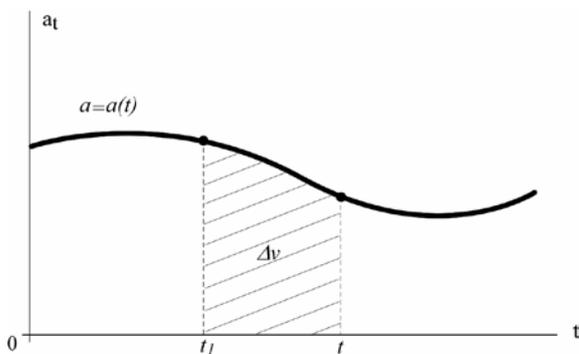


Tomando un polo 0 y trasladando a él los vectores velocidad paralelos a sí mismos, se observa que:

$$\frac{\Delta \vec{V}_2}{\Delta t} = \vec{a}_{m2} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_2}{\Delta t} = \vec{a}_2 = \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

Es decir que la velocidad del punto P' que recorre la hodógrafa es la aceleración del punto P que describe la trayectoria.

d) Diagrama de aceleración-tiempo:



aquí es  $a_t = a_t(t)$ ; y  $dv = a_t dt$

$$V - V_1 = \int_{t_1}^t a_t dt$$

La superficie debajo de la curva  $a = a(t)$  mide la variación de la rapidez en el intervalo de tiempo.

### 1.7. Movimientos - Estudio cinemático.

Puede decirse que en la Mecánica todo se reduce a dos tipos de problemas:

a) Problema inverso: Se tienen las ecuaciones del movimiento y se desea conocer la aceleración. Es el problema más sencillo, puesto que sólo implica derivar las ecuaciones de movimiento, pero el que menos se presenta.

b) Problema directo: Dada la aceleración, determinar la ecuación horaria. Aquí pueden presentarse problemas, ya que la integración puede resultar dificultosa. Este es el verdadero problema de la Mecánica, puesto que la naturaleza impone las causas del movimiento.

Se analizarán a continuación algunos tipos de movimientos de interés en Mecánica.

#### 1.7.1 Movimientos periódicos:

Definición: un movimiento es periódico cuando en intervalos iguales de tiempo se repiten sus propiedades cinemáticas, es decir, posición, velocidad y aceleración  $(\vec{r}, \vec{V}, \vec{a})$ .

El intervalo de tiempo en que se repiten estas propiedades cinemáticas recibe el nombre de período (T).

Al número de períodos que se cumplen en la unidad de tiempo (el segundo) se lo llama frecuencia (f) del movimiento, y es:

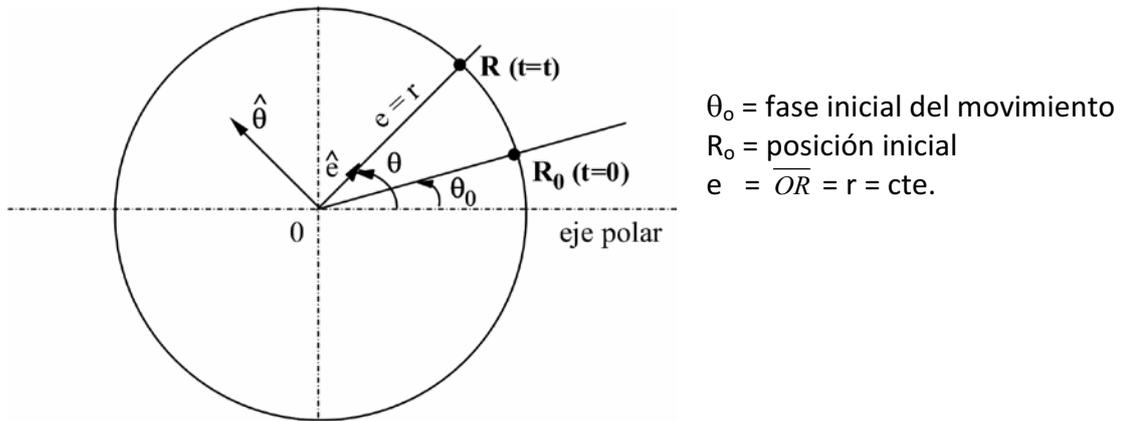
en T seg.     $\rightarrow$     1 ciclo de movimiento

$$\text{en 1 seg.} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{T} = f \left[ \frac{\text{ciclos}}{\text{seg.}} \right] \text{ o [Hertz]}$$

Como se verá, el más simple de los movimientos periódicos es el movimiento circular uniforme.

**1.7.2. Movimientos Circulares:**

Son aquellos en que la trayectoria del punto en movimiento es una circunferencia. Para el estudio de estos movimientos es más sencillo utilizar coordenadas polares, eligiendo como polo el centro del círculo.



Pueden presentarse varias alternativas particulares del caso general:

a) en el caso más general:  $\theta = \theta(t)$  = función cualquiera del tiempo

$$\vec{e} = r \hat{e}$$

$$\vec{V} = \dot{e} \hat{e} + e \dot{\theta} \hat{\theta}$$

pero:  $\dot{e} = 0$  y  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \therefore \vec{V} = e \omega \hat{\theta}$

Siendo en la trayectoria circular  $\hat{\theta} \equiv \hat{l}$  (versor transversal coincide con el versor tangencial)

$$\vec{V} = e \omega \hat{l} \quad ; \quad V = e \omega = r \omega \tag{1.14}$$

es decir que el vector velocidad es siempre normal al radio.

Para la aceleración:

$$\vec{a} = \left[ \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right] \hat{e} + \left[ 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right] \hat{\theta}$$

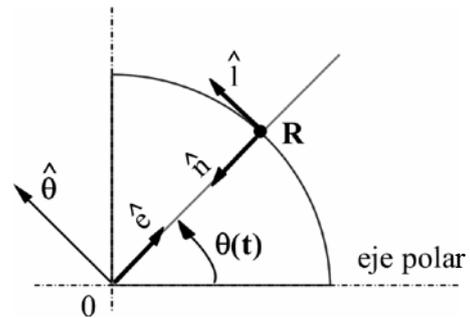
$$\vec{a} = -r \omega^2 \hat{e} + r \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

pero  $\hat{e} = -\hat{n}$  (versor normal)

Luego:

$$\vec{a} = \gamma r \hat{l} + \omega^2 r \hat{n} \quad (1.15)$$

$$a_t = \gamma r; \quad a_n = \omega^2 r$$



b) si  $\gamma = \text{cte}$ , el movimiento circular se llama uniformemente variado y no es periódico:

$$\ddot{\theta} = \gamma \rightarrow d\omega = \gamma \cdot dt \quad \text{y} \quad \omega - \omega_o = \gamma (t - t_o)$$

$$\text{si } t_o = 0 \rightarrow \text{es: } \omega = \gamma \cdot t + \omega_o \quad \text{y} \quad \theta = \gamma \frac{t^2}{2} + \omega_o \cdot t + \theta_o$$

c) Si  $\omega = \text{cte}$ . ( $\gamma = 0$ ), el movimiento es circular uniforme, aquí  $a_t = 0$

Este movimiento resulta periódico puesto que si  $\omega = \text{constante}$ , a partir de cualquier posición y en tiempos iguales, se repetirán  $\vec{r}, \vec{V}, \vec{a}$ .

Aquí el período de tiempo empleado por el móvil para recorrer una vuelta con velocidad  $\omega$  es:

$$\frac{\text{ángulo recorrido}}{\text{velocidad angular}} = t \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

y la frecuencia:  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

las expresiones de movimiento para este caso son:

$$\omega = \text{cte} = \dot{\theta} \therefore d\theta = \omega dt$$

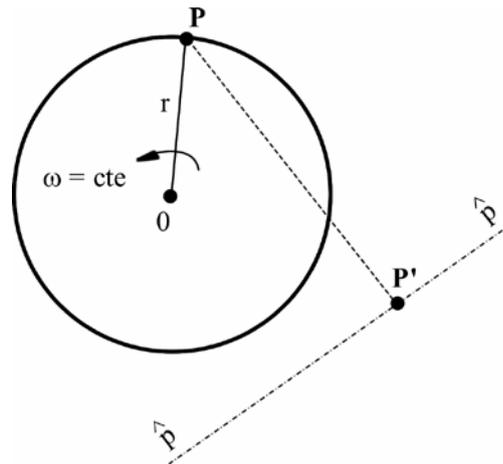
En  $t = 0$ , es  $\theta = \theta_o \rightarrow$

$$\theta = \omega t + \theta_o \quad (1.16)$$

En movimientos circulares se acostumbra hablar más del número de vueltas por minuto (rpm) que de rad/seg. Es otra forma de expresar la frecuencia.

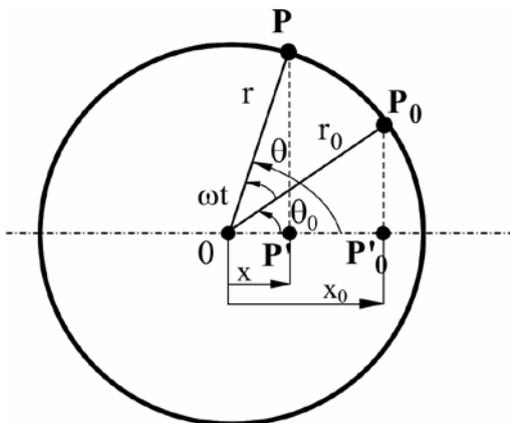
### 1.7.3. Movimiento oscilatorio armónico (MOA)

Es el movimiento de un punto  $P'$  que es proyección de otro  $P$  que describe un movimiento circular uniforme;



Así por ejemplo, el punto  $P'$  realizará sobre el eje  $\hat{p}\hat{p}$  un movimiento oscilatorio armónico siempre que sea proyección del punto  $P$  que describe la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  con  $\omega = \text{cte}$  respecto de  $O$ . Para simplificar se acostumbra tomar el eje de proyección sobre uno de los diámetros y el origen en  $O$ :

$$\text{Para } P \text{ es: } \begin{cases} \omega = \text{cte} = \text{velocidad angular} \\ r = \text{cte} = \text{radio} \\ \theta = \omega t + \theta_0 = \text{argumento o fase} \end{cases}$$



Para  $P'$  es:  
 $O$  = centro de oscilación  
 $x$  = elongación o posición  
 $r$  = semiamplitud  
 $2r$  = amplitud  
 $\omega$  = pulsación o frec. circular =  $\frac{2\pi}{T}$   
 $\theta$  = fase o ángulo de fase

La elongación está dada por:

$$x = r \cos \theta = r \cos (\omega \cdot t + \theta_0) \tag{1.17}$$

y:  $x_0 = r \cos \theta_0$

luego:  $V = \dot{x} = -r \cdot \omega \cdot \text{sen} (\omega \cdot t + \theta_0)$  (1.18)

$$a = \ddot{x} = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos (\omega \cdot t + \theta_0) \tag{1.19}$$

Puede demostrarse que este movimiento es periódico, para lo cual basta con evaluar  $x$ ,  $V$  y  $a$ , a partir de un instante cualquiera tomando tiempos iguales al período del movimiento:

$$t = 0 \begin{cases} x_o = r \cos \theta_o \\ V_o = -\omega \cdot r \operatorname{sen} \theta_o \\ a_o = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos \theta_o \end{cases}$$

$$t = T = \frac{2\pi}{\omega} \begin{cases} x_t = r \cos(2\pi + \theta_o) = r \cdot \cos \theta_o = x_o \\ V_t = -r\omega \operatorname{sen}(2\pi + \theta_o) = -r\omega \operatorname{sen} \theta_o = V_o \\ a_t = -r\omega^2 \cos(2\pi + \theta_o) = -r\omega^2 \cos \theta_o = a_o \end{cases}$$

Así, el período de este movimiento es:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Valores Característicos del Movimiento Oscilatorio Armónico: reciben esta denominación los valores máximos y nulos de  $x$ ,  $V$  y  $a$ . Veamos cuando se producen.

1) Elongación nula ( $x = 0$ )

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\omega \cdot t + \theta_o) \\ \therefore \cos(\omega \cdot t + \theta_o) &= 0 \\ \therefore \omega \cdot t + \theta_o &= (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

el instante de nulidad, será:

$$t^* = \frac{(2n+1) \pi / 2 - \theta_o}{\omega}$$

2) elongación máxima o velocidad nula:

$$\begin{aligned} x &= x_{\text{máx}} = r \rightarrow \dot{x} = V = 0 \\ V &= -\omega \cdot r \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta_o) \\ \therefore \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta_o) &= 0 \\ \therefore \omega \cdot t + \theta_o &= n \cdot \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$t^{**} = \frac{n \pi - \theta_o}{\omega}$$

3) Velocidad máxima o aceleración nula:

$$V = V_{\text{máx}} = \omega r \quad \dot{V} = a = 0$$

$$a = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_o)$$

$$\therefore \cos(\omega \cdot t + \theta_o) = 0 \quad \therefore \omega \cdot t + \theta_o = (2 \cdot n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$t^* = \frac{(2 \cdot n + 1) \frac{\pi}{2} - \theta_o}{\omega}$$

4) Aceleración máxima:

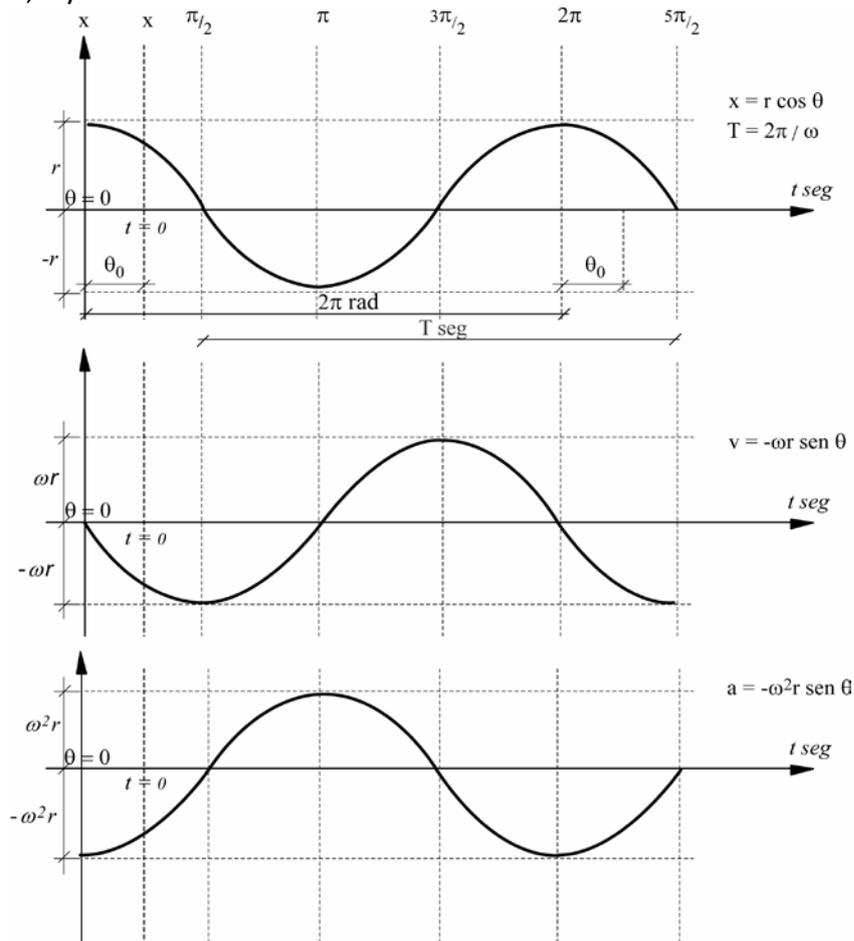
$$a = a_{m\acute{a}x} = \omega^2 r \rightarrow \dot{a} = 0$$

$$\dot{a} = \omega^3 r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o) \quad \therefore t^{**} = \frac{n \cdot \pi - \theta_o}{\omega}$$

Al hablar de x, V y a máximos, se entiende que se habla de módulos, por ello sólo se ha aplicado la primera derivada temporal como condición de extremo (máximo o mínimo).

Gráficas de las funciones correspondientes al MOA.

Graficando x, v y a en función de  $\theta$ :



Dado que el eje de abscisas representa la fase del movimiento, el diagrama (V- $\theta$ ) no constituye la gráfica (V-t), aunque  $\theta = \theta(t)$ . Para ello, debe reemplazarse  $\theta$  por t en las escalas, luego:

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Para  $t = 0$  (origen de tiempos) será  $\theta = \theta_0$  por lo tanto, puede ubicarse el origen de los tiempos para el valor  $\theta_0$  en los gráficos anteriores. Con respecto a la escala, se está condicionado por aquella que se adoptó para los  $\theta$ . Veamos por ejemplo: si se hubiese tomado Escala  $\theta = \frac{2 \pi \text{ rad}}{10 \text{ cm}}$  correspondería tomar Escala  $t = \frac{T \text{ seg}}{10 \text{ cm}}$ .

En otras palabras, al segmento que representa  $\theta = 2 \pi \text{ rad}$ , le corresponde en el gráfico de tiempos, el mismo segmento pero representando  $T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ seg.}$

Ecuación diferencial del MOA

El tratamiento precedente del MOA se basó en consideraciones gráficas y cinemáticas. Resulta importante también dar al mismo un tratamiento analítico equivalente.

La expresión de la aceleración (1.19) puede reescribirse como  $a = -\omega^2 x$  o:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.20}$$

que es la ecuación diferencial del MOA (segundo orden, primer grado, homogénea)

Utilizando el criterio de Euler para hallar la solución, se propone la función  $x = C e^{\lambda t}$ , e introduciéndola en (1.20), se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

de donde:  $\lambda_{1,2} = \pm i \omega$

Luego, existen dos valores de  $\lambda$  que hacen que la función propuesta sea solución de la (1.20). La solución general será una combinación lineal de ambas:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \\ &= A (\cos \omega t + i \text{sen } \omega t) + B (\cos \omega t - i \text{sen } \omega t) \\ &= (A + B) \cos \omega t + (A - B) i \text{sen } \omega t \end{aligned}$$

Para eliminar la parte imaginaria de la solución, se propone:

$$A + B = C_1 \quad ; \quad A - B = -i C_2$$

con lo que se obtiene:  $A = \frac{C_1}{2} - i \frac{C_2}{2} \quad ; \quad B = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2} i$

De esta manera mantienen A y B complejas, pero  $C_1$  y  $C_2$  son reales, lo que permite tener una función real como solución para el problema. Reemplazando:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \text{sen } \omega t \tag{1.21}$$

que es la solución general de la ecuación (1.20).

Resulta importante pasar esta función a una forma equivalente; sean dos nuevas constantes X y  $\psi$  tal que:

$$C_1 = X \cos \psi$$

$$C_2 = -X \sin \psi$$

y reemplazando en (1.21):

$$x(t) = X (\cos \psi \cos \omega t - \sin \psi \sin \omega t)$$

$$\therefore x(t) = X \cos(\omega t + \psi) \quad (1.22)$$

con

$$X = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad , \quad \psi = \text{arc tg} \left( -\frac{C_2}{C_1} \right)$$

Con esta última forma de la expresión de  $x(t)$  se observa la coincidencia entre las soluciones aportadas por el razonamiento gráfico-cinemático (1.17) y el analítico (1.22), en la cual, X representa la semiamplitud ( $r$ ) y  $\psi$  la fase inicial ( $\theta_0$ ).

Estas constantes deben determinarse de las condiciones iniciales del problema:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = V_0 \end{cases}$$

$$\therefore \dot{x}(t) = -X \omega \sin(\omega t + \psi)$$

$$\text{y} \quad x_0 = X \cos \psi, \quad V_0 = -X \omega \sin \psi$$

de donde:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{V_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\psi = \text{arc tg} \left( -\frac{V_0}{\omega x_0} \right)$$

Ejemplo de aplicación:

Sea el movimiento del punto P que describe la circunferencia de radio  $r = 0.27$  m, con una velocidad angular de 20 rad/seg. Encontrar el movimiento de P' sobre la dirección x si en  $t = 0$  era  $x_0 = 0.1$ m,  $v_0 = 5$  m / seg.

$$x(t) = X \cos(\omega t + \psi)$$

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t + \psi)$$

$$x_o = 0.1m = X \cos \psi$$

$$V_o = 5m/s = -20 \frac{1}{seg} X \sen \psi$$

Y dividiendo miembro a miembro

$$50 = -20 \operatorname{tg} \psi$$

$$\operatorname{tg} \psi = -5/2$$

$$\psi = -1.19 \operatorname{rad}.$$

Ordenando:

$$0.1m = X \cos \psi$$

$$-5/20m = X \sen \psi$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$X = \sqrt{0.1^2 + (5/20)^2} = 0.27 \text{ m}$$

Respuesta:

$$x(t) = 0.27 \cos (20 t - 1.19) \text{ m}$$

### Composición de movimientos oscilatorios armónicos

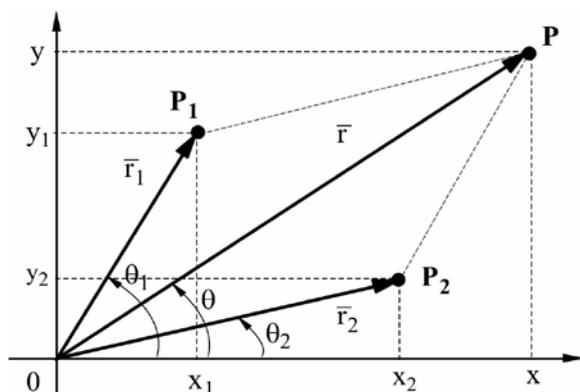
En la Mecánica de máquinas, resulta importante determinar la respuesta de los mecanismos a excitaciones alternativas que los afectan en forma simultánea. Pueden darse diversos casos.

#### a) Composición de dos MOA según la misma dirección

En este caso puede ocurrir que los movimientos tengan la misma pulsación o distinta.

##### a.1) Igual pulsación

Sean los puntos  $P_1$  y  $P_2$  que giran alrededor de 0 con MCU:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Sus proyecciones sobre la dirección de x realizan MOA.



Los movimientos oscilatorios armónicos a componer serán:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2$$

Donde:

$$\theta_1 = \omega t + \theta_{o1}$$

$$\theta_2 = \omega t + \theta_{o2}$$

Siendo  $\theta_{o1}$  y  $\theta_{o2}$  los ángulos medidos en  $t = 0$ , su diferencia será una constante:

$$\therefore \theta_1 - \theta_2 = \theta_{o1} - \theta_{o2} = \alpha = cte.$$

Por lo tanto, la diferencia de fase en todo instante es una constante y el triángulo  $OP_1P_2$  gira sin deformarse. En consecuencia, se puede calcular el movimiento resultante proyectando el vector posición  $\vec{r}$  resultante de  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  en cualquier posición:

$$x = x_1 + x_2 = r \cos \theta = r \cos(\omega t + \theta_o)$$

Para resolver el problema se debe calcular su semiamplitud  $r$  y su ángulo de fase inicial  $\theta_o$ , ya que  $\omega$  es la misma por girar todos los vectores con igual velocidad angular.

Para ello se proyectan los vectores posición sobre ambos ejes en  $t = 0$

$$r_1 \cos \theta_{o1} + r_2 \cos \theta_{o2} = r \cos \theta_o = r_x$$

$$r_1 \sin \theta_{o1} + r_2 \sin \theta_{o2} = r \sin \theta_o = r_y$$

Siendo conocidos  $r_1, r_2, \theta_{o1}$  y  $\theta_{o2}$ , se han obtenido los valores de  $r_x$  y  $r_y$ , por lo tanto:

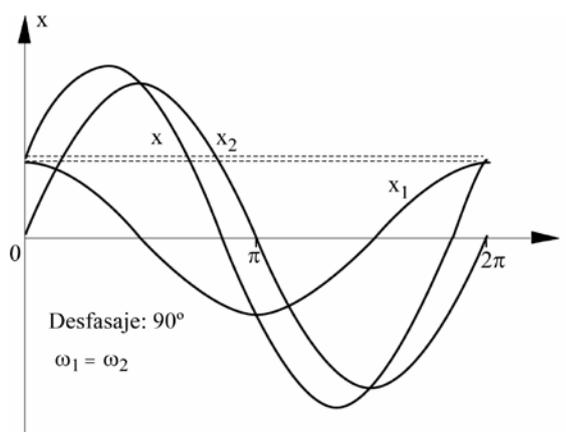
$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \qquad \theta_o = \arctg \frac{r_y}{r_x}$$

y el movimiento resultante será:

$$x = r \cos(\omega t + \theta_o)$$

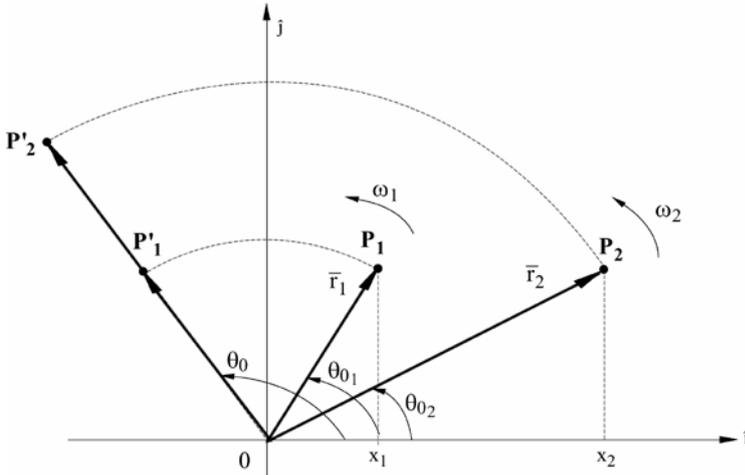
Como se observa, **el movimiento resultante es otro MOA** con la misma pulsación que los que lo generan, semiamplitud  $r$  y ángulo de fase inicial  $\theta_o$ .

El período es  $T = \frac{2\pi}{\omega}$



a.2) Distintas pulsaciones

Se supondrá  $\omega_2 > \omega_1$  .



Los movimientos a componer en la misma dirección son:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1 = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_{o1})$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2 = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_{o2})$$

Partiendo de sus respectivas fases iniciales y teniendo en cuenta que  $\omega_2 > \omega_1$  puede suponerse que después de un cierto tiempo las fases se igualarán en un  $\theta_o$  determinado, alcanzando  $\vec{r}_2$  a  $\vec{r}_1$  . Calculando el instante  $t_o$  en que las fases de ambos movimientos se igualan, será  $\theta_1 = \theta_2$

$$\omega_1 t_o + \theta_{o1} = \omega_2 t_o + \theta_{o2} = \theta_o$$

y  $\therefore$  
$$t_o = \frac{\theta_{o2} - \theta_{o1}}{\omega_1 - \omega_2}$$

Siendo  $t_o$  el tiempo necesario para que  $\vec{r}_2$  alcance a  $\vec{r}_1$  . Con este  $t_o$  en las anteriores se calcula  $\theta_o$ . En estas condiciones se puede simplificar el problema ya que, comenzando a contar los tiempos a partir de  $t_o$ , los dos movimientos componentes tendrían la misma fase inicial:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_o) \\ x_2 &= r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_o) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = x_1 + x_2$$

El problema podría simplificarse aún más girando el eje x un ángulo  $\theta_o$ , con lo que se anularía la fase inicial, en tal caso:

$$x'_1 = r_1 \cos \omega_1 t$$

$$x'_2 = r_2 \cos \omega_2 t$$

y el movimiento resultante sobre esta nueva dirección  $\hat{i}'$  , sería:

$$x' = x'_1 + x'_2 = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t$$

Se analizará ahora si el movimiento resultante es periódico. Si lo fuera, para un número entero de vueltas  $p$  de  $\vec{r}_1$  y otro  $q$  de  $\vec{r}_2$  a partir de  $\theta_0$  deberían volver a encontrarse en esa posición; es decir:

$$\frac{p}{q} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{Número Racional} = T_2/T_1$$

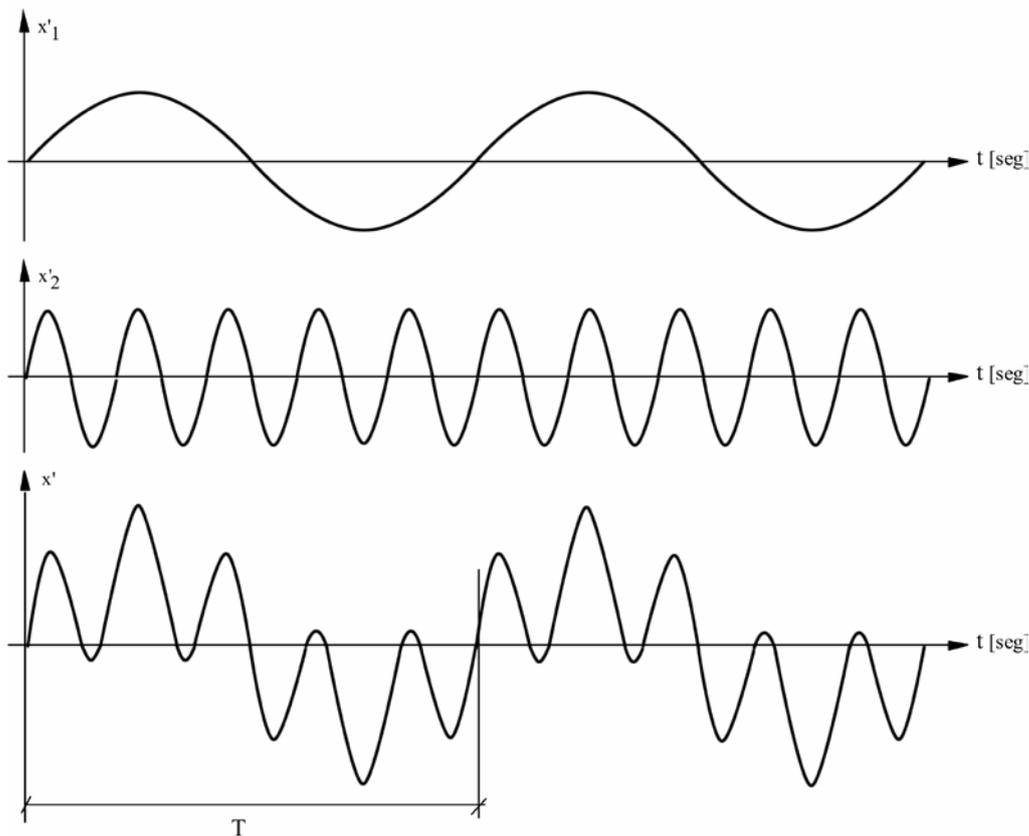
Luego para que el movimiento resultante sea periódico la relación de pulsaciones tiene que dar un número racional (cociente entre números enteros).

El período resultante  $T$  será el tiempo mínimo, único y común para ambos movimientos, es decir, el mínimo común múltiplo.

$$T = p T_1 = q T_2$$

Es importante notar que el movimiento resultante de la composición de dos MOA en igual dirección y con distintas frecuencias, resulta ser de carácter oscilatorio, periódico

(si  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{Número Racional}$ ), pero **no es armónico**.



**Ejemplo:**

Sean los movimientos:  $x_1 = 4 \cdot \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$$x_2 = 6 \cdot \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

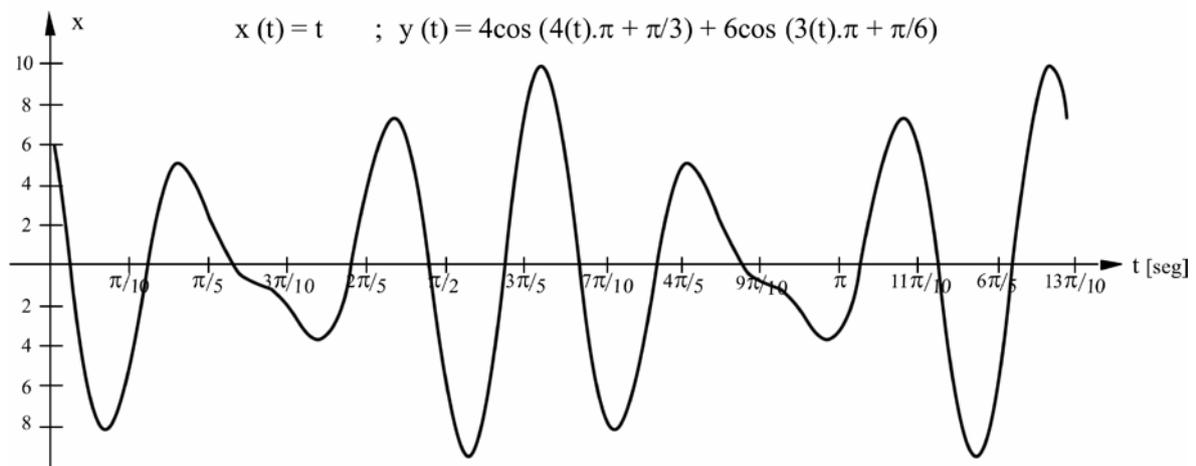
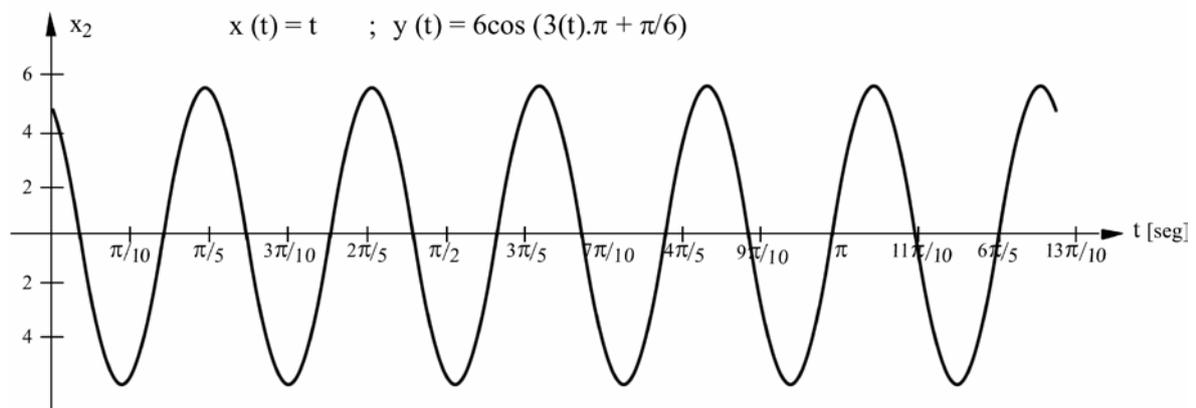
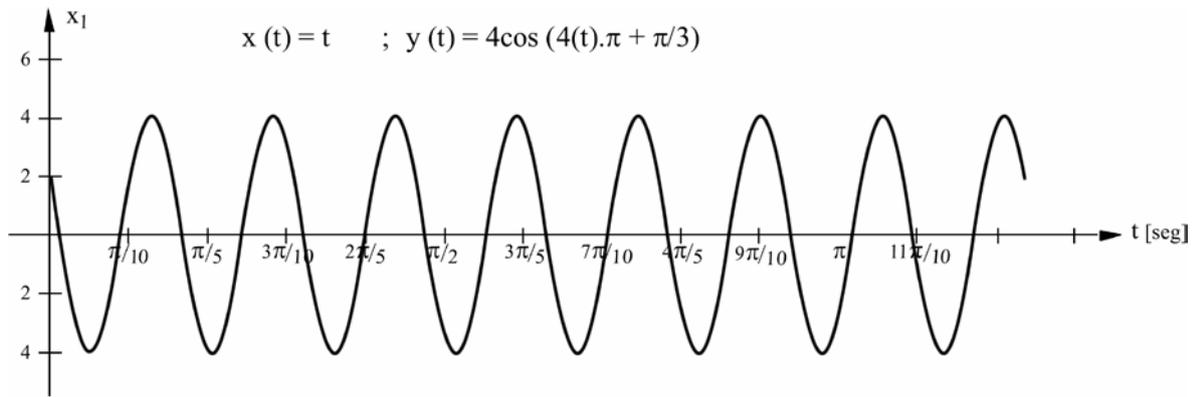
$$\therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} = \text{Número Racional}$$

Luego, el movimiento es periódico.

Como:  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} = \frac{4}{3} \Rightarrow p=4 \quad y \quad q=3$

Así:  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2}$ ;  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2}{3}$  y  $T = 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \text{ s}$

Gráficamente:



Este último gráfico representa la composición de los dos MOA anteriores.

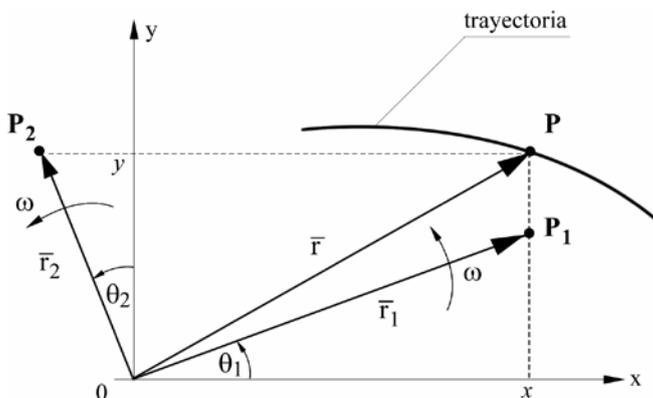
Considerando  $t = 0$  para ambos vectores coincidentes, éstos solo vuelven a encontrarse después que el primero completó 4 ciclos y el segundo 3 ciclos, es decir después de  $T = 2$  s.

**b) Composición de dos MOA según dos direcciones perpendiculares**

También aquí pueden ocurrir dos posibilidades:

**b.1) Igual pulsación:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$**

Debe determinarse la ecuación de movimiento ( $\vec{r}$ ) del punto P que se mueve en una trayectoria cuyas coordenadas  $x$  e  $y$  serán las elongaciones de los MOA según direcciones perpendiculares e igual pulsación.



Teniendo en cuenta que las pulsaciones son iguales, la diferencia de fase entre ambos movimientos será constante, como se vio en el caso (a.1).

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_{o2} - \theta_{o1} = cte.$$

Por lo tanto el período del movimiento resultante será el de los movimientos componentes:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria de P,  $y = y(x)$ , se partirá de las ecuaciones de los MOA que serán sus respectivas ecuaciones horarias (paramétricas) en los movimientos proyectados.

$$x = r_1 \cos(\omega t + \theta_{o1})$$

$$y = r_2 \cos(\omega t + \theta_{o2})$$

debiéndose eliminar el parámetro  $t$ . Para ello, desarrollando el coseno de la suma de dos ángulos:

$$\frac{x}{r_1} = \cos \omega t \cdot \cos \theta_{o1} - \text{sen } \omega t \cdot \text{sen } \theta_{o1}$$

$$\frac{y}{r_2} = \cos \omega t \cdot \cos \theta_{o2} - \text{sen } \omega t \cdot \text{sen } \theta_{o2}$$

se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, no homogéneo, cuya solución es:

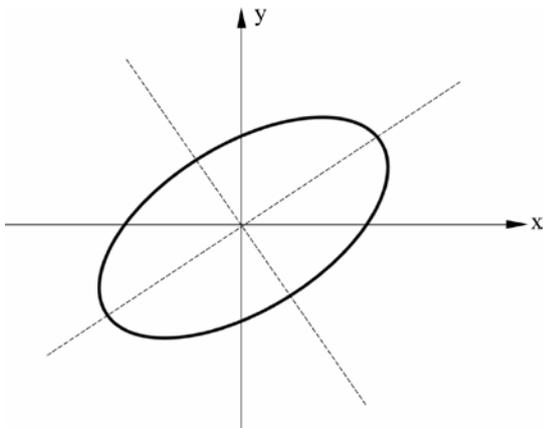
$$\cos \omega t = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{r_1} & -\text{sen } \theta_{o1} \\ \frac{y}{r_2} & -\text{sen } \theta_{o2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta_{o1} & -\text{sen } \theta_{o1} \\ \cos \theta_{o2} & -\text{sen } \theta_{o2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x}{r_1} \text{sen } \theta_{o2} + \frac{y}{r_2} \text{sen } \theta_{o1}}{-\cos \theta_{o1} \cdot \text{sen } \theta_{o2} + \cos \theta_{o2} \cdot \text{sen } \theta_{o1}} =$$

$$= \frac{\frac{y}{r_2} \text{sen } \theta_{o1} - \frac{x}{r_1} \text{sen } \theta_{o2}}{\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2})}$$

$$\text{sen } \omega t = \frac{\frac{y}{r_2} \cos \theta_{o1} - \frac{x}{r_1} \cos \theta_{o2}}{\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2})}$$

elevando al cuadrado y sumando:

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} - 2 \frac{x}{r_1} \frac{y}{r_2} \cos(\theta_{o1} - \theta_{o2}) - \text{sen}^2(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 0$$



Por lo tanto, el movimiento resultante de la composición de dos MOA con igual frecuencia en direcciones perpendiculares queda representado por la **ecuación de una cónica** centrada en el origen, cuyos ejes están girados respecto de los ejes coordenados. Para cada diferencia de fase se obtiene una cónica diferente. En general se tendrán los siguientes casos particulares:

Casos particulares

a)  $\theta_{o1} - \theta_{o2} = 0 \quad (\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2)$

$\therefore \cos(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 1$

$\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 0$

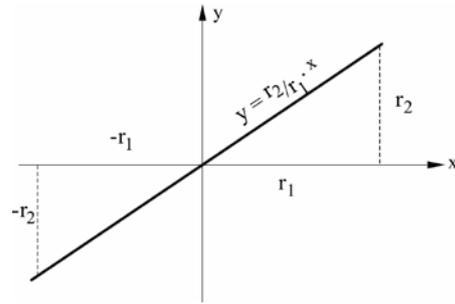


Fig a)

luego:

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} - \frac{2xy}{r_1 r_2} = 0$$

que es la ecuación de una elipse degenerada

ó

$$\left( \frac{x}{r_1} - \frac{y}{r_2} \right)^2 = 0$$

dos rectas coincidentes

de donde  $y = \frac{r_2}{r_1} x$

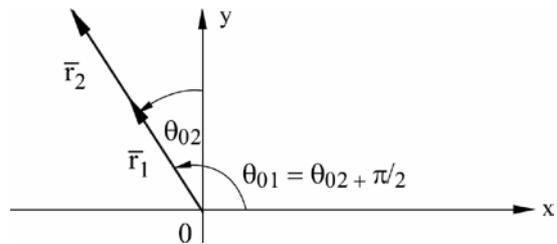
Es decir que el movimiento resultante es oscilatorio y se desarrolla sobre la recta de pendiente  $r_2 / r_1$  (Fig. a).

b)  $\theta_{o1} - \theta_{o2} = \pi/2 \quad (\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2)$

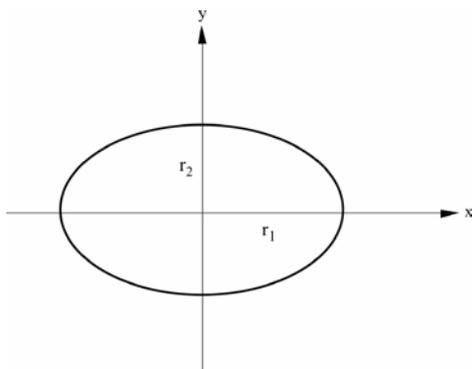
aquí:  $\cos(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 0$

$\text{sen}(\theta_{o1} - \theta_{o2}) = 1$

$$\therefore \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$



El movimiento resultante se desarrolla sobre una elipse cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.

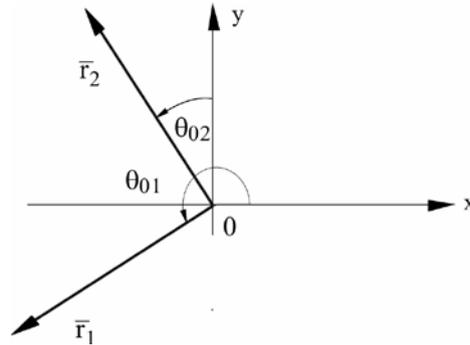


En particular si  $r_1 = r_2$  la trayectoria de P es circular.

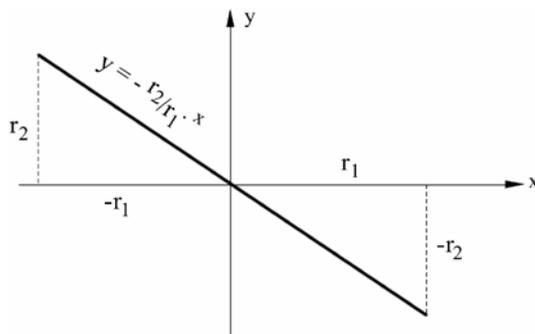
$$c) \theta_{o1} - \theta_{o2} = \pi (\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2) \Rightarrow \begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \text{sen } \pi = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} + \frac{2x}{r_1} \frac{y}{r_2} = 0$$

$$\text{ó } \left( \frac{x}{r_1} + \frac{y}{r_2} \right)^2 = 0 \quad \therefore \quad y = -\frac{r_2}{r_1} x$$

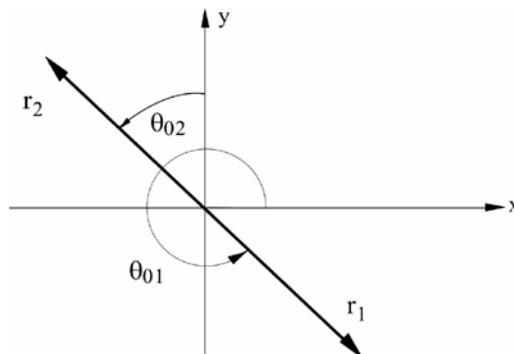


y por lo tanto el movimiento de P es rectilíneo con pendiente negativa.



$$d) \theta_{o1} - \theta_{o2} = \frac{3}{2} \pi \quad (r_1 \equiv r_2 \text{ pero en sentidos opuestos})$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3}{2} \pi = 0 \\ \text{sen } \frac{3}{2} \pi = -1 \end{cases}$$



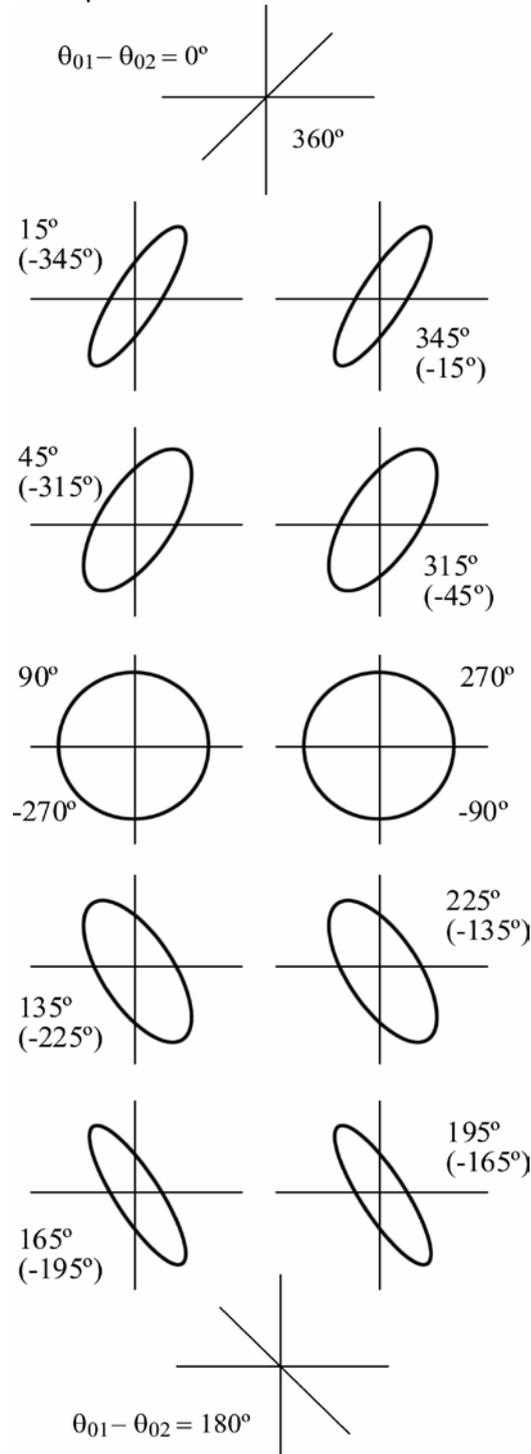
y el movimiento es el mismo que en el caso b).

e) Para fases intermedias entre las analizadas más arriba, los movimientos resultantes responderán a trayectorias elípticas más o menos achatadas e inclinadas según se acerquen a la recta o a la elipse.

En la siguiente figura, se observa que para cada diferencia de fase resultará una trayectoria distinta, dando lugar a una familia de curvas que reciben el nombre de “figuras de LISSAJOUS”.

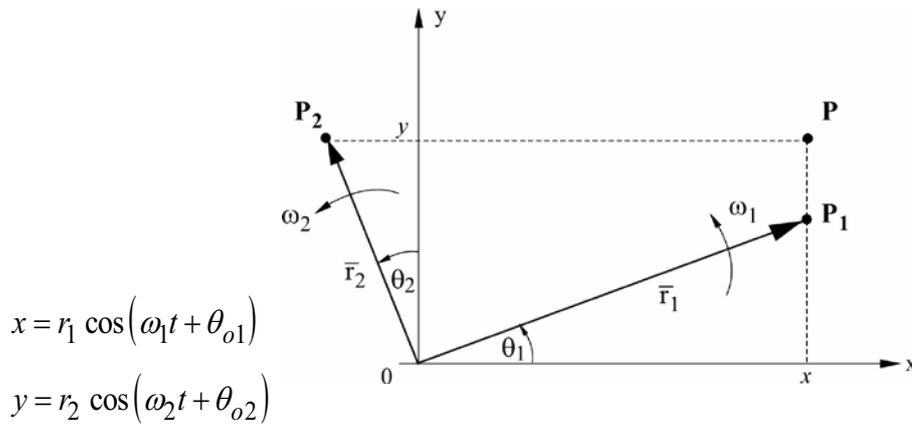
En la práctica, estas figuras se utilizan principalmente para medir diferencias de fase entre dos señales utilizando un osciloscopio, como se observa en la figura.

En ingeniería mecánica se utilizan para medir órbitas de ejes dentro de cojinetes en máquinas rotantes. Esta es una técnica empleada asiduamente en programas de mantenimiento predictivo de plantas industriales.



b.2) Distintas pulsaciones:

Se considerará el caso en que  $\omega_2 > \omega_1$ . Los movimientos a componer son los mismos que en el punto (b.1) pero con  $\omega_1 \neq \omega_2$ , es decir:



Ahora eliminando  $t$  de estas ecuaciones puede obtenerse la expresión de la trayectoria

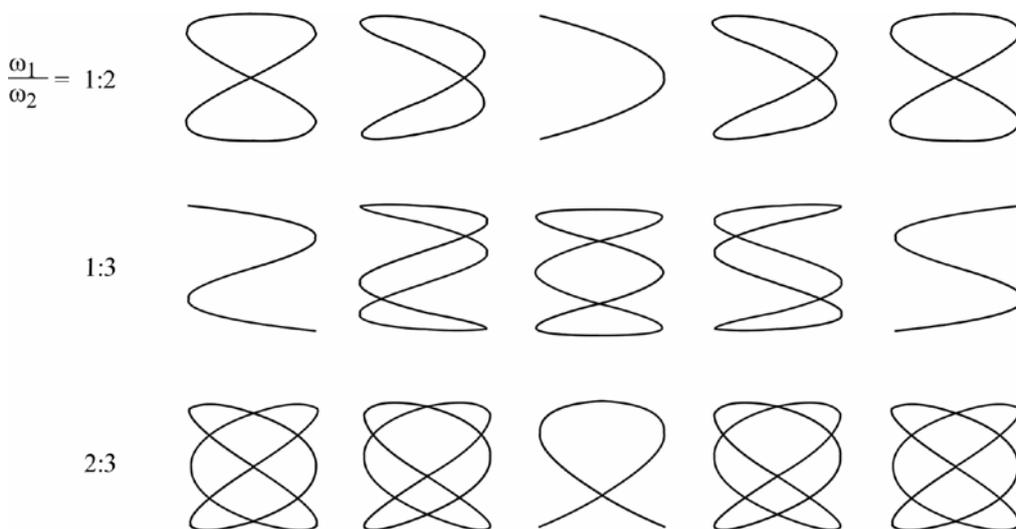
$y = y(x)$ , proceso éste que no resulta tan directo como en el caso (b.1). Debe tenerse en cuenta, como antes, que el movimiento sólo será periódico si:

$$\frac{p}{q} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{Número racional}$$

Siendo en tal caso el período resultante el mínimo común múltiplo de dos períodos componentes:

$$T = p T_1 = q T_2$$

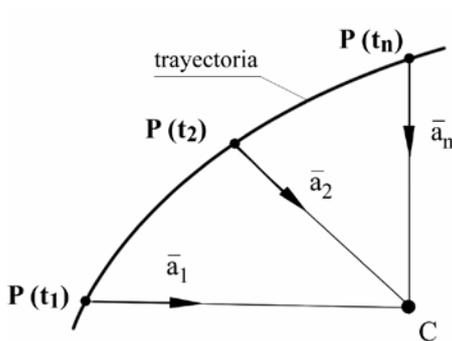
Para cada relación de pulsaciones habrá una trayectoria distinta, dando lugar a figuras de Lissajous como las mostradas, donde se ha tomado  $r_1 \neq r_2$



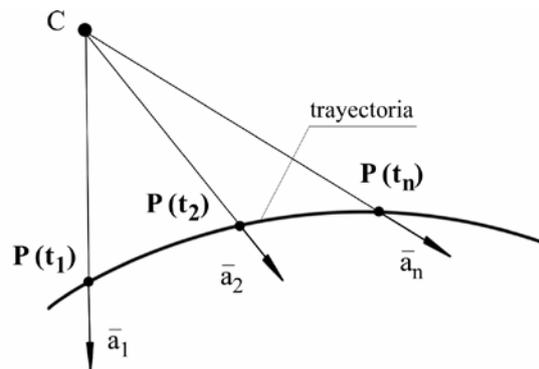
Estas figuras tienen aplicación en la práctica cuando se usa un osciloscopio como medidor de frecuencias para lo cual debe contrastarse una señal cuya pulsación sea desconocida contra otra conocida.

### 1.7.4. Movimientos centrales

Se dice que un punto material se encuentra en movimiento central cuando el vector aceleración  $\vec{a}$ , para cualquier posición del punto en su trayectoria, pasa por un punto fijo C denominado centro del movimiento.



Movimiento Central Convergente

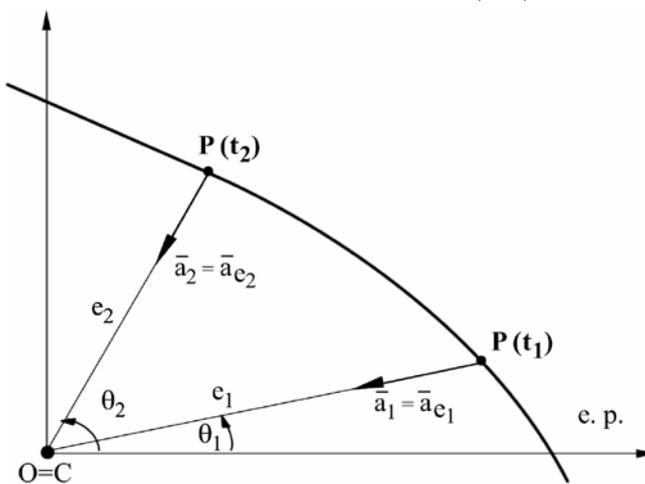


Movimiento Central Divergente

Estos movimientos pueden ser convergentes o divergentes según que hacia el centro C concurren las aceleraciones o sus prolongaciones.

Si el movimiento es referido al centro C, tomado como polo, el vector  $\vec{a}$  sólo tendrá componente radial.

$$a = |\vec{a}| = a_e = \ddot{e} - e\dot{\theta}^2$$



En el movimiento central, la aceleración areolar será siempre nula, por cuanto:

$$\ddot{S} = \frac{1}{2} \vec{e} \wedge \vec{a}$$

Como los vectores  $\vec{e}$  y  $\vec{a}$  son colineales, resulta:

$$\ddot{S} = \frac{d\dot{S}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \dot{S} = \text{vector cte.}$$

Luego, el vector velocidad areolar será constante.

Siendo  $\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{e} \wedge \vec{V}$ , el vector  $\vec{V}$  y el punto C determinan un plano invariable en el que se desarrolla la trayectoria.

Por tanto, todos los movimientos centrales tienen trayectorias planas que se barren con

$$\dot{\vec{S}} = \text{constante y } \ddot{\vec{S}} = 0. \text{ La recíproca también se cumple.}$$

Fórmula de Binet: Determinación de la aceleración radial en función de  $\theta$ .

Se desea obtener la ecuación diferencial que se conoce en el dominio temporal, expresada en el dominio espacial, realizando un cambio de variables.

Si se conoce la trayectoria de un móvil animado de un movimiento central por su ecuación en coordenadas polares  $(e, \theta)$  y su velocidad areolar, se tiene

$$\text{Datos} \begin{cases} e = e(e, \theta) \\ \left| \dot{\vec{S}} \right| = \frac{1}{2} e^2 \dot{\theta} = \text{cte.} (*) \end{cases}$$

$$\text{y sea: } a_e = \ddot{e} - e \dot{\theta}^2 = a_e(t) \quad (**)$$

se desea pasar de  $a_e(t)$  a  $a_e(\theta)$ . Para ello, de (\*):

$$\dot{\theta} = \frac{2\dot{S}}{e^2} = \frac{\lambda}{e^2} \quad \text{con } \lambda = 2\dot{S} = \text{Constante de Binet}$$

y como  $e = e(\theta)$ , ya se conoce, el segundo sumando de la (\*\*) en función de  $\theta$ . Para el primer sumando:

$$\text{es } e = e[\theta(t)]$$

$$\text{luego: } \dot{e} = \frac{de}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Así: } \dot{e} = \frac{\lambda}{e^2} \cdot \frac{de}{d\theta} = \lambda e^{-2} \frac{de}{d\theta} = -\lambda \frac{d(1/e)}{d\theta}$$

$$\text{Ahora: } \ddot{e} = \frac{d}{dt} \left[ -\lambda \frac{d(1/e)}{d\theta} \right] = -\lambda \frac{d^2(1/e)}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta} = -\frac{\lambda^2}{e^2} \cdot \frac{d^2(1/e)}{d\theta^2}$$

reemplazando en (\*\*):

$$a_e = -\frac{\lambda^2}{e^2} \cdot \frac{d^2 1/e}{d\theta^2} - e \frac{\lambda^2}{e^4} = -\frac{\lambda^2}{e^2} \left[ \frac{d^2 (1/e)}{d\theta^2} + \frac{1}{e} \right] \quad (1.23)$$

Esta expresión se denomina fórmula de Binet y resulta de aplicación inmediata para resolver los problemas en movimientos centrales. Permite calcular en un movimiento central, cuya trayectoria y velocidad areolar son conocidas, el valor de aceleración (radial) del móvil en función del argumento  $\theta$  para cada posición.

Es interesante también conocer la expresión de la velocidad en función de  $\theta$ :  
Sabiendo que:

$$\vec{V} = \dot{e} \hat{e} + e \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = (\dot{e})^2 + (e \dot{\theta})^2$$

introduciendo los valores de  $\dot{e}$  y  $e\dot{\theta}$  en función de  $\theta$  recientemente encontrados:

$$V^2 = \lambda^2 \left( \frac{d1/e}{d\theta} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{e^2} = \lambda^2 \left[ \left( \frac{d1/e}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{e^2} \right] \quad (1.24)$$

Se presenta a continuación una importante aplicación de esta teoría.

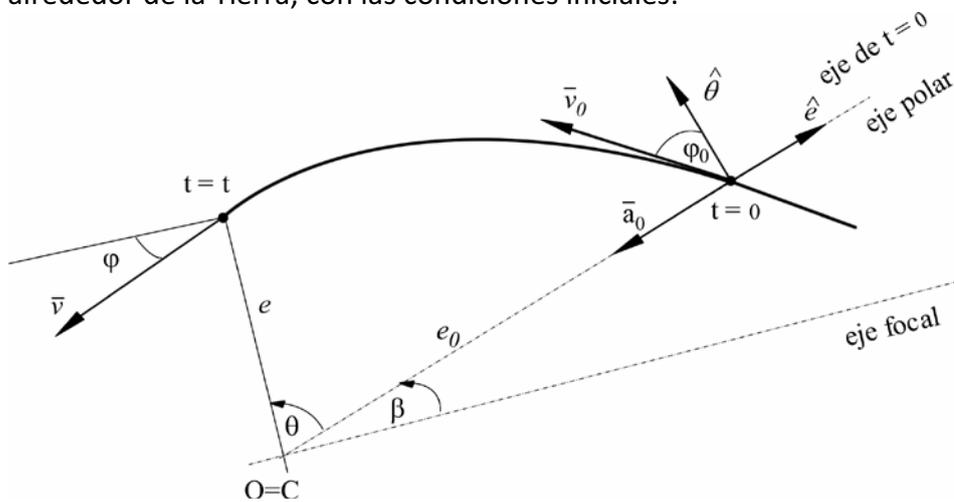
Movimiento de Kepler:

Uno de los movimientos centrales más interesantes es el llamado kepleriano que cumplen los planetas alrededor del sol.

El problema consiste en determinar la trayectoria de un punto material atraído por un centro fijo en razón inversa al cuadrado de la distancia, es decir:

$$\vec{a}_e = -\frac{k}{e^2} \hat{e} \quad (1.25)$$

El problema enunciado puede pensarse como la puesta en órbita de un satélite alrededor de la Tierra, con las condiciones iniciales:



$$\text{Datos } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \theta = \theta_o = 0 \\ \vec{V} = \vec{V}_o \\ \varphi = \varphi_o \\ \vec{e} = \vec{e}_o \\ \vec{a}_{eo} = -\frac{k}{e_o^2} \hat{e} \end{array} \right.$$

La componente radial del vector aceleración (1.25) será la (1.23)

$$-\frac{\lambda^2}{e^2} \left[ \frac{d^2 1/e}{d\theta^2} + \frac{1}{e} \right] = -\frac{k}{e^2}$$

$$\text{ó} \quad \frac{d^2 1/e}{d\theta^2} + \frac{1}{e} = \frac{k}{\lambda^2} \quad (1.26)$$

Ecuación diferencial del movimiento (ordinaria, de segundo orden, primer grado, no homogénea)

Se propone el siguiente cambio de variables:

$$\frac{1}{e} = \xi(\theta)$$

$$\text{luego:} \quad \xi'' + \xi = K \quad (1.26')$$

Cuya solución general es:

$$\xi(\theta) = \xi_h + \xi_p$$

para la particular, se elige:  $\xi_p = \text{Cte.} = k/\lambda^2$

Luego la solución general de (26') es:

$$\xi(\theta) = \frac{1}{e} = A \cos(\theta + \beta) + \frac{k}{\lambda^2}$$

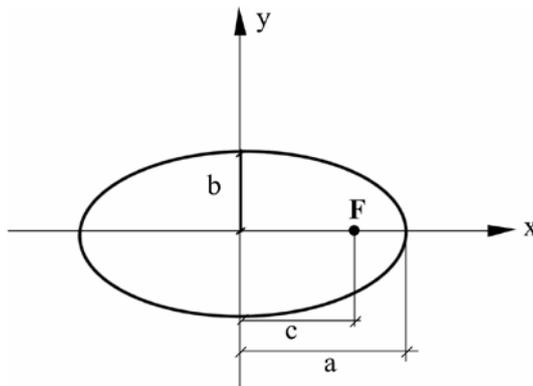
$$\text{ó} \quad e = \frac{\lambda^2 / k}{1 + \frac{A\lambda^2}{k} \cos(\theta + \beta)} \quad (1.27)$$

Esta es la ecuación de una cónica en coordenadas polares referida a un foco y cuyo eje focal forma un ángulo  $\beta$  con el eje polar.

Donde:

$$\frac{\lambda^2}{k} = P = \frac{b^2}{a} \text{ parámetro de la cónica.}$$

$$\frac{A\lambda^2}{k} = \varepsilon = \frac{c}{a} \text{ excentricidad de la cónica}$$



Recordando que:

$$\text{Si } \varepsilon = 0 \rightarrow \text{Circunferencia}$$

$$\varepsilon < 1 \rightarrow \text{Elipse}$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow \text{Parábola}$$

$$\varepsilon > 1 \rightarrow \text{Hipérbola}$$

Para conocer  $e = e(\theta)$  con la (1.27), deben determinarse  $\lambda$ ,  $A$  y  $\beta$

Cálculo de  $\lambda$ :

$$\lambda = 2\dot{S} = 2 \cdot \frac{1}{2} e^2 \dot{\theta} = e \cdot \underbrace{e \dot{\theta}}_{\vec{v}_\theta} = e \cdot V \cos \varphi$$

pero siendo  $\dot{S} = \text{cte.}$ , su valor se mantendrá para toda posición del movimiento. En particular para  $t = 0$ , se tendrá:

$$\lambda = e_o \cdot V_o \cos \varphi_o$$

Cálculo de  $A$  y  $\beta$ :

Se necesitan dos ecuaciones; la (1.27) es una. Para la otra, se expresa (1.24) en función de las incógnitas:

$$\text{se tiene: } \frac{1}{e} = A \cdot \cos(\theta + \beta) + \frac{k}{\lambda^2}$$

luego:  $\frac{1}{e^2} = A^2 \cos^2(\theta + \beta) + \frac{k^2}{\lambda^4} + \frac{2kA}{\lambda^2} \cos(\theta + \beta)$

y también:  $\frac{d(1/e)}{d\theta} = -A \operatorname{sen}(\theta + \beta)$

reemplazando en (1.24):

$$V^2 = \lambda^2 A^2 + \frac{k^2}{\lambda^2} + 2Ak \cos(\theta + \beta) \quad (1.28)$$

Recurriendo a las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} e_o = \frac{\lambda^2/k}{1 + \frac{A\lambda^2}{k} \cos\beta} & (1.27') \\ V_o^2 = \lambda^2 A^2 + k^2/\lambda^2 + 2Ak \cos\beta & (1.28') \end{cases}$$

De (1.27')  $A \cos \beta = \frac{1}{e_o} - \frac{k}{\lambda^2}$  (1.27'')

en (1.28')

$$A = \left\{ \frac{V_o^2 - \frac{k^2}{\lambda^2} - 2k \left( \frac{\lambda^2}{ke_o} - 1 \right) \frac{k}{\lambda^2}}{\lambda^2} \right\}^{1/2}$$

Luego:  $\beta = \arccos \left( \frac{1/e_o - k/\lambda^2}{A} \right)$

Con lo que se conocen A y  $\beta$ .

Velocidades orbitales:

Para analizar las velocidades de lanzamiento correspondientes a las diferentes órbitas posibles, es conveniente anular el ángulo  $\beta$  entre los ejes focal y polar, haciéndolos coincidir. En ese caso, la ecuación (1.27) se reduce a:

$$e = \frac{\lambda^2/k}{1 + \varepsilon \cos\theta} \quad (1.27. \text{ bis})$$

Si se elige la velocidad  $V_0$  para que la órbita resulte circular, es decir  $\epsilon = 0$ , de la anterior expresión resulta:

$$e = \frac{\lambda^2}{k} = \text{cte}$$

Y como es  $\lambda = e_o \cdot V_o \cos \varphi_o$ , para  $\varphi_o = 0$  resulta  $\lambda = e_o \cdot V_o$ , de donde

$$V_o^2 = \frac{k}{e_o}$$

por debajo de esta velocidad inicial el vehículo no entrará en órbita, sino que caerá describiendo una especie de espiral. Entre este valor de la velocidad y el correspondiente a la parábola, la trayectoria será una elipse. Si  $\epsilon = 1$ , de la ecuación (1.27.bis) se tiene

$$e = \frac{\lambda^2}{2k} = \text{cte}$$

Y procediendo de la misma manera que antes, resulta

$$V_o^2 = \frac{2k}{e_o}$$

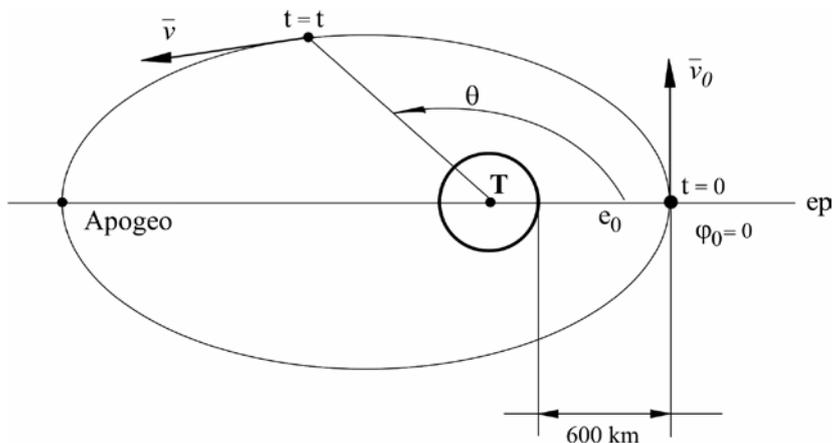
Para este valor de  $V_0$  la trayectoria será abierta y el vehículo no regresará, motivo por el cual se la denomina velocidad de escape. Si  $\epsilon > 1$  la trayectoria será una hipérbola, para la cual un foco actúa como centro de atracción y el otro como centro de repulsión, por ello para una aceleración del tipo

$$\vec{a} = -\frac{k}{e^2} \hat{e}$$

sólo puede usarse la rama que hace que el movimiento sea de atracción.

Ejemplo de Aplicación:

Un satélite es colocado en vuelo libre a 600 km de la superficie de la Tierra y paralelamente a ella (ver figura) con una velocidad inicial de 8333,33m/s. Suponiendo que el radio es  $R_t = 6378$  km y que  $k = 39,88 \times 10^{13} \text{ m}^3 / \text{s}^2$ .



Determinar: a) velocidad areolar, b) excentricidad de la trayectoria orbital y c) velocidad del satélite en el apogeo.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda &= 2 \dot{S} = e_o V_o \cos \varphi_o = (6378 \text{ km} + 600 \text{ km}) \cdot 8,3333 \text{ Km} / \text{s} \\ &= 58150 \text{ Km}^2 / \text{s}. \end{aligned}$$

$$\dot{S} = \lambda / 2 = 29075 \text{ Km}^2 / \text{s}$$

b)  $\varepsilon = \frac{A\lambda^2}{k}$  Debemos determinar A. Del sistema (1.27' – 1.28'), y teniendo en cuenta que para este sistema coordenado es  $\beta = 0$ , resulta:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{e_o} - \frac{k}{\lambda^2} = \frac{1}{6978 \text{ Km}} - \frac{39,88 \times 10^4 \text{ Km}^3 / \text{s}^2}{58150^2 \text{ Km}^4 / \text{s}^2} = \\ &= 1,43 \times 10^{-4} - 1,18 \times 10^{-4} = 0,253 \times 10^{-4} / \text{Km}. \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{0,253 \times 10^{-4} \cdot (58150 \text{ Km}^2 / \text{s}^2)^2}{39,88 \times 10^4 \text{ Km}^3 / \text{s}^2} = 0,215$$

$\varepsilon < 1 \Rightarrow$  elipse

$$\text{c) } V^2 = \lambda^2 A^2 + k^2 / \lambda^2 + 2Ak \cos \theta$$

$$\begin{aligned} V_{apg}^2 &= 58150^2 (0,253 \times 10^{-4})^2 + \frac{(39,88 \times 10^4)^2}{58150^2} + \\ &+ 2 \cdot 0,253 \times 10^{-4} \cdot 39,88 \times 10^4 \cdot \cos \pi \\ &= 2,1644 + 47,03 - 20,18 = 29,019 \text{ Km}^2 / \text{s}^2. \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{29,019} = 5,386 \text{ Km} / \text{s} = 5386 \text{ m} / \text{s}.$$