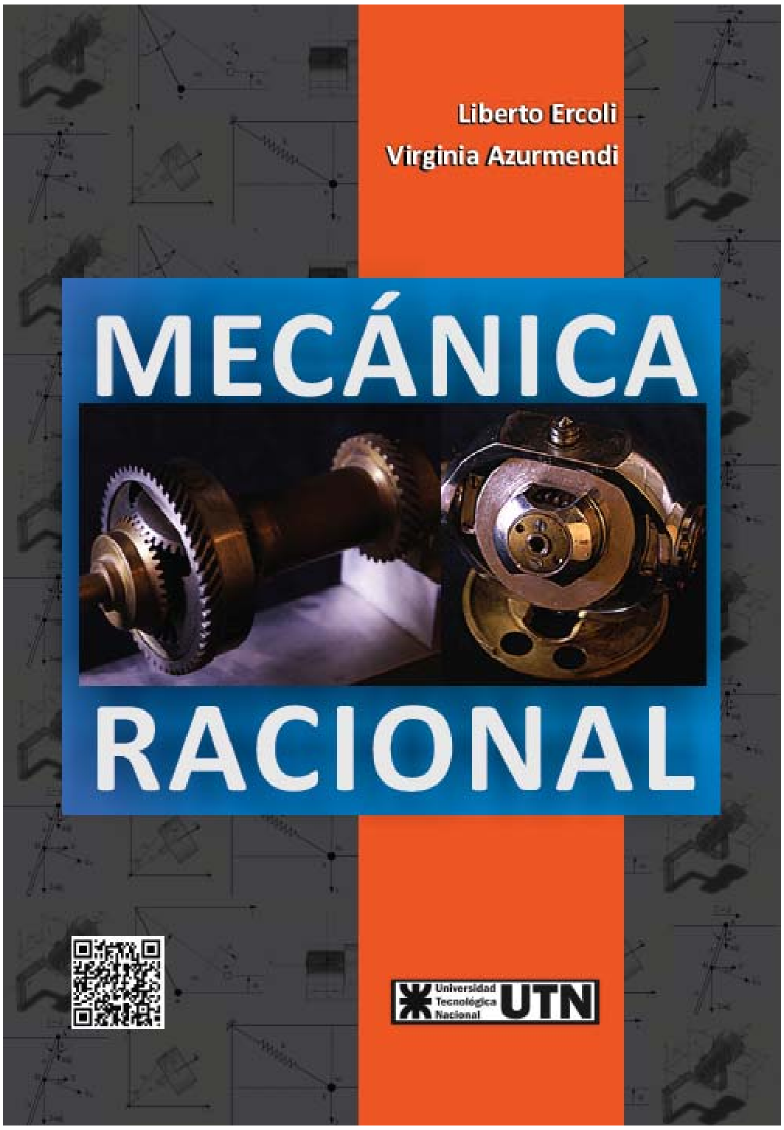
Editorial de la
Universidad Tecnológica Nacional – U.T.N.
Argentina



Capítulo II

Cinemática de los Sistemas de Puntos

Capítulo 2

CINEMÁTICA DE SISTEMAS DE PUNTOS

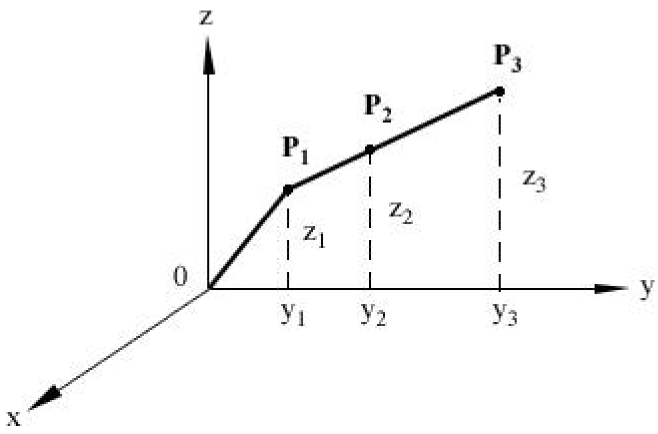
2. CINEMATICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS

Cuando un conjunto de partículas se mueven ligadas por ciertas relaciones se dice que constituyen un sistema. Éste puede ser discreto o continuo según esté constituido por una cantidad finita o infinita de puntos. Cuando se trata de determinar la posición de todos los puntos de un sistema, en apariencia se necesitarían tantos parámetros como puntos materiales tenga el sistema por tres P_i (x_i, y_i, z_i), pero como los puntos materiales están ligados por ciertas relaciones entre sus coordenadas (o parámetros), dicho número será mucho menor.

2.1. Definiciones:

Se denomina configuración a una posición del sistema material y conjunto de coordenadas del sistema al número de coordenadas (m) o parámetros necesarios para determinar su configuración.
Como se ha visto en el capítulo anterior, puede emplearse una gran variedad de coordenadas. Así, por conveniencia, se usa la letra q como símbolo general para representar coordenadas sin importar cual sea su naturaleza. Por lo tanto, q se denomina coordenada generalizada y frecuentemente se indicarán las m coordenadas que se necesitan para especificar la configuración de un sistema como q_1, q_2, … , q_m.
Reciben el nombre de condiciones de restricción, de ligadura o de vínculo las (n) relaciones que se establecen entre las coordenadas o parámetros, ya que al relacionarlas entre ellas se establecen trabas a su variabilidad, o lo que es lo mismo, a la movilidad del sistema.
Se denomina coordenadas libres (k) del sistema material a la diferencia que existe entre el conjunto de coordenadas del sistema y el conjunto de condiciones de vínculo (k = m - n). A ese número, el cual resulta independiente del sistema de coordenadas adoptado, se lo llama grados de libertad del sistema. (k = gl) y son el número de coordenadas independientes (sin incluir el tiempo) que se requieren para especificar completamente la posición de todas y cada una de las partículas o partes componentes del sistema. Es interesante notar que los parámetros o coordenadas libres se eligen a voluntad entre las variables del problema.

Ejemplo: sean tres puntos que forman un sistema material en el cual las distancias entre ellos deberán permanecer constantes. Se tiene:



1º) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

2º) $d_{1-2} = cte.$
$d_{2-3} = cte.$
$d_{o-1} = cte.$

a) El conjunto de coordenadas del sistema, será:

$$m = 6 \begin{cases} y_1, \ z_1 \\ y_2, z_2 \\ y_3, z_3 \end{cases} \tag{2.1}$$

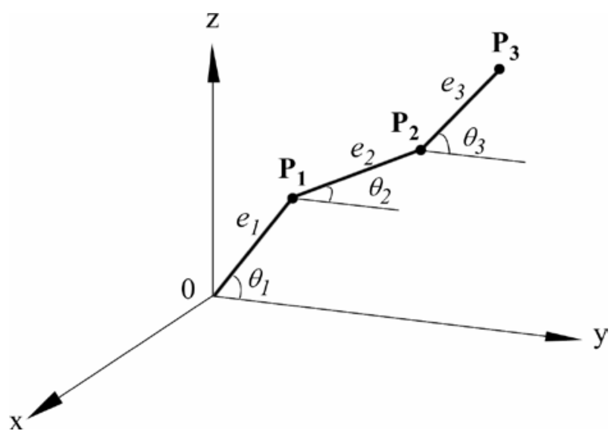
b) Las condiciones de vínculo:

$$n = 3 \begin{cases} (z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d_{12}^2 \\ (z_3 - z_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = d_{23}^2 \\ z_1^{\ 2} + y_1^2 = d_{o1}^2 \end{cases} \tag{2.2}$$

c) Los parámetros libres: k = m - n = 6 - 3 = 3 gl

Esto significa que en (2.1) pueden tomarse a voluntad tres coordenadas como libres, pero las otras tres quedan dependientes de éstas. Es decir, si se da una variación (movimiento del sistema) a las libres, las dependientes se moverán obligatoriamente de determinada manera compatible con las condiciones de vínculo (2.2) impuestas.

Si se analiza este mismo sistema en coordenadas generalizadas (q):



Aquí e_1, e_2, y e_3 no son parámetros.

a) m = $q_j = \theta_1, \theta_2, \theta_3 (j = 1,2,3)$
b) n = 0
c) k = 3 - 0 = 3 gl

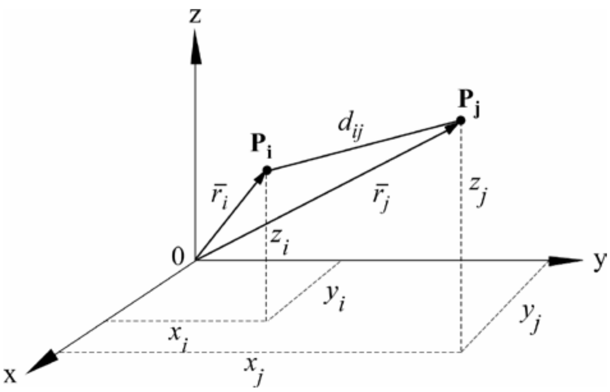
Se observa que los grados de libertad son independientes del sistema de coordenadas utilizado.

Cuando las restricciones pueden expresarse en formas algebraicas sencillas del tipo de las anteriores, se denominan holónomas, y en ellas las ecuaciones de ligadura o de vínculo pueden expresarse en función de las coordenadas solamente, o de las coordenadas y el tiempo si los marcos de referencia son móviles; en éstas, el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad. Existe un grupo de problemas para los que las restricciones resultan ser ecuaciones diferenciales no integrables que se denominan no holónomas, los cuales no serán tratados en este curso.

En los sistemas móviles siempre resulta m > n dado que los gl representan los distintos grados de movilidad del sistema por ser el número de parámetros libres que pueden variarse en forma arbitraria. Se los denomina sistemas móviles o mecanismos. Cuando m = n, el sistema material queda inmóvil por cuanto no habrá parámetros libres y las coordenadas del sistema resultarán de resolver el sistema de ecuaciones formado por las condiciones de vínculo. Son los llamados sistemas isostáticos. Existen sistemas materiales donde m < n, en este caso tampoco habrá parámetros libres y el sistema seguirá siendo inmóvil. Son los sistemas hiperestáticos. Desde el punto de vista cinemático los dos últimos no tienen aplicación. Este curso se orientará hacia el estudio de los primeros.

2.2. Sistemas materiales rígidos

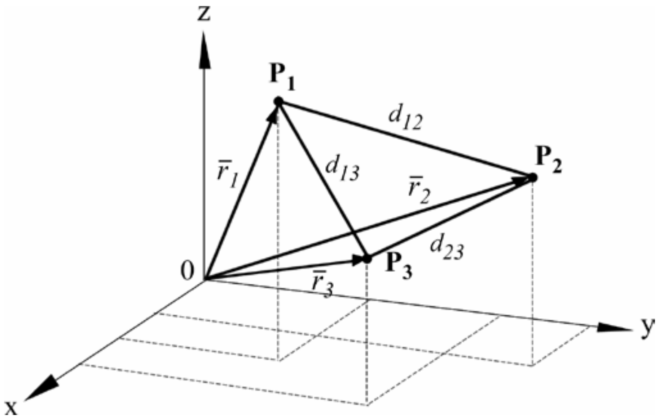
Cuando un sistema de puntos materiales se mueve de forma tal que la distancia relativa entre los distintos puntos permanece invariable se dice que el mismo es rígido. Tal sistema se denomina cuerpo, chapa o barra según si los puntos materiales se distribuyen en el espacio, sobre una superficie o sobre una línea respectivamente. En estos sistemas, la condición de vínculo fundamental es la de rigidez, conocida comúnmente como condición geométrica de rigidez:



$$\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)^2 = \vec{r}_{ij}^{\,2} = d_{ij}^2 = cte. \qquad (2.3)$$

<u>Grados de libertad de un cuerpo libre en el espacio.</u> Tomando tres puntos no alineados de manera de poder contar con un plano que sirva como referencia para ubicar cualquier otro punto del sistema rígido, entre dichos tres puntos se pueden formular tres condiciones geométricas de rigidez:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = d_{12}^2 = cte.$$
$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 = d_{13}^2 = cte.$$
$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2 = d_{23}^2 = cte.$$



De estas expresiones se obtienen las siguientes tres ecuaciones de vínculo:

$$n = 3 \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d_{12}^2 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = d_{13}^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = d_{23}^2 \end{cases}$$

de las cuales aparecen nueve parámetros del sistema.

$$\text{Conjunto de coordenadas } m = 9 \quad \begin{cases} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{cases}$$

Luego, los parámetros libres: k = m - n = 9 - 3 = 6 gl
La cantidad 6 representa el número de parámetros libres o grados de libertad del sistema rígido en el espacio.

<u>Condición cinemática de rigidez</u>
Teniendo en cuenta la condición geométrica de rigidez:

$$(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2 = d_{ij}^2 = cte.$$

y derivando con respecto al tiempo:

$$2\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)\cdot\left(\frac{d\vec{r}_j}{dt} - \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = 0$$

ordenando:

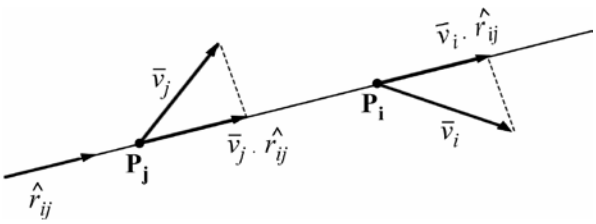
$$\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)\cdot\vec{V}_j = \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)\cdot\vec{V}_i$$

Dividiendo m.a m. por $d_{ij} = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|$

$$\vec{V}_j\cdot\hat{r}_{ij} = \vec{V}_i\cdot\hat{r}_{ij} \qquad (2.4)$$

con: $\hat{r}_{i\,j} = \dfrac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|}$

La (2.4) recibe el nombre de condición cinemática de rigidez y expresa que si un sistema material se desplaza rígidamente, las velocidades de dos puntos cualesquiera del mismo proyectada sobre la dirección que ellos determinan son iguales. Gráficamente:



2.3. Movimientos de los sistemas rígidos

Un sistema material rígido en movimiento puede considerarse en uno de los siguientes estados:

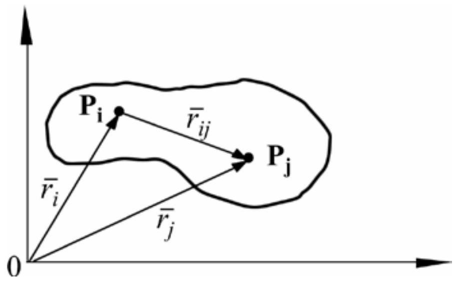
$$\text{Movimientos de los Sistemas Materiales Rígidos}\begin{cases} \text{a) Estados simples} \begin{cases}\text{a.1) Traslación}\\ \text{a.2) Rotación}\end{cases} \\ \text{b) Estados compuestos} \begin{cases}\text{b.1) Suma de Traslaciones}\\ \text{b.2) Suma de Rotaciones}\\ \text{b.3) Suma de Traslaciones + Suma de Rotaciones}\end{cases}\end{cases}$$

Se estudiarán a continuación cada uno de estos estados.

a. Estudio de los movimientos simples:

a.1) Movimiento de Traslación:

Un sistema rígido se encuentra en movimiento de traslación cuando el vector posición relativo entre dos puntos del mismo permanece constante:

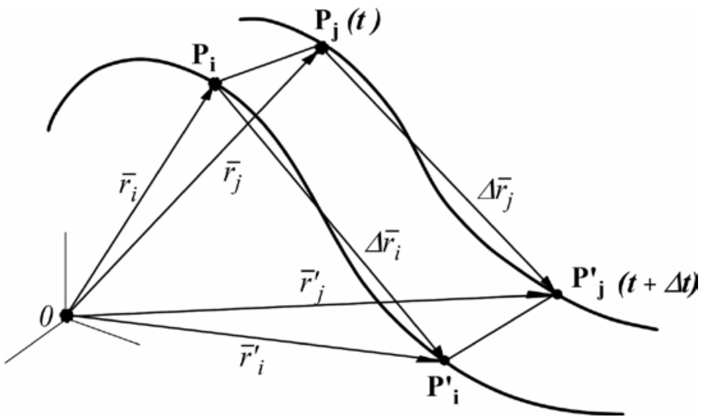


$\vec r_j - \vec r_i = \vec r_{ij}$ = vector constante (2.5)

Es decir que un segmento definido por dos puntos de un cuerpo permanece paralelo a sí mismo durante el movimiento de traslación.

En un movimiento de este tipo se cumple:

1) Las trayectorias de todos los puntos del sistema son congruentes, es decir, son idénticas pero se dan en distintos lugares del espacio, son superponibles:



de (2.3)

$\vec r_j - \vec r_i = \vec r_j' - \vec r_i'$ = vector cte.

$\therefore \quad \vec r_i' - \vec r_i = \vec r_j' - \vec r_j$

ó $\Delta \vec r_i = \Delta \vec r_j$

si

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta \vec r_i \equiv d\vec r_i$

$\Delta \vec r_j \equiv d\vec r_j$

y

$d\vec r_i = d\vec r_j$

Si los desplazamientos elementales son idénticos; al integrar, las trayectorias diferirán en una constante (serán congruentes).

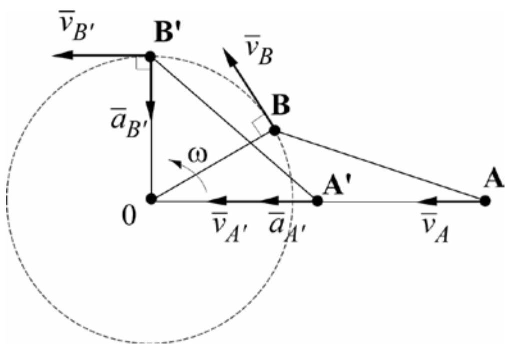
2) En el movimiento de traslación todos los puntos tienen el mismo vector velocidad.

Tomando $\Delta \vec r_i = \Delta \vec r_j$ y formando el cociente incremental: $\dfrac{\Delta \vec r_i}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \vec r_j}{\Delta t}$

aplicando límites, cuando $\Delta t \to 0,$ resulta

$$\vec V_i(t) = \vec V_j(t) \tag{2.6}$$

Luego, si todos los puntos tienen la misma velocidad, ésta estará representada por un vector libre llamado vector traslación $\vec{\tau}$ (t) cuyo módulo, dirección y sentido es el de la velocidad de cualquier punto del sistema. Cuando esta propiedad se cumple para un solo instante, se dice que la traslación es instantánea.
Un ejemplo característico de este último caso es el mecanismo biela-manivela. En la figura siguiente se observa que en la posición OBA el movimiento no es de traslación ya que los vectores velocidad de los puntos A y B son distintos, mientras que en la posición OB'A' hay traslación instantánea porque los vectores velocidad de A'y B' son iguales.



3) En el movimiento de traslación todos los puntos tienen el mismo vector aceleración. Derivando (2.6)

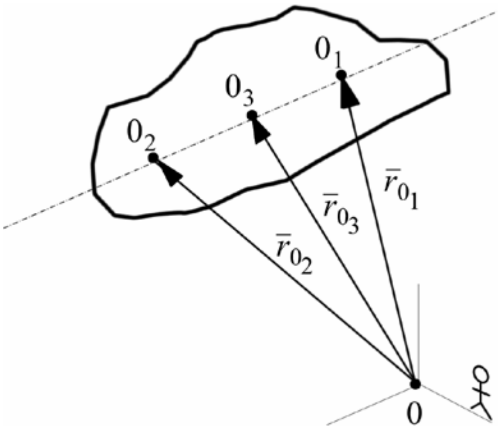
$$\vec{a}_i = \vec{a}_j \tag{2.7}$$

Por lo tanto, el vector $\vec{a}$ en este movimiento también está representado por un vector libre llamado vector aceleración de traslación. $\left(\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right)$

Esta propiedad no se cumple en la traslación instantánea. (ver ejemplo biela-manivela)

a.2) Movimiento de Rotación:

Se dice que un cuerpo rígido se encuentra en este movimiento cuando dos de sus puntos permanecen fijos durante el mismo respecto a un observador situado en 0, perteneciente al marco de referencia. Sean esos los puntos 0_1 y 0_2 del gráfico:



$$\vec{V}_{o1} = \vec{V}_{o2} = \vec{0}$$

En este caso serán fijos todos los puntos pertenecientes a la recta determinada por 0_1 y 0_2. Dicha recta recibe el nombre de <u>eje de rotación</u>.

Tomando un tercer punto 0_3 de dicho eje:

$$\vec{r}_{o3} - \vec{r}_{o2} = k\left(\vec{r}_{o1} - \vec{r}_{o2}\right)$$

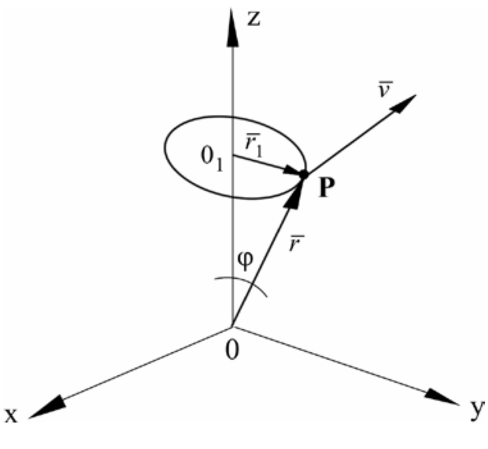
Con k número real cualquiera. Derivando ambos miembros:

$$\frac{d\vec{r}_{o3}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{o2}}{dt} = k\left(\frac{d\vec{r}_{o1}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{o2}}{dt}\right) \Rightarrow \vec{V}_{o3} - \vec{V}_{o2} = k\left(\vec{V}_{o1} - \vec{V}_{o2}\right) = \vec{0}$$

Luego $\vec{V}_{o3} = \vec{0}$, como se quería demostrar.

Se demostrará ahora que en un movimiento de rotación la velocidad de un punto del cuerpo es normal al plano determinado por el punto y el eje de rotación. Considerando para ello un punto P del sistema rígido cuyo eje de rotación está dado por 00_1:

Así $\vec{V}_o = \vec{V}_{o1} = \vec{0}$



Aplicando la condición cinemática de rigidez para el punto P con respecto al 0 y al 0_1

$$\vec{V} \cdot \vec{r}_1 = \vec{V}_{o1} \cdot \vec{r}_1 = 0$$
$$\vec{V} \cdot \vec{r} = \vec{V}_o \cdot \vec{r} \quad = 0$$

de donde se deduce que $\vec{V} \perp \vec{r}$ y $\vec{r}_1$ como se quería demostrar.
Esta propiedad unida a la condición geométrica de rigidez dice que en el movimiento de rotación cada punto del sistema rígido realiza movimientos circulares con centro en el eje de rotación y en planos normales al mismo. Es decir que si ω es la velocidad angular de dicho movimiento, el módulo de la velocidad de un punto cualquiera es:

$$\left|\vec{V}\right| = \omega \, r_1$$

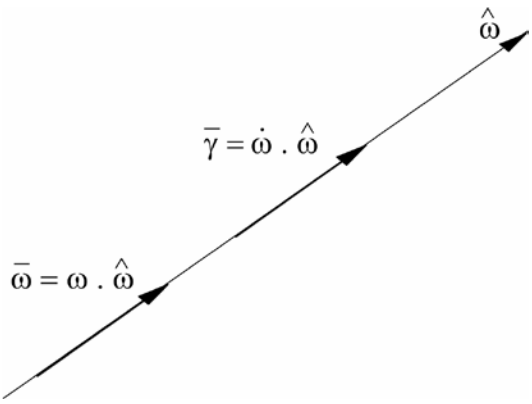
Es de gran interés en Mecánica darle al movimiento de rotación una interpretación vectorial definiendo un vector rotación $\vec{\omega}$ cuyo módulo es la velocidad angular del movimiento circular de cualquiera de sus puntos, cuya dirección es la del eje de rotación y cuyo sentido responde a la convención de terna adoptada (derecha o izquierda):

$$\vec{\omega} = \omega \, \hat{\omega} = \omega \, \hat{k}$$

así

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$
$$\left|\vec{V}\right| = \omega r sen\varphi = \omega r_1$$

Obsérvese que mientras $\vec{\omega}$ es un vector axial (puede desplazarse sobre su recta de acción), $\vec{V}$ resulta ser aplicado (propio de cada punto material del sistema).
Ahora no sólo deberá estudiarse la variación de la velocidad de un punto en el tiempo $(\vec{a})$ sino también la variación de $\vec{\omega}$ en el tiempo $(\vec{\gamma})$. Supóngase para ello un vector rotación en un eje definido por un versor $\hat{\omega}$:



En este caso, $\hat{\omega}$ es un versor constante

$$\vec{\omega} = \omega\hat{\omega}$$
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{\omega} = \vec{\gamma}$$

a este vector se lo llama <u>vector aceleración rotacional o angular</u>.
Más adelante se analizará el caso en que la dirección de $\hat{\omega}$ varía con el tiempo.

La aceleración de un punto cualquiera, será

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) \qquad (2.8)$$

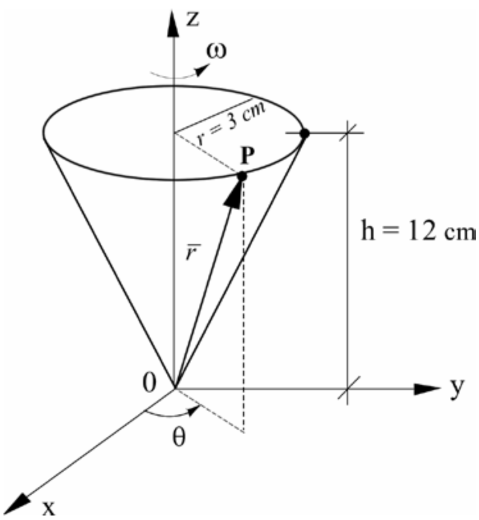
Se acostumbra denominar:

$\vec{\gamma} \wedge \vec{r} =$ aceleración tangencial = $\vec{a}_t$

$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) =$ aceleración normal = $\vec{a}_n$

luego: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

Ejemplo de aplicación:
El cono de la figura gira con ω = 3t + 2 [rad/seg] alrededor del eje $\hat{k}$. Sabiendo que en t = 0, era θ = 0, determinar: a) velocidad y aceleración de P en t = 3 seg; b) ¿Cuántas vueltas habrá girado hasta ese instante?



Solución: a) $\theta = \omega_o t + \frac{\gamma}{2} t^2 = 2t + \frac{3}{2} t^2$

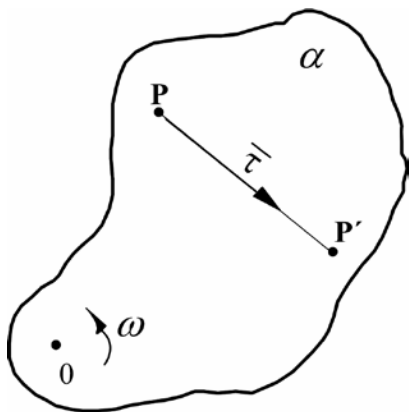
$$\vec{r}(t) = 3(\cos\theta\hat{i} + sen\theta\hat{j}) + 12\hat{k}$$
$$\vec{V}(t) = \vec{\omega}\wedge\vec{r} = (3t+2)\hat{k}\wedge\left[3\left(\cos\theta\hat{i} + sen\theta\hat{j}\right)+12\hat{k}\right]$$
$$\vec{V}(t) = 3(3t+2)\left[\cos\theta\hat{j} - sen\theta\hat{i}\right]$$
$$\theta(3) = 19{,}5rad$$
$$\vec{V}(3) = 3\cdot 11\cdot\left[0{,}79\hat{j} - 0{,}60\hat{i}\right] = -19{,}9\hat{i} + 26\hat{j}[cm/s]$$
$$\vec{a} = \vec{\gamma}\wedge\vec{r} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)$$

$$\vec{a}(t) = 3\hat{k}\wedge\left[3\left(\cos\theta i + sen\theta\hat{j}\right)+12\hat{k}\right] + (3t+2)\hat{k}\wedge 3(3t+2)\left[\cos\theta\hat{j} - sen\theta\hat{i}\right]$$
$$\vec{a}(t) = 9\left(\cos\theta\ \hat{j} - \text{sen}\ \theta\ \hat{i}\right) + 3(3t+2)^2\left(-\cos\theta\ \hat{i} - \text{sen}\ \theta\ \hat{j}\right)$$
$$\vec{a}(3) = 7{,}11\hat{j} - 5{,}4\hat{i} + 363\left(-0{,}79\hat{i} - 0{,}60\hat{j}\right)$$
$$= -292{,}17\hat{i} - 210{,}69\hat{j}\left[cm/s^2\right]$$

b) $\theta(3) = 19{,}5\text{ rad} = 1117{,}26° = 3{,}1\text{ vueltas}.$

b. <u>Estudio de los Movimientos Compuestos</u>

El concepto de composición de movimientos simultáneos sólo tiene aplicación desde el punto de vista de los movimientos relativos; es decir, que un cuerpo tiene un cierto movimiento con respecto a otro cuerpo que a su vez también se mueve.
Así por ejemplo si el punto P de la figura se mueve en el plano α con una traslación hasta la posición P', al mismo tiempo que α gira alrededor de 0, se dirá que P está sometido a la traslación $\vec{\tau}$ <u>relativa al plano α</u> y a la rotación $\vec{\omega}$ de dicho plano (al que pertenece dicho punto y al que arrastra en su movimiento).



b.1. <u>Composición de traslaciones</u>:

Considérese un cuerpo sometido a las traslaciones $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3, \ldots\ \vec{\tau}_n$ simultáneas. Si se analiza un punto P de dicho cuerpo, considerando separadamente los desplazamientos del mismo debido a cada traslación en el mismo intervalo Δt.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r}_1 &= \vec{\tau}_1\ \Delta t \\
\Delta\vec{r}_2 &= \vec{\tau}_2\ \Delta t \\
&\vdots \\
\Delta\vec{r}_n &= \vec{\tau}_n\ \Delta t
\end{aligned}$$

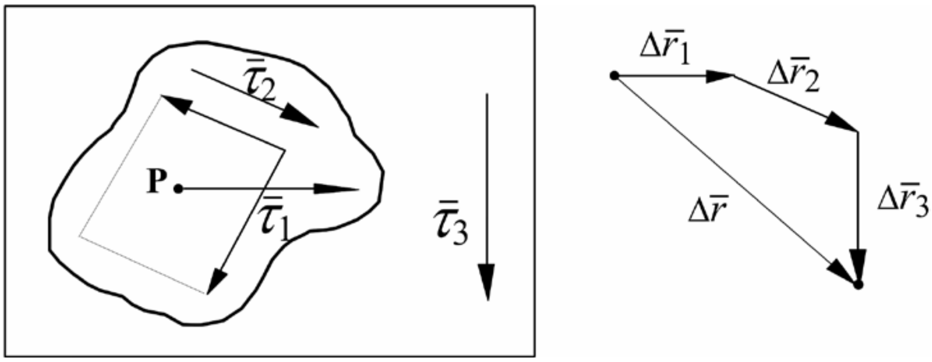
y el desplazamiento total resultante tendrá por expresión:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \ldots + \Delta\vec{r}_n = \sum_{j=1}^{n} \Delta\vec{r}_j$$

es decir: $\Delta\vec{r} = \left(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_n\right)\ \Delta t = \vec{\tau}\ \Delta t$

$$\text{con } \vec{\tau} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\tau}_j \qquad (2.9)$$

Nótese que $\vec{\tau}$, que es la velocidad resultante, es otra traslación. Por lo tanto, el movimiento resultante de varias traslaciones es una traslación. Tal vez sirva al lector para la visualización del tema, el imaginar un punto sobre una hoja de papel que se traslada sobre una mesa en traslación con respecto a una plataforma que a su vez se traslada.



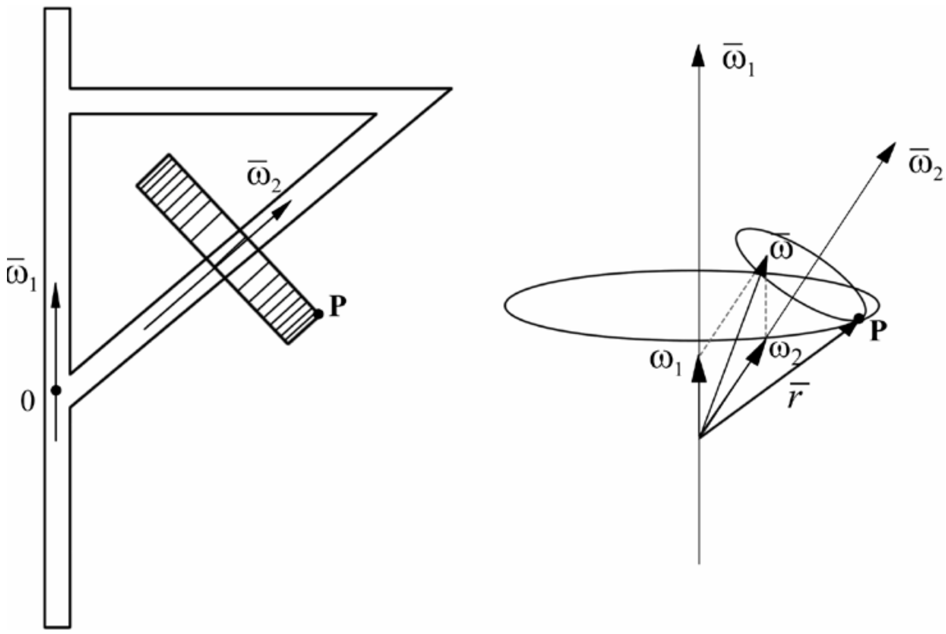
b.2. <u>Composición de Rotaciones</u>

Se analizarán para este estado compuesto de movimientos, distintos casos:

- b.2.1. Rotaciones Concurrentes
- b.2.2. Rotaciones Paralelas
- b.2.3. Par de Rotaciones

b.2.1. <u>Composición de Rotaciones Concurrentes:</u>

Sea un punto P de un cuerpo que gira sobre el eje de $\vec{\omega}_2$ girando éste simultáneamente sobre el de $\vec{\omega}_1$; interesa conocer el tipo de movimiento que resulta.



En tales condiciones, P tendrá las velocidades $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ originadas por $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$, según las siguientes expresiones:

$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}$$
$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}$$

sumando miembro a miembro

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \wedge \vec{r}$$

$$\therefore \qquad \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (2.10)$$

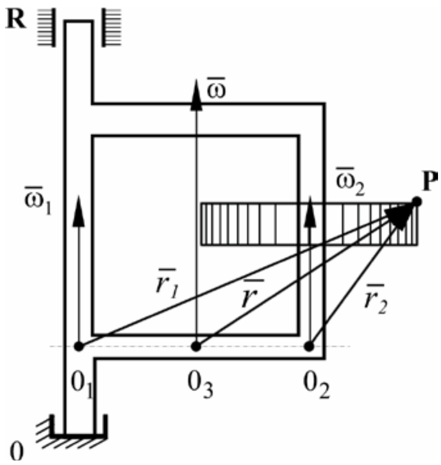
Luego el movimiento resultante es una rotación pero con un solo punto fijo que es el 0. Por lo tanto, el vector rotación resultante $\vec{\omega}$ no es fijo y por ello da lugar a la denominada rotación instantánea. Al punto fijo O se lo llama polo y al movimiento se lo denomina polar.

Generalizando la demostración con $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \cdots, \vec{\omega}_n$ rotaciones concurrentes se deduce que el cuerpo sometido a ellas posee un movimiento de rotación instantánea sobre un eje que pasa por el polo, siendo en cada instante la rotación el vector resultante de las rotaciones dadas.

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i \qquad (2.11)$$

b.2.2. Composición de Rotaciones Paralelas

Considérese el punto P del disco que rota con $\vec{\omega}_2$ sobre sí mismo mientras que el bastidor que lo sostiene gira con $\vec{\omega}_1$ alrededor de su eje fijo $\overline{OR}$.



aquí será:

$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1$$

$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

sumando miembro a miembro

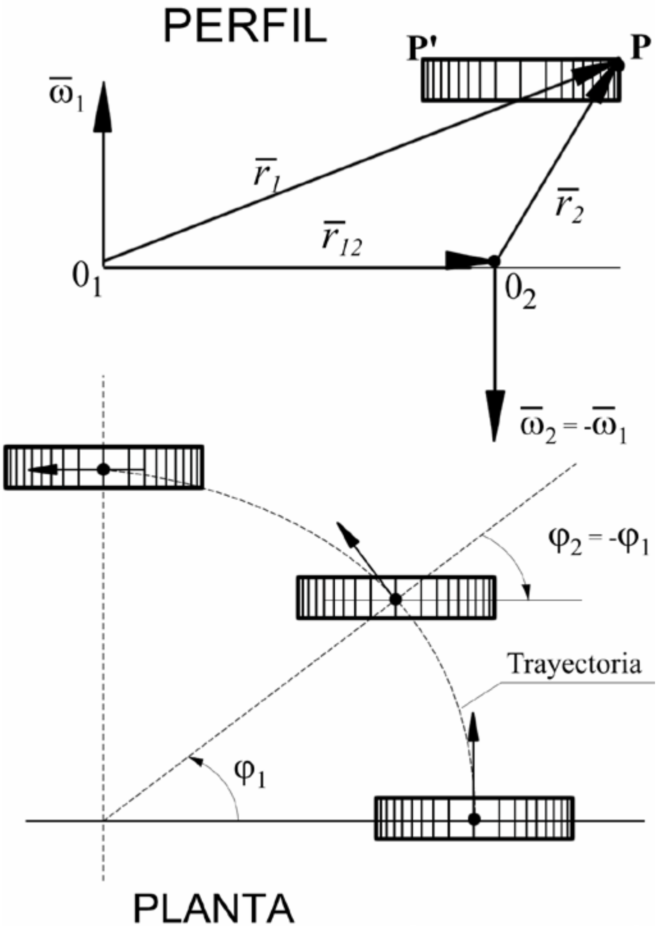
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

$$\vec{V} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

Utilizando la ley de composición para vectores paralelos, podrían sumarse:
$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$, pasando por O_3, luego: $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$.
Por lo tanto, la composición de varias rotaciones paralelas simultáneas origina un movimiento de rotación instantáneo alrededor del eje del vector $\vec{\omega}$ resultante.

b.2.3.Par de Rotaciones:

Si en el sistema rígido anteriormente dibujado las rotaciones $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ a que está sometido el disco son además de paralelas, de la misma intensidad y de sentidos opuestos, se tendrá:



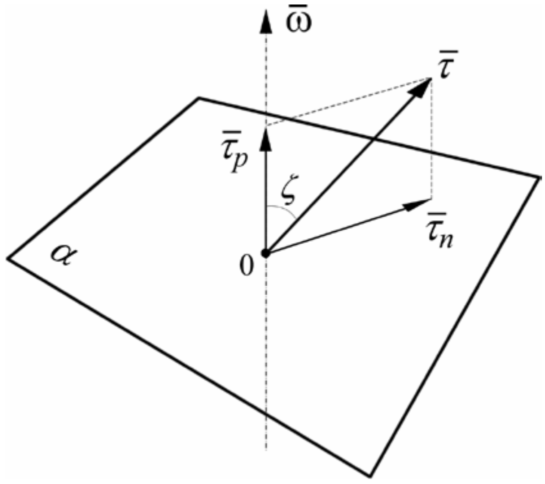
$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1$$
$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2 \\ &= \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 - \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_2 \\ &= \vec{\omega}_1 \wedge \left[\vec{r}_1 + \left(-\vec{r}_2\right)\right] = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{12} = vectorcte\end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \omega_1 \Delta t$$
$$\varphi_2 = -\omega_1 \Delta t = -\varphi_1$$

Por lo tanto, $\vec{V}$ = vector constante en cada posición. Es decir, todos los puntos del disco tienen la misma velocidad, puesto que si se hubiera tomado otro punto para el análisis, por ejemplo el P', el resultado hubiese sido el mismo. Luego, el movimiento resultante es una traslación curvilínea.

b.3. Composición de Traslaciones con Rotaciones:
En la siguiente figura se considera un plano α que es perpendicular al eje de rotación de un cuerpo y que contiene una sección del mismo. Se grafica la rotación $\vec{\omega}$ (resultante de todas las rotaciones que actúan sobre el cuerpo) que pasa por el punto O y la traslación $\vec{\tau}$ (resultante de todas las traslaciones y pares de rotaciones) al que por ser un vector libre se puede representar en el punto O.

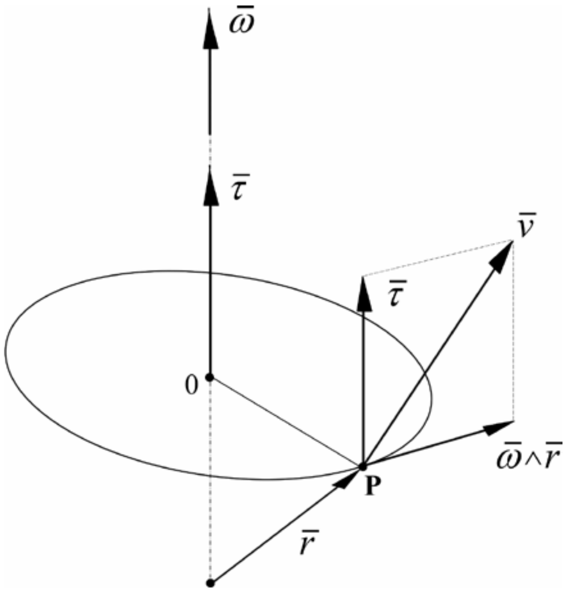


Para simplificar el estudio del problema debido al ángulo ζ que forman $\vec{\omega}$ y $\vec{\tau}$ se descompone a éste en $\vec{\tau}_n$ y $\vec{\tau}_p$, presentándose los siguientes casos:

- b.3.1. Composición de $\vec{\tau}$ paralelo a $\vec{\omega}$
- b.3.2. Composición de $\vec{\tau}$ normal a $\vec{\omega}$

Una vez analizados estos dos casos se volverá al general.

b.3.1. Composición de Traslaciones y Rotaciones paralelas

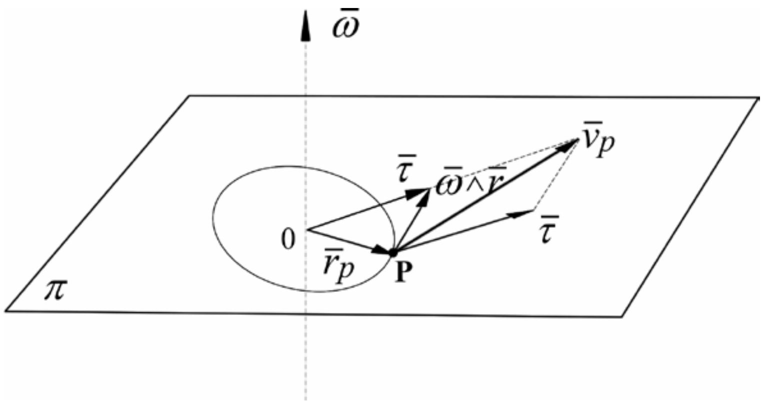


En este caso un punto P del cuerpo describe un movimiento circular con centro en el eje $\vec{\omega}$ y al mismo tiempo el plano de su movimiento se mueve paralelo a sí mismo. Por lo tanto, P describirá un movimiento helicoidal lo que implica que cada punto del sistema rígido realizará un movimiento helicoidal distinto alrededor del mismo eje.
La velocidad resultante de cada punto estará dada por la suma vectorial de la impuesta por la rotación y la impuesta por la traslación

$$\vec{V} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (2.12)$$

b.3.2. Composición de traslación con rotación cuando ambas son perpendiculares.

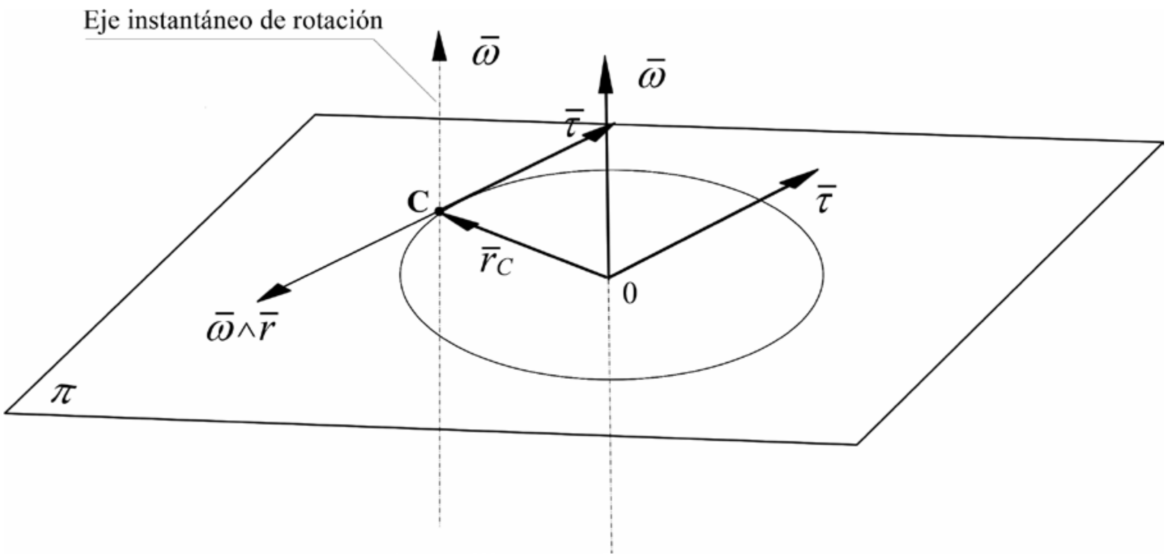
Si se analiza un punto P cualquiera del cuerpo, éste tendrá dos velocidades impuestas simultáneamente por $\vec{\omega}$ y $\vec{\tau}$.



$$\vec{\tau} \in \pi$$
$$\vec{V}_p = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p$$

En este caso, es posible encontrar un punto C para el cual la suma $\vec{\tau} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_c = \vec{0}$

En la siguiente figura se observa que cualquier punto ubicado sobre la recta $\overline{oc}$ posee dos vectores velocidad colineales de sentidos opuestos: uno debido a la traslación y otro a la rotación. Habrá entonces un punto C a una distancia $\vec{r}_c$ desde O para el cual ambos vectores sean iguales y de sentidos opuestos.



Todos los puntos de la normal al plano que pasa por C tendrán velocidad nula. Luego el movimiento resultante será una rotación alrededor de ese eje de velocidades nulas, el cual, por otra parte cambiará de posición con el tiempo debido a que es "arrastrado" por la traslación.
Por lo tanto, se trata de una <u>rotación instantánea</u>. Al punto C se lo denomina <u>centro de rotación instantánea o polo de velocidades</u> y al eje normal al plano π que pasa por C se lo llama <u>eje instantáneo de rotación.</u>

Es de interés ubicar al polo:

$$\vec{V}_c = \vec{\tau} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_c = \vec{0}$$

multiplicando vectorialmente por $\vec{\omega}$ ambos miembros de la igualdad

$$\vec{\omega}\wedge\vec{\tau} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_c\right) = \vec{0}$$

Resolviendo por Gibbs el doble producto vectorial:

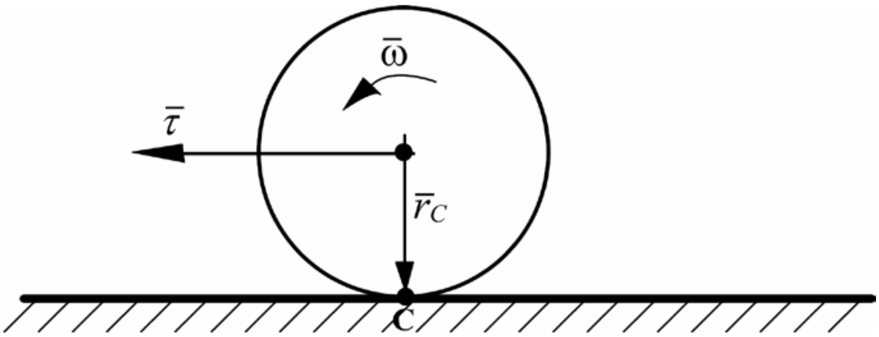
$$\vec{\omega}\wedge\vec{\tau}+\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_c)-\vec{r}_c(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})=\vec{0}$$

y tomando $\quad \vec{\omega}\perp\vec{r}_c \Rightarrow \vec{\omega}\cdot\vec{r}_c=0$

y : $\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}=\omega^2$

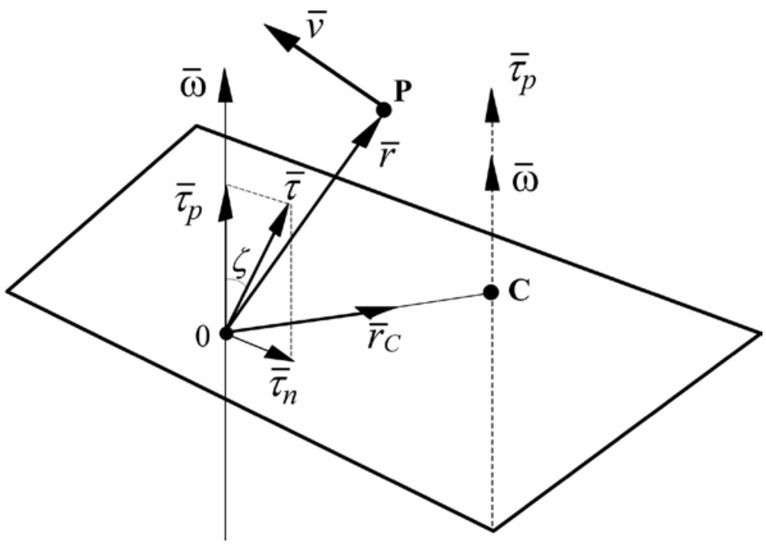
resulta: $$\vec{r}_c=\frac{\vec{\omega}\wedge\vec{\tau}}{\omega^2} \qquad (2.13)$$

Un ejemplo clásico de este movimiento lo constituye la rueda de un vehículo, en la cual el centro instantáneo C se encuentra sobre el pavimento.



Notar que la velocidad absoluta del punto del cuerpo que coincida con el centro instantáneo de rotación es nula en dicho instante, pero su aceleración <u>no</u> lo es. Luego, el centro instantáneo de rotación considerado como punto del cuerpo, <u>no puede</u> ser tomado como centro instantáneo de aceleración nula.

Volviendo ahora al caso general b.3 en que $\vec{\omega}$ y $\vec{\tau}$ <u>forman un ángulo cualquiera</u>, el mismo puede ser analizado por superposición de los dos casos anteriores:



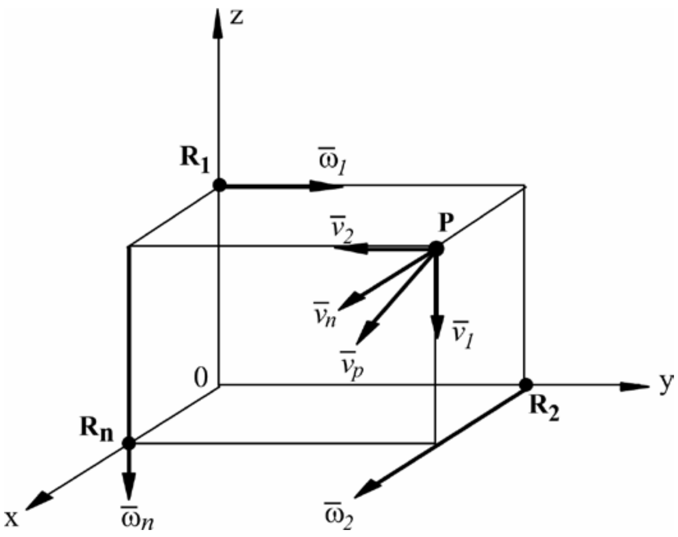
Supóngase en el punto O una rotación $\vec{\omega}$ y una traslación $\vec{\tau}$ que forman entre sí un ángulo ξ.
Componiendo $\vec{\omega}$ con la proyección del vector traslación normal a ella $\vec{\tau}_n$ se obtendrá una rotación instantánea en el centro instantáneo C. Y siendo $\vec{\tau}_P$, la proyección del vector traslación en la dirección de $\vec{\omega}$ un vector libre, puede ser trasladado al punto C, resultando un caso de composición de una rotación instantánea con una traslación paralela ($\vec{\omega} \| \vec{\tau}$).
Luego, se desarrolla un <u>movimiento helicoidal instantáneo</u>, cuyo eje que pasa por C cambia de posición con el tiempo. Este movimiento es el más general que puede tener un sistema rígido.
La velocidad de un punto P cualquiera del cuerpo será:

$$\vec{V} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

y la posición del centro instantáneo: $\vec{r}_c = \dfrac{\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}}{\omega^2}$

b.4. <u>Composición de rotaciones alabeadas</u>

Un caso singular de composición de traslaciones con rotaciones y que merece un tratamiento adecuado es el de las rotaciones alabeadas, es decir, que no se cortan.
Supóngase un cuerpo rígido sometido a un conjunto de estas rotaciones $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \cdots, \vec{\omega}_n$ siendo R_1, R_2, ..., R_n puntos de sus respectivos ejes de rotación. La velocidad de un punto P cualquiera del cuerpo será la suma vectorial de las velocidades que en dicho punto originan las distintas rotaciones:

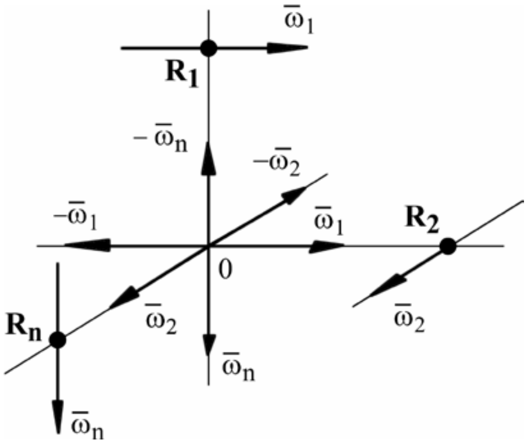


$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1$$
$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_2$$
$$\vdots$$
$$\vec{V}_n = \vec{\omega}_n \wedge \vec{r}_n$$

$$\therefore \vec{V}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i \wedge \vec{r}_i$$

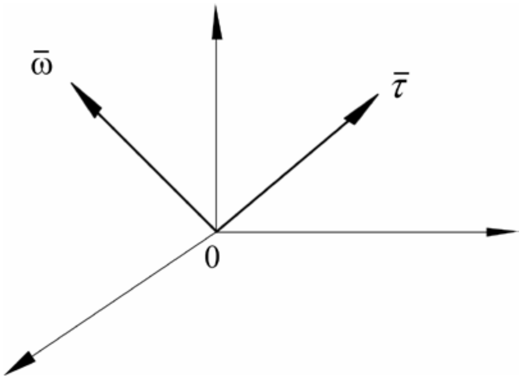
Ahora bien, el procedimiento anterior no suministra información sobre el tipo de movimiento que resulta. Para conocerlo se procede de la siguiente manera: se colocan en el punto 0, dos rotaciones iguales y de sentido contrario a cada una de las existentes. Así, las rotaciones $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \cdots, \vec{\omega}_n$, que pasan por O son concurrentes y admiten una rotación resultante

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$$



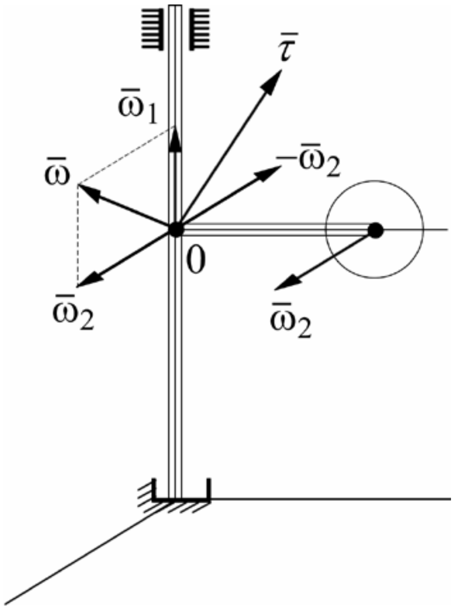
Las rotaciones $-\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_1$ en 0 y R_1 respectivamente, forman un par de rotaciones y por lo tanto dan lugar a una traslación perpendicular al plano que ellas determinan, ocurriendo lo mismo con el resto de los pares así formados. Siendo las traslaciones vectores libres, se pueden llevar al punto 0, donde se tendrán las traslaciones $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \cdots, \vec{\tau}_n$ que admitirán una resultante

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$$



Luego, el problema se reduce a una rotación y a una traslación en el punto 0 que en el caso más general darán lugar a un movimiento helicoidal instantáneo, tal como se estudió en el apartado precedente.

Un ejemplo de lo analizado es el caso del disco de la figura sometido a dos rotaciones alabeadas, cuyo movimiento resultante queda determinado por la composición de una traslación y una rotación.



2.4. Movimiento rototraslatorio

Como se demostró, el más general de todos los movimientos rototraslatorios es el movimiento helicoidal instantáneo o tangente, al que se llega componiendo rotaciones alabeadas o bien una traslación y una rotación que formen entre sí un ángulo cualquiera distinto de 0 o 90°, siendo $\vec{\tau}$ y $\vec{\omega}$ los vectores característicos que definen el movimiento. Conocidos los mismos, es posible determinar la velocidad de cualquier punto:

$$\vec{V} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

A esta expresión, se la denomina forma propia de la ley de distribución de velocidades.

Si en lugar de $\vec{\tau}$ se conociese la velocidad de un punto cualquiera P_1 del cuerpo, podría procederse de la siguiente manera:

$$\vec{V}_1 = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1$$
$$\vec{V}_i = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$$

Restando miembro a miembro

$$\vec{V}_i - \vec{V}_1 = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{r}_i - \vec{r}_1\right)$$

ó

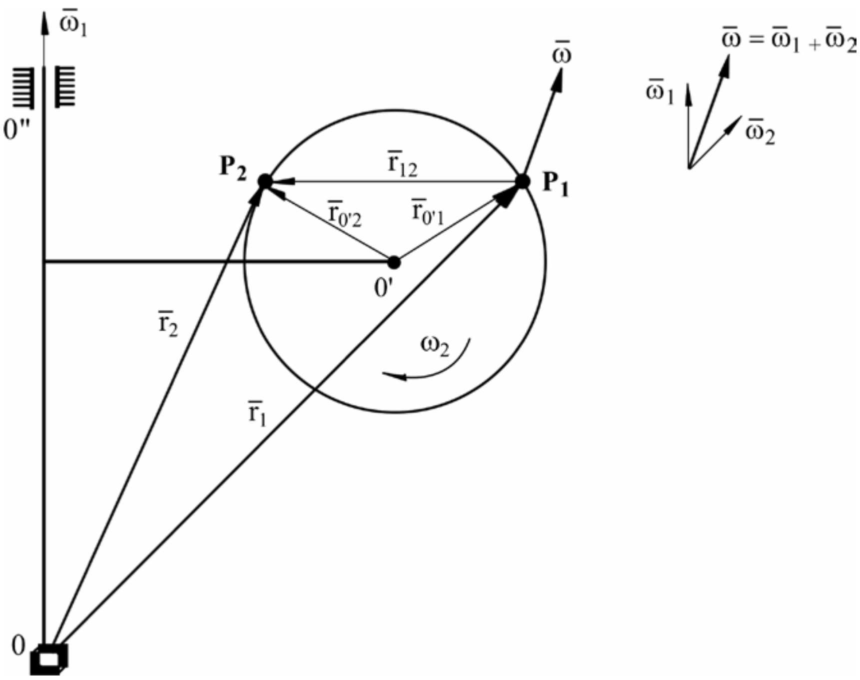
$$\vec{V}_i = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{r}_i - \vec{r}_1\right) \tag{2.14}$$

Se observa que la (2.14) permite encontrar la velocidad de un punto cualquiera P_i en función de la velocidad de otro punto P_1 como si el vector $\vec{\omega}$ pasara por este último. Esta última expresión se denomina forma impropia de la ley de distribución de velocidades, y al punto cuya velocidad se conoce y en función de la cual se calculan las velocidades de los demás puntos del sistema se lo llama centro de reducción del movimiento.

Nótese que el punto P_1 ha sido definido como perteneciente al cuerpo en movimiento. Por ello, la aplicación de esta última expresión implica tomar en cuenta esta condición aún cuando se haya elegido como centro de reducción a un punto que se encuentre fuera de la región del espacio comprendida por el cuerpo; si éste fuera el caso, en la (2.14) deberá colocarse la velocidad de la que estaría animado el punto P_1 si el cuerpo le impusiera su movimiento.

Ejemplo demostrativo:

Sea un disco de radio r que gira con $\vec{\omega}_2$ respecto del bastidor 0 0’ 0” el cual a su vez gira con $\vec{\omega}_1$ alrededor del eje 0 0”.



La velocidad $\vec{V}_1$ del punto P_1 del disco será:

$$\vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{o'1}$$

y la velocidad de un punto cualquiera P_2:

$$\vec{V}_2 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{o'2}$$

Restando miembro a miembro

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) + \vec{\omega}_2 \wedge \left(\vec{r}_{o'2} - \vec{r}_{o'1}\right)$$

pero $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12}$

y

$$\vec{r}_{o'2} - \vec{r}_{o'1} = \vec{r}_{12}$$

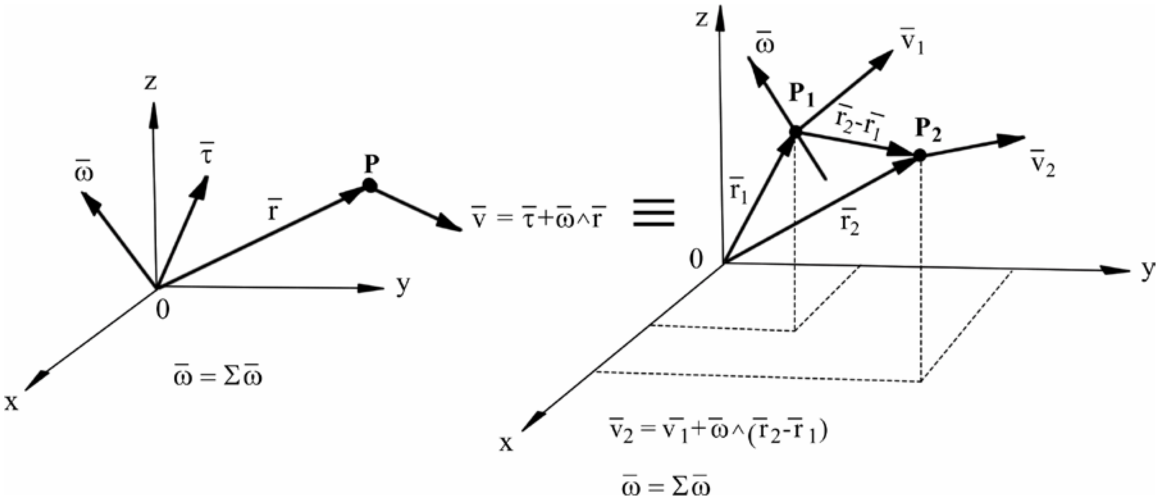
luego $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{12} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{12}$

$$\therefore \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \wedge \vec{r}_{12}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12}$$

Es decir: la velocidad de un punto cualquiera como el P_2 es la del punto P_1 (centro de reducción) más la velocidad que P_2 tendría si $\vec{\omega}$ pasara por P_1, debido a la rotación $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Nótese que las expresiones propia e impropia, conducen a un único resultado. Gráficamente:



Derivando con respecto al tiempo la (2.12) o la (2.14) puede ser encontrada la <u>ley de distribución de aceleraciones</u> en el movimiento rototraslatorio.

Partiendo de (2.12):

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{V} \qquad \text{(forma propia)}$$

tomando (2.14)

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{V}_1}{dt} + \vec{\gamma} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

o

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right] \qquad (2.15)$$

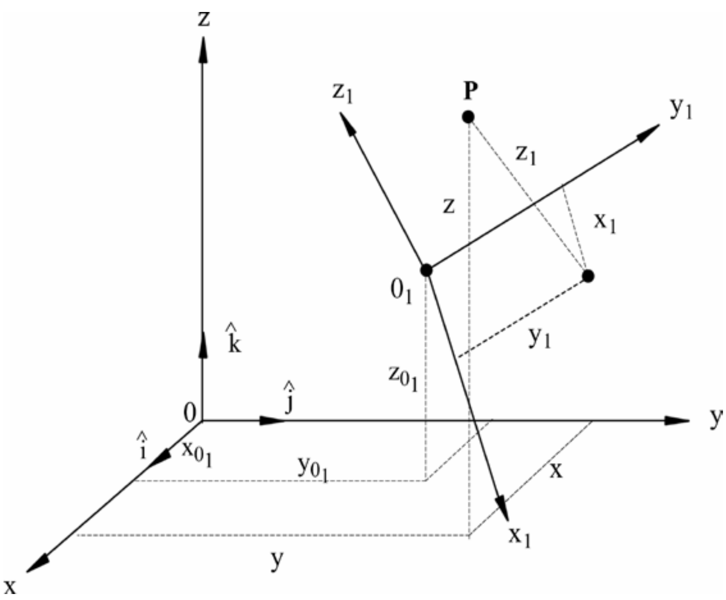
Que es <u>la expresión impropia de la ley de distribución de aceleraciones.</u>

2. 5. <u>Estudio general del movimiento rígido</u>

Se presentarán dos formas de estudiar el movimiento de un sistema rígido. La primera consistirá en el "seguimiento" desde el marco absoluto de una terna solidariamente unida al cuerpo y la segunda se basará en los conceptos del movimiento relativo. La elección de uno u otro método de resolución dependerá sobre todo de las geometrías que intervengan y la mejor indicación de la elección se tendrá después de haber adquirido experiencia con ambos métodos.

2. 5. 1. Primer método: Movimiento Absoluto.

Sea una terna $(0,\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ en el marco de referencia respecto del cual interesa conocer el movimiento del cuerpo, al que se denomina absoluto.



Se adoptará una terna móvil solidaria al sistema rígido y con respecto a la cual se conocen las coordenadas de todos los puntos del mismo; así, para un punto P, las coordenadas x_1, y_1, z_1 respecto de la terna $(0_1,\hat{i}_1,\hat{j}_1,\hat{k}_1)$ son constantes conocidas.

Luego, se estudia el movimiento del sistema rígido analizando el de la terna móvil solidariamente unida al mismo.

Los problemas fundamentales que se plantean en el estudio del movimiento son los siguientes:

1) Conocer la configuración (o posición) del sistema rígido en cada instante.
2) Conocer el estado de velocidad del sistema rígido, lo que implica poder calcular los vectores velocidad de todos sus puntos.
3) Conocer el estado de aceleración.

1) Configuración: al estudiar los posibles movimientos de un sistema rígido libre en el espacio, se demostró que poseía seis grados de libertad, y que su posición quedaba definida por seis parámetros libres dados por seis coordenadas de tres de sus puntos no alineados.

Para el caso que se plantea (estudiar el movimiento del cuerpo a través de una terna unida solidariamente a él) se tendrá que adoptar distintos tipos de parámetros, ya que la posición de la terna solidaria al cuerpo quedará determinada cuando se conozcan las tres coordenadas del origen 0_1 $\left(x_{01}, y_{01}, z_{01}\right)$ y la inclinación de los ejes de dicha terna con respecto a los de la absoluta.

Para esto último podría trabajarse con los nueve cosenos directores de los tres ejes, o bien con los denominados ángulos de Euler.

a) Si se consideran los nueve cosenos directores, los ejes móviles quedarán expresados vectorialmente así:

$$\begin{cases} \hat{i}_1 = c_{11}\hat{i} + c_{12}\,\hat{j} + c_{13}\hat{k} \\ \hat{j}_1 = c_{21}\hat{i} + c_{22}\,\hat{j} + c_{23}\hat{k} \\ \hat{k}_1 = c_{31}\hat{i} + c_{32}\,\hat{j} + c_{33}\hat{k} \end{cases}$$

donde $c_{ij} = \cos \alpha_{ij}$ (i, j = 1, 2, 3)

y α_{ij} son los nueve ángulos directores; por ejemplo, α_{23} es el ángulo existente entre el eje $\hat{j}_1$ y el $\hat{k}$.

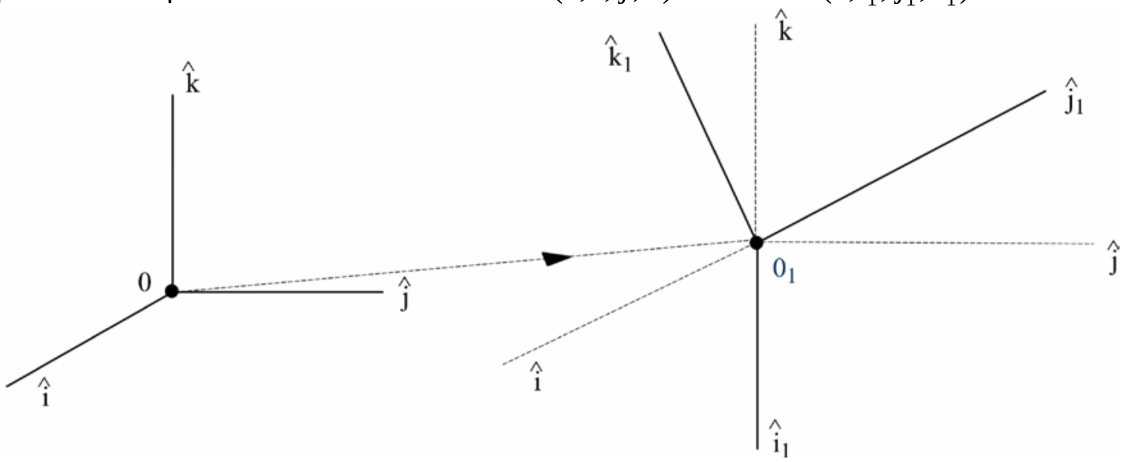
Pero así se han elegido otros nueve parámetros, de los cuales sólo se necesitan tres (porque tres se toman de 0_1), luego deberán existir entre éstos seis condiciones de vínculo, que son:

$$\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1 = 1 \qquad \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_1 = 0$$
$$j_1 \cdot \hat{j}_1 = 1 \qquad \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1 = 0$$
$$\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1 = 1 \qquad \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1 = 0$$

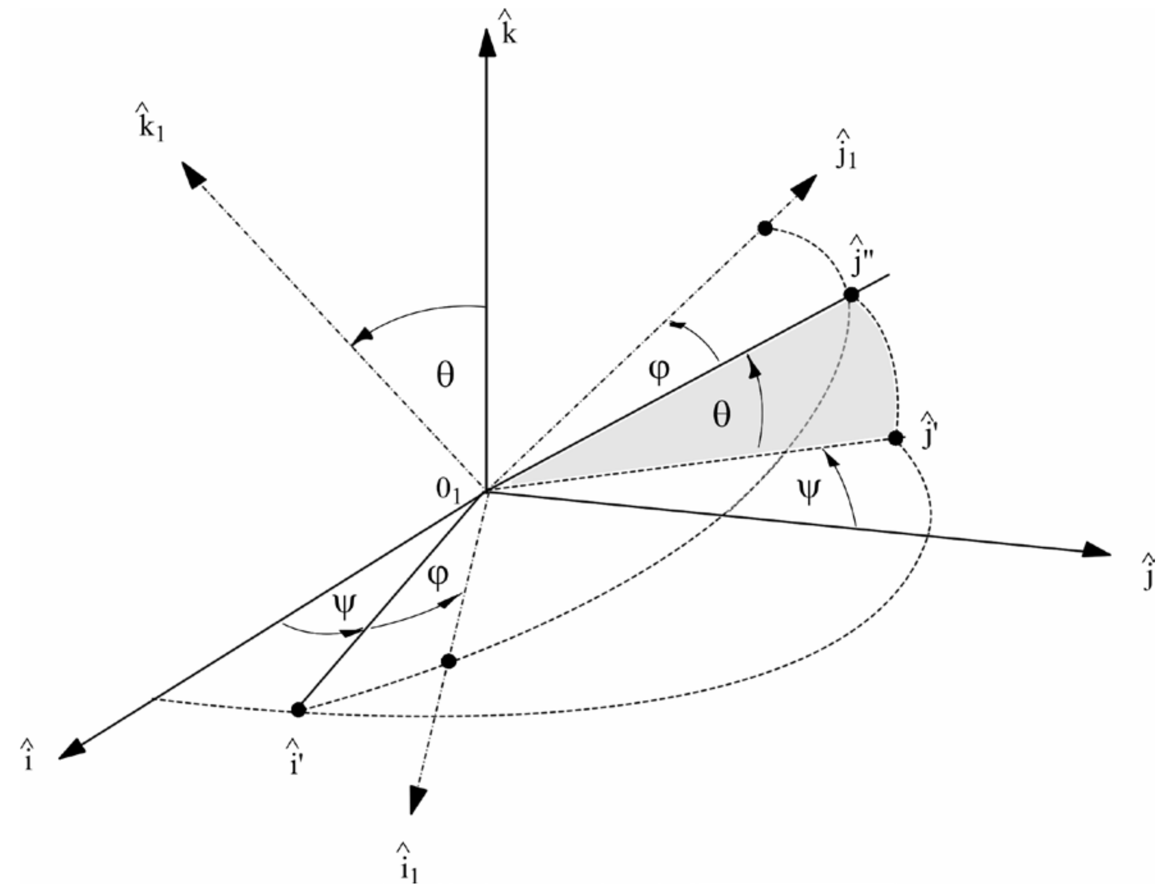
Luego, si los nueve cosenos directores están relacionados por seis expresiones, quedarán tres cosenos directores libres, de los cuales nunca podrá haber más de dos de un mismo eje. Así, la posición quedará definida en función de las tres coordenadas del origen de la terna de arrastre (0_1) y de tres cosenos directores de sus ejes. Con esto se tienen seis parámetros libres y por ende seis grados de libertad. Pero las seis ecuaciones de vínculo constituyen un sistema muy complicado para resolver, máxime estando formadas por funciones trigonométricas. Por esta razón conviene trabajar con los ángulos Euler.

b) Si se adoptan los tres ángulos de Euler para conocer la inclinación de los ejes de la terna móvil con respecto a la absoluta, los cuales son independientes entre sí, se puede efectuar la transformación de un sistema cartesiano dado en otro mediante tres rotaciones sucesivas que deben realizarse de modo determinado. Los ángulos de Euler corresponden precisamente a estas rotaciones.

Se pasará de la posición de la terna absoluta $(0,\hat{i}\,,\hat{j},\hat{k})$ a la móvil $(0,\hat{i}_1,\hat{j}_1,\hat{k}_1)$.



El proceso se inicia haciendo girar el sistema original $(0,\hat{i}\,,\hat{j},\hat{k})$ un ángulo ψ sobre el eje fijo $\hat{k}$ en sentido contrario al horario, obteniéndose el sistema $(0_1,\hat{i}',\hat{j}',\hat{k})$. Este movimiento recibe el nombre de precesión y ψ ángulo de precesión.



En un segundo paso se hace girar este nuevo sistema en sentido antihorario un ángulo θ alrededor de $\hat{i}\,'$, obteniéndose el sistema intermedio $(0_1, \hat{i}\,', \hat{j}\,'', \hat{k}_1)$. Este es el movimiento de <u>nutación</u> y θ el ángulo de nutación, que varía de 0 a π. El eje i' recibe el nombre de línea nodal y es la intersección de los planos $\hat{i}\;\hat{j}$ y $\hat{i}'\hat{j}''$.

Finalmente, se giran los ejes $(0_1, \hat{i}\,', \hat{j}\,'', \hat{k}_1)$ en sentido antihorario un ángulo φ alrededor del eje $\hat{k}_1$, obteniéndose el sistema deseado $(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$. Este último movimiento, recibe el nombre de <u>spin o rotación propia</u>. Así pues, los ángulos de Euler ψ, θ, φ determinan por completo la orientación del sistema $(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ con relación al $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ y los seis grados de libertad de un cuerpo quedan establecidos a través de los seis parámetros libres dados por los tres ángulos de Euler y las tres coordenadas del origen del sistema móvil:

$$x_{01} = x_{01}\,(t) \qquad\qquad \psi = \psi\,(t)$$
$$y_{01} = y_{01}\,(t) \qquad\qquad \theta = \theta\,(t)$$
$$z_{01} = z_{01}\,(t) \qquad\qquad \varphi = \varphi\,(t)$$

Si se tienen estas funciones, se conoce para cada instante **t** la posición del cuerpo.

<u>Ejemplo de aplicación:</u> Configuración

La chapa PR gira con velocidad angular $\vec{\omega}_2$ alrededor de la barra de longitud *l* que rota con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ alrededor del eje vertical, ambas de módulos constantes.

Aquí el cuerpo en estudio es la barra PR sometida a dos rotaciones alabeadas. La precesión queda expresada por el ángulo ψ y la rotación propia por el ángulo φ, siendo la nutación constante, por cuanto $\theta = \pi/2$.

Por lo tanto, la configuración de la barra queda determinada por las siguientes expresiones:

$\psi(t) = \omega_1.t$

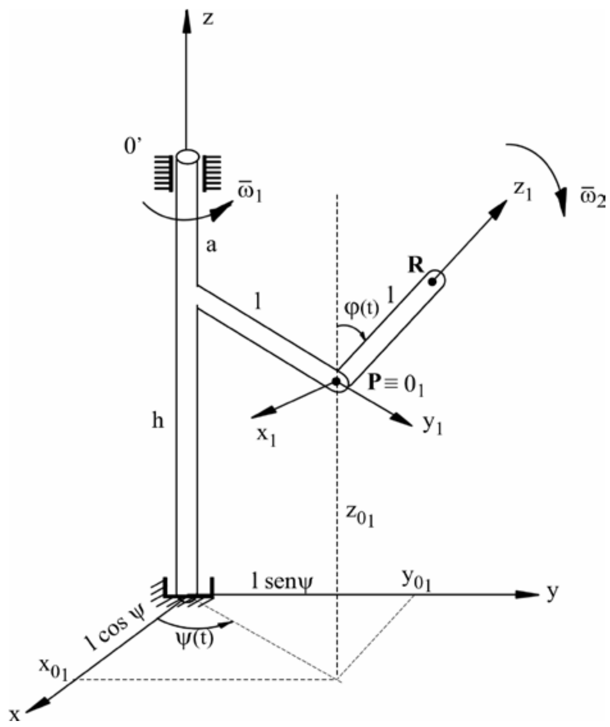
$\theta = \pi/2$

$\varphi(t) = \omega_2.t$

$x_{01} = l \cos\psi$

$y_{01} = l \operatorname{sen}\psi$

$z_{01} = h$



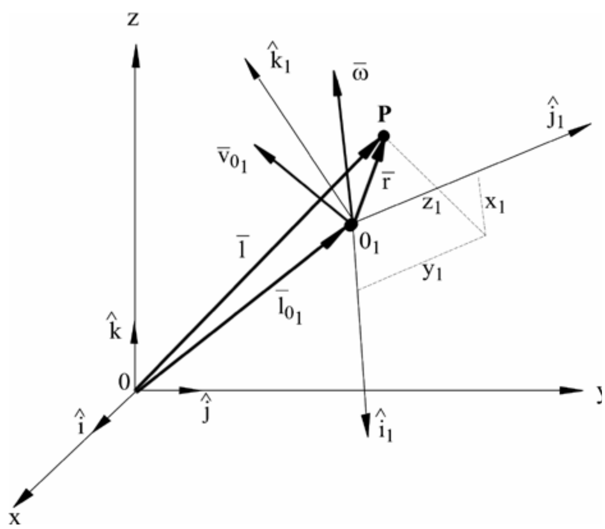
2) <u>Estado de velocidad</u>

Se ha dicho que conocer el estado de velocidad de un cuerpo implica conocer los <u>vectores</u> velocidad de todos sus puntos. Para ello, se tomará el origen de la terna móvil como centro de reducción del movimiento, suponiendo conocida la velocidad de dicho punto $\vec{V}_{01}$ y el vector rotación $\vec{\omega}$ en el mismo 0_1.

<u>Derivadas de vectores absolutos expresados en ternas móviles</u>:

Cuando vectores que son observados desde el marco de referencia absoluto se expresan en sistemas coordenados móviles respecto del observador, sus componentes quedan expresadas según versores que son variables con el tiempo.

Antes de determinar el estado de velocidad, se desarrollarán las <u>fórmulas de Poisson</u>, que facilitarán el tratamiento posterior del tema ya que permiten reemplazar la derivada temporal de los versores por una sencilla expresión.



Sea la terna $(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ solidariamente unida al cuerpo. Para un punto genérico P del cuerpo su vector posición con respecto a la terna en movimiento será:

$$\vec{r} = x_1\,\hat{i}_1 + y_1\,\hat{j}_1 + z_1\,\hat{k}_1 \tag{2.16}$$

con $\qquad x_1, y_1, yz_1 = \text{constantes}$

pero con respecto a la terna absoluta: $\quad \vec{r} = \vec{l} - \vec{l}_{01}$
y derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} - \frac{d\vec{l}_{01}}{dt} = \vec{V} - \vec{V}_{01}$$

es decir, que la velocidad del punto P es:

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Por lo que, derivando (2.16) y reemplazando:

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + x_1 \cdot \frac{d\hat{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\hat{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\hat{k}_1}{dt} \tag{2.17}$$

Se analizará el significado de las derivadas de los versores con respecto al tiempo. Para ello, comparando la expresión (2.17) con la forma impropia (2.14)

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

se observa que necesariamente:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = x_1 \cdot \frac{d\hat{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\hat{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\hat{k}_1}{dt}$$

pero es:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{r} &= \vec{\omega} \wedge \left(x_1 \cdot \hat{i}_1 + y_1 \cdot \hat{j}_1 + z_1 \cdot \hat{k}_1 \right) = \\ &= x_1\left(\vec{\omega} \wedge \hat{i}_1\right) + y_1\left(\vec{\omega} \wedge \hat{j}_1\right) + z_1\left(\vec{\omega} \wedge \hat{k}_1\right) \end{aligned}$$

y por lo tanto resulta, siempre por comparación:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i}_1 \\ \dfrac{d\hat{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j}_1 \\ \dfrac{d\hat{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}_1 \end{cases} \tag{2.18}$$

Estas expresiones se conocen como las fórmulas de Poisson y permiten expresar las derivadas de los versores en función de un sencillo producto vectorial entre la $\vec{\omega}$ impuesta a la terna móvil y el mismo versor. Físicamente, las derivadas de los versores móviles representan las velocidades de sus afijos debido a la rotación de la terna.

Retomando el planteo del título, determinar el estado de velocidad del cuerpo es sencillo si se conocen el vector rotación $\vec{\omega}$ y la velocidad del origen de la terna móvil $\vec{V}_{01}$, puesto que la velocidad de cualquier punto podría determinarse con la expresión (2.14).

$$\vec{V} = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

donde: $\vec{V}$; velocidad del punto considerado.

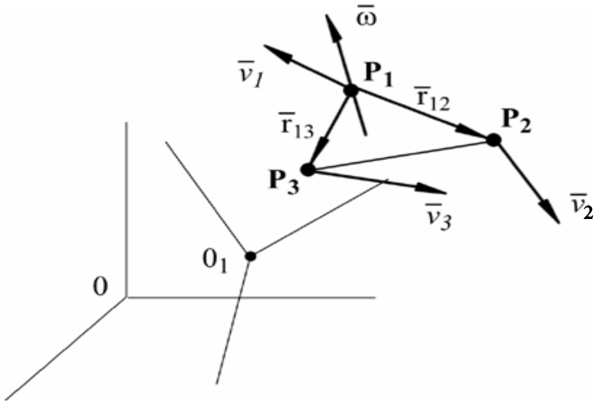
$\vec{V}_{01}$; velocidad del origen de la terna móvil, tomado como centro de reducción

$\vec{\omega}$; vector rotación del cuerpo, trasladado al centro de reducción 0_1.

$\vec{r}$; vector posición del punto considerado, referido al centro de reducción 0_1, origen de la terna móvil.

En el caso en que no se conozcan a priori $\vec{\omega}$ y $\vec{V}_{01}$ se hace necesario encontrar la forma de calcularlas. Si se toman tres puntos del cuerpo P_1, P_2 y P_3 y se aplica la ley de distribución de velocidades para P_2 y P_3 con respecto a P_1 como si éste fuese centro de reducción:

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_2 &= \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12} \\ \vec{V}_3 &= \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{13} \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$



Las ecuaciones (2.19) son vectoriales y de las mismas surgirán seis ecuaciones escalares con doce parámetros: nueve componentes de las $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ y $\vec{V}_3$ y tres componentes de $\vec{\omega}$.

Por lo tanto, doce parámetros menos seis ecuaciones de vínculo, resultan de nuevo seis parámetros libres, por lo que el estado de velocidad de un cuerpo quedará determinado cuando se conozcan seis parámetros de velocidad de tres de sus puntos no alineados.

Las seis ecuaciones escalares obtenidas de las (2.19) serán:

$$
\begin{aligned}
V_{2x} &= V_{1x} + \omega_y \left(z_2 - z_1\right) - \omega_z \left(y_2 - y_1\right) \\
V_{2y} &= V_{1y} + \omega_z \left(x_2 - x_1\right) - \omega_x \left(z_2 - z_1\right) \\
V_{2z} &= V_{1z} + \omega_x \left(y_2 - y_1\right) - \omega_y \left(x_2 - x_1\right) \\
V_{3x} &= V_{1x} + \omega_y \left(z_3 - z_1\right) - \omega_z \left(y_3 - y_1\right) \\
V_{3y} &= V_{1y} + \omega_z \left(x_3 - x_1\right) - \omega_x \left(z_3 - z_1\right) \\
V_{3z} &= V_{1z} + \omega_x \left(y_3 - y_1\right) - \omega_y \left(x_3 - x_1\right)
\end{aligned}
\qquad (2.19')
$$

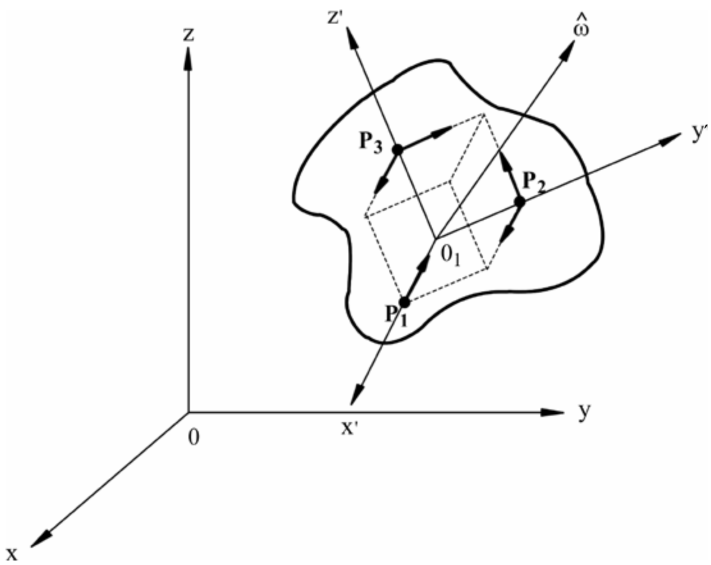
y los doce parámetros $\begin{cases} V_{1x} \quad , \quad V_{1y} \quad , \quad V_{1z} \\ V_{2x} \quad , \quad V_{2y} \quad , \quad V_{2z} \\ V_{3x} \quad , \quad V_{3y} \quad , \quad V_{3z} \\ \omega_x \quad , \quad \omega_y \quad , \quad \omega_z \end{cases}$

de los cuales seis deberán ser dados para poder determinar el estado de velocidad.

Ejemplo de aplicación: Estado de velocidad

Un cuerpo rígido se mueve con respecto del marco de referencia absoluto. Los datos geométricos y cinemáticos aportados están referenciados a la terna móvil fija al cuerpo, y son:

$P_1(7,0,0)$; $P_2(0,5,0)$; $P_3(0,0,4)$ [cm]



ω_x = 2 rad/s
v_{1x} = - 3 cm/s
$v_{2x} = v_{2z}$ = 2 cm/s
$v_{3x} = v_{3y}$ = 5 cm/s

Hallar el estado de velocidad y la velocidad del origen de la terna móvil.

Resolución:
Haciendo uso de las ecuaciones (2.19) y (2.19´), se obtiene:

$v_{3x} = v_{1x} + 4\ \omega_y$
$v_{3y} = v_{1y} - 8 - 7\ \omega_z$
$v_{3z} = v_{1z} + 7\ \omega_y$
$v_{2x} = v_{1x} - 5\ \omega_z$
$v_{2y} = v_{1y} - 7\ \omega_z$

$v_{2y} = v_{1z} + 10 + 7\ \omega_y$

que constituye un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas. Reemplazando los datos y despejando, se obtiene:

$\omega_y = 2$ rad/s; $\omega_z = -1$ rad/s; $v_{1y} = 6$ cm/s; $v_{2y} = 13$ cm/s; $v_{1z} = -22$ cm/s y $v_{3z} = -8$ cm/s

Luego, tomando a P_1 como centro de reducción, se tiene:

$$\vec{V}_{01} = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{101}$$

y resolviendo

$$\vec{V}_{01} (-3, 13, -8) \text{ cm/s}$$

<u>Invariantes del movimiento rígido general</u>

Como se ha visto al estudiar el estado de velocidades, una vez determinada la rotación $\vec{\omega}$ y la velocidad $\vec{V}$ de un punto cualquiera, es posible determinar la velocidad de cualquier otro punto aplicando la ley de distribución de velocidades.

El vector rotación $\vec{\omega}$ es la resultante de todas las rotaciones que afectan al sistema y esa resultante será la misma cualquiera sea el centro de reducción adoptado; por esta razón se la suele llamar <u>invariante vectorial del sistema</u>.

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i \tag{2.20}$$

Se verá ahora en qué consiste el concepto de <u>invariante escalar del sistema</u>; si se refiere la velocidad de un punto cualquiera al centro de reducción se tendrá:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{O_1 i}$$

y multiplicando m. a m. escalarmente por un vector $\hat{\omega} = \dfrac{\vec{\omega}}{\omega}$

$$\vec{V}_i \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{01} \cdot \hat{\omega} + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{0_1 i}\right) \hat{\omega}$$

El segundo sumando de la derecha se anula por cuanto $\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ será perpendicular a $\vec{\omega}$

resultando:

$$\vec{V}_i \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{01} \cdot \vec{\omega} = cte = \mu$$

Esto expresa que los vectores velocidad de un sistema material rígido proyectados en un determinado instante sobre la dirección del vector rotación son una constante que recibe el nombre de "<u>invariante escalar μ</u>".

$$\mu = \vec{V}_{01} \cdot \hat{\omega} = \vec{V}_{01} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} \qquad (2.21)$$

Los invariantes vectorial y escalar suministran importante información, ya que definen el tipo de movimiento:

a) Si μ = 0 porque $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ Movimiento de traslación.

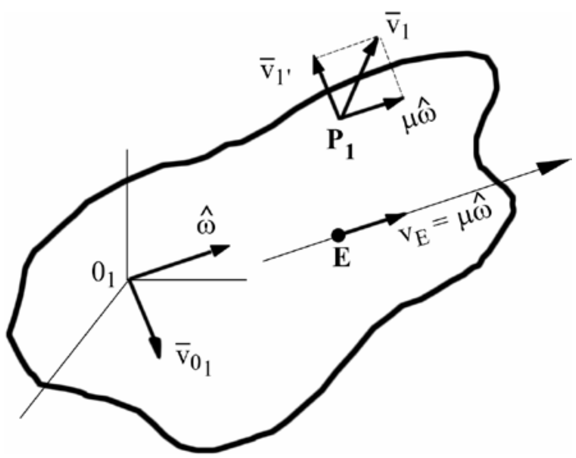
b) Si μ = 0 $\begin{cases} \vec{V}_{01} = 0 \Rightarrow & \text{Movimiento de rotación (} O_1 \text{ es punto del eje de rotación)} \\ \vec{\omega} \perp \vec{V}_{01} \Rightarrow & \text{Movimiento de rotación instantánea} \end{cases}$

c) Si $\mu = \pm V_{01}$ debe ser $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_{01}$ porque al proyectar, lo hace con su verdadero valor $\Rightarrow$ Movimiento helicoidal permanente.

d) Si $\left. \begin{matrix} \mu \neq 0 \\ \mu \neq \left|\vec{V}_{01}\right| \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ Movimiento helicoidal instantáneo

En este último caso, tal como se vio en el apartado b.3), la velocidad o traslación forma un ángulo distinto de 0º ó 90º y teniendo en cuenta que la componente paralela a $\vec{\omega}$ de la $\vec{V}$ de cualquier punto es constante, al pasar de un punto al otro la velocidad varía sólo por su componente perpendicular a $\vec{\omega}$. Existe entonces una recta paralela a $\vec{\omega}$ en cuyos puntos se anula la componente de la velocidad perpendicular a dicha dirección y en tal caso, esa velocidad toma su valor mínimo. El lugar geométrico de los puntos de velocidad mínima recibe el nombre de eje central del movimiento o eje instantáneo del movimiento helicoidal. Dicha velocidad mínima representa el vector traslación del movimiento helicoidal instantáneo:

$$\vec{\tau} = \mu\, \hat{\omega} \qquad (2.22)$$



Luego, para cada punto la componente $\mu\, \hat{\omega}$ representa la traslación y las componentes $\vec{V}'$ son las velocidades originadas por la rotación.

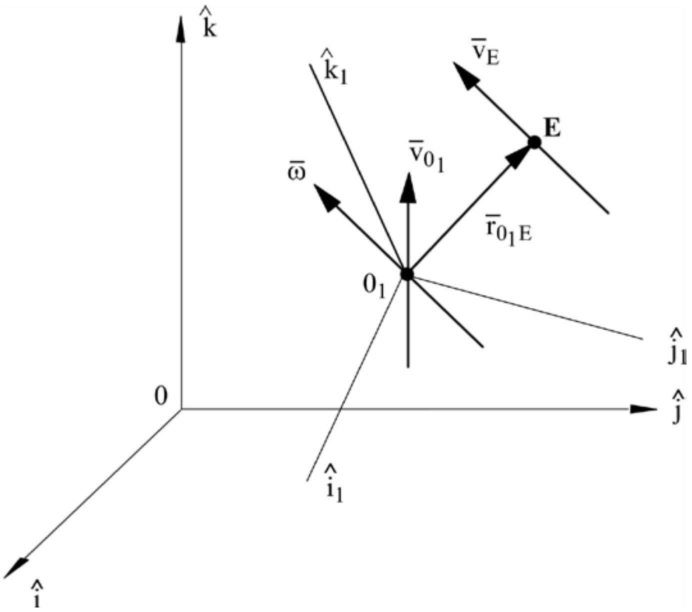
Por lo tanto, el movimiento helicoidal instantáneo puede reducirse en cualquier punto del eje central a una rotación $\vec{\omega}$ (invariante vectorial) y a una traslación de igual dirección $\vec{\tau} = \mu\, \hat{\omega}$.

Para determinar un punto del eje central se procede de la siguiente manera:

$$\vec{V}_E = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{0_1 E} = \mu \hat{\omega}$$

multiplicando vectorialmente m. a m. por $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01 E} \right) = \mu \vec{\omega} \wedge \hat{\omega} = \vec{0}$$



y resolviendo:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \underbrace{\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{0_1 E} \right)} - \vec{r}_{0_1 E} \underbrace{\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \right)}_{\omega^2} = \vec{0}$$

tomando $\vec{r}_{0_1 E} \perp \vec{\omega}$

es $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{0_1 E} = 0$

finalmente; $\vec{r}_{0_1 E} = \dfrac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01}}{\omega^2}$ (2.23)

Una vez determinado E que es un punto del eje central, éste puede ser tomado como centro de reducción para usar la forma propia de la ley de distribución de velocidades:

$$\vec{V}_i = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{Ei}$$

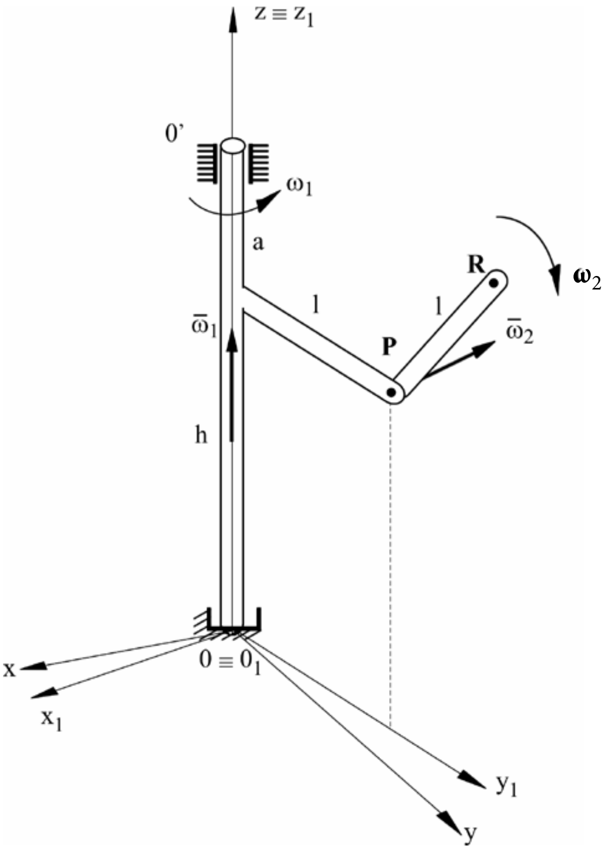
<u>Ejemplo de aplicación</u>. Invariantes

Retomando el ejemplo utilizado para explicar la configuración, en el cual la chapa PR gira con velocidad $\vec{\omega}_2$ alrededor de la barra de longitud *l* que rota con velocidad $\vec{\omega}_1$ alrededor del eje vertical, determinar:

1) Invariante vectorial.
2) velocidad del centro de reducción.
3) invariante escalar.
4) un punto del eje central del movimiento.

Tomar como centro de reducción:

a) el punto 0
b) el punto P



Resolución:

Se adoptará para el análisis del problema una terna fija al bastidor 0P0´, es decir, rotando con ω_1 respecto del sistema de referencia absoluto solidariamente unido a los cojinetes 00´.

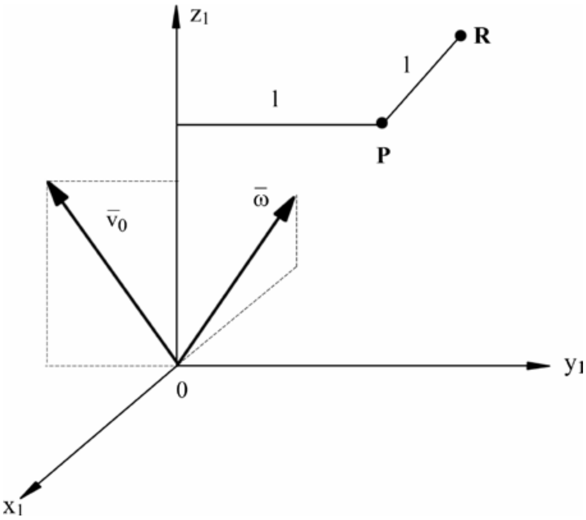
a) <u>Reducción del sistema al punto 0</u>

1) $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = -\omega_2\ \hat{i}_1 + \omega_1\ \hat{k}_1$

2) La velocidad de O como punto de la varilla será la impuesta por $\vec{\omega}_2$:

$$\vec{V}_o = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{po} = -\omega_2 \cdot \hat{i}_1 \wedge \left(-l\ \hat{j}_1 - h\ \hat{k}_1\right)$$
$$\vec{V}_o = \omega_2\left(l\ \hat{k}_1 - h\ \hat{j}_1\right)$$

Cualquier punto de la chapa que pasare (hipotéticamente) por 0 tendrá siempre la velocidad $\vec{V}_o$ calculada antes. Al colocar los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{V}_0$ en 0 hemos reducido el sistema a ese punto y a partir de él podemos calcular la velocidad de cualquier punto de la chapa.



3) $\mu = \vec{V}_o \cdot \hat{\omega} = \left(-\omega_2\ h\ \hat{j}_1 + \omega_2\ l\ \hat{k}_1\right) \cdot \dfrac{\left[-\omega_2\ \hat{i}_1 + \omega_1\ \hat{k}_1\right]}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} = \dfrac{\omega_1\ \omega_2 1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$

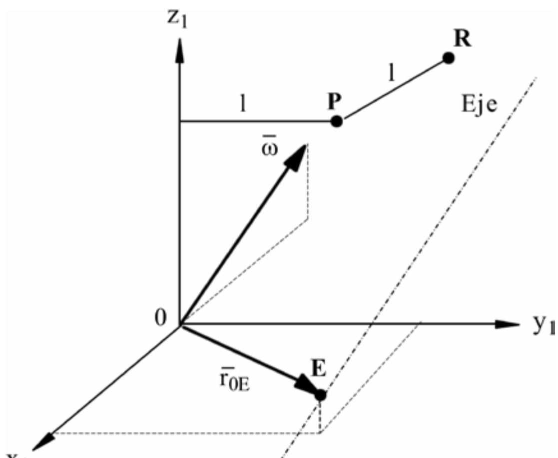
Se observa que $\mu \neq 0$ y por tanto es un movimiento helicoidal instantáneo:

$$\vec{\tau} = \frac{\omega_1\ \omega_2\ l}{\left(\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2}\right)^2}\left(-\omega_2\ \hat{i}_1 + \omega_1\ \hat{k}_1\right) = \frac{\omega_1\ \omega_2\ l}{\omega_1^2 + \omega_2^2}\left(-\omega_2\ \hat{i}_1 + \omega_1\ \hat{k}_1\right)$$

4)

$$\vec{r}_{0E} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_o}{\omega^2} = \frac{\omega_2^2 h \hat{k}_1 + \omega_2^2 l \hat{j}_1 + \omega_1 \omega_2 h \hat{i}_1}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$$

Debe tenerse en cuenta que este vector se extiende desde 0 a E. Notar que el eje instantáneo es fijo en la terna móvil, pero como ésta rota, el eje va variando su posición respecto de la terna fija.



b) Reducción del sistema al punto P:

1º) $\vec{\omega} = -\omega_2 \, \hat{i}_1 + \omega_1 \, \hat{k}_1$

2º) $\vec{V}_p = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{0p} = \omega_1 \hat{k}_1 \wedge \left(l \, \hat{j}_1 + h \hat{k}_1 \right) = -\omega_1 l \hat{i}_1$

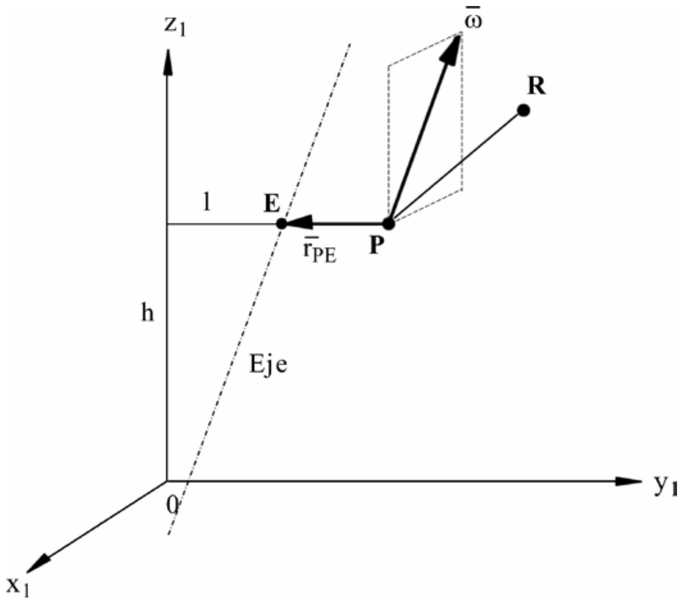
3º) $\mu = \vec{V}_p \cdot \hat{\omega} = \dfrac{\omega_1 \, \omega_2 \, l}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$

$$\vec{\tau} = \mu \cdot \hat{\omega} = \frac{\omega_1 \, \omega_2 \, l}{\left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right)^2} \left(-\omega_2 \, \hat{i}_1 + \omega_1 \, \hat{k}_1 \right) = \frac{\omega_1 \, \omega_2 \, l}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \left(-\omega_2 \, \hat{i}_1 + \omega_1 \, \hat{k}_1 \right)$$

4º)

$$\vec{r}_{PE} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_p}{\omega^2} = -\frac{\omega_1^2 \, l}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \, \hat{j}_1$$

$\vec{r}_{PE}$ medido ahora desde P.



3) Estado de aceleración:

Tomando los mismos puntos del cuerpo que en el apartado anterior y trabajando análogamente con la forma impropia de la ley de distribución de aceleraciones:

$$\begin{cases} \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{21} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12} \right) \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{31} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{13} \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

Siendo: $\vec{\gamma} = \gamma_x \, \hat{i} + \gamma_y \, \hat{j} + \gamma_z \, \hat{k}$

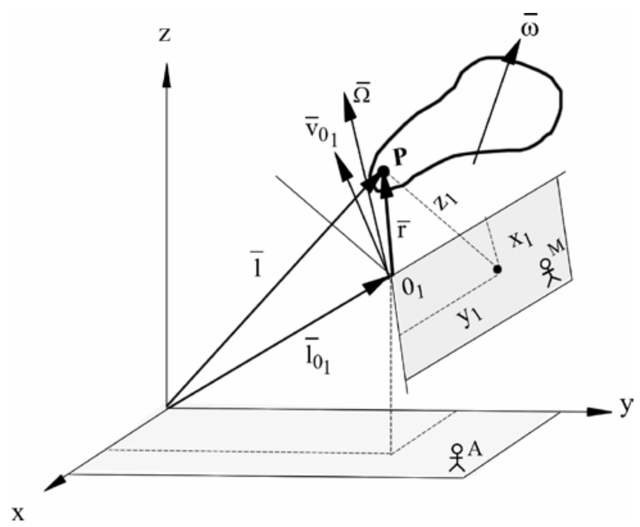
Por lo tanto, el estado de aceleración de un sistema rígido quedará determinado cuando se conozcan seis parámetros de aceleración de tres puntos no alineados.

2. 5. 2. Segundo método: Movimiento Relativo.

Se estudiará ahora el movimiento de un sistema rígido aplicando una metodología distinta a la vista recientemente.

Para ello se analizará el movimiento del cuerpo respecto de una terna ubicada en un marco de referencia que se mueve con respecto a otra considerada fija, solidaria al marco de referencia absoluto. A la terna móvil se la denomina “de arrastre”, siendo $\vec{\Omega}$ su vector rotación y $\vec{V}_{01}$ el vector velocidad de su origen, ambos absolutos.

En la siguiente figura, se han dibujado esquemáticamente dos observadores: el absoluto (A) y el móvil (M), ambos en cada una de las ternas adoptadas.



Pueden distinguirse tres movimientos:

1) Movimiento Relativo: es el movimiento del sistema rígido con respecto a la terna de arrastre como si ésta estuviese en reposo.

2) Movimiento de Arrastre: Es el movimiento del cuerpo como si estuviera solidariamente unido a la terna móvil y ésta lo “arrastrase” en su movimiento.

3) Movimiento Absoluto: Es el movimiento del sistema rígido respecto de la terna absoluta como consecuencia de la simultaneidad de los dos movimientos anteriores.

Habrá siempre un movimiento absoluto y uno relativo pero puede haber muchos de arrastre según las ternas que se intercalen; todos ellos pueden reducirse a uno solo por composición de movimientos.

Notar que $\vec{\Omega}$ es la velocidad de rotación de los ejes $(O_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ mientras que la velocidad de rotación del cuerpo es $\vec{\omega}$, ambas absolutas.

Se tomará para el análisis un punto P del cuerpo y se estudiará cuál sería su velocidad con respecto a la terna absoluta como consecuencia de los movimientos relativos y de arrastre.

Será:

$$\vec{r} = \vec{l} - \vec{l}_{01} = x_1\hat{i}_1 + y_1\hat{j}_1 + z_1\hat{k}_1 \tag{2.25}$$

derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{l}}{dt}-\frac{d\vec{l}_{01}}{dt}=\frac{dx_1}{dt}\hat{i}_1+\frac{dy_1}{dt}\hat{j}_1+\frac{dz_1}{dt}\hat{k}_1+x_1\frac{d\hat{i}_1}{dt}+y_1\frac{d\hat{j}_1}{dt}+z_1\frac{d\hat{k}_1}{dt} \quad (2.25')$$

pero siendo $\vec{l}$ y $\vec{l}_{01}$ vectores de posición con respecto a la terna absoluta, sus derivadas temporales darán las velocidades de P y 0_1 con respecto al marco absoluto: $\vec{V}$ y $\vec{V}_{01}$.

Con respecto a los tres últimos sumandos del lado derecho de la igualdad, pueden aplicarse las fórmulas de Poisson, obteniéndose:

$$x_1\,\vec{\Omega}\wedge\hat{i}_1+y_1\,\vec{\Omega}\wedge\hat{j}_1+z_1\,\vec{\Omega}\wedge\hat{k}_1=\vec{\Omega}\wedge\left(x_1\,\hat{i}_1+y_1\,\hat{j}_1+z_1\,\hat{k}_1\right)=\vec{\Omega}\wedge\vec{r}$$

Por lo tanto y teniendo en cuenta que los tres primeros sumandos representan la velocidad de P como si la terna móvil estuviese quieta:

$$\vec{V}=\vec{V}_{rel}+\vec{V}_{01}+\vec{\Omega}\wedge\vec{r} \quad (2.26)$$

donde: $\vec{V}$ = velocidad absoluta de P

$\vec{V}_{rel}$ = velocidad relativa de P = $\left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rel}$

donde el subíndice "rel" indica que se deriva el vector posición como si los ejes de la terna de arrastre permanecieran inmóviles.

$\vec{V}_{01}+\vec{\Omega}\wedge\vec{r}$ = sería la velocidad de P como si el cuerpo estuviese solidariamente unido a la terna móvil y fuese arrastrado por ella (velocidad de arrastre); así, rotaría con $\vec{\Omega}$ y 0_1 sería el centro de reducción del movimiento.

Luego:

$$\vec{V}=\vec{V}_{rel}+\vec{V}_{arr} \quad (2.26')$$

Es decir que la velocidad absoluta de un punto cualquiera de un sistema rígido resulta de la suma de sus velocidades de arrastre y relativa.

Se verá ahora qué ocurre con la aceleración; derivando la expresión (2.25'):

$$\frac{d\vec{V}}{dt}-\frac{d\vec{V}_{01}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\hat{i}_1+\frac{dy_1}{dt}\hat{j}_1+\frac{dz_1}{dt}\hat{k}_1\right)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}\right) \quad (2.27)$$

resolviendo el primer paréntesis:

$$\underbrace{\frac{d^2x_1}{dt^2}\hat{i}_1+\frac{d^2y_1}{dt^2}\hat{j}_1+\frac{d^2z_1}{dt^2}k_1}_{\vec{a}_{rel}}+\frac{dx_1}{dt}\frac{d\hat{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\hat{j}_1}{dt}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\hat{k}_1}{dt}=$$

$$= \vec{a}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{dx_1}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \hat{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \hat{k}_1 \right) =$$

$$= \vec{a}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel}$$

el segundo paréntesis da:

$$\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{l} - \vec{l}_{01} \right) \right] = \quad \text{; por (2.26)}$$

$$= \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{V}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right) = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)$$

Reemplazando en (21)

$$\vec{a} = \vec{a}_{01} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right) + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel} \qquad (2.28)$$

donde: $\vec{a} =$ aceleración absoluta de P

$\vec{a}_{rel} =$ aceleración relativa de P

$\vec{a}_{01} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)$ es la forma impropia de la ley de distribución de aceleraciones en un sistema rígido (tal como si éste fuese arrastrado por la terna móvil) y se denomina aceleración de arrastre.

$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{rel}$ es la aceleración complementaria o de Coriolis. Aparece por la rotación de los ejes de la terna móvil y representa la diferencia en aceleración de P como si fuera medida a partir de unos ejes (0,i,j,k) no giratorios y de otros (0_1, i_1, j_1, k_1) giratorios, ambos con origen en 0_1. Se anula si no hay rotación o bien si no hay movimiento relativo y también en los movimientos helicoidales permanentes donde $\vec{\Omega} \parallel \vec{V}_{rel}$.

Así resulta: $$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{com} \qquad (2.28')$$

<u>Ejemplo de aplicación</u>: Movimiento Relativo

Para el ejemplo de aplicación utilizado en invariantes, emplear las expresiones del movimiento relativo para encontrar la velocidad y la aceleración absolutas del punto R de la chapa PR.

Resolución:
Se adoptará como marco de referencia relativo el bastidor 00´P. En él, se ubicará la terna móvil o de arrastre con origen en P, es decir, rotando con $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. Luego,

$$\vec{V}_{relR} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{PR}$$

$$\vec{V}_{arrR} = \vec{V}_P + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{PR}$$

donde $\vec{V}_P = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{OP}$

$$\vec{a}_{relR} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{PR}$$

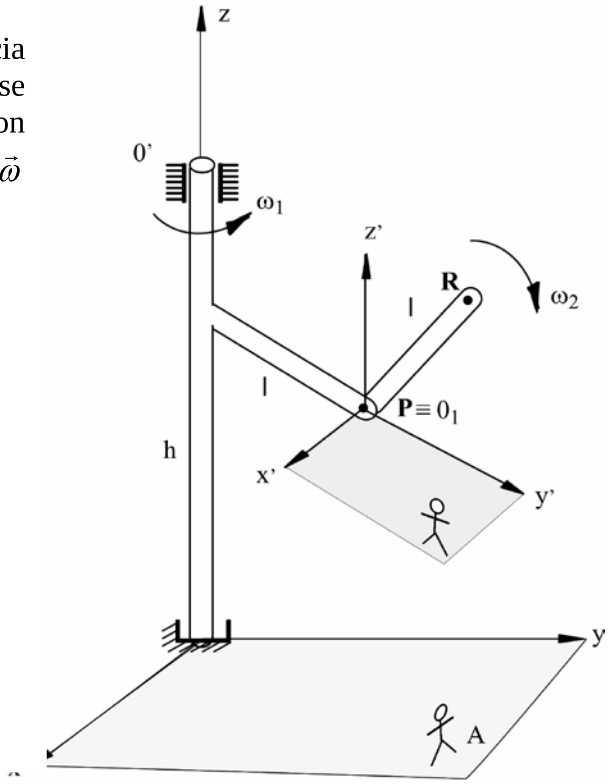
$$\vec{a}_{arrR} = \vec{a}_P + \vec{\gamma}_1 \wedge \vec{r}_{PR} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{PR}$$

donde

$$\vec{a}_P = \vec{\omega}_1 \wedge \left(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{OP} \right)$$

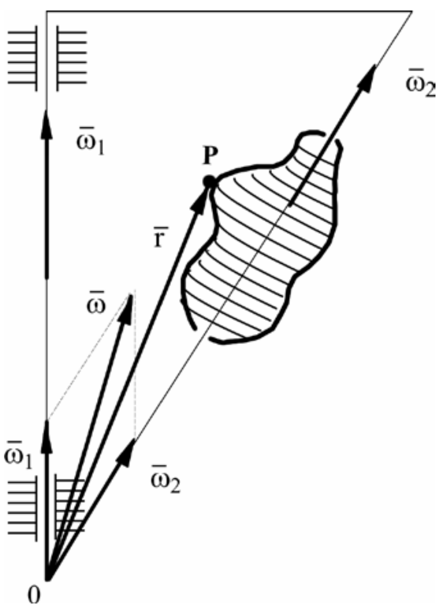
$$\vec{\gamma}_1 = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{comR} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{V}_{relR}$$



2.6. Movimiento polar

Como se vio al estudiar la composición de rotaciones concurrentes, este movimiento tiene lugar cuando el sistema material rígido se mueve sobre un punto fijo.



El cuerpo en este caso está sometido a una rotación instantánea $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\omega}_i$ y el punto 0 es el único punto fijo del sistema o polo de velocidades, pero como el valor $\vec{V}_0 = \vec{0}$ se mantiene invariante, resulta $\vec{a}_0 = \vec{0}$ y ese punto es también polo de aceleración. En este movimiento cualquier punto puede describir por la acción de las $\vec{\omega}_i \, (i = 1,2 \ldots N)$ una trayectoria cualquiera, la cual por condición de rigidez deberá desarrollarse sobre una superficie esférica ya que si consideramos un punto P, la distancia $\overline{0P}$ deberá permanecer constante durante el movimiento.

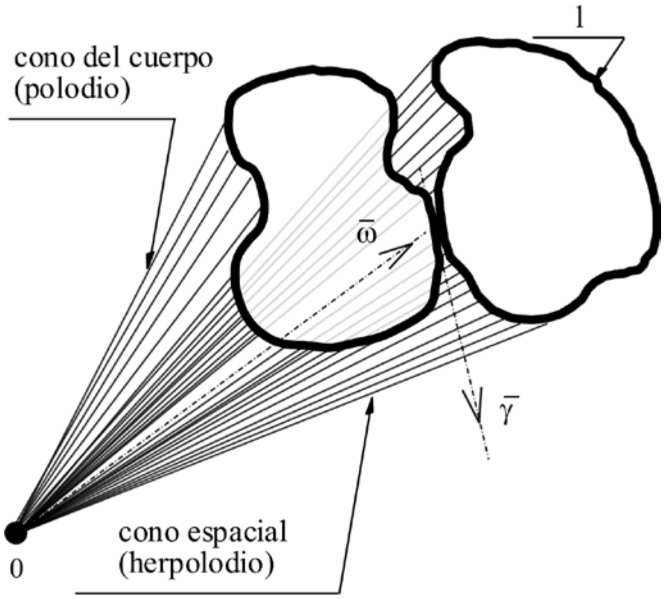
Las velocidades de todos los puntos que se encuentran sobre un radio, por ejemplo P0, son proporcionales a sus distancias a 0, por lo que si se conoce una de esas velocidades, las demás surgen por proporcionalidad. La velocidad instantánea $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{a}$ de un punto cualquiera como el P del cuerpo vienen dadas por:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

como en la rotación alrededor de un eje fijo pero con la única diferencia que si el eje de rotación es fijo entonces $\vec{\gamma} = \dot{\vec{\omega}}$ está dirigido según el eje fijo $\vec{\omega}$ y representa la variación del módulo de $\vec{\omega}$ por unidad de tiempo; mientras que cuando el eje no está fijo en el cuerpo o en el espacio, el vector $\vec{\gamma}$ ya no sólo reflejará la variación del $|\vec{\omega}|$ sino también de la dirección de $\vec{\omega}$ y no estará dirigido según el eje $\vec{\omega}$.

En general, en el caso de un cuerpo que gire alrededor de un punto fijo, el eje instantáneo variará de posición tanto en el espacio como en el cuerpo.

Cuando el eje se mueve en el espacio genera un cono espacial o herpolodio y cuando el eje se mueve respecto al cuerpo genera un cono relativo al cuerpo llamado cono del cuerpo o polodio. Estos conos son tangentes a lo largo del eje instantáneo de rotación $\vec{\omega}$
y el movimiento del cuerpo se puede describir como la rodadura del cono del cuerpo sobre el espacial.



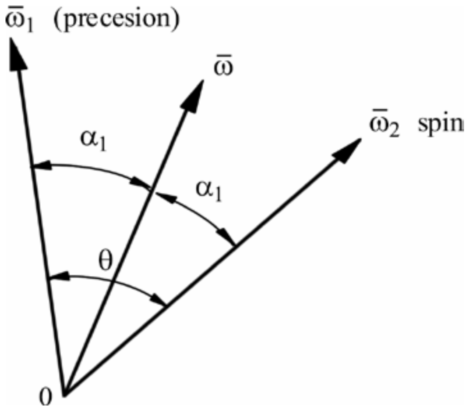
El cono del cuerpo puede ser interior o exterior al espacial.

El extremo de $\vec{\omega}$ sigue una trayectoria absoluta *l* sobre el cono espacial y $\vec{\gamma}$ será por lo tanto un vector dirigido en la dirección de la variación de $\vec{\omega}$ la cual es tangente a *l*.

Como se verá en el próximo apartado, si un cuerpo se mueve paralelamente a un plano, puede considerarse que gira alrededor de un punto situado en el infinito. Los conos del espacio y del cuerpo se convierten entonces en superficies cilíndricas y la intersección de éstas con el plano del movimiento se convierten en las denominadas curvas base y ruleta del movimiento plano.

Si se siguiese el movimiento de un punto P sobre la esfera de radio $\overline{0P}$, podría pensarse que P en su movimiento arrastra a una esfera móvil de igual radio que desliza sobre la fija. Siendo P el punto de intersección del eje $\vec{\omega}$ con ambas esferas, describirá en su movimiento una trayectoria (línea) sobre la absoluta y otra sobre la móvil, son las herpoloide y poloide respectivamente. De esta forma, el movimiento polar puede describirse como la rodadura sin deslizamiento de la poloide sobre la herpoloide.

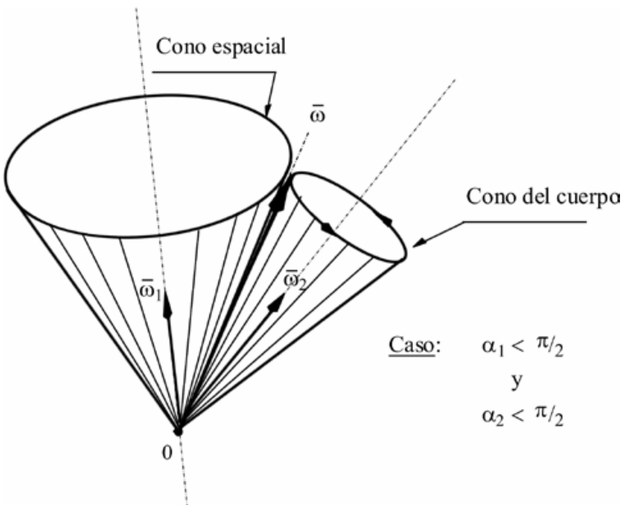
Un caso particular y bastante común es el que se denomina "precesión regular" y se da cuando $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ son constantes lo que hace que el ángulo que forman entre ellas y los que forman cada una de ellas con la resultante son constantes:



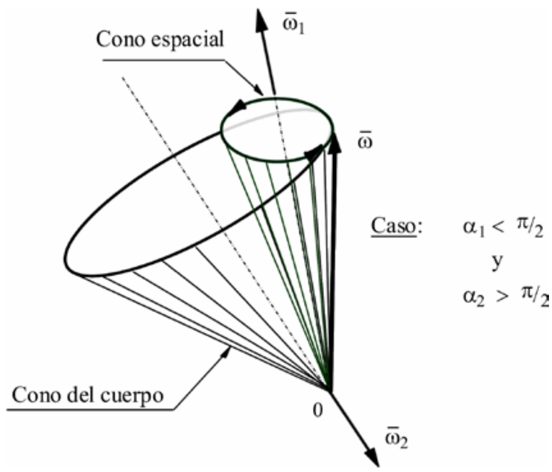
$$\alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \Rightarrow \quad constantes \quad \therefore$$
$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 \quad ; \qquad \text{ángulo de nutación} = constante$$

En este caso, la poloide y la herpoloide son círculos y los conos del espacio y del cuerpo son conos circulares rectos:

Caso 1:



Caso 2:



2. 7. Cinemática del movimiento plano

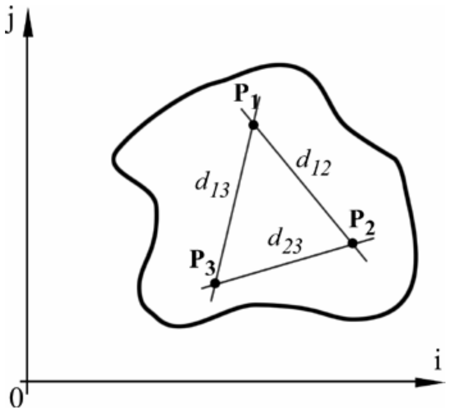
Se dice que un sistema rígido está en movimiento plano cuando las velocidades de cualquiera de sus puntos son paralelas a un plano fijo. Teniendo en cuenta esta definición y la condición de rigidez, todos los puntos ubicados sobre una normal a dicho plano tendrán igual velocidad, por lo que basta para estudiar el movimiento el análisis de un único plano.

Los sistemas rígidos que se mueven con estas características suelen ser denominados "chapas rígidas" y en consecuencia se estudia el movimiento de una chapa sobre el plano que la contiene.

En el movimiento plano se utilizarán dos ejes ortogonales como sistema de referencia contenidos en el plano del movimiento y el tercero perpendicular a dicho plano.

Grados de libertad de una chapa en su plano:

Considerando la chapa de la figura y aplicando las condiciones de rigidez para tres de sus puntos no alineados:



$$n = 3 \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d_{12}^2 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = d_{13}^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = d_{23}^2 \\ (z_1 = z_2 = z_3 = 0) \end{cases} \qquad (2.29)$$

En estas tres ecuaciones se tienen seis parámetros:

$$m = 6 \qquad \begin{cases} x_1 \ , y_1 \\ x_2 \ , y_2 \\ x_3 \ , y_3 \end{cases}$$

por lo tanto, la chapa en su plano posee k = m - n = 3 grados de libertad. Esto significa que la configuración (o posición) de una chapa en su plano queda expresada en función de tres parámetros, que de acuerdo con lo que puede observarse en las (2.29) pueden ser de dos de sus puntos. Entonces, será suficiente determinar los grados de libertad a partir de dos puntos solamente, entre los cuales se planteará una sola condición de rigidez:

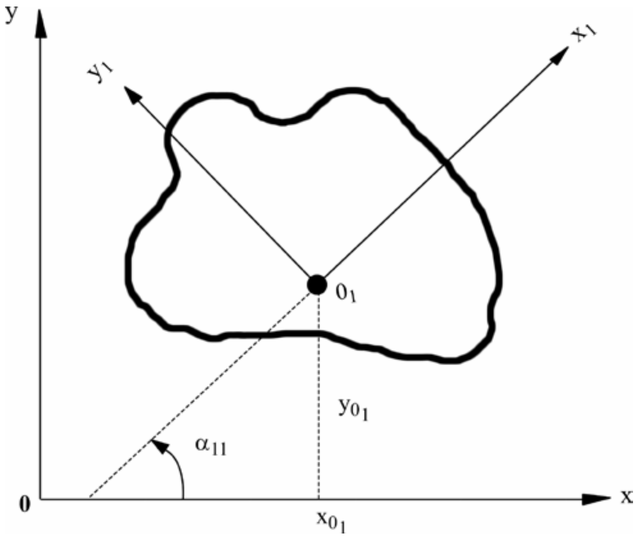
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d_{12}^2 \Rightarrow n = 1$$

con 4 parámetros $\begin{cases} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{cases} \quad \Rightarrow$ m = 4

de donde: k = m - n = 3 gl

1) Configuración:

Dado que en el plano el planteo se reduce notablemente, para hallar la configuración es conveniente utilizar los cosenos directores de la terna de fija al cuerpo. En efecto, los tres parámetros libres serían en este caso las 2 coordenadas del origen de la terna móvil $(0_1, x_{01}, y_{01})$ y uno de los cosenos directores:



Aquí:

$$\hat{i}_1 = c_{11}\ \hat{i} + c_{12}\ \hat{j}$$
$$\hat{j}_1 = c_{21}\ \hat{i} + c_{22}\ \hat{j}$$

con

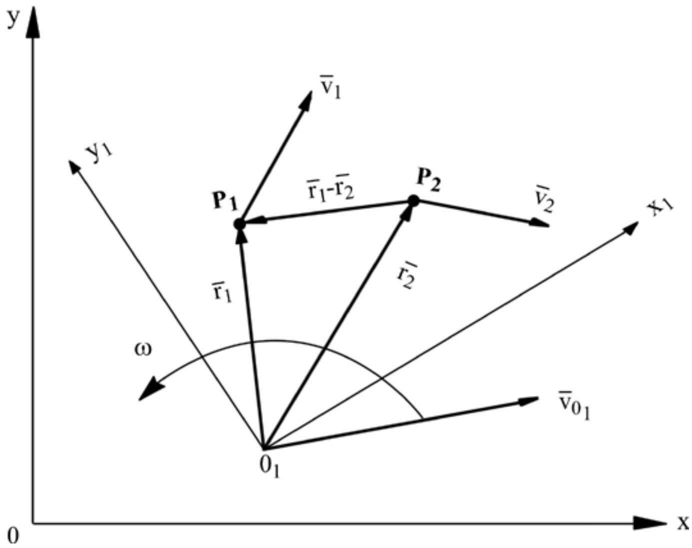
$$c_{11} = \cos \alpha_{11}$$
$$c_{12} = \operatorname{sen} \alpha_{11}$$
$$c_{21} = -\operatorname{sen} \alpha_{11}$$
$$c_{22} = \cos \alpha_{11}$$

Con lo que se observa que con un único argumento se conocen los cuatro cosenos directores.

2) Estado de velocidad:

Considerando los vectores velocidad de dos puntos cualquiera de la chapa:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = V_{1x}\ \hat{i}_1 + V_{1y}\ \hat{j}_1 \\ \vec{V}_2 = V_{2x}\ \hat{i}_1 + V_{2y}\ \hat{j}_1 \end{cases}$$



Aplicando la condición cinemática de rigidez entre ellos:

$$\vec{V}_1 \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \vec{V}_2 \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \qquad (2.30)$$

se obtiene una ecuación escalar con cuatro parámetros, de donde resultan tres parámetros libres de velocidad. Dándole valores a éstos, se puede calcular el cuarto mediante la ecuación (2.30).

Si el vector rotación $\vec{\omega}$ no es conocido, se hace necesario determinarlo, aunque ya se sabe que su dirección deberá estar sobre una perpendicular al plano del movimiento.

Para lograrlo, se aplica la forma impropia de la ley de distribución de velocidades entre los dos puntos tomando uno de ellos como centro de reducción:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right) \tag{2.31}$$

De esta expresión vectorial se obtienen dos ecuaciones escalares con cinco parámetros que son $V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y}, \omega$; viéndose que el estado de velocidades queda en función de tres parámetros libres elegidos entre los cinco anteriores.

Siendo $\vec{\omega} = \omega\ \hat{k}_1$, en (2.31) se tiene:

$$V_{2x}\ \hat{i}_1 + V_{2y}\ \hat{j}_1 = V_{1x}\ \hat{i}_1 + V_{1y}\ \hat{j}_1 + \omega\ \hat{k}_1 \wedge \left[\left(x_2 - x_1 \right) \hat{i}_1 + \left(y_2 - y_1 \right) \hat{j}_1 \right]$$

ó

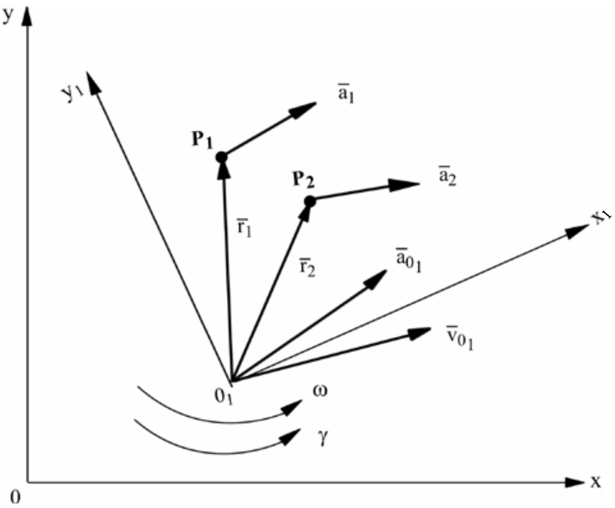
$$\begin{aligned} V_{2x} &= V_{1x} - \omega \left(y_2 - y_1 \right) \\ V_{2y} &= V_{1y} + \omega \left(x_2 - x_1 \right) \end{aligned} \tag{2.31'}$$

Con las que se resuelve el problema del estado de velocidades en el plano. Por supuesto que si se conociese el vector velocidad del origen 0_1, éste punto podría tomarse como centro de reducción para determinar la velocidad de cualquier otro punto P_i de la chapa mediante:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{o_1 i}$$

3) <u>Estado de Aceleración</u>:

El planteo es totalmente análogo, pero debe tenerse en cuenta ahora el vector $\vec{\gamma}$ .Si se conociesen $\vec{a}_{01}, \vec{\omega}$ y $\vec{\gamma}$, la aceleración de cualquier punto quedaría expresada por:



$$\vec{a} = \vec{a}_{01} + \vec{\gamma} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

con: $\vec{\gamma} = \gamma\ \hat{k}_1$
$\vec{\omega} = \omega\ \hat{k}_1$

Cuando los vectores no son conocidos, hay que determinarlos a partir de ciertos parámetros libres de la aceleración y cuyo número podría determinarse aplicando:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{12} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12}) \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x} - \gamma\ (y_2 - y_1) - \omega^2 (x_2 - x_1) \\ a_{2y} = a_{1y} + \gamma\ (x_2 - x_1) - \omega^2 (y_2 - y_1) \end{cases} \tag{2.32'}$$

nuevamente dos ecuaciones con cinco parámetros $a_{1x}, a_{1y}, a_{2x}, a_{2y}, \gamma$ de los que pueden elegirse los tres parámetros libres.

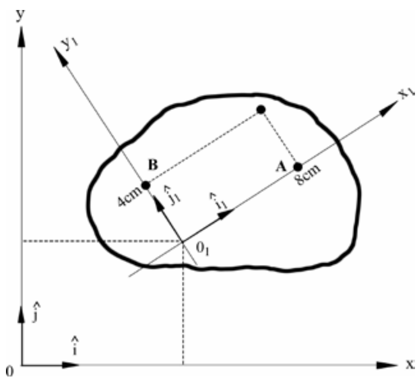
<u>Ejemplo de aplicación</u>: Estados de $\vec{V}$ y $\vec{a}$ en el movimiento plano
Determinar los estados de velocidad y de aceleración de la chapa de la figura con respecto al sistema absoluto $(0, \hat{\imath}, \hat{\jmath})$, sabiendo que los puntos A y B de la misma poseen los siguientes parámetros cinemáticos referenciados a la terna móvil fija al cuerpo:

$\vec{V}_B = 4\,\hat{\imath}_1 - 2\,\hat{\jmath}_1$ cm/s

$V_{Ax} = 1$ cm/s

$\vec{a}_A = 3\,\hat{\imath}_1 + \hat{\jmath}_1$ cm/s^2

$a_{By} = 0$



Una vez determinados los estados de velocidad y aceleración calcular $\vec{V}_{01}$ y $\vec{a}_{01}$ y hallar el centro instantáneo de rotación.

Solución:

a) Para determinar el estado de velocidad, se tendrá un parámetro por $\vec{\omega}$ y cuatro por las velocidades de A y B: cinco en total. Tomando A como centro de reducción se obtienen dos ecuaciones escalares que las relacionan y por lo tanto tres parámetros libres.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AB}$$

$$\begin{cases} V_{BX} = V_{AX} - \omega(y_B - y_A) \\ V_{BY} = V_{AY} + \omega(x_B - x_A) \end{cases}$$

reemplazando

$$4 = 1 - \omega\,(4 - 0)$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{3}{4} \quad ; \quad V_{AY} = -8.$$

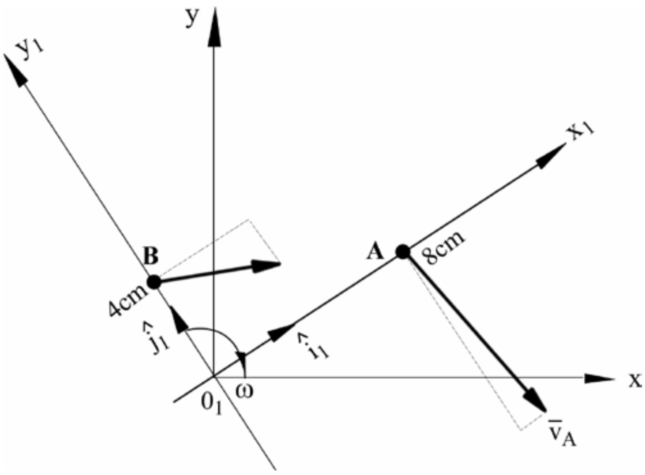
$$-2 = V_{Ay} + \omega\,(0 - 8)$$

Así el estado de velocidad queda determinado

$$\vec{V}_A = \hat{i}_1 - 8\,\hat{j}_1 \text{ (cm/s)}$$

$$\vec{V}_B = 4\,\hat{i}_1 - 2\,\hat{j}_1 \text{ (cm/s)}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{3}{4}\hat{k}_1 \text{ (rad/s)}$$



b) Para el estado de aceleración:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AB}\right)$$

$$\begin{cases} a_{BX} = a_{AX} - \gamma\,\left(y_B - y_A\right) - \omega^2\left(x_B - x_A\right) \\ a_{BY} = a_{AY} + \gamma\,\left(x_B - x_A\right) - \omega^2\,\left(y_B - y_A\right) \end{cases}$$

reemplazando

$$\begin{cases} a_{BX} = 3 - \gamma 4 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \cdot (-8) \\ O = 1 + \gamma(-8) - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \cdot 4 \Rightarrow \gamma = -\dfrac{5}{32} \text{ (rad/s}^2\text{)} \end{cases}$$

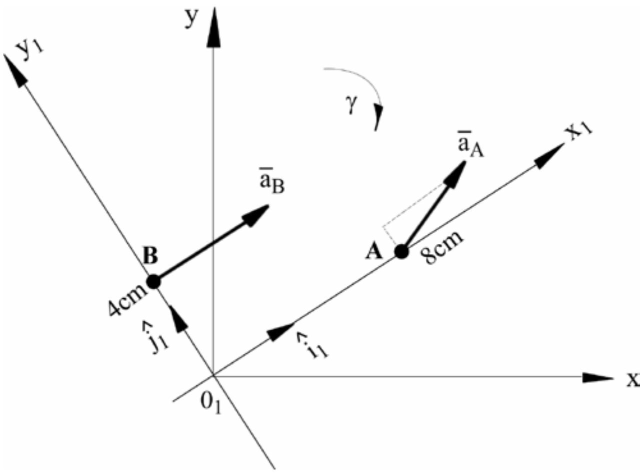
$$a_{BX} = 3 + \frac{5}{8} + \frac{9}{2} = \frac{65}{8}(cm/s^2)$$

y por lo tanto

$$\vec{a}_A = 3\hat{i}_1 + \hat{j}_1 (cm/s^2)$$

$$\vec{a}_B = \frac{65}{8}\hat{i}_1 (cm/s^2)$$

$$\vec{\gamma} = \frac{-5}{32}\hat{k}_1 (rad/s^2)$$



c) $\vec{V}_{01} = \vec{V}_A + \omega \wedge \vec{r}_{A01}$

$$\vec{\omega} \wedge r_{A01} = -\frac{3}{4}\hat{k}_1 \wedge \left(-8\hat{i}_1\right) = 6\hat{j}_1$$

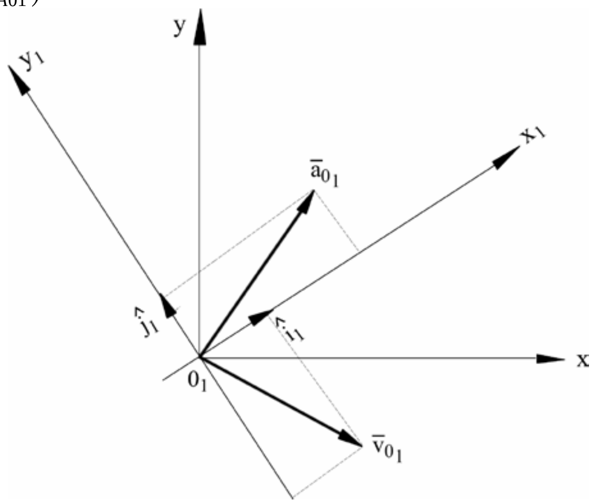
$$\vec{V}_{01} = \hat{i}_1 - 8\,\hat{j}_1 + 6\,\hat{j}_1 = \hat{i}_1 - 2\,\hat{j}_1 \quad \text{(cm/s)}$$

$$\vec{a}_{01} = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{A01} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{A01}\right)$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{r}_{A01} = -\frac{5}{32}\hat{k}_1 \wedge \left(-8\hat{i}_1\right) = \frac{5}{4}\hat{j}_1$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{A01}\right) = -\frac{3}{4}\hat{k}_1 \wedge 6\hat{j}_1 = \frac{9}{2}\hat{i}_1$$

$$\vec{a}_{01} = \frac{13}{2}\hat{i}_1 + \frac{9}{4}\hat{j}_1 \quad \text{(cm/s}^2\text{)}$$



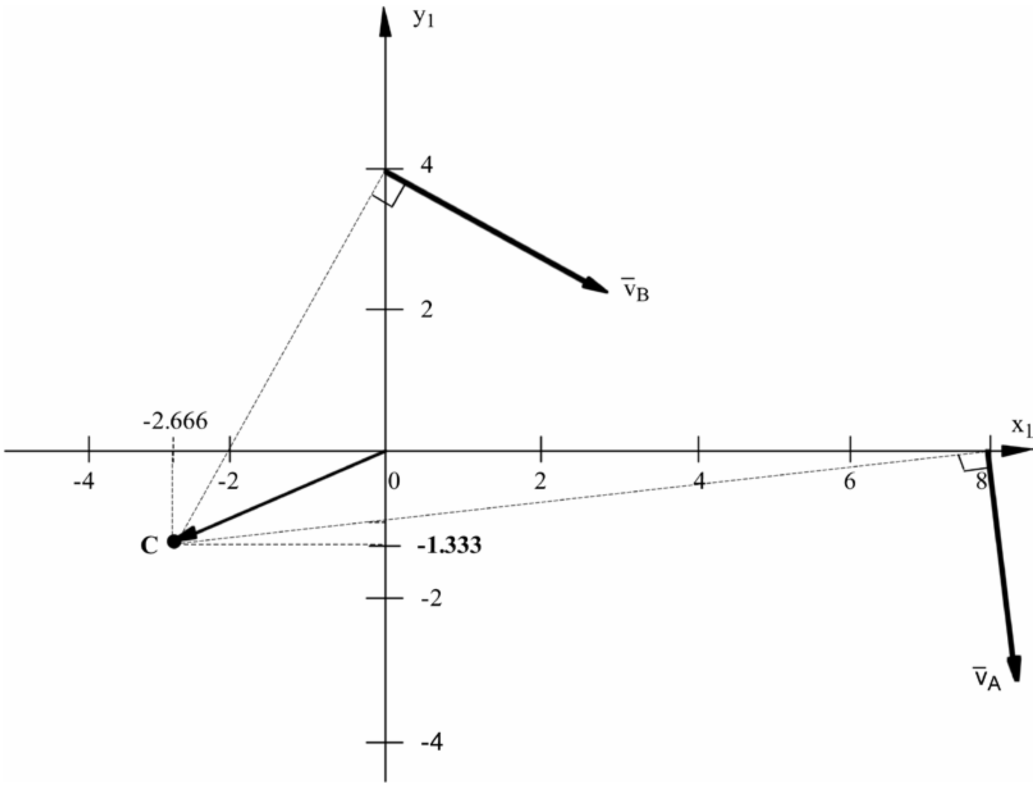
Conociendo $\vec{V}_{01}, \vec{a}_{01}, \vec{\omega}, \vec{\gamma}$ pueden ser determinados los vectores $\vec{V}_i, \vec{a}_i$ para cualquier punto del plano, aplicando las leyes de distribución de $\vec{V}, \vec{a}$.

$$\begin{cases} \vec{V}_i = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \\ \vec{a}_i = \vec{a}_{01} + \vec{\gamma} \wedge \vec{r}_i + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i\right) \end{cases}$$

d) Centro instantáneo de rotación C.

Siendo que $\vec{V}_c = \vec{0} = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{01c}$, resulta

$$\begin{cases} 0 = \quad 1 - \left(\frac{3}{4}\right) y_c \\ 0 = -2 + \left(-\frac{3}{4}\right) x_c \end{cases} \Rightarrow \left(x_x \,,\, y_c\right) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ (cm)}$$



2.7.1. <u>Trayectorias Polares</u>

En los movimientos planos es importante determinar la posición del centro instantáneo de rotación o polo a medida que tiene lugar el movimiento.

Siendo el movimiento plano más general el de rotación instantánea existirá un nuevo centro instantáneo C para cada nueva posición del cuerpo. En otras palabras, el polo va ocupando durante el movimiento distintas posiciones tanto en el plano móvil $(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1)$ como en el absoluto $\left(0, \hat{i}, \hat{j}\right)$, describiendo sendas <u>trayectorias</u> denominadas <u>polares</u>.

El lugar geométrico de estos centros en el plano absoluto recibe el nombre de trayectoria polar fija o base, y en el plano móvil trayectoria polar móvil o ruleta.

Así el movimiento plano de una chapa rígida puede describirse como la rodadura sin deslizar de la ruleta sobre la base, siendo el punto de contacto en cada instante el centro instantáneo de rotación.

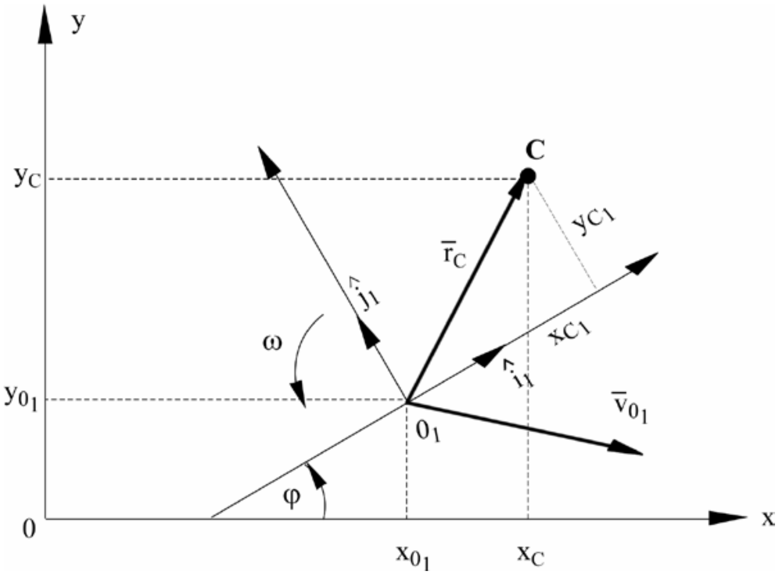
Para determinar las ecuaciones de estas trayectorias, basta con considerar que $\vec{V}_c = \vec{V}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_c = \vec{0}$ de donde, multiplicando vectorialmente por $\vec{\omega}$ se tiene

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{01}}{\omega^2} \tag{2.33}$$

Ahora, reemplazando en esta última expresión los vectores referidos a las ternas absoluta y móvil respectivamente, se obtienen las ecuaciones de la base y la ruleta.

Expresiones analíticas de las curvas “base” y “ruleta”

Considérese la terna $\left(0_1, \hat{i}_1, \hat{j}_1\right)$ unida solidariamente a una chapa rígida que se mueve con respecto al plano absoluto $\left(0, \hat{i}, \hat{j}\right)$. Se aplica la ecuación (2.33) para determinar las posiciones del polo C en los planos absoluto y móvil respectivamente.



a) Curva base:

Los vectores referidos a la terna absoluta son los siguientes:

$$\left|\begin{array}{l} \vec{r}_c = \left(x_c - x_{01}\right)\hat{i} + \left(y_c - y_{01}\right)\hat{j} \\ \vec{\omega} = \omega\,\hat{k} \\ \vec{V}_{01} = \dfrac{dx_{01}}{dt}\,\hat{i} + \dfrac{dy_{01}}{dt}\,\hat{j} \end{array}\right.$$

Reemplazando en la expresión (2.33)

$$(x_c - x_{01})\hat{i} + (y_c - y_{01})\hat{j} = \frac{\omega\hat{k} \wedge}{\omega^2}\left(\frac{dx_{01}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt}\hat{j}\right) = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{dx_{01}}{dt}\hat{j} - \frac{1}{\omega}\frac{dy_{01}}{dt}\hat{i}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_c = x_{01} - \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{dy_{01}}{dt} \\ y_c = y_{01} + \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{dx_{01}}{dt} \end{cases} \tag{2.34}$$

que son las coordenadas del polo con respecto a la terna absoluta o curva base. Ahora teniendo en cuenta que:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

y reemplazando en la (2.34):

$$\begin{cases} x_c = x_{01} - \dfrac{dy_{01}}{d\varphi} \\ y_c = y_{01} + \dfrac{dx_{01}}{d\varphi} \end{cases} \tag{2.35}$$

Estas últimas también son las ecuaciones paramétricas de la curva base, y permiten observar que dicha curva es independiente del tiempo. En otras palabras, no importa cuál sea la velocidad de la chapa al describir su movimiento, la trayectoria de C será la misma.

b) <u>Curva ruleta:</u>

Referidos a la terna móvil, los vectores de la (2.33) son:

$$\vec{r}_c = x_{c1}\,\hat{i}_1 + y_{c1}\,\hat{j}_1$$
$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}_1$$

para obtener $\vec{V}_{01}$ expresado en el plano móvil, se proyectan sus componentes:

$$\vec{V}_{01} = \left[\left(\frac{dx_{01}}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt}\,\hat{j}\right)\cdot\hat{i}_1\right]\hat{i}_1 + \left[\left(\frac{dx_{01}}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy_{01}}{dt}\,\hat{j}\right)\cdot\hat{j}_1\right]\hat{j}_1$$

y siendo:

$$\hat{i} \cdot \hat{i}_1 = \cos\varphi$$
$$\hat{j} \cdot \hat{i}_1 = \cos\left(\varphi + 270^\circ\right) = \text{sen } \varphi$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j}_1 = \cos\left(\varphi + 90^\circ\right) = -\text{sen } \varphi$$
$$\hat{j} \cdot \hat{j}_1 = \cos\varphi$$

resulta:

$$\vec{V}_{01} = \left(\frac{dx_{01}}{dt}\cos\varphi + \frac{dy_{01}}{dt}\text{ sen } \varphi\right)\hat{i}_1 + \left(-\frac{dx_{01}}{dt}\text{ sen } \varphi + \frac{dy_{01}}{dt}\cos\varphi\right)\hat{j}_1$$

O, vectorialmente

$$\vec{V}' = \mathrm{R}\vec{V}_{01} \qquad \text{con} \quad \mathrm{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & sen\varphi \\ -sen\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Siendo R la matriz que representa la transformación lineal rotación en el plano.

Reemplazando en (2.33):

$$x_{c1}\,\hat{i}_1 + y_{c1}\,\hat{j}_1 = \frac{\omega\,\hat{k}_1 \wedge \left[\left(\frac{dx_{01}}{dt}\cos\varphi + \frac{dy_{01}}{dt}\text{ sen } \varphi\right)\hat{i}_1 + \right.}{\omega^2}$$

$$\frac{\left. + \left(-\frac{dx_{01}}{dt}\text{ sen } \varphi + \frac{dy_{01}}{dt}\cos\varphi\right)\hat{j}_1\right]}{\omega^2}$$

resultando:

$$\begin{cases} x_{c1} = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{dx_{01}}{dt}\text{ sen } \varphi - \dfrac{dy_{01}}{dt}\cos\varphi\right) \\ y_{c1} = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{dx_{01}}{dt}\cos\varphi + \dfrac{dy_{01}}{dt}\text{ sen } \varphi\right) \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas del polo en los ejes móviles en forma paramétrica (curva ruleta). Como antes, puede eliminarse el tiempo obteniéndose:

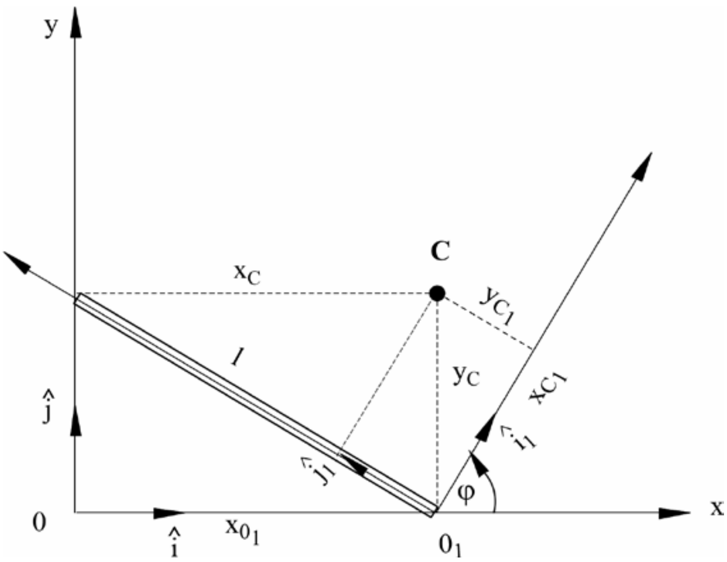
$$\begin{cases} x_{c1} = \dfrac{dx_{01}}{d\varphi}\text{ sen } \varphi - \dfrac{dy_{01}}{d\varphi}\cos\varphi \\ y_{c1} = \dfrac{dx_{01}}{d\varphi}\cos\varphi + \dfrac{dy_{01}}{d\varphi}\text{ sen } \varphi \end{cases} \qquad (2.36)$$

La aplicación de las expresiones (2.35) y (2.36) es inmediata conociendo:

$$x_{01} = x_{01}(\varphi) \qquad , \qquad y_{01} = y_{01}(\varphi)$$

Ejemplo de aplicación: Curvas base y ruleta

Determinar las trayectorias polares de una barra que se mueve en su plano manteniendo sus extremos sobre los ejes de referencia absolutos.



Solución:

Para determinar las coordenadas del polo C en el plano absoluto se aplican las ecuaciones (2.35);

$$\begin{cases} x_{01} = \ell \cos\left(180^\circ - 90^\circ - \varphi\right) = \ell \cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \ell \operatorname{sen} \varphi \\ y_{01} = 0 \end{cases}$$

reemplazando:

$$\begin{cases} x_c = \ell \operatorname{sen} \varphi \\ y_c = \ell \cos \varphi \end{cases}$$

elevando al cuadrado y sumando : $x_c^2 + y_c^2 = \ell^2$ $\rightarrow$ curva base

Aplicando ahora las ecuaciones (2.36) para determinar la ruleta:

$$\begin{cases} x_{c1} = \ell \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \\ y_{c1} = \ell \cos^2 \varphi \end{cases}$$

eliminando el parámetro φ:

$$x_{c1} = \ell \cos \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \qquad ; \qquad \cos^2 \varphi = \frac{y_{c1}}{\ell}$$

$$\therefore \quad x_{c1} = \ell\sqrt{\frac{y_{c1}}{\ell}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y_{c1}}{\ell}} = \sqrt{\ell y_{c1} - y_{c1}^2}$$

elevando al cuadrado $x_{c1}^2 + y_{c1}^2 = \ell \cdot y_{c1}$

Ésta es la ecuación de la curva ruleta. Se analizará qué tipo de curva es partiendo de la ecuación de una circunferencia con centro en (a,b):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

En este caso es a = 0

$$x^2 + y^2 - 2\,y\,b + b^2 = r^2$$

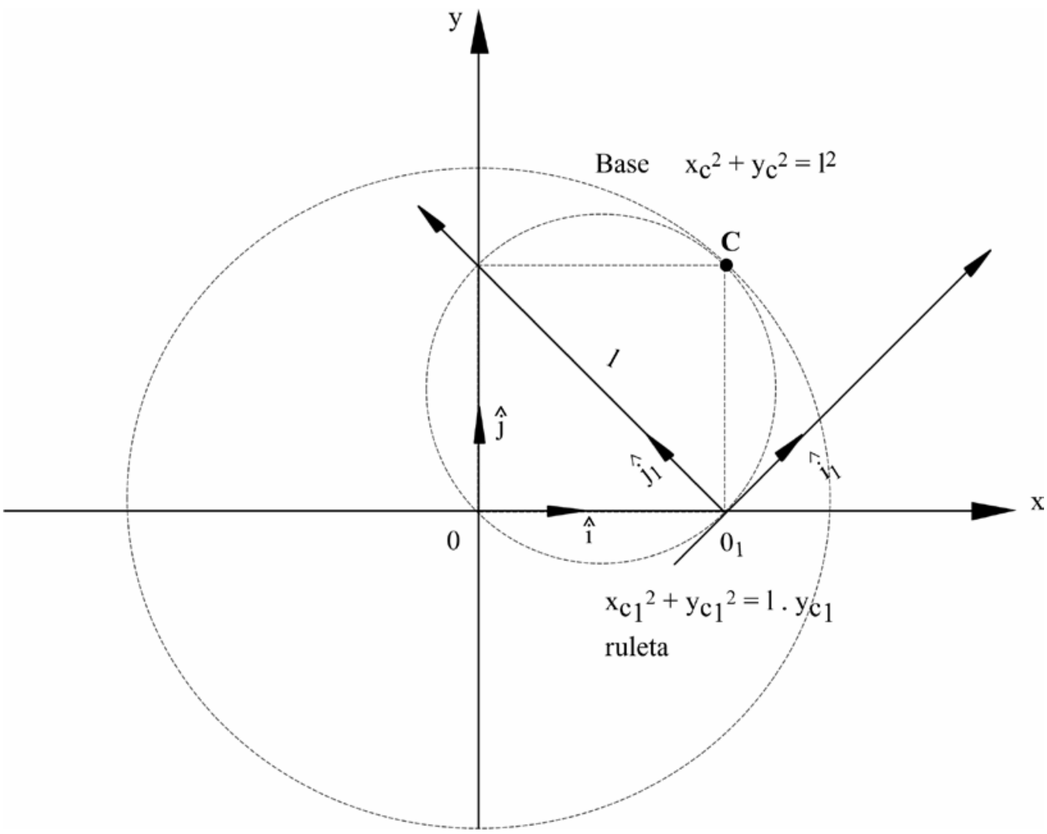
y tomando b = 1/2 = r

$$x^2 + y^2 = 2\,b\,y = \ell\,y$$

Por lo tanto:

BASE : circunferencia de centro 0 y radio ℓ

RULETA : circunferencia desplazada del origen 0_1 sobre el eje $\hat{j}_1$ de radio $\ell/2$.



Propuesta para el alumno: Dibujar los ejes de referencia absolutos en una hoja papel. Dibujar los ejes de referencia móviles y la barra sobre otra hoja, en lo posible transparente. Superponerlos partiendo de 0 coincidente con 0_1 y comenzar el deslizamiento del móvil sobre el fijo manteniendo los extremos de la barra en contacto con los ejes fijos. Marcar con la punta de un lápiz en varias posiciones la posición de C en los dos sistemas simultáneamente. Separar y observar las trayectorias del polo.