

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

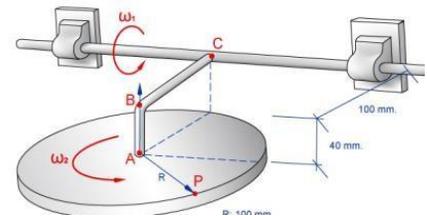
COMPLEMENTO DIDÁCTICO

CAPÍTULO 4. CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO

EJEMPLO RESUELTO – Parte 2 de 2

CÁLCULO DE LA ENERGÍA CINÉTICA, REACCIONES DE VÍNCULO y MOMENTO
GIROSCÓPICO

ROTACIONES ALABEADAS



Septiembre 2016

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Objetivo: Aplicación de las ecuaciones de la energía cinética y de las cardinales de Newton y Euler.

Problema: Retomando el Ejemplo Resuelto (Parte 1 de 2) del Capítulo 2 para Rotaciones alabeadas, sea el disco de 100 mm de radio, espesor de 5 mm y una masa de 1,5Kg del mecanismo de la Figura 1 sometido a la rotación constante $\omega_2 = 20 \text{ rad/s}$ alrededor del brazo ABC, que a su vez gira a velocidad constante $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ alrededor del eje entre cojinetes DE. La masa de los bastidores se considera despreciable.

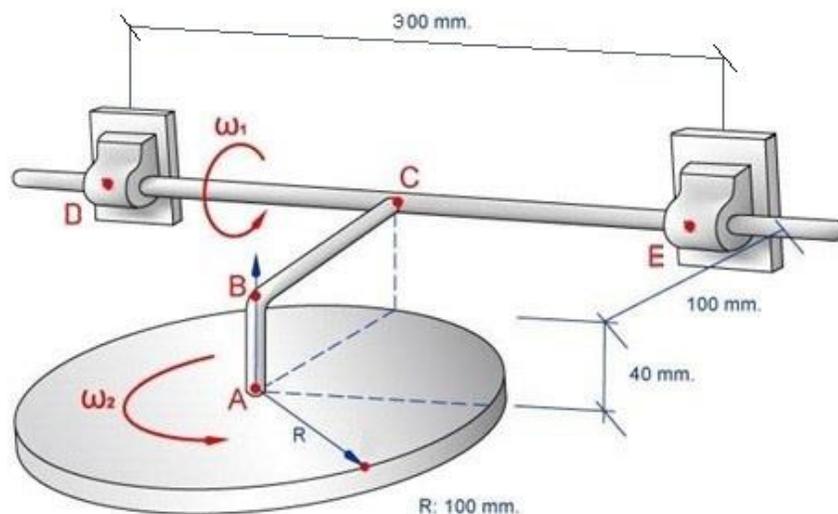


Figura 1. Sistema mecánico bajo estudio.

Calcular:

1. Cantidad de movimiento del disco.
2. Energía cinética del disco.
3. Momento externo que debe aplicarse para que se mantenga constante la rotación del bastidor portante del disco.
4. Valores de las reacciones en los cojinetes debidas al desequilibrio dinámico. Graficarlas.
5. Valores de las reacciones en los cojinetes debidas al desequilibrio estático. Graficarlas.
6. Reacciones totales en los cojinetes. Graficarlas.
7. Momento giroscópico producto de la precesión estable normal, en el vínculo de unión entre el bastidor y el disco.
8. Reacciones dinámicas si a partir de $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ se aplica al eje del bastidor una aceleración angular $\gamma = 3 \text{ rad/s}^2$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Antes de comenzar con el desarrollo del problema deben determinarse los sistemas coordenados sobre los que se expresarán los vectores. En este caso se tomarán dos, uno móvil con origen en el punto A (ejes $X'Y'Z'$) solidario al bastidor CBA, y otro con origen en el punto D (ejes XYZ) fijo al marco de referencia absoluto determinado por el plano de anclaje de los cojinetes..

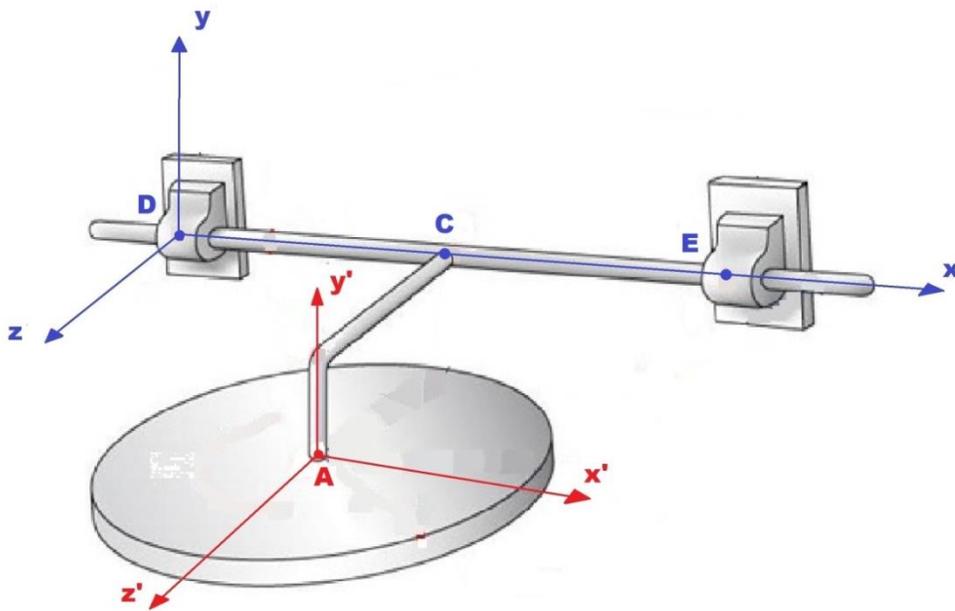


Figura 2. Sistemas coordenadas adoptados

1. Cantidad de movimiento del disco:

Utilizando la Ecuación (4.9) del libro:

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V}_G \quad (1)$$

Siendo “ m ” la masa total del disco y \vec{V}_G la velocidad del centro de masas calculada previamente en la Parte 1 del Ejemplo Resuelto de Cinemática del Capítulo 2 para rotaciones albeadas.

$$m = 1,5 \text{ Kg}$$

En el sistema móvil, será:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A = -1 \check{j}' - 0,4 \check{k}' \quad [m/s]$$

Reemplazando en (1)

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$\vec{Q} = -1,5 \check{j}' - 0,6 \check{k}' [N.s]$$

2. Energía Cinética del disco

La expresión (4.8) del libro permite calcular la energía cinética de un cuerpo rígido. Tomando como centro de reducción al punto A, resulta:

$$e = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} I_{\omega\omega_A} \omega^2 + m \vec{V}_A \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AG} \quad (2)$$

El primer sumando, resulta:

$$e_1 = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \text{Kg} (1^2 + 0,4^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 0,87 \text{Joule}$$

El segundo sumando, será:

$$e_2 = \frac{1}{2} I_{\omega\omega_A} \omega^2 \quad (3)$$

Debiendo calcularse el momento de inercia del disco respecto de un eje paralelo al vector $\vec{\omega}$ que pasa por el punto A.

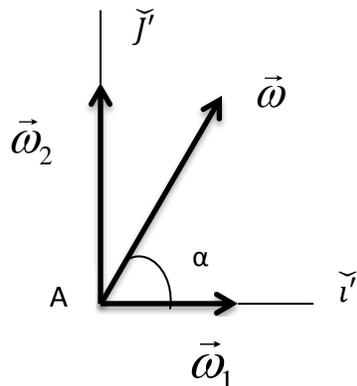


Figura 3. Invariante vectorial $\vec{\omega}$ aplicado en el centro de reducción A

Donde $\alpha = \arctg 2 = 1,107 \text{ rad}$

Denotando con doble prima la dirección del eje $\vec{\omega}$, haciendo uso de la expresión (A.1) del Apéndice 1 del libro y tomando en cuenta que los momentos de inercia centrífugos respecto de los ejes coordenados móviles son nulos, se tendrá:

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$I_{\omega\omega_A} = I_{2''2''} = c_{2''1'}^2 I_{11'} + c_{2''2'}^2 I_{22'} + c_{2''3'}^2 I_{33'} \quad (4)$$

Donde:

$$c_{2''1'} = \cos \alpha = 0,447$$

$$c_{2''2'} = \cos\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0,894$$

$$c_{2''3'} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Y los momentos de inercia

$$I_{11'} = I_{33'} = \frac{1}{4} mR^2 = \frac{1}{4} \cdot 1,5 \text{Kg} \cdot 0,1^2 \text{m}^2 = 0,00375 \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{22'} = \frac{1}{2} mR^2 = 0,0075 \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

Reemplazando en (4):

$$I_{2''2''} = 0,2 \times 0,00375 + 0,8 \times 0,0075 = 0,00675 \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

Y reemplazando en (3):

$$e_2 = \frac{1}{2} \times 0,00675 \text{Kg} \cdot \text{m}^2 (10^2 + 20^2) \frac{1}{\text{s}^2} = 1,69 \text{Joule}$$

El tercer sumando se anula por cuanto A coincide con G. Así, resulta:

$$e = e_1 + e_2 = 2,56 \text{Joule}$$

3. Momento externo a aplicar para mantener constante la rotación $\vec{\omega}_1$

Para mantener la rotación ω_1 constante, la suma de momentos aplicados sobre el eje DE debe ser nula. Por lo tanto, es necesario aplicar un momento que contrarreste la acción

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

del momento de la fuerza peso que se encuentra fuera del eje de rotación.
Para cada posición del mecanismo, el momento producido por el peso cambiará, por lo que el momento M_x a ser aplicado será también función del tiempo.

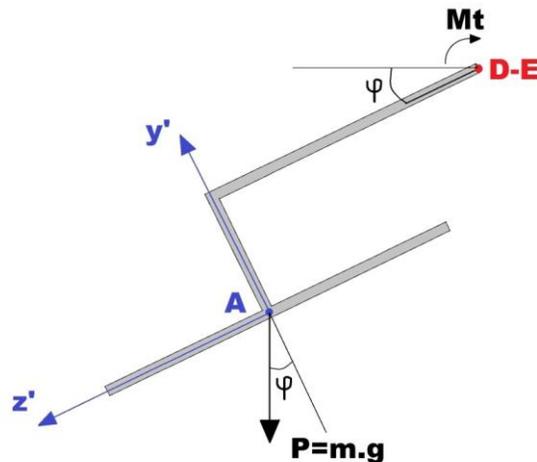


Figura 4. Fuerza peso y momento aplicado

Siendo ω_1 constante y tomando $\varphi(0) = 0$, el ángulo $\varphi = \int \omega(t) dt$, será:

$$\varphi = \omega_1 \cdot t$$

Y la sumatoria de momentos:

$$\sum \vec{M}_{DE} = 0 \quad \rightarrow \quad Mx + \vec{r}_A \wedge \vec{P} = 0$$

Donde:

$$\vec{P} = m \cdot g \cdot (-\cos \varphi \vec{j}' + \operatorname{sen} \varphi \vec{k}')$$

$$\vec{r}_A = -0,04 \vec{j}' + 0,1 \vec{k}' \text{ [m]}$$

Por lo tanto:

$$Mx + [-0,04 (\vec{j}') + 0,1 (\vec{k}')] \wedge m \cdot g \cdot [(-\cos \varphi \vec{j}' + \operatorname{sen} \varphi \vec{k}')] = 0$$

Finalmente:

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$M_x = -m \cdot g \cdot (0,1 \cdot \cos \varphi - 0,04 \cdot \operatorname{sen} \varphi) \tilde{i} \quad (5)$$

Algunos valores particulares de este momento se darán cuando:

- a) El momento será máximo cuando A se ubique en el plano horizontal que contiene al eje DE, por cuanto será mayor el brazo de palanca

Allí es: $\varphi = 2\pi - \beta$

Donde: $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,4 = 0,3805 \operatorname{rad}$

Y por lo tanto: $\varphi = 2\pi - 0,3805 = 5,9027 \operatorname{rad}$

Resultando el momento: $M_x = -0,107 \operatorname{mg}$

- b) Cuando B ocupa la posición sobre el plano horizontal que contiene al eje DE, es $\varphi=0$, por lo que el momento a ser aplicado según (5) resultará:

$$M_x = -0,1 \operatorname{mg}$$

- c) En una posición intermedia cualquiera, por ejemplo $\varphi = 30^\circ = 0,5236 \operatorname{rad}$, el momento a ser aplicado, resulta:

$$M_x = -0,066 \operatorname{mg}$$

- d) El momento se anulará cuando A se encuentre en su posición vertical más baja:

Allí es: $\varphi + \beta = \pi/2$

Por lo tanto: $\varphi = 1,19029 \operatorname{rad}$

Para el cual el valor de M_x calculado con la expresión (5) resulta:

$$M_x = 0$$

- e) Una vez pasada esta posición, el signo del momento cambiará y se mantendrá positivo mientras el disco se encuentre ubicado a la derecha del eje DE.

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

4. Reacciones de vínculo en los cojinetes D y E debidas al desequilibrio dinámico.

Los esfuerzos dinámicos se deben exclusivamente al movimiento y tienen su origen tanto en la distribución espacial de masas por fuera del eje de rotación, como por los efectos cruzados de las rotaciones alabeadas que generan un momento.

Planteando las posibles reacciones de cada cojinete en la dirección positiva a los ejes coordenados móviles y utilizando la Ecuación de Newton (4.20 Cap. IV)

$$\vec{F}_E = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{REL} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q} \quad (6)$$

Siendo $\vec{\Omega} = \overline{\omega}_1$ y $\vec{Q} = -1,5 \check{j}' - 0,6 \check{k}'$ [N.s]

Resulta $\left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{REL} = 0$

Y reemplazando en (6)

$$\begin{aligned} \vec{F}_E &= \overline{\omega}_1 \wedge \vec{Q} \\ \vec{F}_E &= (10\check{i}') \wedge (-1,5 \check{j}' - 0,6 \check{k}') \\ \vec{F}_E &= 6 \check{j}' - 15 \check{k}' \quad [N] \end{aligned}$$

Utilizando ahora la Ecuación de Euler (4.23' Cap. IV)

$$\overrightarrow{M}_{E(o1)} = \left[\frac{d\overrightarrow{K}_{o1}}{dt} \right]_{REL} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{K}_{(o1)} + \overrightarrow{V}_{o1} \wedge \vec{Q} \quad (7)$$

Y tomando al punto A como centro de reducción:

$$\overrightarrow{V}_{o1} = \overrightarrow{V}_A = -1 \check{j}' - 0,4 \check{k}' \quad [m/s]$$

$$\vec{Q} = -1,5 \check{j}' - 0,6 \check{k}' \quad [N.s]$$

$$\vec{\Omega} = \overline{\omega}_1$$

$$\overrightarrow{K}_{(o1)} = \overrightarrow{K}_{(A)} = \overline{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$\overrightarrow{K}_{(A)} = \begin{bmatrix} Ix'x' & -Ix'y' & -Ix'z' \\ & Iy'y' & -Iy'z' \\ Sim & & Iz'z' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{K}_{(A)} = (Ix'x' \cdot \omega_1 - Ix'y' \cdot \omega_2)\tilde{i}' + (-Ix'y' \cdot \omega_1 + Iy'y' \cdot \omega_2)\tilde{j}' + (Ix'z' \cdot \omega_1 - Iy'z' \cdot \omega_2)\tilde{k}'$$

Donde, tomando en cuenta los cálculos del Apartado 2, los momentos de inercia axiales resultan:

$$Ix'x' = Iz'z' = 3,75 \cdot 10^{-3} \quad [Kg \cdot m^2]$$

$$Iy'y' = 7,5 \cdot 10^{-3} \quad [Kg \cdot m^2]$$

Y los momentos centrífugos son nulos.

Por lo tanto:

$$\overrightarrow{K}_{(A)} = (10 \cdot 3,75 \cdot 10^{-3})\tilde{i}' + (20 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3})\tilde{j}'$$

$$\overrightarrow{K}_{(A)} = (0,0375)\tilde{i}' + (0,15)\tilde{j}' \quad \left[Kg \cdot \frac{m^2}{s} \right]$$

Consecuentemente: $\left[\frac{d\overrightarrow{K}_{(A)}}{dt} \right]_{REL} = 0$

Reemplazando en (7):

$$\overrightarrow{M}_{E(A)} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{K}_{(A)} + \overrightarrow{V}_A \wedge \overrightarrow{Q}$$

$$\overrightarrow{V}_A \wedge \overrightarrow{Q} = 0$$

$$\overrightarrow{M}_{E(A)} = (10 \tilde{i}') \wedge (0,0375 \tilde{i}' + 0,15 \tilde{j}')$$

$$\overrightarrow{M}_{E(A)} = 1.5 \tilde{k}' \quad [N \cdot m]$$

Así, resulta el sistema de seis ecuaciones

$$\text{Newton} \begin{cases} 6 = R_{Dy} + R_{Ey} \\ -15 = R_{Dz} + R_{Ez} \\ 0 = R_{Ex} \end{cases}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$\text{Euler} \begin{cases} 0 = +0,1 \cdot (R_{Dy} + R_{Ey}) + 0,04 \cdot (R_{Dz} + R_{Ez}) \\ 0 = 0,15 \cdot R_{Dz} - 0,15 \cdot R_{Ez} \\ 1,5 = -0,15 \cdot R_{Dy} + 0,15 \cdot R_{Ey} \end{cases}$$

Resolviendo:

De la segunda de Euler, es: $R_{Dz} = R_{Ez}$

Reemplazando en la segunda de Newton: $-15 = 2 \cdot R_{Dz}$

de donde: $R_{Dz} = -7,5 [N]$ y $R_{Ez} = -7,5 [N]$

Además, de la última ecuación de Euler: $\frac{1,5}{0,15} = -R_{Dy} + R_{Ey}$

Es, $R_{Dy} = -10 + R_{Ey}$

Reemplazando en la primera de Newton: $6 = -10 + R_{Ey} + R_{Ey}$

$16 = 2 \cdot R_{Ey}$ de donde: $R_{Ey} = 8 [N]$

$6 = R_{Dy} + 8$ de donde: $R_{Dy} = -2 [N]$

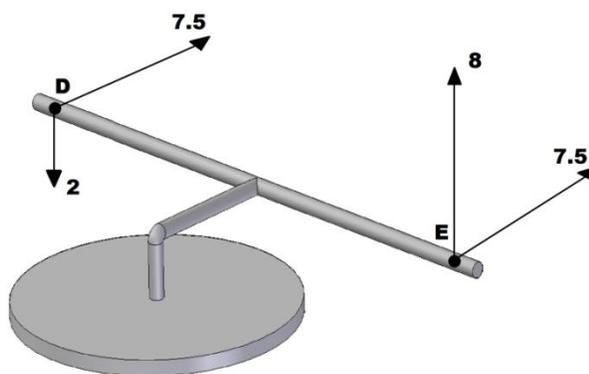


Figura 5. Esquema de las reacciones dinámicas halladas

Nótese que las reacciones encontradas comprenden las fuerzas y el momento. Siendo la fuerza centrífuga del disco

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$F_C = m \omega_1^2 CA = 1,5 \text{ Kg} \times 100 \text{ 1/s}^2 \times 0,1077 \text{ m} = 16,155 \text{ N}$$

sus componentes cartesianas, son:

$$F_{CH} = 16,155 \text{ N} \cdot \cos 0,3805 = 15 \text{ N}$$

$$F_{CV} = - 16,155 \text{ N} \cdot \sen 0,3805 = - 6 \text{ N}$$

Observándose que las reacciones horizontales en D y E halladas, soportan por igual a la componente horizontal de la fuerza centrífuga.

Tal como se demostró en el Apartado 4.6, las reacciones dinámicas generan cuplas. Esto es, las verticales soportan a la componente vertical de la fuerza centrífuga, combinadas vectorialmente con la cupla:

$$\frac{M_z}{2.L} = \frac{1,5Nm}{2.0,15m} = 5N$$

Como se vio en el problema ejemplo del Apartado 4.6, esta cupla rota con ω_1 junto con el cuerpo. La Figura 6 ilustra el desagregado de las reacciones dinámicas en ambos cojinetes.

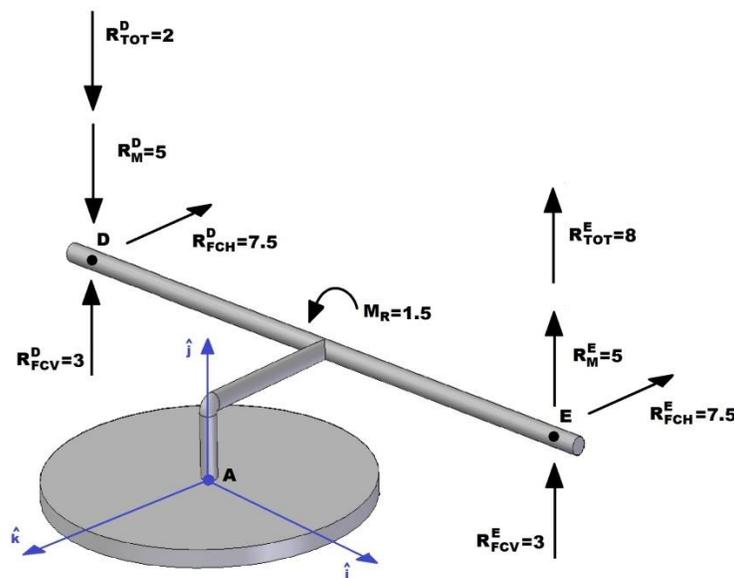


Figura 6. Desagregado de las reacciones dinámicas

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Para expresar las reacciones en los ejes coordenados fijos al marco de referencia, es necesario realizar el siguiente cambio de coordenadas por rotación de ejes:

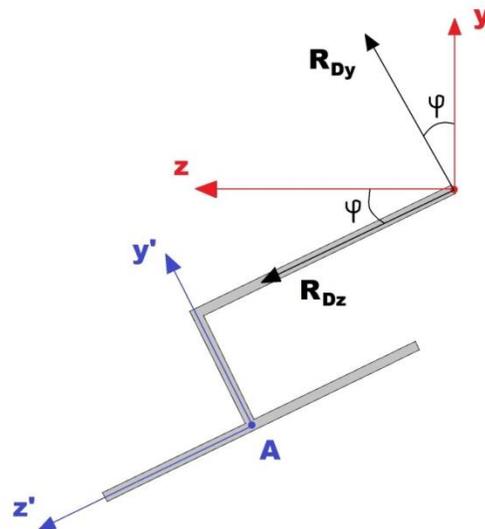


Figura 7. Transformación de coordenadas por rotación de ejes

$$\begin{aligned} R_{Dy} \check{j}' &= R_{Dy} \cdot \cos(\varphi) \check{j} + R_{Dy} \cdot \text{sen}(\varphi) \check{k} \\ R_{Ey} \check{j}' &= R_{Ey} \cdot \cos(\varphi) \check{j} + R_{Ey} \cdot \text{sen}(\varphi) \check{k} \\ R_{Dz} \check{k}' &= -R_{Dz} \cdot \text{sen}(\varphi) \check{j} + R_{Dz} \cdot \cos(\varphi) \check{k} \\ R_{Ez} \check{k}' &= -R_{Ez} \cdot \text{sen}(\varphi) \check{j} + R_{Ez} \cdot \cos(\varphi) \check{k} \end{aligned}$$

Y dado que es $\varphi = \omega_1 \cdot t$

Resulta:

$$\begin{aligned} -2 \check{j}' &= -2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \check{j} - 2 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \check{k} \\ 8 \check{j}' &= 8 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \check{j} + 8 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \check{k} \\ -7,5 \check{k}' &= 7,5 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \check{j} - 7,5 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \check{k} \\ -7,5 \check{k}' &= 7,5 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \check{j} - 7,5 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \check{k} \end{aligned}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

5. **Reacciones de vínculo en los cojinetes D y E debidas al desequilibrio estático.**

El mecanismo, en la posición mostrada en la Figura 7, se encuentra sometiendo a los cojinetes a esfuerzos estáticos debidos al peso del mismo, en este caso 14,7 [N] causados únicamente por la masa del disco.

En este caso es posible apreciar que la fuerza peso del disco se encuentra concentrada sobre la dirección del eje fijo Y para cualquier posición del mecanismo, por lo que en los restantes ejes no existirán reacciones. De la sumatoria de fuerzas en Y, resulta

$$\sum \vec{F}_y = 0 \rightarrow F_{Dy} + F_{Ey} - m \cdot g = 0$$

De donde:

$$F_{Ey} = 7,35 [N]$$

$$F_{Dy} = 7,35 [N]$$

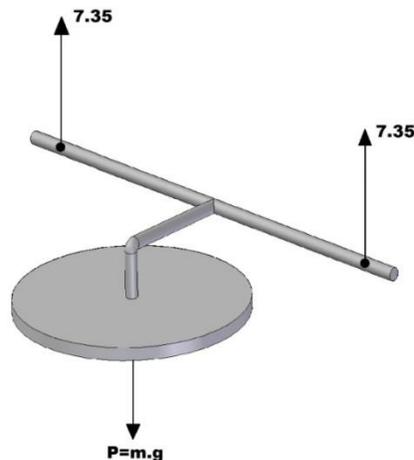


Figura 8. Reacciones estáticas verticales

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Para expresar estas reacciones en los ejes móviles solidarios al bastidor en A, es necesario realizar un cambio de coordenadas similar al anterior:

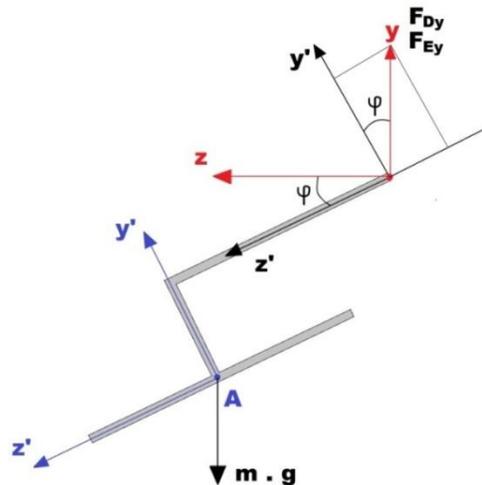


Figura 9. Cambio de coordenadas para las reacciones estáticas

$$F_{Dy} \check{J} = F_{Dy} \cdot \cos(\varphi) \check{J}' - F_{Dy} \cdot \text{sen}(\varphi) \check{K}'$$

$$F_{Ey} \check{J} = F_{Ey} \cdot \cos(\varphi) \check{J}' - F_{Ey} \cdot \text{sen}(\varphi) \check{K}'$$

Donde es $\varphi = \omega_1 \cdot t$. Reemplazando:

$$7,35 \check{J} = 7,35 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \check{J}' - 7,35 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \check{K}'$$

6. Reacciones de vínculo totales en los cojinetes D y E.

Componiendo las reacciones dinámicas y estáticas halladas anteriormente, y expresando los vectores en el sistema coordenado móvil, se tiene:

$$Y'_D = -2 + 7,35 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

$$Y'_E = 8 + 7,35 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

$$Z'_D = -7,5 - 7,35 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$Z'_E = -7,5 - 7,35 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$X'_E = 0$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Para el sistema fijo al marco de referencia absoluto:

$$Y_D = 7,35 - 2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 7,5 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$Y_E = 7,35 + 8 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 7,5 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)$$

$$Z_D = -2 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) - 7,5 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

$$Z_E = 8 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) - 7,5 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

$$X_E = 0$$

A. Reacciones de vínculo en $t = 0$:

Para el sistema coordinado móvil que gira con $\omega_1 = cte$:

$$Y'_D = -2 + 7,35 \cdot \cos(0) = 5,35 \quad [N]$$

$$Y'_E = 8 + 7,35 \cdot \cos(0) = 15,35 \quad [N]$$

$$Z'_D = -7,5 - 7,35 \cdot \text{sen}(0) = -7,5 \quad [N]$$

$$Z'_E = -7,5 - 7,35 \cdot \text{sen}(0) = -7,5 \quad [N]$$

$$X'_E = 0 \quad [N]$$

Para el sistema fijo al marco de referencia:

$$Y_D = 7,35 - 2 \cdot \cos(0) + 7,5 \cdot \text{sen}(0) = 5,35 \quad [N]$$

$$Y_E = 7,35 + 8 \cdot \cos(0) + 7,5 \cdot \text{sen}(0) = 15,35 \quad [N]$$

$$Z_D = -2 \cdot \text{sen}(0) - 7,5 \cdot \cos(0) = -7,5 \quad [N]$$

$$Z_E = 8 \cdot \text{sen}(0) - 7,5 \cdot \cos(0) = -7,5 \quad [N]$$

$$X_E = 0 \quad [N]$$

En esta posición los ejes fijos al marco de referencia y los ejes móviles se hallan en la misma dirección y sentido, por lo que las reacciones en cada cojinete para ambos sistemas coordinados tienen el mismo valor.

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

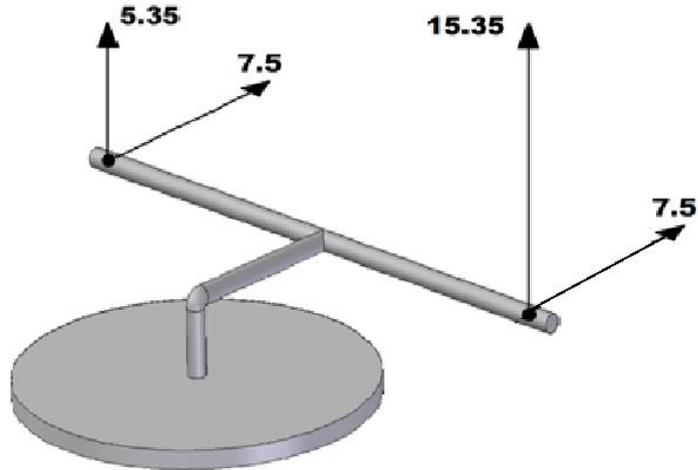


Figura 10. Reacciones totales en $\varphi = 0$

B. Reacciones de vínculo para la posición $\varphi = \pi/2$

Para el sistema coordenado móvil, es:

$$Y'_D = -2 + 7,35 \cdot \cos(90) = -2 \quad [N]$$

$$Y'_E = 8 + 7,35 \cdot \cos(90) = 8 \quad [N]$$

$$Z'_D = -7,5 - 7,35 \cdot \sen(90) = -14,85 \quad [N]$$

$$Z'_E = -7,5 - 7,35 \cdot \sen(90) = -14,85 \quad [N]$$

$$X'_E = 0 \quad [N]$$

Para el sistema coordenado fijo al marco de referencia absoluto:

$$Y_D = 7,35 - 2 \cdot \cos(90) + 7,5 \cdot \sen(90) = 14,35 \quad [N]$$

$$Y_E = 7,35 + 8 \cdot \cos(90) + 7,5 \cdot \sen(90) = 14,35 \quad [N]$$

$$Z_D = -2 \cdot \sen(90) - 7,5 \cdot \cos(90) = -2 \quad [N]$$

$$Z_E = 8 \cdot \sen(90) - 7,5 \cdot \cos(90) = 8 \quad [N]$$

$$X_E = 0 \quad [N]$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Puede observarse que en esta configuración del mecanismo, la fuerza peso y el vector momento giroscópico se encuentran contenidos en el plano del disco (paralelo al XY) y

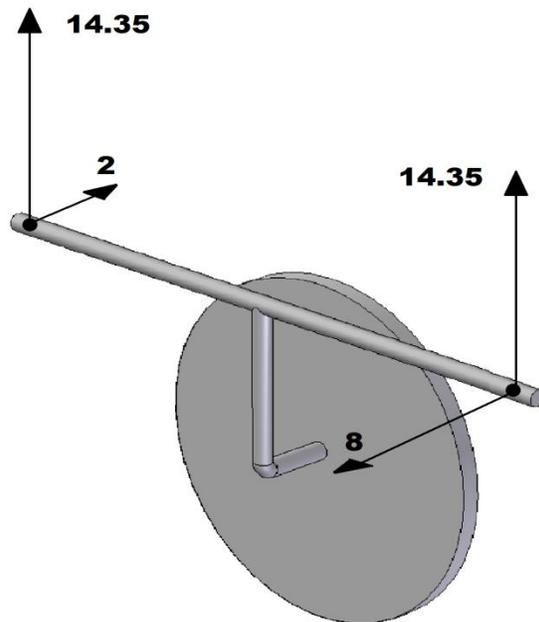


Figura 11. Reacciones totales en $\varphi = \pi/2$

con dirección según $-Y$. Por lo tanto, el momento giroscópico tendrá efecto sobre las reacciones en la dirección Z.

De los resultados anteriores se concluye que el esfuerzo máximo sobre los cojinetes tienen lugar en la posición $\varphi = 0$, para la cual la resistencia al peso se ve incrementada por el desbalanceo de la masa del disco y el efecto giroscópico, $Y_E = 15,35 \quad [N]$

7. Verificación del momento giroscópico producto de la precesión estable normal.

Tratándose de una precesión estable normal, para el cálculo del momento giroscópico puede aplicarse la sencilla expresión

$$\overline{M}_{(A)} = I_{y'y'} \cdot (\dot{\psi} \tilde{i}' \wedge \dot{\varphi} \tilde{j}')$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

Siendo

$$I_{y'y'} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\dot{\psi}\tilde{i}' = 10\tilde{i}' \text{ [1/s]}$$

$$\dot{\phi}\tilde{j}' = 20\tilde{j}' \text{ [1/s]}$$

Resulta

$$\vec{M}_{(A)} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2\right) \cdot (10\tilde{i}' \wedge 20\tilde{j}')$$

$$\vec{M}_{(A)} = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,1^2\right) \cdot (10\tilde{i}' \wedge 20\tilde{j}')$$

$$\vec{M}_{(A)} = (7,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (200\tilde{k}')$$

$$\vec{M}_{(A)} = 1,5\tilde{k}' \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Que verifica el momento dinámico calculado en el Apartado 4.

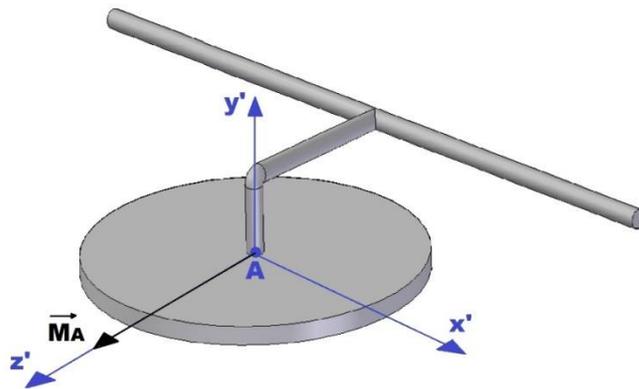


Figura 12. Representación vectorial del momento giroscópico

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

8. Reacciones dinámicas si a partir de $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ se aplica al eje del bastidor una aceleración angular $\gamma = 3 \text{ rad/s}^2$.

Utilizando nuevamente la Ecuación de Newton (4.20)

$$\vec{F}_E = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{REL} + \bar{\Omega} \wedge \vec{Q}$$

Siendo

$$\overline{\omega_1(t)} = \omega_1(t) \check{i}' = (\omega_1 + \gamma \cdot t) \check{i}'$$

$$\bar{\Omega} = \omega_1(t) \check{i}' = (\omega_1 + \gamma \cdot t) \check{i}'$$

$$\vec{Q} = m \times \vec{V}_G$$

$$\vec{Q} = m \cdot ((\omega_1(t) \check{i}') \wedge (-0,04 \check{j}' + 0,1 \check{k}'))$$

$$\vec{Q} = (-m \cdot \omega_1(t) \cdot 0,1) \check{j}' + (-m \cdot \omega_1(t) \cdot 0,04) \check{k}'$$

$$\left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{REL} = -0,18 \check{k}' - 0,45 \check{j}' \text{ [N]}$$

y

$$\bar{\Omega} \wedge \vec{Q} = (\omega_1(t) \check{i}') \wedge ((-m \cdot \omega_1(t) \cdot 0,1) \check{j}' + (-m \cdot \omega_1(t) \cdot 0,04) \check{k}')$$

reemplazando

$$\begin{aligned} \vec{F}_E &= 0,06 \cdot (\omega_1(t))^2 \check{j}' - 0,15 \cdot (\omega_1(t))^2 \check{k}' - 0,45 \check{j}' - 0,18 \check{k}' = \\ &= -[0,45 - 0,06(3t + 10)^2] \check{j}' - [0,18 + 0,15(3t + 10)^2] \check{k}' \end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación de Euler (4.23')

$$\vec{M}_{E(A)} = \left[\frac{d\vec{K}_A}{dt} \right]_{REL} + \bar{\Omega} \wedge \vec{K}_{(A)} + \vec{V}_A \wedge \vec{Q}$$

Siendo

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$\overline{\omega_1(t)} = \omega_1(t) \tilde{i}' = (\omega_1 + \gamma \cdot t) \tilde{i}'$$

$$\vec{\Omega} = \omega_1(t) \tilde{i}' = (\omega_1 + \gamma \cdot t) \tilde{i}'$$

$$\vec{V}_A \wedge \vec{Q} = 0$$

$$\vec{K}_{(A)} = \vec{I}_A \cdot \vec{\omega}_T$$

$$\vec{K}_{(A)} = \begin{bmatrix} Ix'x' & -Ix'y' & -Ix'z' \\ & Iy'y' & -Iy'z' \\ Sim & & Iz'z' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{K}_{(A)} = (3,75 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_1(t)) \tilde{i}' + (7,5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_2) \tilde{j}' =$$

$$= 0,00375(3t+10) \tilde{i}' + 0,0075\omega_2 \tilde{j}'$$

$$\left[\frac{d\vec{K}_A}{dt} \right]_{REL} = 0,01125 i' \quad [N.m]$$

Reemplazando

$$\vec{M}_{E(A)} = (\omega_1(t) \tilde{i}') \wedge \left((3,75 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_1(t)) \tilde{i}' + (7,5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_2) \tilde{j}' \right) + 0,01125 i'$$

$$\vec{M}_{E(A)} = 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) \tilde{k}' + 0,01125 i' =$$

$$= 0,01125 i' + 0,15 (3t+10) k' \quad [N.m]$$

De las expresiones vectoriales \vec{F}_E y $\vec{M}_{E(A)}$, resultan las seis ecuaciones escalares:

$$Newton \quad \begin{cases} -0,45 + 0,06 \cdot (\omega_1(t))^2 = R_{Dy} + R_{Ey} \\ -0,18 - 0,15 \cdot (\omega_1(t))^2 = R_{Dz} + R_{Ez} \\ 0 = R_{Ex} \end{cases}$$

$$Euler \quad \begin{cases} 0,01125 = +0,1 \cdot (R_{Dy} + R_{Ey}) + 0,04 \cdot (R_{Dz} + R_{Ez}) \\ 0 = 0,15 \cdot R_{Dz} - 0,15 \cdot R_{Ez} \\ 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) = -0,15 \cdot R_{Dy} + 0,15 \cdot R_{Ey} \end{cases}$$

De la segunda de Euler, se tiene: $R_{Dz} = R_{Ez}$ y reemplazando en la tercera de Newton:

$$-0,18 - 0,15 \cdot (\omega_1(t))^2 = 2 \cdot R_{Dz}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
Promoción Año 2015. Alumnos: A. L. Gau – E. Flores

$$R_{Dz} = R_{Ez} = -\frac{0,15}{2} \cdot (\omega_1(t))^2 - 0,09 \quad [N]$$

De la tercera de Euler

$$\frac{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t)}{0,15} = -R_{Dy} + R_{Ey}$$

$$R_{Ey} = 0,05 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) + R_{Dy}$$

Reemplazando en la primera de Newton

$$-0,45 + 0,06 \cdot (\omega_1(t))^2 = 0,05 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) + R_{Dy} + R_{Dy}$$

$$-0,45 + 0,06 \cdot (\omega_1(t))^2 - 0,05 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) = 2 R_{Dy}$$

$$R_{Dy} = 0,03 \cdot (\omega_1(t))^2 - 0,025 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) - 0,225 \quad [N]$$

Por lo que

$$R_{Ey} = 0,03 \cdot (\omega_1(t))^2 - 0,025 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) - 0,225 + 0,05 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t)$$

$$R_{Ey} = 0,03 \cdot (\omega_1(t))^2 + 0,025 \cdot \omega_2 \cdot \omega_1(t) - 0,225 \quad [N]$$

Se observa que en los resultados de las reacciones se destacan dos términos, uno cuadrático que contiene a “ $(\omega_1(t))^2$ ” que es producido por la fuerza centrífuga debida al desbalanceo o excentricidad del centro de masa con respecto al eje de rotación del bastidor DE, y otro término cruzado que contiene “ $\omega_2 \cdot \omega_1(t)$ ” el cual es producido por el efecto giroscópico.