

Editorial de la Universidad  
Tecnológica Nacional

## **FUNDAMENTOS DE MECANICA DE FLUIDOS**

Hugo Darío Pasinato

Regional Académica Confluencia  
Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N

Marzo 2008/Plaza Huincul

## **Prefacio**

El material presentado aquí es una introducción a los fundamentos de Mecánica de Fluidos. Se presentan todos los conceptos y principios en los cuales se basan las ecuaciones, manteniendo siempre el nivel introductorio correspondiente a un curso básico de ingeniería. Se concentra en un mismo material el estudio de la cinemática y dinámica de un fluido en movimiento, hasta llegar a las ecuaciones para un fluido Newtoniano o ecuaciones de Navier-Stokes.

Con el ordenamiento usado en este libro se supone que una vez conocidas las ecuaciones generales, la tarea de especializarlas a casos aplicados ayuda a fijar conceptos relacionados con la física del problema. Se tiene sin embargo la desventaja que al presentar las ecuaciones a partir de aspectos fundamentales, sin relacionarlas con casos aplicados, los desarrollos pueden resultar algo abstractos.

El objetivo es presentar un material introductorio sobre Mecánica de Fluidos para quienes necesiten estudiar temas más avanzados y no hayan realizado un primer curso formal. Es decir se supone que el material presentado aquí puede ser asimilado en un lapso corto de tiempo, en relación con el usado en un curso regular. La distribución de los temas comienza en el Capítulos 1 con una introducción y una revisión de álgebra vectorial Cartesiana. En el Capítulo 2 se progresa desde los conocimientos básicos vistos en Física, hasta llegar a describir todas las relaciones de la cinemática de un fluido en movimiento. Y por último en el Capítulo 3 se presenta la dinámica de un fluido en movimiento, finalizando con las ecuaciones generales para un fluido Newtoniano o ecuaciones de Navier-Stokes.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Orígenes de la Mecánica de Fluidos . . . . .	5
1.2. Introducción a la Mecánica de Fluidos . . . . .	12
1.3. Revisión de álgebra vectorial . . . . .	16
1.3.1. Escalares, vectores y tensores . . . . .	16
1.3.2. Operadores gradiente y divergencia . . . . .	22
1.4. Ejercicios . . . . .	26
<b>2. Cinemática de un fluido en movimiento</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. Descripción del movimiento de un fluido . . . . .	33
2.2.1. Movimiento traslacional . . . . .	34
2.2.2. Movimiento rotacional . . . . .	41
2.3. Descripción de la deformación de un fluido . . . . .	43
2.3.1. Deformación longitudinal . . . . .	44
2.3.2. Deformación angular . . . . .	45
2.4. Movimiento relativo entre dos puntos de una partícula . . . . .	48
2.5. Dilatación cúbica y divergencia de la velocidad . . . . .	49
2.6. Teorema de Transporte . . . . .	52
2.7. Ley de conservación de masa . . . . .	55

2.8. Consecuencia de la irrotacionalidad . . . . .	59
2.9. Consecuencia de la incompresibilidad . . . . .	60
2.10. Circulación y el teorema de Stokes . . . . .	61
2.11. Ejercicios . . . . .	62
<b>3. Dinámica de un fluido en movimiento</b>	<b>65</b>
3.1. Ecuación de cantidad de movimiento integral. . . . .	65
3.2. Estado de tensiones en un fluido . . . . .	72
3.2.1. Equilibrio de fuerzas en un punto . . . . .	72
3.2.2. Estado de tensiones en un punto . . . . .	74
3.3. Ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento . . . . .	82
3.4. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	85
3.4.1. Especialización de las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	91
3.5. Ejercicios . . . . .	93
<b>4. Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Orígenes de la Mecánica de Fluidos

A modo de introducción se comenta algo sobre el lugar que ocupa la Mecánica de Fluidos en el cuerpo general de las ciencias y luego se hace una reseña histórica de los orígenes de la misma.

Como punto de partida se define a la *Mecánica de Fluidos como la ciencia que estudia la cinemática y dinámica de los fluidos ante la acción de fuerzas aplicadas*. Y se puede afirmar que los conocimientos de Mecánica de Fluidos son científicos, porque conforman teorías corroboradas por la experimentación.

Se puede ahora dar un rápido recorrido por las diferentes ramas de la ciencia que intentan explicar el mundo material en que vivimos, para ver donde están ubicados los conocimientos correspondientes a Mecánica de Fluidos. La rama principal de las ciencias que explican el mundo material es denominada Filosofía de la Naturaleza o Filosofía Natural. Pero dado que la Matemática como ciencia juega un rol importante en el modelado de la naturaleza, se puede hablar de un cuerpo más amplio de la ciencia que explica el mundo material como es la Filosofía Natural y Matemática. Existe, por otro lado, una división de la Matemática en Pura y Aplicada. La primera conforma un cuerpo de conocimientos abstractos, que no hace necesariamente referencia al mundo en el que vivimos. En contraste la Matemática Aplicada es aquella parte de la Matemática orientada al estudio de los aspectos físico del mundo real. Es decir la misma incluye el estudio de la cinemática y dinámica de cuerpos, deformación de sólidos y estadística, entre otras ciencias. Y en especial el estudio en general del movimiento, que constituye el ob-

jeto de estudio de la Mecánica. Y es en esta última rama de la ciencia donde reside la Mecánica de Fluidos. Es decir la Mecánica de Fluidos es una rama de la Mecánica, dentro de Matemática Aplicada. Sin embargo a diferencia del resto de la Mecánica, la Mecánica de Fluidos estudia la materia que tiene capacidad de fluir o fluido. Por otra parte, ya dentro de la Mecánica de Fluidos existen innumerables subdivisiones según el fluido sea un gas, en Dinámica de Gases, o un líquido, Hidromecánica, Hidráulica e Hidroestática. O según el gas en cuestión sea el aire, tomando el nombre de Aerodinámica Experimental o Teórica. O más especializada aún, como Aeroespacial o Aeronáutica, para hacer referencia a las ciencias sobre vuelos en la atmósfera o fuera de ella. Y quedan muchas subdivisiones sin comentar, pero esas pocas nos da una idea de lo completo que es el cuerpo de conocimiento que hoy en día abarca la Mecánica de Fluidos.

Además de ser amplio y completo el espectro de temas que estudia la Mecánica de Fluidos, existe mucha riqueza de problemas físicos. Dentro de la Mecánica, la Mecánica de Fluidos compite de igual a igual frente a otras ramas de la misma como la Física Atómica, la Mecánica Cuántica y la Relatividad, en la riqueza de fenómenos así como en el desafío que representan su comprensión para el ser humano. Mucha de la riqueza de dichos fenómenos físicos es explicada por el modelo matemático, que a diferencia de las otras ciencias mencionadas, en la Mecánica de Fluidos está conformado por ecuaciones no lineales. De hecho uno de los fenómenos más intrigantes y fascinantes de la naturaleza como es la turbulencia, la cual no tiene al presente una teoría completa, pertenece al movimiento de los fluidos.

Además de conocer su lugar dentro de las ciencias en general, otro aspecto interesante es conocer algo de la historia de la Mecánica de Fluidos, para tener una ubicación en el tiempo de sus conocimientos y también para dar reconocimiento a los científicos que han realizado contribuciones a la misma. En primer lugar digamos que la historia de la Mecánica de Fluidos es paralela a la historia de la civilización. Y esto ha ocurrido así dada la importancia que tienen algunos fluidos en el desarrollo de la vida, como lo es el agua, por ejemplo. Los seres humanos, animales y vegetales, por cierto, son literalmente seres basados en agua. El cuerpo humano, por citar un caso, tiene aproximadamente un 71 % de agua, con lo cual queda en claro la importancia de la misma en el desarrollo de la vida humana y de los seres vivos en general. Por eso para hacer una reseña del origen de la Mecánica de Fluidos sería necesario ir hacia atrás hasta tiempos muy remotos, de los cuales no se tienen registros de ningún tipo. Sin embargo sí se pueden comentar hechos más recientes, ocurridos en algún momento antes del año 5000 antes de Cristo, AC, aunque en estos casos no se pueden atribuir autorías a individuos sino a toda una población. Existen evidencias arqueológicas de un pueblo pacífico y muy talentoso que descen-

dió por esa época desde Asia Central hacia la Mesopotamia, es decir a la zona entre los Ríos Tigris y Eufrates (región que en la actualidad corresponde a Irak). Esos registros muestran que el mismo tenía suficiente manejo ingenieril de los ríos, como para realizar sistemas de irrigación y así conseguir mejorar la producción de sus plantaciones. Se les atribuye a ellos haber realizado las primeras obras de lo que hoy se conoce como ingeniería hidráulica, muy elementales por cierto, pero muy avanzadas para su época. Dicho pueblo había también conseguido avances notables en astronomía, que luego transfirieron a los egipcios quienes mostraron ser dignos continuadores de dicha cultura. Uno de los usos que los egipcios hicieron de los conocimientos astronómicos heredados, fue definir el año civil con una duración exacta de 365 días, o 12 meses con 30 días cada uno, más 5 días extras denominados sagrados. Por otro lado realizaron verdaderas obras de ingeniería en cuanto al manejo de las aguas del Río Nilo. Algo asombroso es saber que ellos habían relacionado el día que la estrella Sirius aparecía visible en el firmamento cada año, con el inicio aproximado de las crecidas del Nilo. Y como se percataron de la regularidad de las mismas, para ellos el nivel del Nilo pasó a ser algo así como un calendario. Es asombroso también saber, por ejemplo, que se han encontrado evidencias de tablas que daban cuenta de anotaciones o registros de los cambios de nivel del Río Nilo ya en esa época. Así como saber que ellos habían percibido que existía una conexión entre las estaciones del año, el agua y el aire. Lo que podríamos definir como el inicio del estudio, si es que se puede usar esa palabra dado que no eran conocimientos ciertamente científicos, del movimiento de los fluidos que rodean la tierra.

En base a lo anterior se le puede atribuir al pueblo que habitó la región entre los ríos Tigris y Eufrates, y a los egipcios, haber sido los que iniciaron el desarrollo del conocimiento en Mecánica de Fluidos, sobre la base de la necesidad del manejo del agua.

Pero para ser equitativos, porque en ciencias Occidente a veces escribe una historia desconectada de Asia, es importante comentar que alrededor del año 3000 AC, en la región que hoy ocupan China e India, se desarrollaron también civilizaciones que habían detectado la relación existente entre las estaciones del año, con el agua y el aire en la naturaleza. Por otra parte tampoco se debe olvidar que el pueblo que descendió a la Mesopotamia, provenía de Asia Central.

En síntesis, se puede concluir que en esencia fueron las civilizaciones que se desarrollaron en las regiones que hoy en día ocupan China-India, Mesopotamia-Babilonia y Egipto las que dieron origen al desarrollo de conocimiento sobre el manejo del agua y por lo tanto de los fluidos. Y la razón que motivó dicho desarrollo ha sido sin dudas la importancia del agua en el

desarrollo de la vida. De donde se concluye también que la historia de la Mecánica de Fluidos es en cierto modo paralela a la historia de la civilización.

En los casos anteriores se habla de civilizaciones que se desarrollaron en tal o cual región y se hace referencia a las poblaciones, porque no existen registros como para identificar quienes fueron los individuos que realizaron las contribuciones. Sin embargo para tiempos algo más modernos, de los cuales ya se tienen registros, se puede hablar de científicos que han realizado contribuciones y dar sus nombres. A modo de reconocimiento en esta reseña se citan aquellas personas reconocidas por sus contribuciones a Mecánica de Fluidos, hasta que fue obtenido el modelo más general sobre dinámica de fluidos conocido como ecuaciones de Navier-Stokes. Se aclara sin embargo que dicha lista puede ser sin dudas incompleta, por un lado. Por otra parte, de las contribuciones solo se comentan algunos casos muy notables, ya que mayores detalles están fuera del alcance de este libro.

Luego una lista con nombres ilustres en cuanto a contribuciones a Mecánica de Fluidos puede comenzar con Tales de Mileto, quien nació y murió en Grecia entre los años (624-546), AC, y seguir con Aristoteles quien nació en Macedonia y murió en Grecia y vivió entre los años (384-322), AC. Luego seguir con Arquímedes, quien nació y murió en Siracusa, Sicilia, entre los años (287-212) AC; Herón de Alejandría, quien nació en Grecia y luego emigró a Egipto, precisamente a Alejandría, año 260 AC, aproximadamente. Siendo los anteriores los primeros científicos que hicieron aportes notables para esa época. Sin embargo luego la historia de la ciencia parece haberse detenido a los inicios de la Era Cristiana.

Es decir, el nacimiento de la Mecánica de Fluidos ocurrió bien al comienzo de la civilización, pero luego al inicio de la Era Cristiana, coincidente aproximadamente con la caída del Imperio Romano, los avances en Mecánica de Fluidos se fueron deteniendo. El panorama general para la civilización en esa época fue de adormecimiento. Se puede decir que la civilización se detuvo, entre otras causas, por las invasiones de pueblos bárbaros del norte de Europa. Los conquistadores bárbaros no conocían sobre leyes, estado y todo lo que había existido en Grecia y Roma hasta esa época. Fueron quemados libros y bibliotecas completas.

Aún cuando fue larga, felizmente esa era de atraso y destrucción cesó. Alrededor del final del siglo XV, inicio del periodo conocido como Renacimiento, soplaron nuevos aires y Europa comenzó a redescubrir los conocimientos almacenados de Grecia y Roma. El lapso de tiempo entre la caída del Imperio Romano y el Renacimiento no fue sin embargo todo desolación y conformismo. Existieron aquellos que lucharon a lo largo de esos oscuros siglos, pero fue solo a partir de la época del Renacimiento, que surgieron personalidades como Leonardo de Vinci,

entre otros, quienes le dieron nuevos impulsos a la ciencia.

Por eso la lista de citas comenzada anteriormente puede ser seguida, sin embargo, solo después del Renacimiento, con Leonardo de Vinci, quizá el más importante representante de ese renacer científico, quien nació y vivió en Italia y murió en Francia entre los años (1452-1519). Leonardo hizo notables contribuciones a diferentes áreas de la ciencia, pero especialmente a Hidráulica. Fue él quien primero realizó un estudio, se puede decir científico, sobre la circulación del aire alrededor de la tierra o inicio de la Meteorología. Se puede seguir con Simón Stevin quien vivió en Suiza entre los años (1548-1620). Luego Galileo Galilei, quien nació y murió en Italia entre los años (1565-1642) y es considerado el padre de la Física moderna en el sentido que usó la experimentación en forma sistemática para corroborar teorías. Evangelista Torricelli, quien vivió en Italia entre los años (1608-1647) y es el autor de la expresión  $\sqrt{2gh}$  para la velocidad media de un chorro, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $h$  la altura de la superficie libre del fluido sobre el centro del orificio. Se puede seguir con Otto von Guericke, Alemania, (1602-1686); Blás Pascal, Francia, (1623-1662) e Issac Newton, quien nació y vivió en Gran Bretaña entre los años (1642-1727). Newton en realidad realizó innumerables contribuciones a Mecánica de Fluidos y fue alguien humilde al punto que en la introducción de su tan famoso libro *Philosophice Naturalis Principia Mathematica* escribió, en otras palabras, *... si en realidad ví lejos fue porque me subí sobre los hombros de gigantes ...*, para hacer referencia a los conocimientos que le habian legado científicos como Galileo Galilei. Por ejemplo a Newton se debe entre muchos otros aportes la relación *tensión interna en un fluido = coeficiente  $\times$  gradiente de la velocidad*, la cual da el nombre de Newtonianos a los fluidos que la cumplen como el agua y el aire. Luego de Newton se puede seguir con Daniel Bernoulli, Francia, (1700-1752), quien escribió el primer libro sobre Mecánica de Fluidos y por lo tanto muy reconocido en los libros actuales, aún cuando no es, por ejemplo, el autor de la famosa ecuación hoy en día conocida como *Ecuación de Bernoulli*. Leonardo Euler, quien vivió entre los años (1707-83), nació en Suiza pero desarrolló sus contribuciones en Rusia. Euler es considerado otros de los grandes contribuidores de Mecánica de Fluidos, el gran arquitecto de gran parte de la matemática que se usa actualmente y del modelo matemático de la dinámica de fluidos para fluidos ideales. El único error que cometió fue no considerar los efectos de la viscosidad en dichas ecuaciones. Luis A. Cauchy (1789-1857), quien nació en Francia y desarrolló sus trabajos en Paris, Turín y Praga. Su contribución más importante para Mecánica de Fluidos es su desarrollo para expresar el estado de tensiones en un medio continuo. José Luis de Lagrange, Francia, (1736-1813) fue otro de los grandes talentos con innumerables contribuciones a

Mecánica de Fluidos. Por ejemplo la ecuación que hoy en día se conoce como de Bernoulli, en realidad es la integral que realizó Lagrange de la ecuación de cantidad de movimiento presentada por Euler, para un fluido sin viscosidad. Se puede luego citar a Jean D'Alembert, Francia, (1717-1783), autor de la famosa paradoja de D'Alembert. Dicha paradoja hace referencia a la discrepancia que encontraba D'Alembert de la fuerza de un flujo de un fluido ideal sobre un cilindro, con lo que él observaba en los experimentos. Y ya más recientemente citar a Poiseuille, Francia, (1799-1869) y luego Claude Navier, Francia, (1785-1836), quien primero presentó las ecuaciones conocidas como de Navier-Stokes. Es interesante comentar que Navier al presentar esas ecuaciones, consideradas una de las mayores contribuciones a la ciencia, llamó la atención en su presentación expresando que quizá las mismas no fuesen nada nuevo, porque en realidad usaba el concepto propuesto por Newton para tratar los efectos de la viscosidad. Y finalmente sin dudas hay que citar a quien llegó tiempo después a las mismas ecuaciones por un camino diferente, Jorge Stokes, que vivió en Gran Bretaña, (1819-1903). Stokes realizó las hipótesis de las sustancias que hoy en día se modelan con las ecuaciones de Navier-Stokes. Y de ahí que las mismas reciban el nombre de Navier-Stokes.

En síntesis, usando una perspectiva histórica es interesante destacar sobre las citas anteriores, que existieron dos periodos de progresos bien diferenciados para Mecánica de Fluidos. Uno en los comienzos de la civilización, hasta aproximadamente la caída del Imperio Romano, y otro que se inició con el Renacimiento y que llega a nuestros días. Separados ambos por una era de oscurantismo de aproximadamente 1.400 años.

Para terminar con esta reseña histórica, sin embargo, es importante comentar sobre una cierta metamorfosis que sufrió la ciencia en general en el segundo periodo. Es decir existieron ciertas particularidades en el desarrollo de Mecánica de Fluidos, en el segundo periodo desde el Renacimiento hasta nuestros días, que vale la pena comentar. En ese sentido algo que en principio se puede afirmar es que hasta el siglo *XVII*, el desarrollo de Mecánica de Fluidos se dio básicamente con la acumulación de conocimientos originados con el manejo del agua para diferentes usos. Sin embargo por esos años surgiría una rama menos práctica de la Mecánica de Fluidos, basada en supuestos un tanto idealizados de la naturaleza. Por aquella época en las ciencias en general reinaba la Mecánica Clásica de Newton. Y el *demonio* imaginado por René Descartes, filósofo y científico francés (1596-1650), hacía pensar que era posible un determinismo absoluto que permitiría a través de una montaña de cálculos, sólo posibles de ser realizados por un demonio, conocer cada detalle del futuro. Un optimismo desmedido originado por la mecánica Newtoniana.

Esta visión un tanto idealizada de la naturaleza tuvo por supuesto su correlato en el estudio de los fluidos. Basados en el modelo de fluido ideal de Roberto Boyle (1662), físicos y matemáticos desarrollaron la rama de Mecánica de Fluidos denominada Hidrodinámica Clásica. Los aportes de Leonardo Euler pueden ser considerados en esa dirección, pero para nada debe ser tomado eso como un desmerecimiento de los mismos, ya que fueron de los más importantes. Sin embargo, como fue comentado antes, el error cometido por Euler fue despreciar los efectos de la viscosidad, es decir de la fricción interna del fluido, quizá influenciado por el modelo de fluido ideal. En particular la Hidrodinámica Clásica no era considerada de uso práctico por los ingenieros de entonces, a no ser incorporándole correcciones a través de factores. Por lo tanto todos los conocimientos desarrollados hasta entonces a través de los siglos, conformaban la rama de la Mecánica de Fluidos denominada Hidráulica. Esta englobó todos los conocimientos hasta ahí desarrollados en el manejo del agua en canales, ríos, sistemas de irrigación, etc, y en la medida que el desarrollo tecnológico exigía diseñar sistemas de conducción de fluidos y otros, la Hidráulica fue quien ocupó esos espacios. Sin embargo aún cuando sus fórmulas permitían diseñar, sus ecuaciones o modelos matemáticos no conseguían explicar ciertos principios del movimiento de los fluidos. En contraste, mientras con la Hidrodinámica Clásica se conseguían explicar aspectos fundamentales, la misma no podía ser usada para el cálculo en ingeniería, a no ser usando coeficientes de corrección. La más famosa de estas diferencias quedó registrada en la historia con el nombre de *Paradoja de D'Alembert*, como fue comentado anteriormente. Es decir cuando D'Alembert trataba de verificar sus cálculo experimentando con el flujo de aire sobre un cilindro, observaba que existía en realidad una fuerza de arrastre sobre el mismo, resultando para él en una paradoja que fue aclarada recién un siglo más tarde.

En síntesis, más que dos ramas, existía una ruptura en la Mecánica de Fluidos. La Hidráulica con resultados prácticos pero con falencias en los fundamentos y la Hidrodinámica Clásica, explicando aspectos fundametales pero fallando en los cálculos prácticos. Para explicar como termina esta historia, sin embargo, es necesario dar una rápida revisión de lo ocurrido con las ciencias en general en el siglo *XVIII*, con el nacimiento de la Termodinámica.

En ese siglo ocurrió un hito importantísimo en las ciencias en general, algo que Ilya Prigogine, nacido en Moscú en 1917 y Premio Nobel de Química en 1977 por sus contribuciones a la termodinámica del desequilibrio, llamó *La Nueva Alianza*. En síntesis dicho hito implicó el fin del optimismo determinista de Descartes y por lo tanto la reconsideración de la Mecánica Clásica, con el surgimiento de la Termodinámica. Fue la necesidad de generación de potencia a partir del carbón, que desató una corrida científico-tecnológica que derivó en el nacimiento de

la tecnología del calor, con los nuevos conceptos de procesos irreversibles, fricción, imposibilidad de transformar toda la energía del calor en trabajo mecánico y así por delante. Todos estos avances científicos significaron una revolución, quizá una de las más importantes de los últimos siglos, dentro de la ciencia en general, quitándole preeminencia a la Física Clásica o Mecánica Newtoniana y por tanto al determinismo. Todas estas adaptaciones que sufrió la ciencia, con interpretaciones nuevas a la luz de la Termodinámica, fue denominada por Prigogine como una metamorfosis de las ciencias.

Quizá un poco a destiempo, dentro de la Mecánica de Fluidos en particular también se vivió la reconsideración de la importancia de la fricción interna de los fluidos en movimiento, es decir la importancia de la viscosidad aún para los gases como el aire. La reconsideración que las ecuaciones propuestas por Euler eran sólo válidas para fluidos ideales, sin rozamientos. Esto llevó a una convergencia de la Hidrodinámica Clásica con la Hidráulica, siendo posible de ahí en más, explicar el origen de los coeficientes que se usaban en los cálculos. Algunos de los aportes notables en esta Nueva Alianza en los fluidos, fueron la teoría de la capa límite desarrollada por Prandtl(1905) y los realizados por Reynolds (1899) en Gran Bretaña, quien estudió en forma sistemática la importancia de las fuerzas viscosas en comparación con las de inercia en tuberías, entre muchas otras cosas.

Con esto se puede dar por terminada esta reseña. Lo que resta de historia de la Mecánica de Fluidos del siglo *XX*, está casi todo relacionado con el problema de la turbulencia, el cual resulta ser el problema central sin resolución de Mecánica de Fluidos.

## **1.2. Introducción a la Mecánica de Fluidos**

Desde el punto de vista de la Termodinámica la materia puede estar en estado gaseoso, líquido o sólido, siendo que a una sustancia en estado gaseoso o líquido se la denomina fluido. Para Mecánica de Fluidos, no obstante, la definición de fluido tiene que ver con aspectos mecánicos de la materia y se define como tal a una sustancia cualquiera que reacciona deformándose en forma instantánea, ante un *esfuerzo de corte* por mínimo que sea. Un esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área o tensión. Cuando fricciónamos la manteca para luego untar una tostada, lo que aplicamos a la superficie del pan de manteca es un esfuerzo de corte o tensión de corte. El mismo es una fuerza por unidad de área que tiende a *romper* la sustancia por ser esta un sólido. Si realizamos un esfuerzo similar ahora sobre la superficie de un fluido, el esfuerzo produce una deformación de la superficie, generando un movimiento de la sustan-

cia. Por mínimo que sea dicho rozamiento sobre un fluido, siempre se genera una deformación continua resultando en un movimiento. Así la definición traza una separación entre aquellas sustancias denominadas sólidos, que presentan cierta resistencia a esos esfuerzos deformándose, y las denominadas fluidos que no presentan ninguna resistencia.

Definido lo que es un fluido, a seguir se define el significado de *teoría del continuo*. Una de las hipótesis más importante en Mecánica de Fluidos es la de continuidad de la materia. A simple vista el agua en un vaso se nos presenta como una masa continua, sin discontinuidades. Esta es la visión macroscópica de la materia. No obstante se sabe que la misma está conformada por moléculas, éstas por átomos y éstos últimos por partículas subatómicas, las cuales ocupan una porción reducida del espacio vacío. Es decir que la materia no es continua. Sin embargo muchos cálculos en ingeniería, como los relacionados con las fuerzas de arrastre de un flujo sobre un cuerpo, la transferencia de calor desde un sólido hacia un fluido en movimiento, entre otros ejemplos, no necesitan del detalle molecular ni atómico de la materia, sino de su efecto medio. Es decir se emplea una visión macroscópica de la materia, o modelo de comportamiento macroscópico, el cual no hace referencia a la estructura molecular. A dicho modelo se lo conoce como *mecánica del continuo* o *teoría del continuo*.

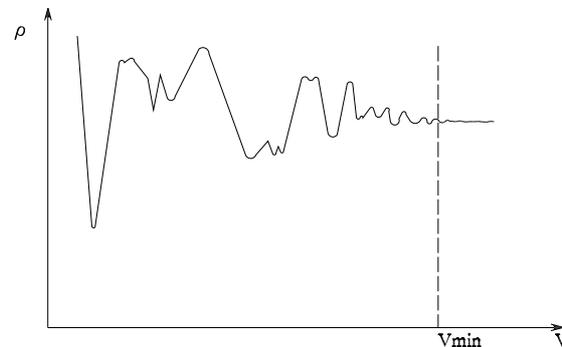


Figura 1.1: Definición de la densidad de un gas en función del volumen.

Para que dicha teoría sea válida, sin embargo, las escalas características de longitud y tiempo mínimas del problema deben ser mucho mayores que las escalas moleculares de longitud y tiempo. Escalas características de longitud, tiempo, etc, son valores representativos de esas dimensiones en el problema. Cuando la escala de longitud es suficientemente grande, el número de moléculas es elevado y una propiedad del fluido tal como la densidad, o la presión, etc, puede ser bien definida y su comportamiento no experimentará variaciones relacionadas con el movimiento molecular. En ese caso se está dentro del rango de validez de la teoría del continuo. Por ejemplo considérese la presión en la pared de un recipiente que contiene un gas ideal en

equilibrio termodinámico. Se sabe que la misma es la suma de las fuerzas de las colisiones de las moléculas en la superficie. Si observamos la presión en una superficie muy pequeña, con escalas próxima a las moleculares, el número de moléculas será reducido y las colisiones definirán una presión o fuerza oscilante sobre la superficie. Por el contrario, considerando una superficie mayor, con una escala de longitud bien superior a las distancias moleculares, el número de moléculas que intervienen aumentará y la presión o fuerza por unidad de área ejercida por las colisiones de las moléculas será una variable continua. Otro ejemplo es la definición de densidad de un gas, la cual es igual a *masa/volumen*. Una observación macroscópica requiere considerar un *volumen mínimo* de fluido para eliminar el efecto de las moléculas individuales. En otras palabras, para definir la masa por unidad de volumen en un punto, será necesario considerar un *volumen mínimo* que contenga un número suficientemente alto de moléculas, de modo que la función densidad no oscile o sea discontinua. La Figura 1.1 muestra un esquema de lo que ocurriría al observar la densidad de un gas en un punto, para diferentes dimensiones del volumen considerado en la medición. En ese sentido resulta útil saber que  $1\text{mm}^3$  de aire en condiciones standard contiene en forma aproximada  $10^{12}$  moléculas, el cual es un número grande lo suficiente para que una propiedad resulte bien definida. Un problema en el cual se viola la hipótesis del continuo es el correspondiente al flujo alrededor de un cohete que ingresa desde la atmosfera exterior, dado que en las primeras capas de la misma el aire es enrarecido y el desplazamiento medio de las moléculas es grande en comparación a la distancia mínima de interés del cohete.

En relación con la definición de la continuidad de la materia comentada en el párrafo anterior, conviene aclarar que en este libro se hace referencia a una porción mínima de fluido con el nombre de partícula de fluido, lo cual es una idealización. Esta partícula de fluido para nada hace referencia a partículas elementales de la sustancia. Se hace en realidad referencia a una porción elemental de fluido que contiene un número suficientemente grande de moléculas.

En síntesis en Mecánica de Fluidos se estudia todo lo concerniente a un fluido en movimiento, desde un punto de vista macroscópico. Todas las variables, además de la presión y la densidad comentada antes, describen comportamientos de la materia con visión macroscópica. Otras variables a ser usadas son el vector velocidad,  $\mathbf{v}$ , aceleración,  $\mathbf{a}$ , vorticidad,  $\omega$ , entre otras, todas variables dependientes, las cuales reciben el nombre de campos cuando son función de las variables espaciales  $(x, y, z)$  y el tiempo  $t$ , denominadas variables independientes.

Por otra parte la descripción de la cinemática y la dinámica de un fluido se sintetizan con ecuaciones matemáticas, que representan principios fundamentales de la naturaleza como la

segunda ley de Newton, la conservación de la energía, etc, dentro de la mecánica del continuo. Los principios fundamentales usados en Mecánica de Fluidos son la (i) *conservación de masa*, (ii) *la conservación de la cantidad de movimiento lineal y rotacional*, (iii) *la conservación de la energía* y (iv) *ley de variación de la entropía*. Se citan los cuatro aún cuando en este libro no se presentan los desarrollos que conducen a la ecuación de la energía ni a la segunda ley de la Termodinámica o ley de variación de la entropía.

Los principios fundamentales en Mecánica de Fluidos, sin embargo, tienen algunas restricciones, es decir no son todos universales. La segunda ley de Newton por ejemplo es válida aplicada a un sistema inercial y para velocidades muy pequeñas en relación a la velocidad de la luz. La ecuación de conservación de masa es válida también sólo para bajas velocidades en comparación a la velocidad de la luz. En contraste la ley de conservación de la energía sí es universal, se verifica en todos los casos. O en otras palabras, ya que es una ley experimental, hasta lo que se sabe se verifica en todos los casos.

Fuera de esas restricciones, el modelo matemático más general en Mecánica de Fluidos correspondiente a esas cuatro leyes, no hace referencia a un tipo de sustancia. No obstante como se verá más adelante, las tensiones y deformaciones internas de un fluido son propias del mismo y para que las ecuaciones sean resolubles es necesario dar información sobre el tipo de fluido. A esa información se la denomina ecuaciones constitutivas, porque tienen que ver con la constitución mecánica de la sustancia y del estado termodinámico de la misma.

En síntesis, dentro de la teoría del continuo la naturaleza cumple con los cuatro principios fundamentales comentados antes, sin importar la sustancia o tipo de material estudiado. Esas son leyes generales para cualquier sustancia. Pero para formular el principio de conservación de cantidad de movimiento para una sustancia en particular, por ejemplo agua o aire, es necesario expresar las fuerzas de reacción del fluido ante las deformaciones, con una ecuación propia para esa sustancia. Esas reacciones o tensiones internas de la materia son función del tipo de sustancia, ya que no toda sustancia reacciona o deforma del mismo modo. Esas ecuaciones que relacionan las fuerzas superficiales con las deformaciones son leyes empíricas, o responden a modelos teóricos basados en datos experimentales. Un ejemplo es la denominada ley de Newton, que siguen sustancias como el aire y el agua denominadas fluidos Newtonianos por esa razón, que establece una relación lineal entre las tensiones y las deformaciones. Para otros fluidos esas relaciones llegan a ser muy complejas y son modeladas con funciones no lineales. Dichas sustancias son denominadas fluidos no-Newtonianos y algunos ejemplos son el petróleo y derivados del mismo en la industria petroquímica, en la medicina la sangre y otros fluidos del

cuerpo humano y en la industria alimenticia sustancias como la miel, la mayonesa, entre otras. Bien cabe decir que mientras el estudio de los fluidos Newtonianos se encuentra en un estado avanzado dada la simplicidad del modelo, el de los no Newtonianos es tan complejo y rico en fenómenos que el mismo no está todavía suficientemente desarrollado.

### **1.3. Revisión de álgebra vectorial**

Una particularidad de Mecánica de Fluidos es la necesidad de trabajar con álgebra vectorial. Los conceptos de flujo, gradiente de un escalar, divergencia de un vector y los productos escalares y vectoriales son de uso frecuente. Esta breve revisión tiene por objetivo recordar los mismos en el contexto de Mecánica de Fluidos, aún cuando no es completa ni general. En otras palabras, se revisan los conceptos más usuales sin seguir un ordenamiento y desarrollo gradual del tema. Sin embargo en el ítem correspondiente a bibliografía se dan referencias de libros más avanzados y con un desarrollo más completo sobre el tema. Cabe también aclarar y enfatizar que todo lo presentado aquí corresponde a álgebra vectorial y tensorial Cartesiana. En ese sentido, en álgebra vectorial Cartesiana existe una notación muy conveniente denominada indicial, la cual facilita enormemente la manipulación de expresiones matemáticas. Por ese motivo en esta revisión se introduce también dicha notación de forma muy breve y suscita.

#### **1.3.1. Escalares, vectores y tensores**

Para caracterizar un fenómeno físico en Mecánica de Fluidos, se usan propiedades físicas del fluido y del flujo, además de características geométricas. Dichas propiedades o características son las variables dependientes del problema y en general se representan con escalares, vectores y tensores. Por otra parte cuando las mismas son función del tiempo y del espacio, es decir de las variables independientes, se habla de campo, por ejemplo campo escalar, campo vectorial o campo tensorial. Para una simple magnitud, como es la temperatura, basta con un escalar o con un campo o función escalar para representar la temperatura en el espacio y en el tiempo. No obstante para ciertas propiedades del flujo como velocidad o fuerza, donde es necesaria una magnitud una dirección y un signo, se usan vectores o campos vectoriales. Y si la complejidad aumenta, como al representar la tensión en un punto en un fluido en movimiento, donde es necesario especificar los valores normales y tangenciales a cada plano coordenado, se usan tensores. Los tensores más comunes en Mecánica de Fluidos son de segundo orden los cuales

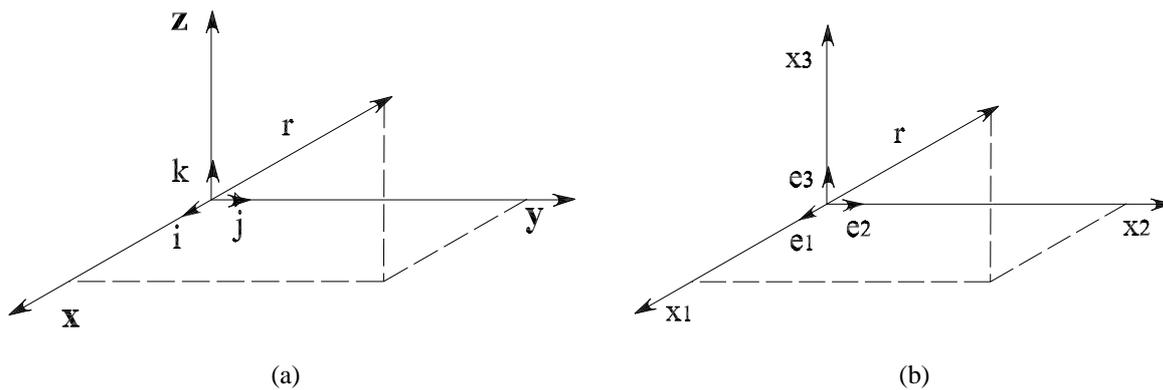


Figura 1.2: (a) Sistema de ejes coordenados  $x, y, z$ . (b) Sistema de ejes coordenados  $x_1, x_2, x_3$ .

tienen nueve componentes, como se verá más adelante.

Por otra parte, para hacer referencia en general a lo que en particular se denominan escalares, vectores o tensores, se usa la expresión *entidad vectorial*. Estas entidades vectoriales se denominan de grado 0 cuando es un escalar, 1 para un vector y 2 en adelante para tensores. Y el número de componentes de estas entidades vectoriales está dado por el número de coordenadas del espacio Euclidiano, elevado al grado correspondiente; ej.  $3^0$  para un escalar,  $3^1$  para un vector,  $3^2$  para un tensor de segundo orden, etc.

En este libro se usarán letras minúscula en negritas para representar vectores y en general mayúsculas en negritas para tensores, aún cuando algunos tensores especiales como el *delta de Kronecker*, se representan con letras griegas minúsculas.

El primer concepto a revisar es el de vector en el espacio. Considerando un sistema Cartesiano de coordenadas en el espacio  $O123$ , con origen  $O$  y vectores unitarios  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  como base de dicho sistema, la representación de un vector, por ejemplo del vector posición  $\mathbf{r}$ , es la siguiente,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.1)$$

donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas según cada eje de dicho sistema, como se muestra en la Figura 1.2(a).

Como punto de partida sobre notación indicial, digamos que otra forma de denominar los ejes coordenados y la base de vectores unitarios de un sistema de coordenadas  $O123$  es como se muestra en la Figura 1.2(b). En esa figura la base de vectores unitarios es  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  y los ejes coordenados ahora se denominan como  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Usando esta nueva notación la representación del vector posición  $\mathbf{r}$  resulta,

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad (1.2)$$

Aprovechando las dos notaciones y sistemas de coordenadas, es importante comentar que el vector  $\mathbf{r}$  es una entidad vectorial como lo es la cantidad física que representa y por lo tanto tendrá en cada sistemas de coordenadas, diferentes componentes, a no ser que esos sistemas sean coincidentes. Pero en cada sistema el vector es exactamente el mismo. Por otro lado se debe observar también que un vector, usándolo a éste como ejemplo de entidad vectorial, se representa a través de una combinación lineal o sumatoria de productos de escalares con los vectores unitario de la base del sistemas de coordenadas. Por ejemplo para el caso del vector posición  $\mathbf{r}$ , se tienen los escalares  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  representando la magnitud del vector según las direcciones de cada eje coordenado y los vectores unitarios  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ , según las tres direcciones, respectivamente.

Siguiendo con la representación en la expresión (1.2), la misma permite escribir el vector también como,

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\mathbf{e}_i \quad (1.3)$$

que constituye la base para introducir la notación indicial. Lo esencial en dicha notación consiste en suprimir el signo de sumatoria, es decir se escribe solo,

$$\mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i \quad (1.4)$$

y las expresiones con esta notación cumplen las siguientes reglas.

1. Una expresión con un índice repetido, denominado *índice mudo*, representa una sumatoria. Dicho índice varía a través de su rango 1, 2, 3 para el caso de un espacio Euclidiano. Ej.  $a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ ,  $i = 1, 2, 3$ . O también  $a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + \dots + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3$ ,  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2, 3$ .
2. Un índice que no es repetido en un factor es denominado *índice libre*. Ej.  $a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3$ , con  $i$  como índice libre. Se entiende que en el espacio Euclidano dicho índice puede ser 1, 2 o 3, por lo tanto se tiene una expresión para cada valor de  $i$ .

3. Los índices repetidos en una expresión pueden tener su nombre cambiado. Ej.  $a_{ij}b_j = a_{ik}b_k$ .
4. En álgebra vectorial no tiene sentido un índice repetido tres veces. Ej. La expresión  $a_{ll}b_{lj}$  no tiene sentido dado que se repite 3 veces el índice  $l$ .
5. El número de términos de una expresión es igual a  $3^n$ , donde  $n$  es el número de índices libres. Ej.  $a_j$ , tiene  $3^1$  términos;  $a_{ii}$ , tiene  $3^0$  términos;  $a_{ij}$ , tiene  $3^2$  términos.
6. El orden del ente vectorial que representa la expresión está dado por el número de índices libres de los factores. Ej.  $q$ , tiene orden 0;  $a_i$ , tiene orden 1;  $a_{ij}$  tiene orden 2.

En lo que resta de esta revisión se presentarán definiciones y ejemplos tanto con notación vectorial ordinaria como indicial, con el objetivo de ganar cierta familiaridad con esta última.

Continuando ahora con las operaciones entre vectores, la *suma de vectores* es representada del siguiente modo en notación indicial,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = (a_i\mathbf{e}_i) + (b_i\mathbf{e}_i) = c_i\mathbf{e}_i \quad (1.5)$$

con las propiedades (i)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ; (ii)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ; (iii)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$ ; (iv)  $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{c}$  es un vector contenido en el mismo plano formado por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

El *producto escalar* de dos vectores, cuyo módulo se define como  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |a||b|\cos\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo comprendido entre dicho vectores, se define como,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad (1.6)$$

con las siguientes propiedades: (i) si se multiplican vectores perpendiculares entre sí  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ; (ii) al multiplicar un vector  $\mathbf{a}$  por un vector unitario  $\mathbf{n}$  se obtiene la proyección del vector en la dirección del vector unitario,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = |a|\cos\theta$ ; (iii)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .

Así el producto escalar entre vectores resulta en un escalar dado que al multiplicar miembro a miembro todas las componentes, solo resultan los escalares diferentes de cero de los siguientes productos  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$  y  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ . Se puede también decir que el producto escalar entre vectores da como resultado un escalar igual a la suma de los elementos de la diagonal principal, de la matriz formada por las 9 combinaciones que resultan del producto de las componentes de los vectores.

Usando ahora la notación indicial el producto escalar es,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) = a_i b_i \quad (1.7)$$

donde otra vez por ser los ejes mutuamente ortogonales, los únicos factores diferentes de cero son aquellos con los productos  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ ,  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ ,  $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ .

Luego en general para la base los productos escalares resultan,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i = j, \\ 0 & \text{cuando } i \neq j. \end{cases} \quad (1.8)$$

Es decir que el producto  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ , con  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2, 3$ , ordenados en forma matricial forman la matriz unidad,

$$[\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] = \mathbf{I} \quad (1.9)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad o unidad, cuyas componentes coinciden también con las del tensor  $[\delta_{ij}]$  denominado *delta de Kronecker*, el cual es un tensor de segundo orden con la siguiente definición,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i = j, \\ 0 & \text{cuando } i \neq j. \end{cases} \quad (1.10)$$

o  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$  mientras que  $\delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$ .

El tensor delta de Kronecker es de suma utilidad en el desarrollo de expresiones algebraicas vectoriales. Ej.  $a_j \delta_{1j} = a_1$ ;  $T_{2m} \delta_{mj} = T_{2j}$ ;  $T_{im} \delta_{mj} = T_{ij}$ ;  $(\partial P / \partial x_i) \delta_{1i} = (\partial P / \partial x_1)$ , donde en esta última  $T_{ij}$  es un tensor de 9 componentes.

Usando ahora las propiedades del producto escalar entre vectores se define el módulo  $r$  de un vector  $\mathbf{r}$ , como la raíz cuadrada del producto escalar,  $r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = (r_i r_i)^{1/2}$ .

Es importante remarcar que en las operaciones algebraicas entre entes vectoriales, se tiene la operación entre la parte escalar de las componentes y la operación entre la parte vectorial de las mismas. Ambas partes tienen propiedades diferentes. Por ejemplo al multiplicar en forma escalar dos vectores se tiene el siguiente factor  $(a_2 \mathbf{e}_2 \cdot b_2 \mathbf{e}_2)$ , que debe entenderse como

$(a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)$ , donde el producto entre los escalares  $a_2$  y  $b_2$  tiene las propiedades del producto que conocemos de Aritmética (propiedades conmutativa, asociativa, etc.), mientras que el producto escalar entre los vectores  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2$  debe realizarse con las reglas del producto entre vectores, escalar en este caso. Este concepto se debe generalizar para todas las operaciones algebraicas entre entes vectoriales.

El otro producto que le sigue en importancia al escalar es el *producto vectorial* entre vectores  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , el cual da como resultado otro vector,  $\mathbf{c}$ . Las propiedades del producto vectorial son: (i) no es conmutativo,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ; (ii) el módulo del vector resultante es  $|c| = |a||b|\text{sen } \theta$ ; (iii) la dirección del vector resultante es normal al plano definido por los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y el sentido se corresponde con la regla de la mano derecha; (iv) el módulo del vector resultante  $|a||b|\text{sen } \theta$  es también el área del paralelograma formado por los dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

Un procedimiento para obtener las componentes del vector  $\mathbf{c}$  resultante es a través de la resolución del determinante,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Por otra parte los productos de la base en la notación indicial, usando la regla de la mano derecha, son  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ ;  $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ ;  $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ ;  $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$ ;  $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$ . Se introduce ahora el *símbolo de permutación*  $\epsilon$  el cual es de mucha utilidad para el cálculo de dichas componentes. El mismo tiene tres subíndices y es definido como,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si dos cualquiera de los subíndices } i, j, k \text{ son iguales,} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 1,2,3, \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } 1,2,3. \end{cases} \quad (1.12)$$

es decir que,

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ , y en contraste  $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ , por otro lado  $\epsilon_{113} = \epsilon_{212} = \epsilon_{322} = \dots = 0$ . Así como también  $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ , o también  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ .

Usando ahora el símbolo de permutación el producto vectorial de los vectores unitarios de la base  $\mathbf{e}_1$ ;  $\mathbf{e}_2$ ;  $\mathbf{e}_3$  se define como  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$ . Este símbolo permite por tanto simplificar el cálculo de las componentes del producto vectorial entre vectores. Así la definición del producto vectorial entre dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  cualquiera resulta,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \quad (1.13)$$

donde la expresión (1.13) representa una sumatoria con 27 elementos debido a que existen tres pares de subíndices, al estar repetidos  $i$ ,  $j$  y  $k$ ; luego se deberá hacer variar los subíndices  $ijk$  entre los valores 1, 2 y 3 en *loops* anidados. Sin embargo una regla práctica que permite obtener las componentes del vector resultante en forma más directa que considerar las 27 posibilidades, resulta de considerar solo aquellos términos para los cuales el signo de permutación es diferente de cero y a la vez agrupando los escalares que contribuyen a la misma dirección. En otras palabras,  $\epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k = (\epsilon_{123} a_1 b_2 + \epsilon_{213} a_2 b_1) \mathbf{e}_3 + (\epsilon_{132} a_1 b_3 + \epsilon_{312} a_3 b_1) \mathbf{e}_2 + (\epsilon_{321} a_3 b_2 + \epsilon_{231} a_2 b_3) \mathbf{e}_1$ , sustituyendo luego los valores del signo de permutación de acuerdo a la definición dada antes.

Existe un tercer producto entre vectores denominado *producto diada*, cuyo resultado es un tensor de segundo orden y se representa simplemente como  $\mathbf{ab}$  o en función de sus componentes como  $a_i b_j$ . En notación matricial este producto es representado como,

$$\mathbf{ab} = [a_i b_j] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Un ejemplo en Mecánica de Fluidos de este tensor es el producto del vector velocidad  $\mathbf{v}$  en el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento en forma vectorial, cuando se escriben las ecuaciones en forma divergente, como se verá en el Capítulo 3.

### 1.3.2. Operadores gradiente y divergencia

Al símbolo  $\nabla$ , denominado *nabla*, se lo usa para representar un operador vectorial derivada, que en coordenadas Cartesianas tiene la siguiente forma,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.15)$$

y en notación indicial,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (1.16)$$

El operador vectorial nabra no puede aparecer solo en una expresión matemática, sino operando sobre un campo escalar, un campo vectorial o un campo tensorial. Y la operación que realiza es obtener la derivada de dicho campo.

La forma más simple de obtener la derivada de un ente vectorial es a través del producto simple de  $\nabla$  con el ente vectorial. En este caso al operador se lo denomina gradiente. Por ejemplo en  $\nabla \phi = \mathbf{grad}(\phi)$  como gradiente de un escalar o en  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{grad}(\mathbf{v})$  como gradiente de un vector.

Una forma de comprender el concepto de gradiente de un campo escalar es a través de la derivada direccional. Considerando la densidad de un fluido como ejemplo de campo escalar  $\rho(x_1; x_2; x_3; t)$  y el vector unitario  $\mathbf{n}$ , la derivada en la dirección del vector unitario  $\mathbf{n}$  resulta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = \nabla \rho \cdot \mathbf{n} \quad (1.17)$$

donde en la ecuación (1.17) el operador nabra obtiene la derivada del campo escalar  $\rho$ , resultando en un vector denominado gradiente de  $\rho$ , el cual luego es proyectado en la dirección del vector unitario  $\mathbf{n}$  a través del producto escalar de este con el vector gradiente. Y el resultado final es el escalar conocido como derivada direccional.

Por otro lado es importante observar que al ser el gradiente de un campo escalar, un vector formado por la derivada de dicho campo, el mismo tiene la dirección de la máxima variación del mismo. En otras palabras, el vector gradiente es normal a las superficies formadas con valores constantes del campo escalar.

Luego el *gradiente de un escalar* es la operación más simple de este operador derivada y el resultado es un vector. Un ejemplo frecuente en Mecánica de Fluidos lo constituye el gradiente de presión. La presión estática  $P$  es un campo escalar, como se demostrará más adelante, y el operador gradiente sobre la presión define el vector gradiente de presión, el cual representa una fuerza,

$$\mathbf{grad} P = \nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.18)$$

donde en la ecuación (1.18)  $\mathbf{grad} P$  es un vector representando la fuerza (en realidad la fuerza es igual  $-\mathbf{grad} P$ ) que actúa sobre el fluido debido a la variación de  $P$  en el espacio. Existen otros muchos ejemplos de gradiente de escalares definiendo flujos de propiedades, los cuales son vectores, con significado físico de importancia en Mecánica de Fluidos. De hecho el transporte

difusivo de una propiedad se modela con un coeficiente de transporte que multiplica el gradiente de la propiedad. Ej. la Ley de Fourier,  $\mathbf{q} = -k \mathbf{grad}(T)$ , donde  $\mathbf{q}$  es el vector que representa el flujo de calor por unidad de tiempo y área,  $[W/m^2]$ . Otro ejemplo importante en Mecánica de Fluidos lo constituye el gradiente de la velocidad,  $\mathbf{grad}(\mathbf{v})$ . En primer lugar porque como se verá en el Capítulo 2, toda la información sobre la cinemática de un fluido en movimiento puede ser extraída de dicho gradiente. Y también porque muestra que cuando se le aplica el gradiente a un campo vectorial, en forma análoga que al aplicarlo al campo escalar, el ente vectorial resultante tiene un grado superior al campo derivado. En otras palabras el gradiente eleva en 1 el grado del ente vectorial. Al aplicarlo a un escalar se obtiene un vector y al hacerlo a un vector se obtiene un tensor de segundo orden y así por delante.

Luego el gradiente de la velocidad en notación indicial es,

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Otra forma de aplicar el operador derivada  $\nabla$  es haciendo un producto escalar de  $\nabla$  con un vector o tensor. Dado que el  $\nabla$  es un vector y que el producto escalar solo es aplicable entre vectores o entre un vector y un tensor, no existe la divergencia de un escalar. El ejemplo más frecuente en Mecánica de Fluidos de dicha operación es la divergencia del vector velocidad. En ese caso la operación es,

$$\mathbf{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.20)$$

Si en cambio se usa notación indicial la divergencia de la velocidad resulta,

$$\mathbf{div}(\mathbf{v}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) \cdot (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.21)$$

Otro ejemplo de uso en Mecánica de Fluidos es la divergencia del gradiente de un escalar. En ese caso en notación vectorial, tomando al escalar como siendo la temperatura  $T$ , resulta  $\nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T$ . Es decir que la divergencia del gradiente de un escalar resulta ser el operador  $\nabla^2$ , conocido como Laplaciano de un escalar.

Un teorema de uso frecuente en el cual interviene el operador divergencia en un integrando, es el *teorema de la divergencia*. El mismo establece que si  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial con primeras

derivadas continuas en todos los puntos de una región en el espacio  $VC$ , contornado por la superficie  $SVC$ , luego,

$$\iiint_{VC} \mathbf{div}(\mathbf{v}) dV = \iint_{SVC} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (1.22)$$

donde  $dV$  y  $dS$  son elementos de área y de volumen, respectivamente, y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal externo a  $SVC$ . Usando notación indicial el teorema anterior es,

$$\iiint_{VC} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dV = \iint_{SVC} (v_i n_i) dS \quad (1.23)$$

Otra aplicación del operador derivada  $\nabla$  es el producto vectorial del mismo con un vector, denominado *rotor de un vector*. Y otra vez es el rotor de la velocidad un ejemplo próximo, cuya operación es,

$$\mathbf{rot} \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \quad (1.24)$$

de forma que usando,

$$\mathbf{rot} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1.25)$$

el cual también puede ser calculado usando notación indicial y el operador permutación, según la definición en la ecuación (1.13),

$$\nabla \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \quad (1.26)$$

Con este tema y la siguiente lista de ejercicios se considera cerrada esta breve revisión sobre álgebra vectorial Cartesiana.

## 1.4. Ejercicios

Puede ocurrir que para resolver algunos de los siguientes ejercicios, sea insuficiente la teoría sobre notación indicial presentada arriba.

1. Demostrar que a)  $\delta_{ii} = 3$ ; b)  $\delta_{1m}a_m = a_1$ ; c)  $\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}$ .
2. Demostrar que a)  $\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ .
3. Considerando los vectores  $\mathbf{a} = (1; 2; 0)$  y  $\mathbf{b} = (-2; 1; -1)$  obtener el producto vectorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  usando notación indicial. Respuesta  $\mathbf{c} = (-2; 1; 5)$ .
4. Demostrar que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$  usando notación indicial.
5. Demostrar que  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ , donde  $\phi$  es un campo escalar.
6. Demostrar que  $\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$ , donde  $\Psi$  es un campo vectorial.
7. Demostrar que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{ab})\mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.
8. Demostrar usando notación indicial que para un escalar  $T$  resulta  $\nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T$ .
9. Dado el siguiente campo vectorial  $\mathbf{a} = (6x^2)\mathbf{i} + (6y)\mathbf{j} - 7zx\mathbf{k}$ , obtener la divergencia en el punto  $(10; 6; 1)$ .
10. Dado el siguiente campo vectorial  $\mathbf{b} = 10x^2y\mathbf{i} + 20(yz + x)\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ , obtener el rotor en el punto  $(6, 1, 2)$ .
11. Considerando el siguiente campo escalar  $\phi = 10x^2y + 3zxy$ , obtener el módulo del vector gradiente en el punto  $(0, 1, 2)$ .
12. Considerando el siguiente campo escalar  $\phi = xy + z$ , obtener el vector unitario normal a la superficie determinada por  $\phi = constante$  que pasa por el punto  $(2, 1, 0)$ .
13. Si la expresión  $\mathbf{q} = -k\nabla\theta$  permite calcular el flujo de calor, donde  $\theta = 2(x^2 + y^2)$  es la temperatura, y  $k$  la conductividad térmica, a) hallar el flujo de calor en los puntos  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ , b) trazar curvas de  $\theta = constante$  y trazar los vectores de flujos de calor en los dos puntos.
14. Dado el siguiente campo vectorial  $\mathbf{v} = (x^2y)\mathbf{i} + (xyz)\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ , obtener el gradiente de dicho campo en el punto  $(1; 0; -2)$ .

15. Dada la siguiente matriz,

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

evaluar  $S_{ii}$ ; b)  $S_{ij}S_{ij}$ ; c)  $S_{jk}S_{jk}$ .



# Capítulo 2

## Cinemática de un fluido en movimiento

### 2.1. Introducción

En este Capítulo se presenta la cinemática de un fluido en movimiento. Cuando hablamos de cinemática hablamos de movimiento y entonces lo que se presenta son las descripciones de los diferentes tipos de movimientos de una partícula de fluido y temas relacionados como la ecuación de conservación de masa, operador derivada sustancial o total y teorema de transporte de Reynolds.

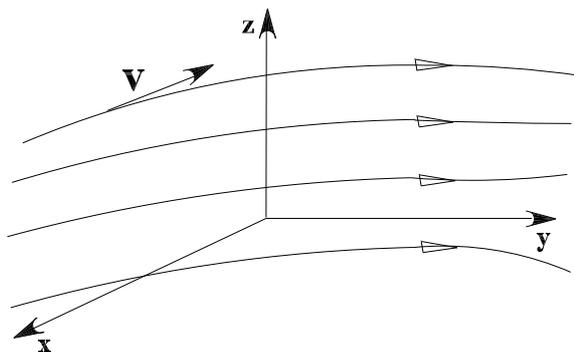


Figura 2.1: Líneas de corriente describiendo el movimiento de un fluido en el espacio.

Para hacer referencia al espacio físico se usan las variables  $x, y, z$ , Figura 2.1, para los tres ejes de coordenadas cartesianos y  $t$  para el tiempo. Así se tienen las cuatro variables independientes  $x, y, z, t$ , en función de las cuales se definen las dependientes como velocidad  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  y presión  $P(x, y, z, t)$ , entre otras. En particular la velocidad y la presión son denominadas variables

primarias, ya que existen otras variables dependientes como la vorticidad  $\omega(x, y, z, t)$ , etc, que pueden ser derivadas de las anteriores. Y por ese motivo son denominadas secundarias. Luego la cinemática consiste en detallar paso a paso como se definen todas las variables que definen el movimiento y la deformación de un fluido.

Para hacer referencia al fluido se considera una partícula del mismo, tal como fue definida anteriormente. Es decir por partícula de fluido se entiende un conglomerado suficientemente grande de moléculas, de forma que se puedan definir apropiadamente las variables como velocidad, densidad, etc, en un punto del espacio. Y una forma conveniente de imaginar una partícula del mismo, es con forma cúbica porque facilita su estudio usando ejes cartesianos y en dos tiempos suficientemente próximos, de tal forma que la misma no se llegue a desintegrar desde un punto de vista macroscópico.

En primer lugar, partiendo de los conceptos vistos en Física, se considera el movimiento de una partícula o cuerpo rígido en relación a un sistema de coordenadas en el espacio. Esta partícula tiene seis grados de libertad de movimiento. Es decir puede desplazarse en forma rectilínea según los tres ejes  $\{x, y, z\}$  y también puede girar alrededor de los mismos. Luego todo movimiento de un cuerpo rígido puede ser descompuesto según esos seis movimientos simples. Así se tiene,

$$\text{movimiento de cuerpo rígido} = \text{traslación según } \{x,y,z\} + \text{rotación según } \{x,y,z\}$$

Hasta ahí los grados de libertad de movimientos posibles de una partícula rígida. El nuevo fenómeno a considerar al analizar el movimiento de una partícula de fluido es la deformación. De los cursos de Física se sabe que las moléculas pueden tener solo una determinada distribución dentro de un cuerpo en estado sólido. Si queremos modificar esa distribución aplicando una determinada fuerza, el cuerpo rompe cuando la fuerza excede algún límite. En contraste, los fluidos no tienen esa restricción al movimiento relativo de las moléculas, con lo cual, por ejemplo, adoptan la forma del recipiente que los contienen. Es decir modifican su forma o deforman ante un esfuerzo por mínimo que sea. Sin embargo la deformación es una propiedad fundamental de los fluidos, la cual requiere también un nivel mayor de detalle para describir el movimiento del mismo.

Un experimento sencillo (que podemos hacer también en forma imaginaria) que permite comprender esta propiedad de un fluido, consiste en usar un vaso con miel y dibujar con algún otro fluido con diferente color, un cuadrado sobre su superficie simulando ser una partícula de fluido. Si luego se mueve la miel en la parte exterior del cuadrado con algún objeto, el fluido

se deforma transmitiendo parte de esa deformación a la *partícula de fluido*. Si el movimiento que realizamos próximo del cuadrado es en círculos, veremos que deforman los ángulos originalmente rectos. Si el movimiento en cambio es rectilíneo hacia afuera, el cuadrado se elongará tendiendo a un rectángulo. Ese experimento imaginario da una idea del concepto de deformación de una partícula de fluido.

La deformación del fluido puede ser cuantificada en función del movimiento relativo entre dos puntos sobre una partícula del mismo. Por ejemplo podemos considerar los puntos extremos de uno de los lados de la partícula dibujada sobre la miel en el experimento de arriba y calcular la deformación de ese segmento. Es necesario también decir que en realidad lo que se debe cuantificar es la deformación específica en función del tiempo, [*deformación/(longitud original  $\times$  tiempo)*], o velocidad de deformación específica.

Luego, en síntesis, al pasar a considerar una partícula de fluido en vez de una partícula sólida, hay que agregar a los grados de libertad de movimiento de la partícula sólida, la deformación que sufre el fluido al moverse. Y como al movimiento relativo entre dos puntos sobre una partícula de fluido se lo puede descomponer en movimientos simples, también la deformación es descompuesta en deformaciones simples, según el movimiento sea rectilíneo o rotacional. Así se habla de deformaciones longitudinales según  $\{x,y,z\}$  y deformaciones angulares con centro en esos ejes, o en los planos  $\{xy\}$ ,  $\{xz\}$  y  $\{yz\}$ . En otras palabras, existe una suma de efectos cinemáticos, los originales de un cuerpo rígido más las deformaciones del fluido.

Luego, los grados de libertad al movimiento de un fluido pueden ser descompuestos en los grados de libertad de un cuerpo rígido más los correspondientes a las deformaciones,

$$\text{movimiento de un fluido} = \text{movimiento de cuerpo rígido} + \text{deformaciones}$$

donde los grados de libertad a la deformación se descomponen en,

$$\text{deformaciones} = \text{longitudinales en } x,y,z + \text{angulares en torno de } x,y,z.$$

Así se deben describir los siguientes cuatro fenómenos, *traslación en  $x,y,z$  + rotación en torno de  $x,y,z$  + deformaciones longitudinales en  $x,y,z$  + deformaciones angulares en torno de  $x,y,z$ .*

Las Figuras 2.2(a), 2.2(b), 2.3(a), y 2.3(b), presentan esquemas con el significado de traslación, rotación y deformación longitudinal y angular en relación al eje de coordenadas  $z$ .

Con los conceptos introducidos antes en cuanto a separar la descripción del movimiento en movimiento de traslación y de rotación y luego las deformaciones en longitudinales y angulares,

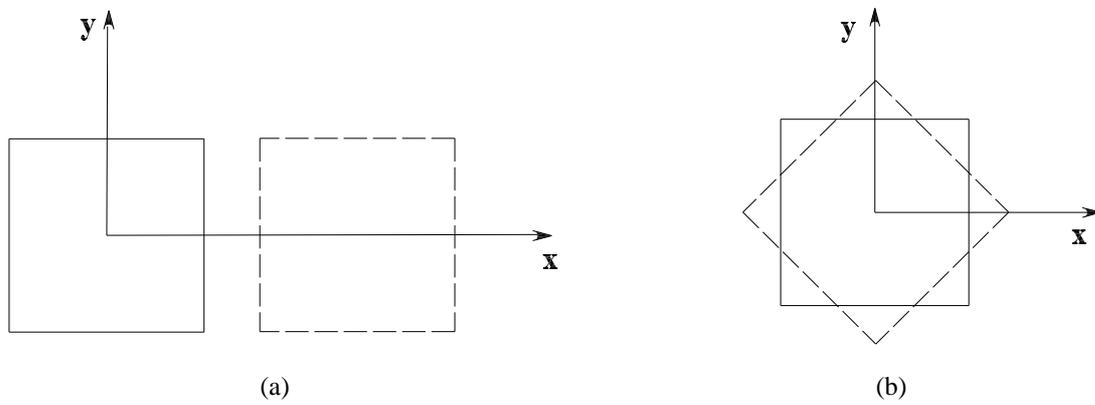


Figura 2.2: Partícula de fluido en  $t$ , línea sólida, y en  $t + \Delta t$ , línea de trazos, con movimiento (a) traslacional; (b) rotacional.

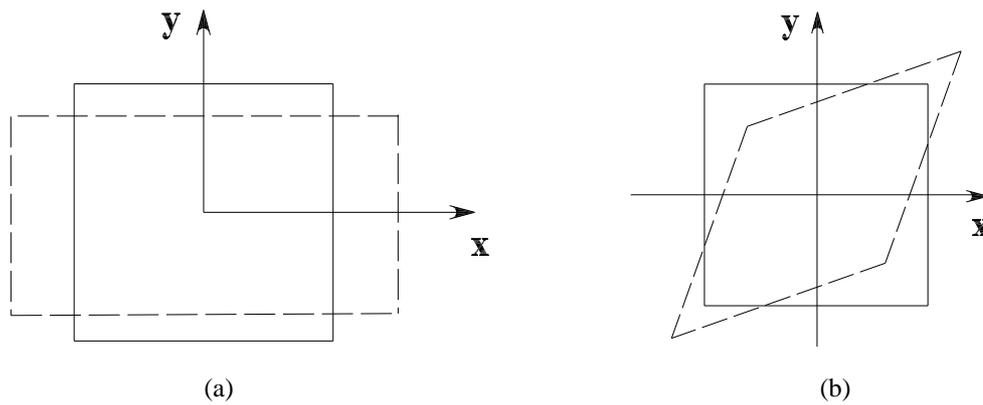


Figura 2.3: Partícula de fluido en  $t$ , línea sólida, y en  $t + \Delta t$ , línea de trazos, con deformación (a) longitudinal ; (b) angular.

a seguir se presenta la descripción del movimiento traslacional o lineal, luego del movimiento rotacional y por último las deformaciones logitudinales y angulares.

## 2.2. Descripción del movimiento de un fluido

En este ítem se describe el movimiento de un fluido descomponiendo al mismo en movimientos simples según los ejes coordenados. Antes de seguir, sin embargo, es necesario determinar un método para describir esos movimientos. En otras palabras, cuando en Física se describe el movimiento de un cuerpo rígido, se lo hace siguiendo al cuerpo a través del espacio. Sin embargo, dado que un fluido está conformado por un medio continuo con infinitas partículas, en algunos casos es conveniente describir su movimiento en función del movimiento de partículas que pasan por un punto fijo del espacio. Así existen dos posibilidades, (i) *describir el movimiento de partículas que pasan por un determinado punto del espacio*, denominado Euleriano o espacial, o (ii) *describir el movimiento de una partícula a través del espacio*, denominado Lagrangiano o material. (i) y (ii) son métodos alternativos. Luego se puede:

(i) Realizar una descripción del movimiento de un fluido tomando como marco de referencia el espacio físico y describir el movimiento de todas las partículas que están pasando por un punto genérico a lo largo del tiempo. Por ejemplo, para expresar la velocidad del fluido se hace referencia a la velocidad que tienen las partículas que pasan por un punto  $P(x,y,z)$ . Luego la misma se escribe como  $\mathbf{v}(x,y,z,t)$  en el punto  $P(x,y,z)$ . La velocidad aparece también en función del tiempo porque las velocidades de las diferentes partículas que pasan por ese punto pueden ser diferentes. Esta es la descripción *espacial* o *Euleriana*. Si se describe la velocidad de los vehículos que circulan por una autopista usando este método,  $\mathbf{v}(x,y,z,t)$  describe las velocidades de los mismos en un punto fijo en un carril a lo largo del tiempo.

(ii) El segundo método consiste en describir el movimiento del fluido usando como marco de referencia las diferentes partículas. Es decir la velocidad corresponde a la de una partícula específica del fluido  $\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t)$  a través del espacio. Se sigue a la partícula de interés a lo largo del espacio. Las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  son, por así decirlo el nombre de la partícula, dado que corresponden al punto del espacio en el cual se encontraba la misma en  $t=0$ . Esta es la descripción *material* o *Lagrangiana*. Haciendo referencia al ejemplo de arriba, ahora  $\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t)$  describe la velocidad de un vehículo en particular a través de la autopista a lo largo del tiempo.

En síntesis, las descripciones espacial y material dicen del marco de referencia que se usa

para expresar el movimiento. Un punto fijo en el espacio o una partícula fija de fluido. Si en vez del movimiento se quieren describir las propiedades del fluido como la densidad, presión, entre otras, las mismas pueden ser descritas también según uno de los dos métodos. Sin embargo dado que los problemas más usuales en Mecánica de Fluidos conviene estudiarlos usando una descripción espacial, en este libro se usa solo esa descripción. Existen problemas como el cálculo del flujo de sustancias en diferentes fases, por ejemplo de burbujas de un gas en un líquido, dispersión de un contaminante en otro fluido, entre otros casos, a los cuales puede resultar más conveniente estudiarlos usando la descripción material o Lagrangiana.

### 2.2.1. Movimiento traslacional

Del movimiento lineal de una partícula de fluido se estudia la velocidad  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , la cual tiene componentes  $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  y la aceleración  $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ , la cual tiene componentes  $a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$  usando notación Cartesiana convencional. O  $\mathbf{v} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = u_i\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_i\mathbf{e}_i$  usando notación indicial.

El método de descripción es el Euleriano. Sin embargo, dado que el fluido está en movimiento la velocidad y la aceleración se calculan *siguiendo* a las partículas de fluido y luego se las describe en un punto fijo del espacio. Este cálculo puede ser explicado con la ayuda de la Figura 2.4, la cual presenta en 2 dimensiones las líneas trayectorias de un flujo. El punto genérico donde se desea calcular la velocidad en ese flujo es  $P(x, y)$ . Y el cálculo se hace siguiendo la partícula de fluido que en  $t = 0$  estuvo en  $P(x_0, y_0)$  y que en el tiempo  $t$  pasa por  $P(x, y)$  (por simplicidad la figura presenta una situación bidimensional, no obstante al desarrollo se lo hace en el espacio). El vector posición del punto genérico  $P(x, y, z)$  es,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.1)$$

Por otro lado las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula que en  $t = 0$  estuvo en  $P(x_0, y_0, z_0)$  son,

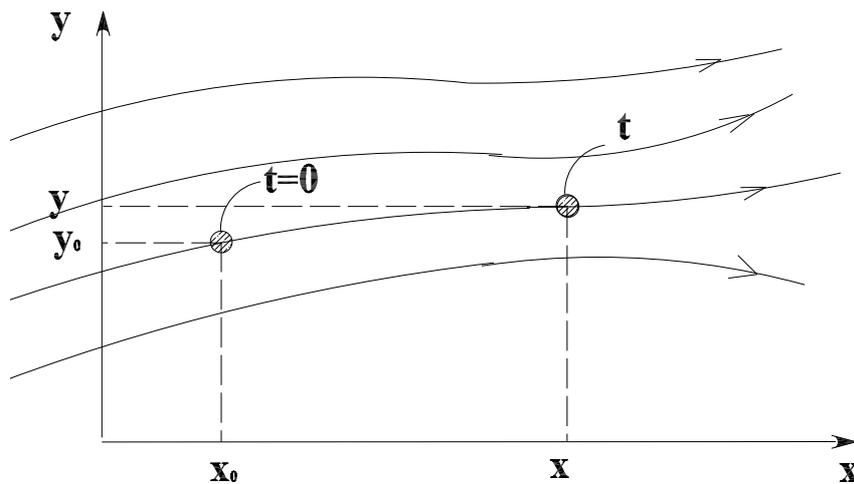


Figura 2.4: Líneas trayectorias de un fluido en movimiento en el plano  $x - y$ , donde el punto  $P(x_0, y_0)$  corresponde a la posición de la partícula en el tiempo 0 y  $P(x, y)$  a la posición de la misma en el tiempo  $t$ .

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \int_0^t u(x_0, y_0, z_0, \tau) d\tau \\
 y &= y_0 + \int_0^t v(x_0, y_0, z_0, \tau) d\tau \\
 z &= z_0 + \int_0^t w(x_0, y_0, z_0, \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde  $\tau$  representa el tiempo. Estas ecuaciones describen las trayectorias de la partícula en cada uno de los ejes coordenados. Como esas trayectorias son función del espacio y del tiempo, las ecuaciones (2.2) también pueden escribirse en forma genérica simplemente como,

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \tag{2.3}$$

Si en las ecuaciones (2.3) los valores  $x_0, y_0, z_0$  varían, cambia la partícula a la cual se hace referencia. Si en cambio esos valores se fijan,

$$x_{x_0, y_0, z_0} = x(t), \quad y_{x_0, y_0, z_0} = y(t), \quad z_{x_0, y_0, z_0} = z(t) \tag{2.4}$$

se está siguiendo a una partícula y la única variable independiente es el tiempo. Luego para seguir una partícula con el radio vector posición  $\mathbf{r}(x, y, z)$ , ecuación (2.1), basta con sustituir las coordenadas espaciales  $x, y, z$  del mismo con las ecuaciones (2.4), el cual resulta,

$$\mathbf{r}_{x_0, y_0, z_0}(t) = x_{x_0, y_0, z_0}(t)\mathbf{i} + y_{x_0, y_0, z_0}(t)\mathbf{j} + z_{x_0, y_0, z_0}(t)\mathbf{k} \quad (2.5)$$

donde la única variable independiente es  $t$  y  $\mathbf{r}$  apunta a la partícula a lo largo del tiempo describiendo su trayectoria. Por lo tanto con la ecuación (2.5) se puede definir la velocidad obteniendo la derivada en relación al tiempo del vector  $\mathbf{r}_{x_0, y_0, z_0}(t)$  manteniendo los valores  $x_0, y_0, z_0$  constantes,

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t) = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \mathbf{i} + \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \mathbf{j} + \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \mathbf{k} \quad (2.6)$$

donde la misma expresa la velocidad de la partícula que en el tiempo  $t$  está pasando por  $P(x, y, z)$ . Sustituyendo  $dx/dt = u$ ,  $dy/dt = v$  y  $dz/dt = w$  en la ecuación (2.6) se tiene,

$$\mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.7)$$

Y para recuperar la descripción espacial de la velocidad, es decir tener la velocidad en un punto fijo del espacio a lo largo del tiempo, se sustituye  $x_0, y_0, z_0$  en la ecuación (2.7) por  $x, y, z$  usando ecuación (2.3) donde se han explicitado  $x_0, y_0, z_0$ , con lo cual se tiene,

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.8)$$

Así la ecuación (2.8) describe la velocidad de las diferentes partículas que pasan por el punto  $P(x, y, z)$  a lo largo del tiempo. Esta es la forma usual de velocidad con descripción Euleriana o espacial. Todo el procedimiento seguido para obtenerla tuvo como objetivo explicar el concepto. Como se verá luego de presentar la aceleración, en la práctica se usa un operador denominado derivada sustancial o derivada material,  $D/Dt$ , que realiza el cálculo de una derivada en relación al tiempo de una función cualquiera de una partícula de fluido, manteniendo constante las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ . Siendo el resultado una función con descripción espacial o Euleriana. El nombre de derivada sustancial o material se refiere justamente a que sigue a una partícula. Sobre este tema se volverá más adelante.

Asociados a la función velocidad existen algunos conceptos como los de *línea trayectoria*, que ya fue presentado antes, siendo la línea que describe la trayectoria de una partícula y *línea de corriente* la cual se define como la curva tangente al campo de velocidad en cada punto. Un ejemplo de líneas de corriente se tiene en la Figura 2.1.

Ahora se puede definir la aceleración la cual es la variación en relación al tiempo de la velocidad. A este cálculo otra vez se lo hace sin hacer uso del operador derivada material,  $D/Dt$ , sino en forma detallada como fue realizado el de velocidad. Por tanto es necesario otra vez usar la descripción material usada antes, con la cual se puede seguir a una partícula. Es decir se parte de la ecuación (2.8) y se realiza la transformación de las variables  $x, y, z$  con la ecuación (2.3). Así la aceleración resulta, usando la regla de la cadena en la función velocidad, derivando primero en relación a  $x$  y ésta en relación al tiempo manteniendo fijo los valores  $(x_0, y_0, z_0)$  como,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}|_{(x_0, y_0, z_0)} = \mathbf{a}(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt}|_{(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt}|_{(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}|_{(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.9)$$

transformando ahora otra vez usando la ecuación (2.3) y empleando también  $dx/dt = u$ ,  $dy/dt = v$ ,  $dz/dt = w$  se tiene,

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.10)$$

El cálculo de la velocidad y la aceleración arriba son algo complicado, dado que se describen propiedades de un medio que está en movimiento y se lo hace en un punto fijo del espacio. Como ya se adelantó, sin embargo, existe el operador  $D/Dt$ , que realiza todas esas operaciones en forma automática. Es decir obtiene la derivada en relación al tiempo de una función cualquiera manteniendo constante los valores  $(x_0, y_0, z_0)$  y la expresa con descripción espacial. Si para calcular por ejemplo la aceleración se hubiese usado directamente la derivada material se tendría,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.11)$$

donde se sobreentiende que ese operador obtiene la derivada siguiendo una partícula y expresa el resultado en un punto fijo del espacio. Luego empleando la definición de la velocidad resulta,

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.12)$$

Usando ahora las componentes del vector velocidad  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  se tienen las componentes escalares de la aceleración,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \mathbf{i} + \\ & \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \mathbf{j} + \\ & \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Siguiendo con el concepto de derivada sustancial o total, la aplicación del operador  $D/Dt$  a una función cualquiera  $f = f(x, y, z, t)$ , de por sí considera que la derivada es realizada siguiendo al movimiento del fluido, a través del empleo de las ecuaciones paramétricas del desplazamiento. Comparada con la derivada parcial en relación al tiempo se tiene que,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \text{derivada en relación al tiempo manteniendo constante } (x, y, z) \quad (2.15)$$

$$\frac{D}{Dt} = \text{derivada en relación al tiempo manteniendo constante } (x_0, y_0, z_0)$$

de donde se tiene,

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.16)$$

o también,

$$\frac{Df}{Dt} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.17)$$

Por otra parte como se puede observar en la ecuación (2.17), la derivada material o sustancial es la suma de las variaciones que experimenta la función en un punto fijo en el espacio más la que experimenta con la traslación. Estas dos variaciones se denominan variación temporal y convectiva, respectivamente. Volviendo al cálculo de la aceleración, lo anterior significa que la misma es la suma de la variación de la velocidad en relación al tiempo en un punto fijo, la cual es denominada aceleración o variación local, más la variación que sufre la velocidad de la partícula en su desplazamiento, denominada aceleración o variación convectiva. Es decir reescribiendo la expresión de la aceleración,

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) + \left(u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right) \quad (2.18)$$

el primer término a la derecha del signo igual es la aceleración temporal y el siguiente término entre paréntesis representa la aceleración convectiva.

A seguir conviene ver un ejemplo para comprender lo que ocurre en la práctica con esos dos términos para la aceleración, pero sin olvidarnos que lo mismo ocurre con cualquier propiedad de la cual se obtiene la variación con el tiempo usando  $D/Dt$ . Supongase un flujo de agua permanente, donde permanente significa que nada cambia en relación al tiempo en todo el dominio, en una expansión gradual de una tubería con velocidad media axial  $u_1$ , a otra con un diámetro mayor y velocidad media axial  $u_2$ , como se muestra en la Figura 2.5.

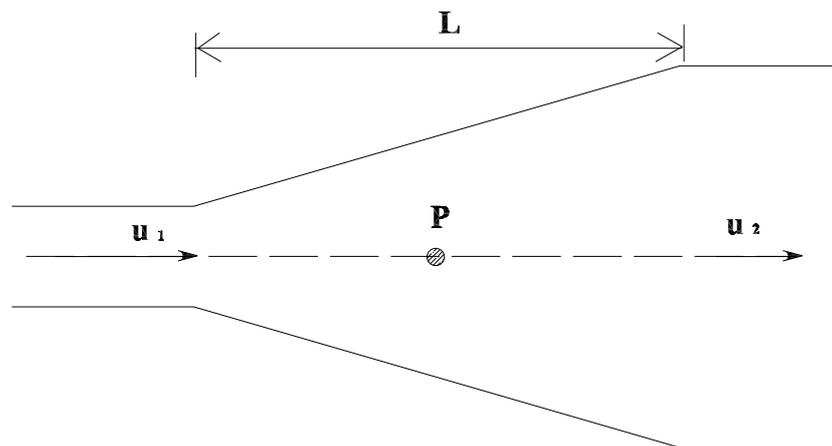


Figura 2.5: Flujo incompresible en una expansión gradual de una tubería.

Sin aplicar ninguna ley, solo por intuición se puede concluir que la velocidad es mayor en la tubería de menor diámetro,  $u_1 > u_2$ . Para circunscribir más nuestro ejemplo se debe pensar en el flujo de un líquido, el cual no sufrirá efectos de cambios de volumen, lo que comunmente es denominado flujo incompresible. Un contraejemplo es el flujo con número de Mach superior a 1 de un gas, denominado supersónico, para el cual no se verifica esa relación entre las velocidades  $u_1$  y  $u_2$ . Es decir dado que la sección de pasaje se expande en la dirección axial, existe una disminución gradual de la velocidad en forma paralela con el aumento del área transversal. Dicho cambio de la velocidad en el espacio se denomina aceleración convectiva, que en este caso es en realidad negativa.

Si se desea calcular la aceleración en forma aproximada en la línea de simetría y en la mitad

de la expansión, punto  $P$ , se debe calcular, (a) la variación de la velocidad de las partículas a medida que se desplazan en el espacio, o aceleración convectiva, más (b) la variación que sufre la velocidad en relación al tiempo en dicho punto, o aceleración temporal, como fue comentado antes. Sin embargo dado que es un flujo permanente, nada cambia en relación al tiempo en toda la región. Por lo tanto no existirá aceleración temporal. Es decir la variación en (b) es nula. Por su parte la aceleración convectiva, punto (a), puede ser evaluada con un cálculo aproximado como  $(u_2 - u_1)/L$ , de donde la aceleración en el punto  $P$  resulta,

$$\frac{D}{Dt}(u_P) = a_P \simeq \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (2.19)$$

donde  $a_P$  y  $u_P$  son los módulos de la aceleración y de la velocidad axial en el punto  $P$ , respectivamente.

Se supone ahora una situación más compleja de flujo transitorio, en la cual el caudal de agua es gradualmente aumentado en el tiempo. En este caso en un punto fijo del espacio la velocidad también aumentará en relación al tiempo, al contrario del caso anterior. Por lo tanto para calcular la aceleración en forma aproximada en  $P$ , es necesario obtener (a) la variación de la velocidad de las partículas de fluido en el trayecto  $L$  de la expansión para un tiempo fijo, más (b) la variación que sufre la velocidad a lo largo del tiempo en  $P$ . Luego en este caso la variación con la convección, punto (a), en forma aproximada es  $(u_2 - u_1)/L$  y la variación temporal en forma aproximada, punto (b), es  $(u_P(t + \Delta t) - u_P(t))/\Delta t$ . Luego resulta,

$$\frac{D}{Dt}(u_P) = a_P \simeq \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{u_P(t + \Delta t) - u_P(t)}{\Delta t} \quad (2.20)$$

Como se ve en ese cálculo simple la propiedad aceleración de una partícula puede cambiar en el espacio y también a lo largo del tiempo. Y como ya fue comentado, a la parte de la aceleración en relación al espacio se la denomina aceleración convectiva y a la que resulta de la variación en el tiempo en un punto fijo del espacio, aceleración temporal. Otra vez hay que decir que la suma de esas dos variaciones representan la variación total de la velocidad en el punto  $P$ . Lo mismo resulta si dicho operador es aplicado a cualquier propiedad como por ejemplo la densidad  $\rho$ , la temperatura, etc.

De aquí en más para obtener una derivada material en relación al tiempo se usará el operador  $D/Dt$  directamente sin comentario alguno.

### 2.2.2. Movimiento rotacional

El movimiento rotacional de un flujo puede ser expresado en función de la vorticidad o rotación que experimentan las partículas del mismo. La vorticidad luego permite definir el concepto de flujo rotacional e irrotacional y sus consecuencias.

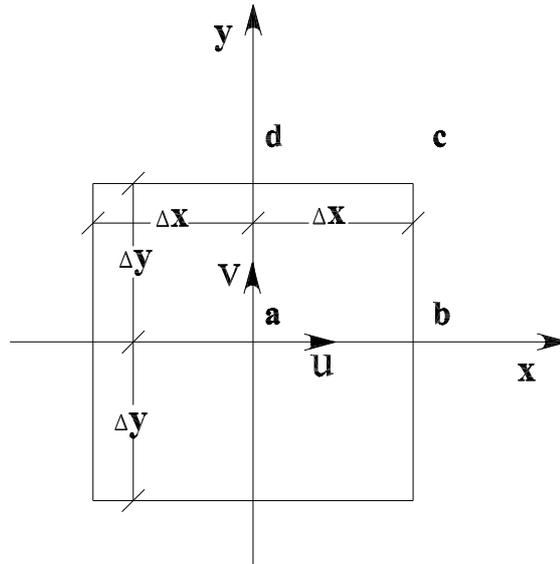


Figura 2.6: Partícula de fluido con velocidad  $u$  y  $v$ , según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, en su centro geométrico.

Por definición la vorticidad de un fluido es igual al movimiento rotacional de cuerpo rígido del mismo. Por eso se obtienen las expresiones de la rotación de cuerpo rígido que sufre una partícula de fluido cúbica, según los tres ejes coordenados. La Figura 2.6 muestra el plano  $x$ - $y$  de una partícula cúbica. La rotación de cuerpo rígido en ese plano está dada por el valor medio de la rotación de dos segmentos fijos a la partícula, en la dirección de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente.

Por un lado la rotación del segmento fijo a la partícula en la dirección del eje  $x$ ,  $\bar{ab}$ , es el límite de la diferencia de las velocidades de sus extremos, en la dirección normal al mismo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(v(x + \Delta x, y, z, t) - v(x, y, z, t))}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.21)$$

y del mismo modo la del segmento  $\bar{ad}$  en la dirección del eje  $y$  es,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-(u(x, y + \Delta y, z, t) - u(x, y, z, t))}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.22)$$

donde el signo negativo tiene que ver con el signo de la rotación que se considera positiva en la dirección opuesta a las agujas del reloj. Luego el valor medio de la rotación de esos dos segmentos es,

$$\text{rotación media en el plano } x-y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$

Y en forma análoga las demás rotaciones medias son,

$$\text{rotación media en el plano } y-z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.24)$$

$$\text{rotación media en el plano } z-x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.25)$$

Luego, la suma de las tres rotaciones medias de cuerpo rígido según los ejes coordenados recibe el nombre de vector vorticidad,

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.26)$$

y el vector vorticidad  $\omega$  se relaciona con el operador rotor de la velocidad de la siguiente forma,

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (2.27)$$

que en coordenadas cartesianas se puede calcular resolviendo el determinante de la siguiente matriz como se presentó en el Capítulo 1,

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

o también usando notación indicial como en la expresión (1.26) que se repite aquí por comodidad,

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \quad (2.29)$$

Luego si la vorticidad en un punto es nula se dice que el flujo es irrotacional en ese punto. Si para el flujo de toda una región y en todos sus puntos,  $\omega = 0$ , al mismo se lo denomina *flujo*

*irrotacional*. Por el contrario toma el nombre de *flujo rotacional* siempre que  $\omega \neq 0$  en algún punto en dicha región. Al final de este Capítulo se presentarán consecuencias adicionales de la rotacionalidad e irrotacionalidad de un flujo, como es la definición del potencial de velocidad y la definición de circulación.

### 2.3. Descripción de la deformación de un fluido

En relación con lo estudiado en los cursos de Física sobre cinemática de cuerpos sólidos, la deformación es el nuevo fenómeno al estudiar el movimiento de un fluido. La importancia del tema en relación a la dinámica de un fluido en movimiento, radica en que la tasa de deformación permite expresar las tensiones que el mismo sufre en su interior. Como se verá en el Capítulo 3, los esfuerzos que sufre un fluido en movimiento pueden ser expresados en función de las deformaciones del mismo, permitiendo que las ecuaciones generales sean resolubles. Siendo esa relación entre tensiones y deformación una función de cada sustancia. En otras palabras, el tema de deformaciones no es dado para tornar completo el estudio de la cinemática de un fluido en movimiento, sino por lo contrario, es uno de los temas centrales de Mecánica de Fluidos.

Por otra parte como ya se comentó en la introducción de este Capítulo, las deformaciones pueden ser longitudinales o angulares. Y dado que un fluido siempre deforma por mínimos que sea un esfuerzo aplicado al mismo, para medir la deformación no se usa la deformación absoluta o específica como en Resistencia de Materiales, sino la velocidad de deformación específica. Es decir que la medida de la deformación en Mecánica de Fluidos es definida como *deformación* / (*magnitud original*  $\times$  *tiempo de la deformación*), denominándose tasa de deformación específica o velocidad de deformación específica. Sin embargo por simplicidad se hará referencia a la misma solo como deformación.

Por otra parte la descripción de la deformación, al igual que para la velocidad y aceleración, se hace en un punto fijo del espacio a lo largo del tiempo. Siendo que la misma expresa la deformación de las partículas de fluido que pasan por ese punto a lo largo del tiempo. Y se recuerda también que las mismas pueden descomponerse en deformaciones simples según la dirección de los ejes coordenados. Para obtenerlas se considera como siempre una partícula cúbica y se presentan las deformaciones longitudinales y angulares descompuestas según cada uno de los ejes coordenados, como fue comentado en la introducción.

### 2.3.1. Deformación longitudinal

La deformación longitudinal que sufre un fluido en movimiento según una dirección, se puede evaluar calculando la modificación del largo específico en función del tiempo, de un segmento perteneciente a una partícula en esa dirección, Figura 2.3(a). Cuando la deformación es positiva se denomina *elongamiento* y *compresión* cuando es negativa. En forma matemática es el límite al que tiende la diferencia de velocidad específica, de dos puntos pertenecientes a una partícula de fluido, cuando la distancia entre los mismos tiende a 0. Es decir considerando dos puntos genéricos  $a$  y  $b$  sobre una partícula, los cuales están separados un  $\Delta s$  y tienen velocidades  $\mathbf{v}_a$  y  $\mathbf{v}_b$ , la deformación longitudinal en la dirección de la recta que une esos puntos es,

$$\epsilon_{ss} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a)}{\Delta s} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \quad (2.30)$$

Se considera ahora la partícula en la Figura (2.6) con dimensiones  $2\Delta x$  y  $2\Delta y$  en el plano  $x - y$ , con componentes de la velocidad  $\{u, v\}$  en su centro. Luego la deformación longitudinal en la dirección del eje  $x$  es,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t))}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.31)$$

de donde la tasa de deformación específica longitudinal en  $x$ ,  $\epsilon_{xx}$ , resulta,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.32)$$

y por analogía las deformaciones específicas longitudinales en  $y$  y  $z$  son,

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.33)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.34)$$

Así  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{zz}$  son las deformaciones longitudinales según los ejes coordenados  $\{x, y, z\}$ . La suma de esas deformaciones expresa la tasa de dilatación cúbica específica, que en este libro se simboliza con la letra  $\Theta$ . La misma dice de la variación total específica del volumen que sufre una partícula en movimiento, como se demostrará más adelante,

$$\Theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.35)$$

### 2.3.2. Deformación angular

Ahora se estudian las deformaciones angulares que sufren los ángulos de una partícula de fluido en movimiento. Una deformación angular se define como la deformación media de los ángulos de una partícula, en relación a los 3 planos coordenados. Es, en otras palabras, la rotación opuesta de los segmentos que forman cada ángulo en cada plano. Lo de rotación opuesta tiene que ver con el hecho que son estas las que deforman el ángulo que forman. Si los segmentos rotan en igual sentido se tiene que la partícula tiene rotación de cuerpo rígido, no deformación angular.

Considerando otra vez la Figura 2.6, por definición la tasa de deformación específica angular en el plano  $x$ - $y$ , o deformación angular alrededor del eje  $z$ , es el valor medio de las rotaciones opuestas de los segmentos  $\bar{ab}$  y  $\bar{ad}$ . O lo que es lo mismo de los puntos  $P(x + \Delta x, y, z)$  y  $P(x, y + \Delta y, z)$ , en relación al centro geométrico de la partícula. Las rotaciones se toman con signo positivo cuando tienen sentido opuesto a las agujas del reloj.

En primer lugar, la rotación del punto  $P(x + \Delta x, y, z)$  en relación al centro geométrico de la partícula es,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(v(x + \Delta x, y, z, t) - v(x, y, z, t))}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.36)$$

y la rotación de  $P(x, y + \Delta y, z)$ , o rotación del otro lado del ángulo, es,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x, y + \Delta y, z, t) - u(x, y, z, t))}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.37)$$

Luego, el valor medio de la rotación inversa de los lados del ángulo en el plano  $x$ - $y$ , denominada  $\epsilon_{xy}$ , en función de los resultados de las expresiones (2.36-2.37), es,

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.38)$$

De forma analoga, las deformaciones específicas angulares medias en los planos  $y$ - $z$  y  $z$ - $x$  son,

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.39)$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.40)$$

Siendo que las deformaciones totales según los planos  $x - y$ ,  $y - z$ , y  $z - x$  son respectivamente,

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.41)$$

Una forma de ordenar todas las deformaciones, tanto longitudinales como angulares, es en una matriz denominada *tensor de deformaciones*, la cual es,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial u/\partial x + \partial u/\partial x) & (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) & (\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) \\ (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) & (\partial v/\partial y + \partial v/\partial y) & (\partial v/\partial z + \partial w/\partial y) \\ (\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) & (\partial v/\partial z + \partial w/\partial y) & (\partial w/\partial z + \partial w/\partial z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Este tensor tiene toda la información relacionada con la deformación que sufre un fluido en movimiento en un punto fijo del espacio a lo largo del tiempo. Y a modo de síntesis es bueno comentar que el mismo puede ser obtenido a partir del tensor gradiente de la velocidad. Para mostrar eso de una forma más compacta se usa notación indicial. Así en esa notación el tensor gradiente de la velocidad es,

$$\nabla \mathbf{v} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

y dado que en esa notación el tensor deformación,  $\mathbf{D} = [D_{ij}]$ , es,

$$[D_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_1) \\ (\partial u_2/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_2) \\ (\partial u_3/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

resulta que una de sus componentes puede ser escrita como  $D_{ij} = 1/2(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ , o también usando notación vectorial el tensor completo como  $\mathbf{D} = 1/2(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ , donde  $\nabla \mathbf{v}$  es el tensor gradiente de la velocidad y  $\nabla \mathbf{v}^T$  la transpuesta del mismo.

Recordando de lo cursos de Algebra, para un tensor genérico  $S_{ij}$  el tensor definido con las componentes  $1/2(S_{ij} + S_{ji})$  (como ocurre con el tensor gradiente de la velocidad,  $\nabla \mathbf{v} = [\partial u_i/\partial x_j]$  para formar el tensor deformación) constituye la parte simétrica del original,  $S_{ij}$ . Es decir que el tensor deformación esta conformado por la parte simétrica del tensor gradiente de la velocidad. Siendo que la parte antisimétrica del mismo, obtenida restando los términos, representa el tensor rotación de cuerpo rígido del fluido en un punto,

$$[\Omega_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial u_1/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_1) \\ (\partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_2) \\ (\partial u_3/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

el cual tiene 6 componentes diferentes de 0, aquellas fuera de la diagonal principal, siendo las simétricas a ésta iguales en valor absoluto e iguales, por otro lado, a las componente de la vorticidades en los planos  $x - y$ , componente  $\Omega_{12}$ , plano  $y - z$ , componente  $\Omega_{23}$ , y plano  $x - z$ , componente  $\Omega_{13}$ . Es decir son las componentes del vector vorticidad visto anteriormente, ecuación (2.26).

Los resultados anteriores pueden sintetizarse diciendo que la parte simétrica del tensor  $\nabla \mathbf{v}$  representa las deformaciones del fluido,  $\mathbf{D}$ , y la parte antisimétrica la rotación de cuerpo rígido

del fluido,  $\Omega$ . En resumen el gradiente de la velocidad puede descomponerse de la siguiente forma,

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = [D_{ij} + \Omega_{ij}] =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_1) \\ (\partial u_2/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_2) \\ (\partial u_3/\partial x_1 + \partial u_1/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_3) \end{pmatrix} + \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial u_1/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_1) & (\partial u_1/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_1) \\ (\partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_2) & (\partial u_2/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_2) \\ (\partial u_3/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_3) & (\partial u_3/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_3) \end{pmatrix}$$

## 2.4. Movimiento relativo entre dos puntos de una partícula

A modo de conclusión sobre la cinemática de un fluido en movimiento, en este ítem se muestra como el movimiento relativo de dos puntos de una partícula de fluido, puede ser descompuesto en movimiento traslacional y rotacional, más deformación longitudinal y angular. En otras palabras, el movimiento relativo entre dos puntos tiene implícito todos los efectos cinemáticos estudiados hasta aquí.

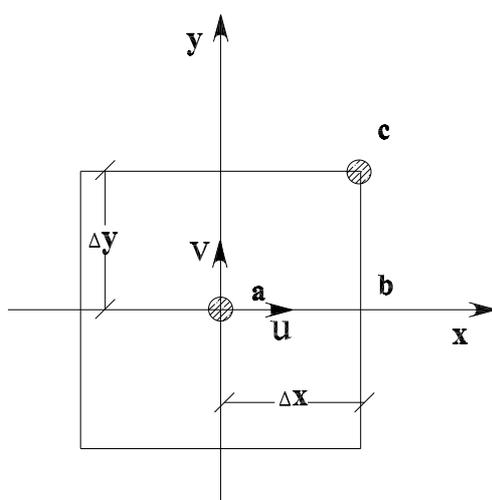


Figura 2.7: Partícula de fluido cuyo centro, punto  $a$ , tiene velocidad  $u$  y  $v$  según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

En relación a la partícula de fluido de la Figura 2.7, los dos puntos que se toman en el análisis son el centro de coordenadas, punto  $a$ , y el vértice superior derecho, punto  $c$ . La velocidad según el eje  $x$  del punto  $c$  en función de la velocidad según el mismo eje del centro de la partícula, usando una expansión solo de los términos de primer orden es,

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) \simeq u(x, y) + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy + \dots \quad (2.47)$$

Por otra parte se tiene que la vorticidad del fluido según el eje  $z$  en el centro de la partícula es,

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.48)$$

Usando esta última ecuación para sustituir  $1/2 \partial u / \partial y$  en la ecuación (2.47) y reacomodando la misma resulta,

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) \simeq u(x, y) - \omega_z dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dy + \frac{u(x, y)}{\partial x} dx \quad (2.49)$$

renombrando ahora algunos términos finalmente se tiene,

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) \simeq u(x, y) - \omega_z dy + \epsilon_{xx} dx + \epsilon_{xy} dy \quad (2.50)$$

donde la ecuación (2.50) expresa que la velocidad según el eje  $x$  del punto  $c$  puede ser expresada en función de cuatro términos. El primer término a la derecha del signo igual en esa ecuación representa un movimiento traslacional, el segundo un movimiento rotacional, el tercero una deformación longitudinal y el cuarto una deformación angular. Otra forma de ver dicho resultado es decir que el cambio total entre los puntos  $a$  y  $c$  puede ser expresado como la suma de los efectos de *traslación + rotación + deformación lineal + deformación angular*.

## 2.5. Dilatación cúbica y divergencia de la velocidad

En este ítem se relacionan las tasas de deformaciones longitudinales con la divergencia de la velocidad, a través del concepto de dilatación volumétrica de un fluido en movimiento. Se considera un volumen elemental de fluido que en el tiempo  $t$  es  $dx(t) \times dy(t) \times dz(t) = dV(t)$

y en  $t + \Delta t$  es  $dx(t + \Delta t) \times dy(t + \Delta t) \times dz(t + \Delta t) = dV(t + \Delta t)$ , Figura 2.8. Por el movimiento del fluido dicho paralelepipedo se desplaza y deforma, pero en un tiempo muy corto dicho volumen material no romperá en pedazos. Se desea obtener la expresión de,

$$\frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV) = \Theta = \text{tasa de deformación volumétrica específica.} \quad (2.51)$$

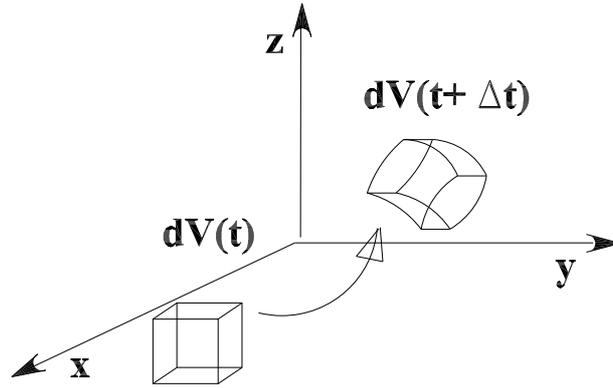


Figura 2.8: Volumen material con forma de paralelepipedo en dos tiempos.

Para obtener esa derivada se usa la definición de la misma como un proceso de paso al límite,

$$\frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV) = \frac{1}{dV} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(dV(t + \Delta t) - dV(t))}{\Delta t} \quad (2.52)$$

expresando  $dV(t + \Delta t)$  en función de  $dx(t + \Delta t) \times dy(t + \Delta t) \times dz(t + \Delta t)$  y estos a la vez en función de  $dx(t)$ ,  $dy(t)$  y  $dz(t)$ , las deformaciones longitudinales  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{zz}$  en el tiempo  $t$  y el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . En otras palabras, la deformación que sufre un segmento  $dl$  en un  $\Delta t$  es,

$$dl(t + \Delta t) \simeq dl(t) + \epsilon_{ii}(t) dl(t) \Delta t \quad (2.53)$$

donde  $\epsilon_{ii}(t) \Delta t dl(t)$  es la deformación absoluta de  $dl$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , aproximada en  $t$ .

Luego los  $dx(t + \Delta t)$ , etc, son expresados como,

$$dx(t + \Delta t) \simeq dx(t) + \epsilon_{xx} dx(t) \Delta t$$

$$dy(t + \Delta t) \simeq dy(t) + \epsilon_{yy} dy(t) \Delta t \quad (2.54)$$

$$dz(t + \Delta t) \simeq dz(t) + \epsilon_{zz} dz(t) \Delta t$$

de donde el  $dV(t + \Delta t)$  puede ser expresado como,

$$dV(t + \Delta t) \simeq [dx(t) + \epsilon_{xx} dx(t) \Delta t] [dy(t) + \epsilon_{yy} dy(t) \Delta t] [dz(t) + \epsilon_{zz} dz(t) \Delta t] \quad (2.55)$$

y usando el hecho que  $dV(t) = dx(t) \times dy(t) \times dz(t)$ , resulta,

$$dV(t + \Delta t) \simeq (1 + \epsilon_{xx} \Delta t)(1 + \epsilon_{yy} \Delta t)(1 + \epsilon_{zz} \Delta t) dV(t) \quad (2.56)$$

y realizando ahora los productos, despreciando todos los términos con diferenciales de orden superior al primero resulta,

$$dV(t + \Delta t) \simeq dV(t) + (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \Delta t dV(t) \quad (2.57)$$

luego,

$$dV(t + \Delta t) - dV(t) \simeq (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \Delta t dV(t) \quad (2.58)$$

por tanto dividiendo ahora por  $\Delta t dV(t)$  y tomando el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , recordando que  $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x$ ,  $\epsilon_{yy} = \partial v / \partial y$ ,  $\epsilon_{zz} = \partial w / \partial z$  resulta,

$$\frac{1}{dV(t)} \frac{D(dV(t))}{Dt} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.59)$$

la cual expresa la *tasa volumétrica de deformación específica en un punto*.

A seguir se puede definir la dilatación volumétrica o expansión, la cual es,

$$J = \frac{dV}{dV_0} \quad (2.60)$$

cuyo valor varía en el rango  $0 < J < \infty$  y donde  $dV$  es el valor de un diferencial de volumen en el tiempo  $t$ , que en el tiempo  $t = 0$  tuvo el valor  $dV_0$ . En otras palabras  $dV = dV(t)$  es

un volumen diferencial material y  $dV_0 = dV(0)$  un instante prévio. Multiplicando y dividiendo ahora el lado izquierdo de la ecuación (2.59) por  $dV_0$  y como el mismo no es función del tiempo se puede introducir en la derivada material resultando en,

$$\frac{dV_0}{dV} \frac{D}{Dt} \left( \frac{dV}{dV_0} \right) = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.61)$$

de donde resulta que,

$$\frac{1}{J} \frac{D}{Dt} (J) = \Theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.62)$$

Las ecuaciones (2.61) y (2.62) son diferentes formas de expresar las deformaciones en función de la divergencia de la velocidad. Como conclusión se puede decir que en aquellos casos con  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  existe conservación del volumen. Cuando se vea la ecuación de conservación de masa más adelante en este Capítulo, se verá que para un flujo incompresible la conservación del volumen implica conservación de masa.

## 2.6. Teorema de Transporte

Caben dos comentarios como introducción. El primero que el teorema de Transporte permite expresar la variación total de una propiedad contenida en una porción fija de materia y expresarla en una región fija del espacio. Por otro lado, lo más común en los cursos básicos es aplicar las leyes de la Física, a cuerpos que se desplazan en el espacio y cuyas masas se mantienen constantes. Y el teorema de Transporte es una relación que permite transformar dichas leyes aplicadas a sistemas con masa fija, a sistemas abiertos o volúmenes de control.

Por otra parte de Termodinámica se conoce el concepto de sistema cerrado, o simplemente sistema, que representa una cantidad fija de materia a lo largo del tiempo; por ejemplo un dispositivo cilindro-pistón y una cierta cantidad de gas como sistema. Aquí se usará el mismo concepto para hacer referencia a una porción fija de fluido, pero contornado por una superficie ficticia imaginaria. Así un sistema o volumen material es un volumen formado por las mismas partículas de fluido a lo largo del tiempo. El sistema abierto o volumen de control, por el contrario, hace referencia a un volumen ficticio el cual permite intercambiar masa con el medio ambiente.

Como se recordar  también de Termodinámica una propiedad intensiva es aquella que no

depende de la masa o volumen del sistema. Ejemplos de estas son la densidad, entalpía específica, entre otras. Por el contrario las propiedades extensivas son función de la masa del sistema. Ejemplos de esta última son la masa total, la energía total, entre otras.

Luego, usando los conceptos anteriores, el teorema de Transporte expresa la variación total de una propiedad extensiva  $N$ , correspondiente a una propiedad intensiva  $\eta$  contenida en un sistema cerrado y lo expresa en relación a un volumen de control. En la demostración dada aquí el volumen de control está fijo en el espacio.

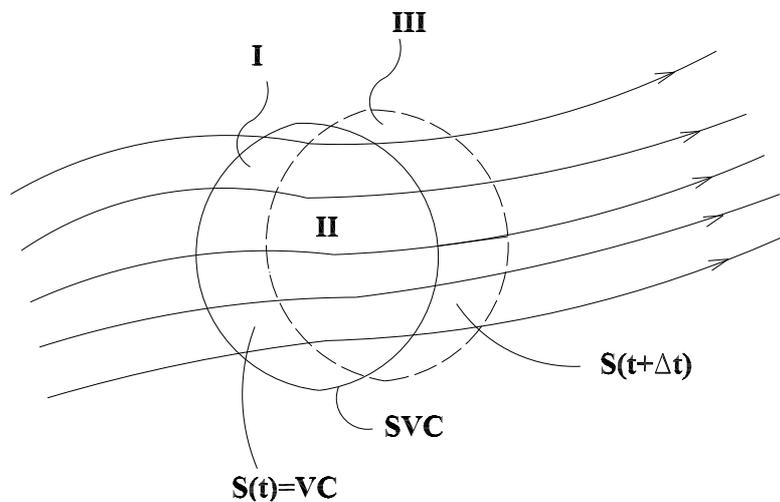


Figura 2.9: Sistema conformado por un fluido en movimiento en dos tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ , el cual coincide con un volumen de control en el tiempo  $t = 0$ . El volumen de control ha sido dividido en dos regiones denominadas I y II, mientras que la parte del sistema en  $t + \Delta t$  que ha salido del volumen de control se denomina región III.

Si la propiedad intensiva es  $\eta$ , la cual expresa la propiedad extensiva  $N$  por unidad de masa, la cantidad total de dicha propiedad en el sistema es,

$$N = \iiint_S \eta \rho dV \quad (2.63)$$

donde el subíndice  $S$  de la integral triple significa que se integra en la región del espacio correspondiente al sistema.

Luego la derivada total de  $N$  en relación al tiempo,  $DN/DT$ , la cual expresa esa variación en un punto fijo del espacio y es igual a la variación total siguiendo al sistema,  $(dN/dt)_{sistema}$ , puede ser expresada usando el concepto de limite del siguiente modo,

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = DN/Dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} \quad (2.64)$$

En la Figura 2.9, en la cual se considera un sistema,  $S$ , en el tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ , y un volumen de control,  $VC$ , se consideran 3 regiones. La primera  $I$ , es la porción del  $VC$  abandonada por el  $S$  en el tiempo  $t + \Delta t$ .  $II$  es la región común al  $VC$  y al  $S$  en el tiempo  $t + \Delta t$ . Y  $III$  es la porción de  $S$  en el tiempo  $t + \Delta t$  que ha abandonado el volumen de control. Usando esas denominaciones, la formulación del limite que significa la derivada sustancial o total para la cantidad total de propiedad  $N$  en el sistema es,

$$DN/Dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\iiint_{II} \eta \rho dV + \iiint_{III} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iiint_I \eta \rho dV + \iiint_{II} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \quad (2.65)$$

la cual reordenada resulta,

$$DN/Dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\iiint_{III} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iiint_I \eta \rho dV)_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\iiint_{II} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iiint_{II} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} \quad (2.66)$$

y en base a las regiones  $I$ ,  $II$  y  $III$  se puede concluir que,

1. En el limite de  $\Delta t \rightarrow 0$  la  $\iiint_I$  es el flujo que ingresa al  $VC$  y  $\iiint_{III}$  es el flujo que egresa del  $VC$ . Es decir que la diferencia es el flujo neto a través de la superficie del volumen de control,  $SVC$ ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\iiint_{III} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iiint_I \eta \rho dV)_t}{\Delta t} = \int \int_{SVC} \eta (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.67)$$

2. Por otro lado también en el limite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\iiint_{II} \eta \rho dV)_{t+\Delta t} - (\iiint_{II} \eta \rho dV)_t}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \eta \rho dV \quad (2.68)$$

Es importante notar que el limite de la expresión (2.68) no es una derivada siguiendo al sistema o volumen material, sino sobre una región fija del espacio. Por ese motivo la misma es una derivada parcial en relación al tiempo.

Reordenando todos los términos el resultado final del teorema de Transporte es,

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sistema} = \frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} (\eta\rho)dV + \int \int_{S.V.C.} \eta(\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.69)$$

Este último es un resultado integral que relaciona la variación total de la propiedad extensiva de un sistema con la variación total de la misma en un volumen de control, equivalente a como lo hace la derivada material o sustancial para el caso diferencial. Y expresa que la variación total de una propiedad contenida en un sistema, es igual a la variación de la propiedad en el tiempo dentro del volumen de control, más el flujo neto de la propiedad a través de la superficie del mismo *SVC*.

En el ítem siguiente se presenta la ecuación de conservación de masa, la cual sirve como ejemplo de uso del presente teorema.

## 2.7. Ley de conservación de masa

Por definición, para un sistema o volumen material, *la variación total en relación al tiempo de la masa,  $M$ , de un sistema cerrado es igual a cero.*

Por otro lado, al total  $N$  de la propiedad en el sistema se lo simboliza ahora con la letra  $M$ . Y en este caso particular  $\eta$ , que es la propiedad por unidad de masa, resulta ser igual a 1, con lo cual,

$$M = \iiint_S \eta \rho dV \quad (2.70)$$

Ahora la ecuación de conservación de masa en forma matemática es,

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = DM/Dt = 0 \quad (2.71)$$

es decir que la variación de la masa para un sistema cerrado, tanto con descripción material como espacial, es cero.

Por otro lado usando el teorema de Transporte sustituyendo  $\eta$  por 1 y  $N$  por  $M$  resulta,

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} (\rho)dV + \int \int_{SVC} (\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.72)$$

Igualando ahora el lado derecho de las ecuaciones (2.71) y (2.72) se tiene así la ecuación de conservación de masa en forma integral,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} (\rho) dV + \int \int_{SVC} (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = 0 \quad (2.73)$$

la cual expresa que *la variación en relación al tiempo de la masa dentro de un volumen de control fijo en el espacio, más el flujo neto de masa a través de la superficie del volumen de control es cero.*

En esta expresión las funciones no necesitan ser funciones continuas del espacio y del tiempo, pero si lo son se puede obtener la forma diferencial de conservación de masa. El primer paso para llegar a la forma diferencial es derivar en relación al tiempo dentro del signo de la integral triple en el termino de la izquierda, recordando que el  $VC$  es fijo y constante, y aplicar el teorema de la Divergencia al segundo termino de la izquierda, ecuación (1.22). En ese caso la ecuación (2.73) resulta,

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV + \iiint_{V.C.} \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (2.74)$$

Si ahora se quiere llegar a la forma diferencial, se puede hacer uso del hecho que el volumen de control para el cual fue hallada es uno genérico y por lo tanto puede ser de tamaño diferencial. En ese caso la integral es igual al argumento de la misma, resultando la forma diferencial de conservación de masa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.75)$$

Esta es la ecuación de conservación de masa en forma general, escrita en forma vectorial. Usando un poco de álgebra sobre esta ecuación resulta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.76)$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.77)$$

la cual es también una forma general.

Por otro lado, considerando ahora el caso de un flujo para el cual la densidad no cambia con el tiempo, denominado incompresible, la expresión (2.77) resulta,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.78)$$

Aún cuando la densidad sea constante en el tiempo, la misma puede cambiar en el espacio. Un ejemplo es un flujo estacionario de agua con diferentes grados de salinidad. En ese caso si la salinidad cambia, por ejemplo en relación a la coordenada vertical, la densidad también cambia en esa dirección, como ocurre en la ecuación (2.78).

Suponiendo ahora un caso de flujo con densidad constante tanto en el espacio como en el tiempo, la ecuación de conservación de masa resulta,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.79)$$

que es una expresión general para cualquier sistema de coordenadas. Y eligiendo ahora un sistema de coordenadas Cartesiano para expresar el operador divergencia resulta la forma extendida,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.80)$$

Se puede concluir en base a la ecuación (2.80), la cual expresa que en ese tipo de flujo la divergencia del campo de velocidad es nula, que para un flujo incompresible se verifica,

$$\Theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.81)$$

la cual expresa que en ese tipo de flujo la deformación volumétrica específica es nula o que las deformaciones longitudinales se equilibran mutuamente unas con otras.

**Ejemplo:** *Uso de la ecuación de conservación de masa.*

Aplicar la ecuación integral de conservación de masa al mecanismo mostrado en la Figura 2.10, por el cual circula un flujo estacionario.

La ecuación (2.73) aplicada a este ejemplo es,

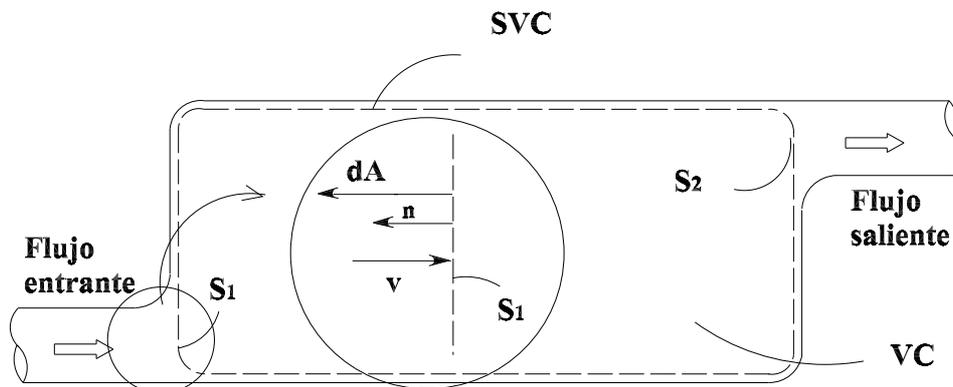


Figura 2.10: Uso de la ecuación integral de conservación de masa para un flujo estacionario.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} (\rho) dV + \int \int_{S_1} (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) + \int \int_{S_2} (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = 0 \quad (2.82)$$

donde la integral de superficie se dividió en una correspondiente a la sección de entrada,  $S_1$ , y otra para la sección de salida,  $S_2$ .

En la ecuación (2.82) el primer término a la izquierda del signo igual es nulo porque el mismo representa la variación de masa dentro del volumen de control y dado que el flujo es estacionario, nada cambia en relación al tiempo.

Luego la ecuación resulta,

$$\int \int_{S_1} (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) + \int \int_{S_2} (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = 0 \quad (2.83)$$

donde el producto escalar  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$  es negativo en el término de la izquierda, dado que en la sección de entrada resulta  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_1$ , como es mostrado en el detalle de la Figura 2.10, en la cual  $dS_1$  es el escalar diferencial de área en esa sección. Luego  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -u_1$ , siendo  $u_1$  el módulo de la velocidad horizontal a la entrada. A la salida en contraste ese producto escalar es positivo.

Luego la ecuación (2.82) resulta,

$$\int \int_{S_1} -\rho u_1 dS_1 + \int \int_{S_2} \rho u_2 dS_2 = 0 \quad (2.84)$$

Suponiendo ahora que se conocen solo valores medios de densidad,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y velocidades medias  $U_1$  y  $U_2$  a la entrada y salida, respectivamente, la ecuación de conservación de masa finalmente resulta,

$$-S_1\rho_1U_1 + S_2\rho_2U_2 = 0 \quad (2.85)$$

la cual es denominada *ecuación de continuidad*.

## 2.8. Consecuencia de la irrotacionalidad

Anteriormente se vió que para un flujo irrotacional en un punto el rotor del campo de velocidad es nulo,

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.86)$$

por otra parte de Matemática se sabe que el rotor del gradiente de un escalar  $\phi$  es nulo,

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \quad (2.87)$$

Por lo tanto, para el caso de un flujo irrotacional en toda una región, combinando los resultados de las ecuaciones (2.86) y (2.87), se tiene que el campo de velocidad puede ser definido en función del gradiente de un escalar,  $\phi$ , el cual recibe el nombre de función *potencial de velocidad*,

$$\mathbf{v} = \nabla(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (2.88)$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.89)$$

La anterior es una demostración de la existencia de la función potencial de velocidad en una región para la cual la vorticidad es nula en todos sus puntos,  $\omega = 0$ . Cabe ahora mostrar como se obtiene a partir de las velocidades. El procedimiento consiste en integrar las ecuaciones (2.89),

$$\phi = \int u dx + f(y, z); \quad \phi = \int v dy + f(x, z); \quad \phi = \int w dz + f(x, y) \quad (2.90)$$

encontrando por inspección las funciones arbitrarias  $f(y, z)$ ,  $f(x, z)$ , y  $f(x, y)$ , de modo que la función  $\phi$  obtenida de cada ecuación sea la misma.

## 2.9. Consecuencia de la incompresibilidad

Cuando un fluido no presenta efectos de compresibilidad debido a las condiciones del flujo, la divergencia del campo de velocidad es nulo, como ya se vió más arriba. Es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.91)$$

y por otra parte de Matemática se sabe que la divergencia del rotor de una función vectorial  $\Psi$  es nula,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0 \quad (2.92)$$

Por lo tanto combinando las ecuaciones (2.91) y (2.92) se puede obtener el campo de velocidad en función del rotor de una función vectorial  $\Psi$  denominada *función corriente*,

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi \quad (2.93)$$

Luego el campo de velocidad obtenido a partir de la ecuación (2.93) cumple con la condición de divergencia nula de un campo vectorial incompresible. Por otra aparte, aún cuando existe la posibilidad de definir una función corriente en tres dimensiones, el uso más frecuente es en dos dimensiones. Por ejemplo en el plano  $x - y$  las velocidades son obtenidas como,

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.94)$$

Y para obtener la función corriente  $\Psi$  se procede del mismo modo que para obtener la función potencial de velocidad, vista en el ítem anterior.

## 2.10. Circulación y el teorema de Stokes

*Curva reducible* es una curva cerrada ficticia inmersa en un flujo, la cual puede encogerse hasta formar un punto sin que salga del mismo. Luego usando ese concepto, se denomina circulación de un campo vectorial  $\mathbf{v}$  y una curva reducible  $C(x,y,z,t)$ , a la integral de línea del producto escalar  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$  a lo largo de dicha curva,

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.95)$$

donde  $d\mathbf{l}$  es un vector unitario tangente a la curva  $C(x,y,z,t)$ . O también usando las componente escalares de la velocidad y del vector tangente a la curva reducible, se tiene que la circulación es,

$$\Gamma = \int (u \, dl_x \mathbf{i} + v \, dl_y \mathbf{j} + w \, dl_z \mathbf{k}) \quad (2.96)$$

El teorema de Stokes relaciona la circulación y la vorticidad en una región de flujo, el cual en dos dimensiones es,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int \int \text{rot}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.97)$$

o también,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint d\Gamma = \int \int \text{rot}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.98)$$

que en palabras expresa que la integral de superficie del rotor de un vector  $\mathbf{v}$  en una superficie es igual a la circulación alrededor de la misma.

## 2.11. Ejercicios

1. El campo de velocidad de un flujo está dado por  $\mathbf{v} = (6x)\mathbf{i} + (6y)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$ , [m/seg]. Obtener el módulo de la velocidad en  $x = 10$  m;  $y = 6$  m;  $t = 10$  s, (b) calcular la pendiente de la línea de corriente para  $t = 0$ , (c) obtener la expresión de la aceleración y el valor del módulo de la aceleración en el punto del ítem a).
2. Considerar un flujo permanente, Figura 2.11, en una tubería con perfil de velocidad  $u = C(1 - (r/R)^2)$ , donde  $C$  es una constante y  $R$  es el radio de la tubería. Considerar el volumen de control formado por las paredes de la tubería, la sección de entrada  $S_1$  y de salida  $S_2$  y calcular el flujo de masa que ingresa al volumen de control a través de  $S_1$  y el que egresa por  $S_2$ ; (b) calcular el flujo de energía cinética a través de la superficie  $S_1$ .

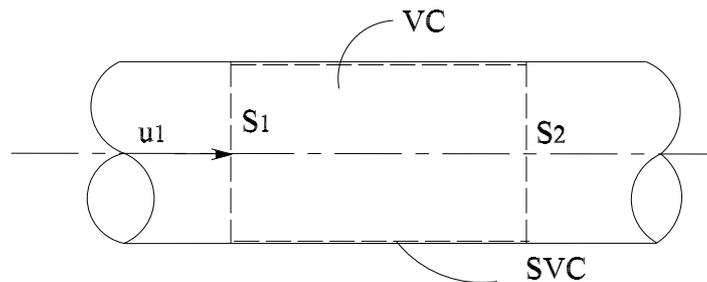


Figura 2.11: Cálculo del flujo de propiedades como cantidad de movimiento o energía a través de una superficie normal a la velocidad axial en una tubería.

3. Dado el campo de velocidades  $\mathbf{v} = 10x^2y\mathbf{i} + 20(yz+x)\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ , [m/seg], calcular el tensor de deformaciones en el punto  $P(6, 1, 2)$  y (b) la velocidad angular total de la partícula en el punto  $P(1, 4, 3)$ .
4. Describir el procedimiento para observar en una contracción de una tubería de sección transversal variable, por donde escurre un gas a baja velocidad, Figura 2.12, la velocidad y la aceleración axial en un punto  $P$  disponiendo de tubos de Pitot, para los casos que sea a) flujo permanente; b) impermanente. Considerar que el flujo es incompresible.
5. Describir el procedimiento para observar con termómetros en un laboratorio la variación total de la temperatura en relación al tiempo, en un flujo en un canal.

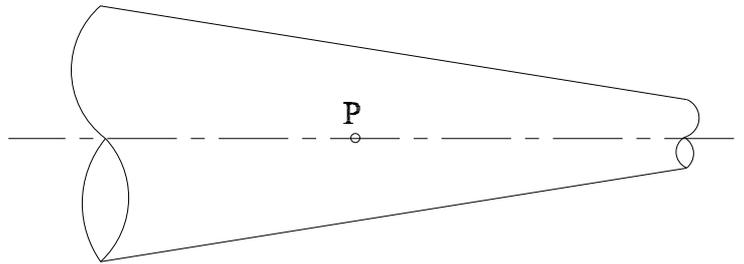


Figura 2.12: Cálculo de la velocidad y la aceleración en una contracción, disponiendo de tubos de Pitot.

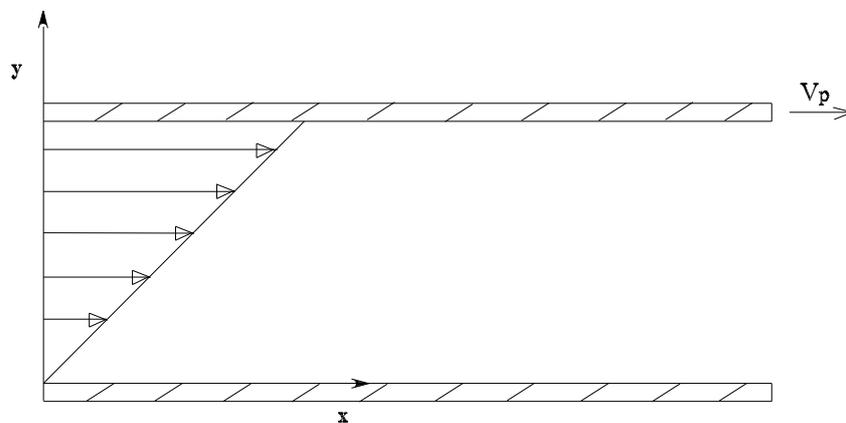


Figura 2.13: Flujo laminar ocasionado por el deslizamiento de la placa superior sobre el fluido contenido entre dos placas paralelas, denominado flujo de Couette.

6. Si el potencial de velocidades de un flujo es  $\phi = 3x^2y - 3x + 3y^2 + 16t^3 + 12zt$ , determinar el campo de velocidad  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ; (b) determinar si el flujo es rotacional o irrotacional.
7. Si un flujo tiene el siguiente campo de velocidades,  $\mathbf{v} = (10t + x)\mathbf{i} + (yz)\mathbf{j} + 5t^2\mathbf{k}$ , determinar la superficie a lo largo de la cual el flujo es siempre irrotacional.
8. Dado un flujo laminar entre dos placas planas paralelas, definido por el vector velocidad de componentes  $u = cy$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , donde  $c$  es una constante, determinar (a) si el escurrimiento es irrotacional o rotacional y (b) las deformaciones longitudinales y tangenciales, Figura 2.13.

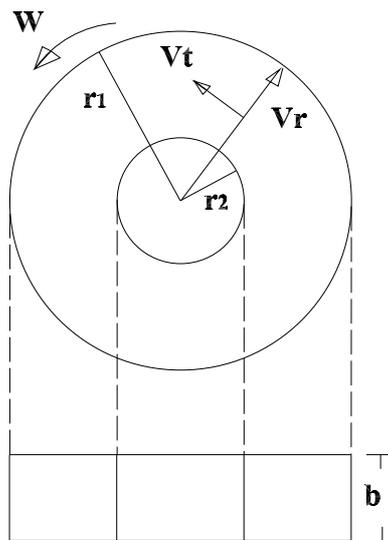


Figura 2.14: Rotor simplificado de un bomba centrifuga.

9. Dado un flujo en el rotor de una bomba definido por el vector velocidad en coordenadas polares  $v_r = c/r$  para  $r_1 \leq r \leq r_2$ , y  $v_t = 0$ , determinar si es un escurrimiento rotacional o irrotacional, Figura 2.14.
10. Considerando el siguiente campo de velocidades  $u = x/(1+t)$ ,  $v = y/(1+t)$ ,  $w = z/(1+t)$ , obtener la expresión de la aceleración.
11. Demostrar que las componentes del tensor de deformaciones  $D_{ij}$  son expresadas en función de la velocidad como  $1/2(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ .

# Capítulo 3

## Dinámica de un fluido en movimiento

### 3.1. Ecuación de cantidad de movimiento integral.

En este Capítulo se presentan las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos para fluidos Newtonianos o ecuaciones de Navier-Stokes. Para cumplir ese objetivo, se comienza con los conceptos conocidos de Física sobre dinámica y los de cinemática del Capítulo anterior y se va desarrollando paso a paso cada tema hasta llegar a las ecuaciones finales.

El punto de partida es la segunda ley de Newton o ley de conservación de cantidad de movimiento, que para un cuerpo o partícula sólida con masa constante es escrita con el formato más usual como,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}) = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la cantidad de movimiento,  $m$  es la masa del cuerpo,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  son la velocidad y la aceleración de la partícula en su trayectoria, respectivamente, y  $\mathbf{F}$  es la sumatoria de fuerzas exteriores actuando sobre la partícula.

En palabras dicha ley establece que *la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo en relación a un sistema de referencia inercial, es igual a la sumatoria de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo*. Y el objetivo de este Capítulo es obtener la expresión matemática para un fluido en movimiento de dicha ley, con una descripción espacial tal como fue explicado en los Capítulos anteriores.

Como se sabe, por otra parte, el movimiento puede tener una componente lineal y otra

rotacional. Por lo tanto el principio de conservación de cantidad de movimiento se aplica a ámbos movimientos. Por simplicidad para hacer referencia a la conservación de cantidad de movimiento lineal, en este libro se usa el vocablo en latín *momentum*. Y a su debido tiempo se hará referencia a la conservación de cantidad de movimiento rotacional, en forma integral y en forma diferencial.

En relación a la ecuación (3.1) en principio se puede expresar que al término  $ma$  se lo puede ver también como representando las fuerzas de inercia, asociadas con la masa. Por otra parte, en Mecánica de Fluidos por conveniencia al término  $\mathbf{F}$  se lo separa en dos. Uno representando las *fuerzas superficiales* que actúan sobre una partícula de fluido,  $F_s$ , como es el caso de la presión y tensiones superficiales y otro representando las *fuerzas másicas*,  $F_m$ , como es el caso de la fuerza gravitatoria. Es importante observar que las fuerzas másicas son aquellas generadas por el campo gravitatorio, sobre la masa de la partícula de fluido y por eso se considera como una fuerza externa a la misma, aún cuando su efecto se manifieste en el interior de la partícula.

Es decir el término de fuerza es,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_m \quad (3.2)$$

Luego cuando la ecuación (3.1) se aplique a una partícula de fluido,  $F_s$  representa las fuerzas ejercidas por el resto del fluido sobre la partícula y  $F_m$  la fuerza ejercida por la atracción gravitatoria en las proximidades de la tierra. Estos serán los dos tipos de fuerzas externas consideradas en las ecuaciones generales. Si al analizar un problema se observa que en el mismo intervienen fuerzas de otro tipo como podrían ser de flotación, magnéticas, entre otras, las mismas se deben incorporar con el formato que corresponda.

Así la ecuación (3.1) aplicada a la conservación de cantidad de movimiento lineal, o *momentum*, de un partícula de fluido en relación a un sistema inercial en forma vectorial puede ser escrita como,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}) = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_m \quad (3.3)$$

Esta ecuación expresa la relación entre variación de cantidad de movimiento y fuerzas exteriores siguiendo a la partícula de fluido. Es decir es la segunda ley de Newton con formato Lagrangiano. En otras palabras, como se ha comentado que ocurre en los cursos básicos en Física, las leyes se aplican a cuerpos en movimiento que conservan su masa y se los sigue en

el espacio. Sin embargo la descripción que se convino en usar es la espacial o Euleriana, la cual expresa esa misma ley pero para un punto fijo del espacio para un fluido en movimiento. Luego una de las transformaciones necesarias de la ecuación (3.1) es escribirla para un volumen de control y con descripción espacial o Euleriana. Este es el primer paso y se lo hace a seguir usando el teorema de Transporte ya visto.

Es decir, a seguir se aplicará la ecuación (3.3) a una región finita de fluido o sistema y usando el teorema de Transporte se obtendrá la correspondiente para un volumen de control inercial fijo en el espacio. Siempre que se use el concepto de sistema para el caso de un fluido en movimiento, al mismo se lo considera en tiempos muy próximos de tal forma que dicho sistema deforme, pero no se desintegre en partes.

El primer paso consiste en escribir la ley de conservación de cantidad de movimiento para un sistema de fluido en movimiento del siguiente modo,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P})_{sistema} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_m \quad (3.4)$$

donde ahora  $(\mathbf{P})_{sistema}$  simboliza la cantidad de movimiento lineal total o *momentum* total de ese sistema conformado por un conglomerado de partículas de fluido en movimiento.

Es decir considerando que la velocidad  $\mathbf{v}$  es la propiedad intensiva de cantidad de movimiento lineal, luego,

$$(\mathbf{P})_{sistema} = \iiint_{sistema} \rho \mathbf{v} dV \quad (3.5)$$

donde  $\iiint_{sistema}$  es la integral sobre el sistema,  $dV$  es el diferencial de volumen y  $\rho$  es la densidad.

En la ecuación (3.4) arriba, la derivada  $d/dt$  es una derivada simple en relación al tiempo. También se hubiese podido usar  $\partial/\partial t$  ya que calcula una variación de la propiedad de un fluido en movimiento solo en relación al tiempo, siendo que el resultado no está expresado en un punto fijo en el espacio. Luego la ecuación (3.4) expresa la conservación de *momentum* para un sistema o volumen material que contiene, en dos tiempos muy próximos  $t$  y  $t + \Delta t$ , las mismas partículas de fluido. Si ahora se usa la derivada sustancial o total para expresar la variación de la cantidad de movimiento  $\mathbf{P}$ , se obtiene,

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{P}) = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_m \quad (3.6)$$

la cual expresa la variación de cantidad de movimiento respecto a un punto fijo, no siguiendo al fluido.

Y el teorema de Transporte, ecuación (2.69), es,

$$\frac{d}{dt}(N)_{sistema} = \frac{D}{Dt}(N) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} (\eta\rho)dV + \int \int_{SVC} \eta(\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (3.7)$$

donde para este caso  $N = \mathbf{P}$  y la propiedad intensiva es  $\eta = \mathbf{v}$ . Así resulta,

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{P}) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} (\mathbf{v}\rho)dV + \int \int_{SVC} \mathbf{v}(\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (3.8)$$

donde  $VC$  significa volumen de control y  $SVC$  superficie del volumen de control.

Por tanto igualando el lado derecho de las ecuaciones (3.6) y (3.8) resulta,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} (\mathbf{v}\rho)dV + \int \int_{SVC} \mathbf{v}(\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_m \quad (3.9)$$

la cual es la ecuación integral de conservación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control fijo, en relación a una referencia inercial.

Las fuerzas superficiales o de contacto sobre la  $SVC$  pueden ser expresadas del siguiente modo,

$$\mathbf{F}_s = \int \int_{SVC} \mathbf{t}_{(n)}dS \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{t}_{(n)}$  recibe el nombre de vector tensión y es una fuerza por unidad de área o tensión que representa en cada punto de la  $SVC$  las fuerzas superficiales exteriores que actúan sobre el  $VC$ ,  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal externo a  $SVC$  de forma que  $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dS$  es el vector diferencial de área en la dirección del vector unitario normal y  $dS$  es el escalar diferencial de área. La nomenclatura  $\mathbf{t}_{(n)}$  no significa que la fuerza es normal a la superficie, sino que depende del vector normal a la superficie.

Y las fuerzas másicas pueden ser escritas como,

$$\mathbf{F}_m = \iiint_{VC} \rho \mathbf{g} dV \quad (3.11)$$

siendo  $\mathbf{g}$  el vector aceleración de la gravedad.

Así la ecuación integral de cantidad de movimiento lineal o *momentum* es,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} (\rho \mathbf{v}) dV + \int \int_{S.V.C.} \mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \iiint_{V.C.} \rho \mathbf{g} dV + \int \int_{S.V.C.} \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (3.12)$$

Del mismo modo se puede formular una ecuación equivalente de conservación de cantidad de movimiento angular o conservación integral del momento de la cantidad de movimiento.

A seguir se presenta un ejemplo de uso de la ecuación (3.12).

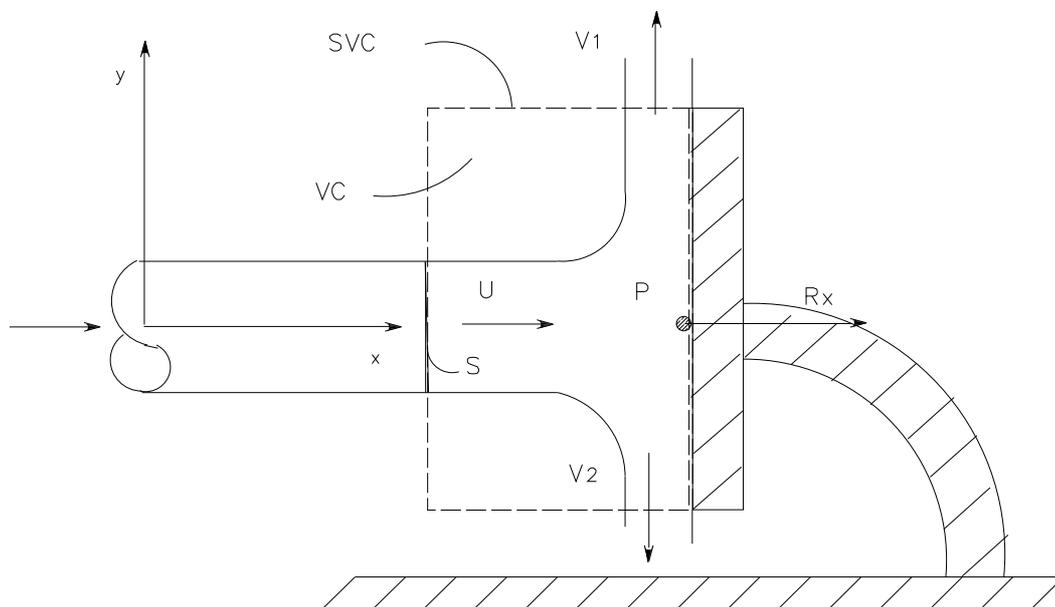


Figura 3.1: Cálculo del empuje de un chorro horizontal de agua sobre una placa vertical situada a corta distancia.

**Ejemplo:** Aplicación de la ecuación integral de cantidad de movimiento lineal

Para un chorro de agua permanente que sale de una tubería con dirección horizontal e impacta en una placa plana perpendicular al mismo, Figura 3.1, se plantea calcular el empuje sobre la placa.

Lo primero a tener en cuenta al aplicar una ley de conservación, como la de *momentum*, es determinar la región para la cual se aplica y por tanto trazar para la misma el volumen de control. El criterio a seguir en ese sentido es trazar un volumen de control que pase por todos los puntos o superficies a través de los cuales se tiene información o se desea obtener información.

En este ejemplo se quiere averiguar el empuje del agua sobre la placa y se tiene la velocidad a la salida de la tubería, por tanto la *SVC* debe pasar por esas dos superficies. Por otra parte, la ecuación (3.12) es vectorial, por lo tanto para calcular el empuje sobre la placa es necesario escribir la componente escalar en la dirección horizontal, la cual es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} (u \rho) dV + \int \int_{S.V.C.} u (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \\ \iiint_{V.C.} \rho \mathbf{g}_x dV + \int \int_{S.V.C.} P_0 dS_x + R_x \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $u$  es la velocidad horizontal, según el eje  $x$  y las fuerzas superficiales son descompuestas en las correspondientes a la presión atmosférica que actúa sobre la *SVC* y la reacción de la placa sobre la *SVC* (la cual tiene igual magnitud y sentido contrario al empuje que el agua ejerce sobre la placa) de la cual se considera su valor concentrado. La reacción de la placa se considera con signo positivo, hacia el semieje positivo de las  $x$ . Por otra parte como la situación es permanente el primer término a la izquierda del signo igual es cero y al segundo término, correspondiente al flujo de *momentum* a través de *SVC*, se lo expresa como una integral a través de la sección de salida de la tubería,  $S$ , única sección por la cual existe transferencia de *momentum* en la dirección  $x$  a través de *SVC*. Por otra parte dado que el *VC* está inmerso en un ambiente a la presión atmosférica, la resultante de las fuerzas de la presión atmosférica es nula. Siendo por otra parte que en la dirección  $x$  no existen fuerzas gravitatorias. Así la ecuación de *momentum* en  $x$  resulta,

$$\int \int_S u (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = R_x \quad (3.14)$$

resolviendo ahora el término de la izquierda, considerando la velocidad  $U$  uniforme en la sección  $S$  de salida de la tubería, resolviendo el producto escalar con el criterio usado en el ejemplo correspondiente a la ecuación de conservación de masa resulta,

$$U(-\rho U S) = R_x \quad (3.15)$$

de donde se observa que al ser negativo el resultado,  $R_x = -U^2 \rho S$ , la reacción de la placa tiene sentido contrario al considerado en la Figura 3.1. Es decir que la misma tiene sentido del semieje negativo de las  $x$ . Para finalizar basta decir que el empuje del agua sobre la placa

tiene magnitud igual a la reacción de la placa sobre el agua, pero sentido contrario, con lo cual  $E_x = -R_x$  y actúa por tanto hacia la derecha.

Usando el ejemplo previo, a seguir se sugiere un procedimiento conveniente de resolución de problemas, dado que en Mecánica de Fluidos siempre las ecuaciones generales son conocidas. El mismo es una especie de guía para resolver problemas y puede aproximadamente contener los siguientes pasos,

1. Dibujar un esquema del problema en el cual debe figurar con claridad, el volumen de control dibujado con líneas de trazo y el sistema de coordenadas. Es importante observar que la superficie del volumen de control debe siempre pasar a través de superficies en las cuales se conoce o desea conocer información. En el presente problema, dado que se desea obtener el empuje del chorro sobre la placa, la superficie del volumen de control debe pasar a través de la superficie de separación entre el fluido y la placa, en la zona de impacto del chorro.
2. Listar los datos dados en el enunciado así como toda la información que puede obtenerse de tablas, etc, sobre el problema. Listar las incógnitas o información solicitada en la resolución.
3. Escribir las ecuaciones generales e hipótesis y simplificar las ecuaciones. En este punto debe quedar en claro si el problema está o no bien planteado. Es decir si es posible obtener las incógnitas con las ecuaciones listadas. Si por otra parte, se tiene un mayor número de incógnitas que de ecuaciones, existen dos caminos. Plantear nuevas ecuaciones independientes de las anteriores o hacer mediciones de alguna de las incógnitas. Es importante recordar que desde el punto de vista de la mecánica del continuo, se tienen los principios generales de conservación de masa, cantidad de movimiento, energía y principio de la entropía, para resolver un problema en Mecánica de Fluidos.
4. Resolver en forma numérica. Al realizar el cálculo numérico el mismo debe ser hecho con la precisión deseada. Por otra parte la resolución numérica puede requerir alguna metodología de resolución iterativa si las ecuaciones, por ejemplo, son no lineales, etc. Se debe tener en cuenta que si la solución diverge, el error puede deberse a una mala formulación como también al método numérico de resolución.
5. Una vez obtenido el resultado es conveniente realizar algún tipo de verificación o comparar los resultados obtenidos con datos de la literatura, etc. Siempre es deseable realizar

un chequeo con métodos alternativos de resolución. Si esto no es posible, lo menos que se puede hacer es chequear los ordenes de magnitud de los valores numéricos obtenidos. Es decir, si una incógnita es la velocidad media de un líquido en una tubería, es conveniente realizar cálculos simples adicionales para determinar si el valor numérico tiene sentido físico.

Como se comenta antes, por ser integral la ecuación (3.12), la misma permite resolver problemas en los cuales es necesario obtener solo valores concentrado de una fuerza, velocidad, etc. En otras palabras, con una formulación integral no se conoce como el empuje está distribuido sobre la placa, ni tampoco se puede obtener el perfil de velocidad del agua, sino solo la velocidad media. En contraste con las ecuaciones integrales, las ecuaciones diferenciales a las cuales se llegará al final de este Capítulo, son distribuídas. Las mismas expresan la conservación de cantidad de movimiento en un punto del espacio, para un tiempo determinado, y por lo tanto permiten obtener una solución con valores distribuidos en el tiempo y en el espacio. Sin embargo para obtener esas ecuaciones es necesario expresar la distribución de las fuerzas superficiales, o de contacto, en el espacio. Y ese es el tema de los dos siguientes items.

## 3.2. Estado de tensiones en un fluido

### 3.2.1. Equilibrio de fuerzas en un punto

En este item se demuestra lo que ocurre con el equilibrio de fuerzas en un punto, para el caso general de un fluido en movimiento. Aplicando la ecuación integral de cantidad de movimiento, ecuación (3.12), a una partícula de fluido diferencial, Figura 3.2, se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} (\mathbf{v}\rho) dV + \int \int_{S.V.C.} \mathbf{v}(\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \iiint_{V.C.} \rho\mathbf{g} dV + \int \int_{S.V.C.} \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (3.16)$$

Considerando que la partícula tiene dimensiones  $dl$ , según los tres ejes coordenados, el diferencial de volumen es  $dV = dl^3$  y los diferenciales de área son  $dS_x = dl^2$ ,  $dS_y = dl^2$ ,  $dS_z = dl^2$ . Por otra parte introduciendo la derivada con relación al tiempo dentro del signo integral en el primer término de la izquierda, y aplicando el teorema de la divergencia al segundo término de la izquierda, y luego reagrupando todos los términos con integral de volumen, la ecuación arriba resulta,

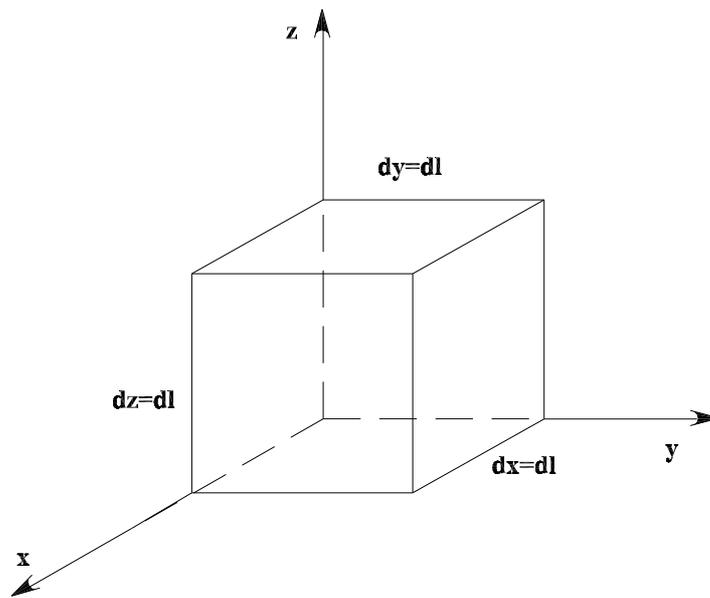


Figura 3.2: Partícula de fluido con dimensiones  $dl$  según cada eje coordenado.

$$\iiint_{V.C.} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}\rho) dV + \mathbf{div} (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{g} \right] dl^3 = \int \int_{S.V.C.} \mathbf{t}_{(n)} dl^2 \quad (3.17)$$

Como para un análisis diferencial las integrales son iguales al integrando, la ecuación anterior se puede escribir como,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}\rho) dV + \mathbf{div} (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{g} \right] dl^3 = \sum_i \mathbf{t}_{(n)i} dl^2 \quad (3.18)$$

donde el término a la derecha es la suma de las tensiones superficiales multiplicadas por las respectivas áreas,

$$\sum_i \mathbf{t}_{(n)i} dl^2 = t_x dydz + t_y dx dz + \dots = t_x dl^2 + \dots \quad (3.19)$$

donde  $t_x, t_y, \dots$ , son las componentes del vector tensión, o sea son las tensiones resultantes actuando sobre áreas cuyas normales tienen dirección según los ejes  $x, y, y z$ , respectivamente.

La ecuación (3.18) es la conservación de cantidad de movimiento lineal para una partícula de fluido de tamaño diferencial. Se puede obtener la ecuación de equilibrio de fuerzas para un punto dividiendo esa ecuación por  $dl^2$  y tomando el límite cuando el volumen de la partícula tiende a cero,  $dl \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{dl \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}\rho) + \mathbf{div} (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{g} \right) dl = \sum_i \mathbf{t}_{(n)i} \right] \quad (3.20)$$

de donde resulta,

$$\sum_i \mathbf{t}_{(n)i} = 0 \quad (3.21)$$

Es decir, la ecuación (3.21) establece que las fuerzas superficiales en un punto están en equilibrio y al resultado se lo denomina *principio de equilibrio local para un medio continuo*. La palabra local significa que se cumple en un punto del fluido. Por otra parte, como ya se comentó antes, el vector  $\mathbf{t}_{(n)i}$  recibe el nombre de vector tensión, por lo tanto la ecuación (3.21) representa una condición de equilibrio por cada dirección de coordenadas.

Este principio permite expresar el estado de tensiones en un punto, lo que finalmente es usado para expresar las fuerzas superficiales o de contacto que actúan sobre una partícula de fluido, para así llegar a las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento.

A seguir se expresan las tensiones o estado de tensiones en un punto en un fluido. Primero se lo hace para un fluido en reposo y luego para el caso general de un fluido en movimiento.

### 3.2.2. Estado de tensiones en un punto

Una tensión se define como una fuerza por unidad de área y en el sistema internacional sus dimensiones son  $[Pa]$  o  $[N/m^2]$ . La misma es representada por un tensor de segundo orden, el cual tiene 9 componentes. El símbolo habitual para expresar una tensión es la letra griega *tau* con dos subíndices,  $\tau_{nm}$ , el primero  $n$  corresponde al eje coordenado paralelo al vector normal al área sobre la cual actúa la tensión y el segundo  $m$  corresponde al eje coordenado paralelo a la tensión.

En la Figura 3.3 se da un ejemplo de la denominación de las tensiones, donde se presenta un partícula de forma cúbica, con las tensiones según las 3 direcciones posibles en 4 caras de la misma. Las tensiones normales  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  y  $\tau_{zz}$ , reciben ese nombre por ser su dirección normal a la superficie sobre las cuales actúan y las  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$  tangenciales por ser tangente a las mismas. A estas últimas también se las denomina tensiones de corte porque tienden a romper la sustancia *por corte* según la superficie sobre la cual actúan. Por otra parte en cuanto al signo de las tensiones, dado que al realizar un análisis de conservación

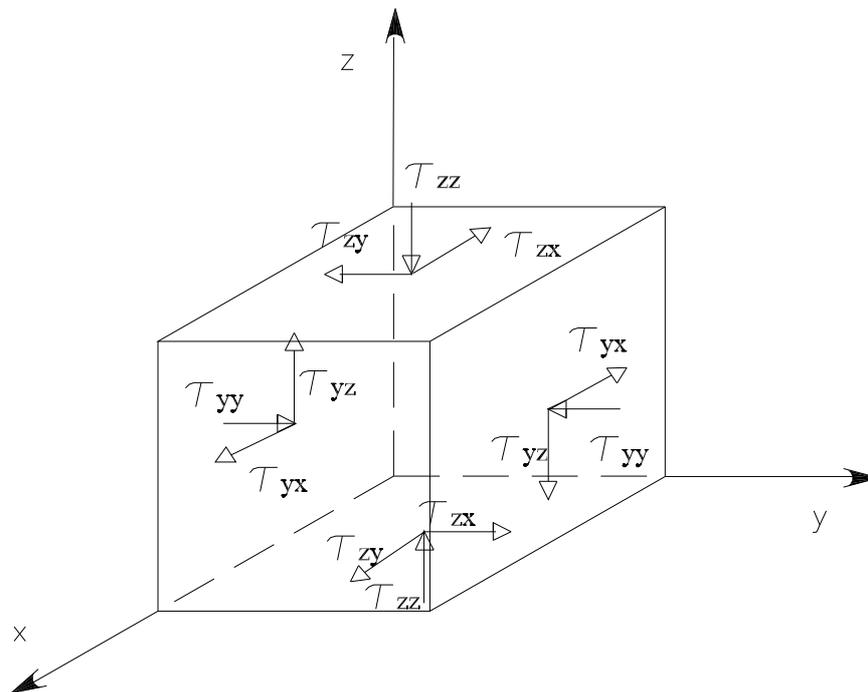


Figura 3.3: Convención para denominar las tensiones.

de cantidad de movimiento es conveniente tomar una partícula de fluido y eliminar el resto del fluido dejando solo su efecto, todas las tensiones del fluido exterior que actúan en planos de la partícula coincidentes con los ejes coordenados son tomadas con signos positivo. Por lo tanto, como las tensiones correspondientes a la partícula equilibran esas tensiones del fluido exterior, resulta que las tensiones del fluido exterior actuando en todos aquellos planos no coincidentes con los ejes coordenados tienen tensiones con sentido negativo.

Conocida ahora la forma de denominar las tensiones se analiza como están relacionadas las tensiones para un fluido en reposo. Lo primero que se puede decir sobre un fluido en reposo es que en el mismo no existen tensiones de corte. Esto se desprende de la definición de fluido. Es decir para fluidos que no transmiten torsión, que es el caso considerado aquí, una tensión tangencial genera siempre movimiento. Por lo tanto un fluido estático no tiene tensiones tangenciales por definición. Luego en este caso,

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (3.22)$$

En la Figura 3.4 se considera un punto en un fluido en reposo formado por 5 superficies, una de las cuales tiene orientación genérica y área diferencial  $dxds$  (Note que se hace referencia a

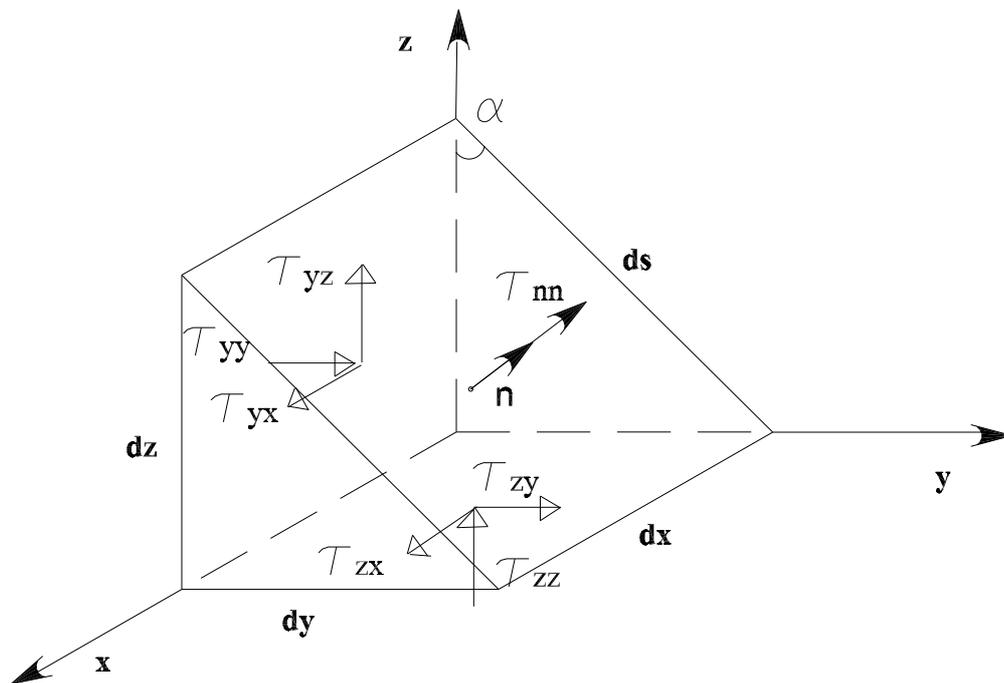


Figura 3.4: Punto con forma de prisma en un fluido en reposo, formado por 5 superficies una de las cuales tiene orientación genérica, cuya normal es el vector  $\mathbf{n}$ .

un punto en un fluido, aún cuando se puede hacer el análisis considerando una partícula y luego llevarla a un punto con un paso al límite cuando su volumen tiende a cero). En el ítem anterior se presentó el principio de equilibrio local de fuerzas superficiales, ecuación (3.21), el cual es válido en un punto,

$$\sum_i \mathbf{t}_{(n)i} = 0 \quad (3.23)$$

donde dicha condición se debe verificar según cada una de las direcciones coordenadas.

Recordando que las tensiones tangenciales son nulas, la condición de equilibrio local de las fuerzas que actúan sobre la partícula de la Figura 3.4 en la dirección  $y$  es,

$$\sum_i \mathbf{t}_{(n)i} = \tau_{yy} dz dx + \tau_{nn} dx ds \cos(\alpha) \quad (3.24)$$

pero como  $\cos(\alpha) = dz/ds$  resulta

$$\sum_i \mathbf{t}_{(n)i} = 0 = \tau_{yy} dzdx + \tau_{nn} dxdz \quad (3.25)$$

con lo cual,

$$\tau_{yy} = -\tau_{nn} \quad (3.26)$$

O sea que en un punto la tensión  $\tau_{nn}$  sobre el plano con orientación genérica es igual en magnitud a la tensión  $\tau_{yy}$  actuando normal al plano  $x - z$  y con sentido opuesto al considerado en la Figura 3.4. Si el análisis se repite en la dirección  $z$  y  $x$  se obtienen los resultados análogos,

$$\tau_{zz} = -\tau_{nn}; \quad \tau_{xx} = -\tau_{nn} \quad (3.27)$$

Luego se concluye que *para un fluido en reposo las tensiones normales según los tres ejes coordenados son iguales entre sí en magnitud, e iguales en magnitud a la tensión normal que actúa sobre una superficie con orientación genérica,*

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -\tau_{nn} \quad (3.28)$$

Esta relación permite definir la variable denominada presión estática,  $P$ , la cual tiene la magnitud de las tensiones normales y sentido hacia el interior del punto, es decir opuesto al sentido dado en la Figura 3.4 a la tensión actuando sobre la superficie con orientación genérica. Luego resulta,

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = P \quad (3.29)$$

Dado que en un punto de un fluido en reposo las tensiones normales en todas las direcciones tienen la misma magnitud, a la variable  $P$  se la puede representar con un escalar. La presión,  $P$ , definida de ese modo es también la presión termodinámica, considerando que en el punto existe equilibrio termodinámico. Donde para este caso particular de fluido en reposo, lo que importa del equilibrio termodinámico es el equilibrio mecánico en el punto. O en otras palabras, que en el punto esté definida en forma uniforme la presión lo cual es una obviedad para fluido en reposo.

A seguir se hace el análisis para un fluido general en movimiento, Figura 3.5.

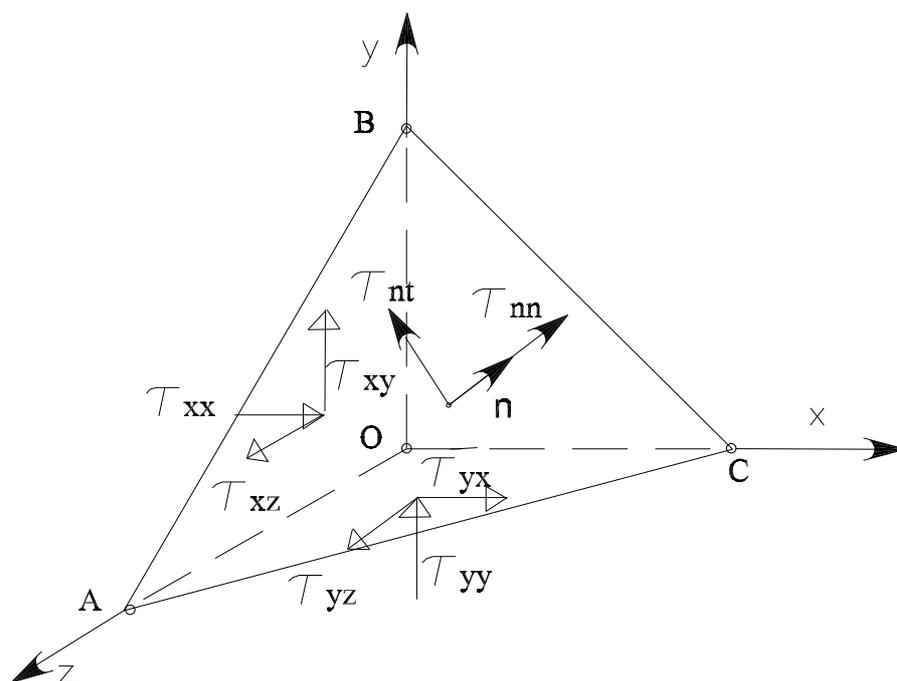


Figura 3.5: Punto con forma de prisma en un fluido en movimiento.

Se considera un punto en un fluido formado por cuatro planos, 3 coincidentes con los planos coordenados y el cuarto con orientación genérica, pero ahora tomando en cuenta todas las tensiones, tanto las normales como las tangenciales, como se muestra en la Figura 3.5. El plano con orientación genérica determina en su intersección con los semi-ejes positivos  $\{x, y, z\}$  un triángulo con vértices  $A, B$  y  $C$ , con área diferencial  $dS$ . El vector normal  $\mathbf{n}$  a dicha superficie o plano es,

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad (3.30)$$

donde las componentes  $n_x, n_y$  y  $n_z$  se denominan también cosenos directores, por el hecho que el producto escalar del vector unitario  $\mathbf{n}$  con el versor unitario correspondiente a un eje coordenado, por ejemplo  $y$ , da como resultado el coseno del ángulo que forma  $\mathbf{n}$  con dicho eje, por ejemplo  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})$ .

Por lo tanto el diferencial de área del triángulo  $\triangle ABC$  en forma vectorial es,

$$d\mathbf{A} = \mathbf{n} dS \quad (3.31)$$

y en forma extensa es,

$$d\mathbf{A} = n_x dS \mathbf{i} + n_y dS \mathbf{j} + n_z dS \mathbf{k} \quad (3.32)$$

o también denominando a  $n_x dS$  como  $dS_x$ , o en forma vectorial como  $d\mathbf{A}_x$ , y así en forma sucesiva,

$$d\mathbf{A} = dS_x \mathbf{i} + dS_y \mathbf{j} + dS_z \mathbf{k} = d\mathbf{A}_x + d\mathbf{A}_y + d\mathbf{A}_z \quad (3.33)$$

donde las componentes en forma vectorial del diferencial de área  $d\mathbf{A}$ , por ejemplo normal al eje  $x$  es,  $d\mathbf{A}_x = n_x dS \mathbf{i} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) dS \mathbf{i}$ , siendo  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) dS$  la proyección de  $dS$  en la dirección normal al eje  $x$ .

Por otro lado a la tensión resultante sobre el triángulo  $\triangle ABC$  se la expresa con el vector tensión  $\mathbf{t}_{(n)}$ ,

$$\mathbf{t}_{(n)\triangle ABC} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k} \quad (3.34)$$

Ahora se aplica el principio de equilibrio de fuerzas superficiales válido para un punto, al punto limitado por el triángulo  $\triangle ABC$  y los tres planos coordenados. Luego en la dirección  $x$  se tiene,

$$t_x dS + \tau_{xx} dS_x + \tau_{yx} dS_y + \tau_{zx} dS_z = 0 \quad (3.35)$$

sustituyendo ahora las proyecciones  $dS_x$  por  $n_x dS$ , y así en forma sucesiva para las direcciones  $y$  y  $z$  se tiene,

$$t_x dS + \tau_{xx} dS n_x + \tau_{yx} dS n_y + \tau_{zx} dS n_z = 0 \quad (3.36)$$

de donde se puede eliminar  $dS$  y reordenar como,

$$-t_x = \tau_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \quad (3.37)$$

y lo mismo se tiene para las otras dos direcciones,

$$-t_y = \tau_{xy} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \quad (3.38)$$

$$-t_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \tau_{zz} n_z \quad (3.39)$$

De las ecuaciones (3.37)-(3.39) se observa que se pueden obtener las componentes escalares del vector que representa las fuerzas superficiales por unidad de área en un punto, correspondiente a una superficie cuyo vector normal es  $\mathbf{n}$ , conociendo las tensiones que actúan en ese punto en las 3 direcciones coordenadas y la orientación de  $\mathbf{n}$ .

Por otro lado si a las componentes de las tensiones se las ordena en una matriz como se hizo con las deformaciones, se tiene,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

el cual es denominado tensor de tensiones y a las ecuaciones de equilibrio de fuerzas superficiales en un punto se las puede escribir en forma vectorial como,

$$-\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (3.41)$$

En palabras, multiplicando en forma escalar el tensor de tensiones en un punto de un fluido en movimiento por el vector normal a la misma, se obtiene el vector resultante de fuerzas superficiales actuando sobre esa superficie en ese punto.

Hasta este punto se ha hecho uso de la conservación de cantidad de movimiento lineal en un punto. A seguir se hará uso de la conservación de cantidad de movimiento rotacional en un punto. Es decir, se demostrará que el tensor de tensiones  $\mathbf{T}$  es simétrico. Para demostrar dicha propiedad se considera, como se muestra en la Figura 3.6, el prisma  $OABC$  cortado por un plano paralelo al plano  $x - y$  que pasa por el punto de aplicación de la tensión resultante sobre el plano genérico que contiene a  $\triangle ABC$ . Luego se aplica la conservación de cantidad de movimiento rotacional, de las fuerzas contenidas en dicho plano en relación a un eje  $z'$  paralelo al eje  $z$ , que pasa por el punto de acción de la tensión resultante  $\mathbf{t}_{(n)}$  actuando sobre el triángulo  $\triangle ABC$ .

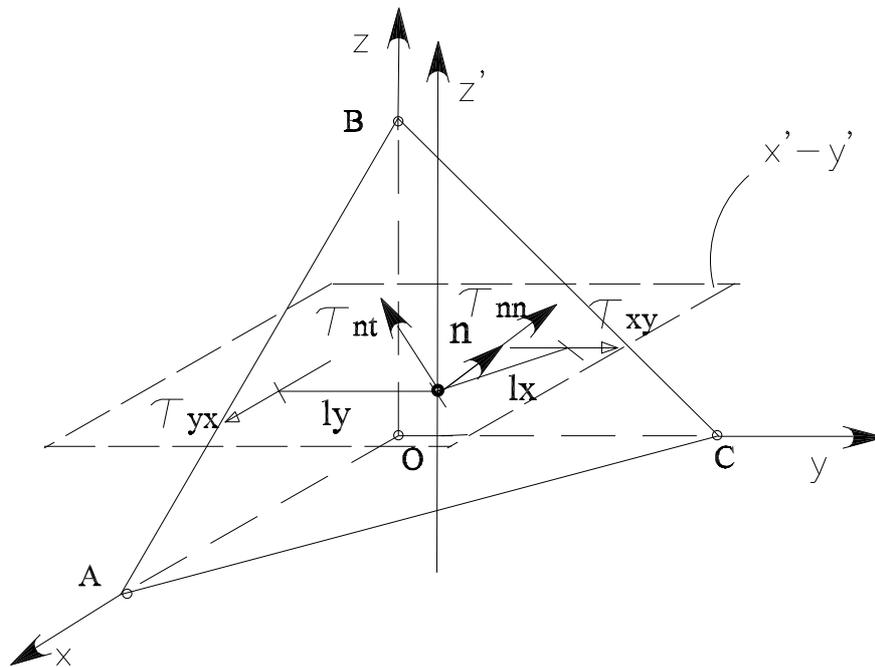


Figura 3.6: Punto con forma de prisma en un fluido en movimiento solo con las tensiones tangenciales coplanares con un plano paralelo al  $x - y$ .

Luego la sumatoria de momentos en  $z$  actuando sobre dicho plano es,

$$\sum M_{z'} = 0 = \tau_{xy} l_x dA_x - \tau_{yx} l_y dA_y \quad (3.42)$$

y dado que  $\text{Sen}(\alpha) = l_x/(l/2) = \text{Cos}(\beta) = n_y$ , luego  $l_x = n_y (l/2)$ . También  $l_y/(l/2) = \text{Cos}(\alpha) = n_x$ , luego  $l_y = n_x (l/2)$ . Por lo tanto,

$$\tau_{xy} n_y \frac{l}{2} dA_x - \tau_{yx} n_x \frac{l}{2} dA_y = 0 \quad (3.43)$$

Y usando el hecho que  $n_y dA_x = dA$  y  $n_x dA_y = dA$  se obtiene,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.44)$$

y ahora repitiendo para planos paralelos a  $x - z$  y  $z - y$  se puede demostrar que,

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.45)$$

con lo cual queda demostrado que el tensor de tensiones  $\mathbf{T}$ , ecuación (3.40), es simétrico.

Es importante aclarar que si bien hasta el momento no se ha hecho referencia a ningún tipo de fluido en especial, un tensor de tensiones simétrico corresponde a un fluido sin efectos polares, o sea a un *fluido no polar*. Sin entrar en detalles, dado que es un tema sobre fluidos especiales y estaría fuera del alcance de este libro, un fluido simple no polar es uno para el cual los momentos internos son el resultado exclusivo de la acción de las fuerzas externas. En contraste, uno polar es capaz de transmitir torsión, lo cual se da en ciertos fluidos no-Newtonianos. Para uno no polar el momento angular en un punto se conserva y como resultado se tiene un tensor de tensiones simétrico en el punto. Este es el caso más general y los fluidos tratados en este libro son no polares.

### 3.3. Ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento

Al principio de este Capítulo se vió que las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido pueden, en un caso general, ser superficiales o másicas. El cálculo de las fuerzas másicas no presenta problemas de formulación, y para expresar las fuerzas superficiales en cada cara de una partícula ahora ya se tiene la definición del tensor de tensiones en un punto, que permite conocer las tensiones según los tres ejes coordenados conocido el vector normal a la superficie. Por lo tanto se tienen todos los elementos para formular las ecuaciones de cantidad de movimiento lineal, para una partícula de fluido en movimiento. Es importante observar que la ecuación de conservación de cantidad de movimiento angular ha sido ya utilizada para relacionar las tensiones fuera de la diagonal principal del tensor de tensiones.

Por lo tanto ahora se formula la ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal, para una partícula de fluido que en el tiempo  $t$  tiene coincidente uno de sus vértices inferiores con el origen de coordenadas, como se muestra en la Figura 3.7. Dicha Figura por claridad no tiene las tensiones sobre las dos caras cuyas normales son paralelas al eje  $z$ .

La masa de esa partícula es,

$$dm = \rho \, dx \, dy \, dz \quad (3.46)$$

Por simplicidad se hará un análisis solo según el eje  $x$  para obtener la ecuación de cantidad de movimiento en esa dirección y luego por analogía se obtienen las ecuaciones en  $y$  y  $z$ . Luego

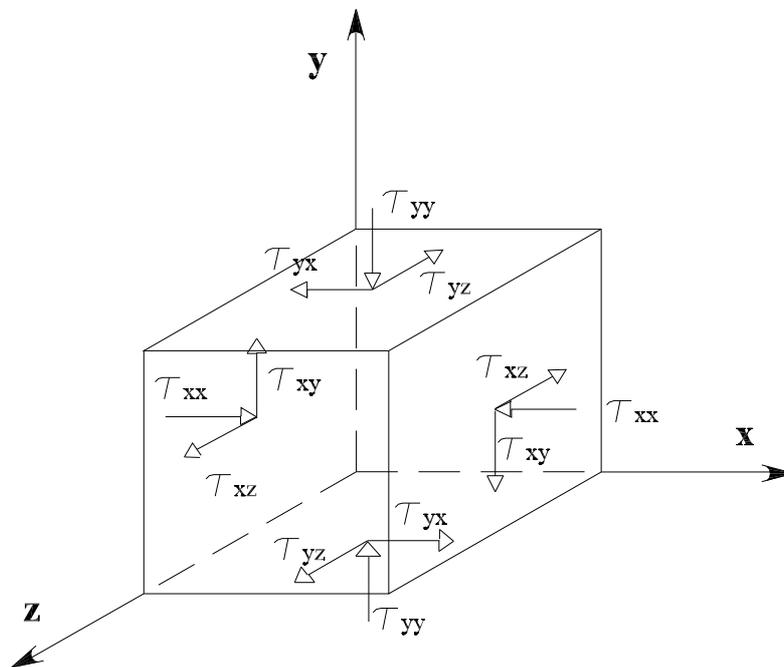


Figura 3.7: Partícula de fluido con dimensiones  $dx$ ,  $dy$ , y  $dz$  según cada eje coordenado, con las tensiones que actúan en cuatro de sus caras.

la ecuación de *momentum* en  $x$ , equivalente a la ecuación (3.3), pero con descripción Euleriana es,

$$\frac{D}{Dt}(u \, dm) = dF_{mx} + dF_{sx} \quad (3.47)$$

siendo  $dF_{mx} = \rho \, g_x \, dV$ , donde  $g_x$  es la componente en  $x$  de la aceleración de la gravedad y  $F_{sx}$  es la componente en  $x$  de las fuerzas superficiales.

El termino de la izquierda resulta,

$$\frac{D}{Dt}(u \, dm) = dm \frac{D}{Dt}(u) \quad (3.48)$$

dado que  $dm$  es la masa de la partícula que es constante, siendo que el diferencial total sigue a una partícula y describe el resultado en un punto fijo del espacio.

Por otro lado las fuerzas actuando sobre las caras de la partícula, Figura 3.7, son,

$$dF_{sx} = (-\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx + \tau_{xx}) \, dydz +$$

$$\left(-\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy + \tau_{xy}\right) dx dz + \left(-\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz + \tau_{xz}\right) dx dy \quad (3.49)$$

de donde resulta,

$$dF_{sx} = \left(-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (3.50)$$

Luego reordenando los diferentes terminos se tiene,

$$dm \frac{Du}{Dt} = \rho dV \frac{Du}{Dt} = \rho g_x dV - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (3.51)$$

Note que la convención de signos para las tensiones consiste en considerar las tensiones con sentido positivo en las caras de la partícula coincidentes con los planos coordenados. Esta convención permite que las tensiones normales estén siempre orientadas hacia el interior de la partícula, en concordancia con la forma como se toma la presión hidrostática.

Dividiendo ahora la expresión (3.51) por el volumen elemental y generalizando para las demás direcciones se tiene,

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Las cuales son el resultado de aplicar la ecuación de conservación de cantidad de movimiento lineal a un fluido en movimiento sin hacer referencia al tipo de sustancia. Además de estas ecuaciones se tienen las que resultaron de aplicar la conservación de cantidad de movimiento rotacional, es decir,

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3.53)$$

Así las ecuaciones (3.52)-3.53), sumadas a la ecuación de conservación de masa, ecuación(2.57), son el conjunto de ecuaciones derivadas de los principios fundamentales que se pueden usar

para solucionar un problema isotérmico. Si el problema fuese no-isotérmico, es decir si existe variación de la temperatura, se debe incluir la ecuación de la energía. Es importante destacar también que la única hipótesis restrictiva hecha hasta aquí fue sobre la teoría del continuo (lo cual excluye sustancias con muy baja densidad, como los gases rarificados) y sobre fluidos no polares que es el caso general de fluidos que no transmiten torsión. Sin embargo no se ha hecho hasta el momento ninguna mención al tipo de sustancia. Por lo tanto las ecuaciones arriba obtenidas son generales o universales para cualquier sustancia no polar, respetando la teoría del continuo.

A este nivel se puede hacer un balance sobre las incógnitas y ecuaciones que se tienen para resolver un problema isotérmico. Como se anticipa en la introducción, las variables dependientes de interés son las tres componentes de la velocidad, la presión y la densidad. Si se conocen esas 5 variables en cada punto del dominio de la solución, se conoce todo sobre el flujo en cuestión. Todas las demás variables pueden ser deducidas a partir de esas 5 variables. Sin embargo al observar el número de incógnitas vemos que tenemos las 5 variables ya comentadas, más las 9 tensiones  $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \dots$ . Es decir se tienen 14 incógnitas. En contraste el número de ecuaciones, considerando 3 de cantidad de movimiento lineal, 3 de cantidad de movimiento rotacional y la ecuación de conservación de masa, son 7. Es decir que se necesitan 7 nuevas ecuaciones para cerrar el problema y hacerlo resoluble. Para un problema no-isotérmico el balance no cambia ya que se incluye una nueva incógnita, que es la temperatura, y una nueva ecuación, que es la de la energía.

Por lo tanto para cerrar el problema y hacerlo resoluble se deben aportar las ecuaciones denominadas constitutivas, propias para una sustancia en especial. Esas ecuaciones tienen el nombre de constitutivas porque dan información sobre como está constituida la materia. Ese tema se trata a seguir para luego llegar a las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales son ecuaciones especializadas para sustancias denominadas *fluidos Newtonianos*.

### 3.4. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones generales para fluidos Newtonianos o ecuaciones de Navier-Stokes, son las ecuaciones de cantidad de movimiento vistas en el ítem anterior, con el agregado de 7 ecuaciones constitutivas propias para un tipo de sustancia. La primera de esas relaciones es una ecuación de estado propia para la sustancia, un ejemplo muy usado de la cual es la ecuación de estado para un gas ideal. Las otras 6 ecuaciones son relaciones que permiten expresar las

tensiones en función de las deformaciones,

$$tensiones\ viscosas = f(deformaciones)$$

Esas relaciones expresan de que forma ocurre el rozamiento interno en un fluido en movimiento. Las primeras ideas sobre el rozamiento interno en un fluido, de las cuales se tienen registros, surgen de anotaciones de Leonardo de Vinci quien describió los parámetros que definen el rozamiento sobre un cuerpo sumergido en un flujo, y luego Descartes y más tarde Torricelli y Viviani, quienes trataron de relacionar experimentalmente el rozamiento con variables cinemáticas. Estos han sido trabajos en los cuales se trató de establecer relaciones entre la fricción interna de un fluido en movimiento y parámetros cinemáticos.

Y son los antecedentes que tuvo Newton, quien razonando con un modelo de láminas que se desplazan unas sobre otra, propuso una relación lineal entre tensión y deformación del siguiente tipo  $\tau = fuerza/area = coeficiente \times du/dy$ , para la tensión de corte. Luego Navier presentó por primera vez las ecuaciones hoy en día denominadas de Navier-Stokes en 1822, en base a la relación propuesta por Newton. Y tiempo después Stokes, quien llegó a las mismas ecuaciones por un camino diferente en 1845, hizo una serie de hipótesis sobre el tipo de fluido que modelan esas ecuaciones, las cuales conceptualmente definen la sustancia. Los anteriores son los antecedentes de las ecuaciones constitutivas para un fluido Newtoniano, las cuales al presente no tienen demostración analítica y si modelan correctamente un fluido Newtoniano en movimiento o no se lo debe verificar experimentalmente. Por todos esos aportes es que las ecuaciones son denominadas de Navier-Stokes y al fluido Newtoniano. Cabe mencionar sin embargo que a la fecha existen sobrados datos tanto experimentales como de simulación numérica directa, que demuestran que las ecuaciones de Navier-Stokes modelan correctamente los fluidos Newtonianos.

Las hipótesis que hizo Stokes son,

1. Las tensiones en un punto son una función continua de las deformaciones y del equilibrio termodinámico local, es decir en un punto, e independiente de alguna otra variable cinemática.
2. El fluido es homogéneo, es decir que las tensiones en un punto no dependen de las coordenadas espaciales.
3. El fluido es isotrópico, es decir que no existe una dirección preferencial ni de tensión ni de deformación.

4. Cuando no existe deformación la única tensión es la estática o hidrostática, como se quiera llamarla, coincidente con la presión termodinámica.

Luego para un fluido Newtoniano la función  $f$  arriba es lineal, multiplicada por un coeficiente, el cual es una propiedad del estado local termodinámico de la sustancia, pero no de la tasa de deformación. De ahí el nombre de fluidos Newtonianos para sustancias que permiten expresar las tensiones en función de las deformaciones a través de un coeficiente constante. Ejemplos de este tipo de sustancias son el aire y el agua.

En síntesis las ecuaciones constitutivas relacionan las tensiones con las deformaciones para fluidos Newtonianos. Es decir que relacionan las 6 tensiones diferentes del tensor,  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

con las deformaciones vistas del tensor  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Algo a remarcar es que el tensor de deformaciones  $\mathbf{D}$  es también simétricos, como se puede observar por inspección.

Luego las ecuaciones constitutivas para las tensiones viscosas normales son,

$$\begin{aligned} \tau'_{xx} &= -\lambda (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - 2\mu \epsilon_{xx} \\ \tau'_{yy} &= -\lambda (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - 2\mu \epsilon_{yy} \\ \tau'_{zz} &= -\lambda (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - 2\mu \epsilon_{zz} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Es importante observar que las anteriores son las tensiones normales derivadas de los efectos de la viscosidad. Más adelante se incluirán las tensiones debido al peso del fluido o hidrostáticas.

Y las tensiones tangenciales,

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu (\epsilon_{yx} + \epsilon_{xy}) \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = -\mu (\epsilon_{yz} + \epsilon_{zy}) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\mu (\epsilon_{zx} + \epsilon_{xz})\end{aligned}\tag{3.57}$$

Poniendo las deformaciones en función de los diferentes términos del gradiente de la velocidad, las ecuaciones anteriores resultan,

$$\begin{aligned}\tau'_{xx} &= -\lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau'_{yy} &= -\lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau'_{zz} &= -\lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\tag{3.58}$$

En esas ecuaciones  $\mu$  es el primer coeficiente de viscosidad, denominado viscosidad dinámica, y  $\lambda$  es el segundo coeficiente de viscosidad o coeficiente de viscosidad global. El primer coeficiente de viscosidad puede ser obtenido en forma experimental y tiene un significado físico claro al representar el coeficiente que relaciona una tensión de corte con el gradiente de la velocidad. El segundo coeficiente, en contraste, tiene un significado físico menos claro que se comenta más adelante. Esos dos coeficientes están relacionado por la denominada *hipótesis de Stokes*, la cuál permite definir la presión hidrostática.

Cuando se presentó al inicio de este Capítulo el estado de tensiones totales en un punto para un fluido estático, se llegó a la expresión (3.29), la cual muestra que las tensiones totales normales tienen su magnitud coincidente con la presión hidrostática  $P$ . Por eso el paso a seguir es redefinir las tensiones normales totales, como la suma de las tensiones viscosas normales más las tensiones normales debido al peso del fluido o presión hidrostática. Luego las tensiones normales totales son, en la dirección  $x$ ,

$$\tau_{xx} = P + \tau'_{xx} = P - \lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.60)$$

Por lo tanto ahora en las tres direcciones las tensiones totales normales son,

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= P - \lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= P - \lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\tau_{zz} = P - \lambda \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Si estas tres últimas ecuaciones son sumadas miembro a miembro se obtiene,

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 3P - (3\lambda + 2\mu) \mathbf{div} \mathbf{v} \quad (3.62)$$

de donde se tiene que si los coeficientes de viscosidad cumplen con la condición que (la cual fue una de las consideraciones que hizo Stokes),

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (3.63)$$

se tiene que para un fluido estático,

$$P = \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (3.64)$$

la cual cumple con la condición de equilibrio para un fluido estático visto anteriormente.

Reescribiendo ahora todas las ecuaciones constitutivas eliminando el segundo coeficiente de viscosidad usando la hipótesis de Stokes, ecuación (3.63), se tiene,

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= P + \frac{2}{3}\mu \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= P + \frac{2}{3}\mu \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}\tau_{zz} &= P + \frac{2}{3}\mu \mathbf{div} \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (3.66)$$

En relación a la definición de presión dada antes, cabe decir que la misma es coincidente con la definición de presión termodinámica, si en el punto en cuestión existe equilibrio termodinámico. Y esta es la hipótesis considerada para esas relaciones. En otras palabras se debe pensar que todos los procesos termodinámicos deben tener una escala de tiempo bien menor que la correspondiente a la del flujo.

Ahora se tienen todas las partes del rompecabezas que lleva a las ecuaciones generales para un fluido Newtoniano o ecuaciones de Navier-Stokes. El camino a seguir es sustituir las ecuaciones constitutivas para un fluido Newtoniano, ecuaciones (3.65)-(3.66) arriba, en las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento generales, ecuación (3.52), que para la dirección  $x$  resulta,

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( -P + \frac{2}{3}\mu \mathbf{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.67)$$

Por simplicidad para la divergencia de la velocidad se usa en adelante el símbolo ya visto,  $\Theta$ , ecuación (2.62),

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( -P + \frac{2}{3}\mu \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad (3.68)$$

Usando algo de álgebra en esta última expresión, considerando que las variables son funciones continuas en el tiempo y el espacio y considerando también que el coeficiente de viscosidad es constante resulta,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.69)$$

Y en forma equivalente para las demás direcciones,

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.70)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.71)$$

las cuales son las tres componentes de la siguiente ecuación vectorial de cantidad de movimiento lineal,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad}(P) + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{3}\mu \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.72)$$

Estas son las ecuaciones denominadas de Navier-Stokes en honor a Navier(1822) y Stokes(1845). Existen otros trabajos donde estas ecuaciones han sido presentadas, por ejemplo Poisson(1829), Saint Venant (1843) y Boussinesq (1868), pero las contribuciones más importantes fueron las realizadas por Navier y Stokes.

### 3.4.1. Especialización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Se pueden ahora especializar las ecuaciones (3.69-3.71) para algunos casos simples a modo de comprender el significado de alguno de sus terminos. Por completitud se incluye la ecuación de conservación de masa, ecuación (2.60) que se repite aquí por comodidad, en cada problema.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.73)$$

*Flujo incompresible:* En primer lugar es conveniente aclarar que en este libro se habla de flujo incompresible y no de fluido, dado que los efectos de compresibilidad son impuestos por el flujo. Sin embargo es también reelevante recordar que las sustancias líquidas resisten sustancialmente más los efectos de compresibilidad que los gases y puede también ser apropiado hablar de fluido incompresible.

Luego para un flujo incompresible la ecuación (3.73) de conservación de masa arriba resulta,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.74)$$

con lo cual la ecuación (3.72) resulta,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad}(P) + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.75)$$

Estas ecuaciones son quizá la forma más usual de las ecuaciones de Navier-Stokes en temas relacionados con ingeniería mecánica y química, dado que los flujos más habituales son incompresibles como ocurre con los líquidos o los gases a bajas velocidades.

*Fluido estático:* Eliminando todos los terminos de velocidad la cual es nula, resulta,

$$0 = -\mathbf{grad}(P) + \rho \mathbf{g} \quad (3.76)$$

o también considerando la gravedad actuando en la dirección de  $-\mathbf{k}$  resulta,

$$0 = -\frac{dP}{dz} - \rho g \quad (3.77)$$

de donde se obtiene la conocida relación de la presión hidrostática,

$$P(z) = P(0) + \rho g z \quad (3.78)$$

Esta segunda especialización tuvo como objetivo mostrar que una vez concidas las ecuaciones de Navier-Stokes, todos los problemas con fluidos pueden ser formulados a partir de las mismas, haciendo las hipótesis correspondientes.

### 3.5. Ejercicios

1. a) Un punto fijo sobre nuestro planeta constituye una referencia inercial? En caso negativo argumente porque entonces es habitual usar la ecuación  $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$ , solo válida en relación a una referencia inercial, en relación a puntos fijos a la tierra. b) Que modificaciones se deben introducir a la ecuación  $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$  al ser aplicada en relación a una referencia no-inercial? c) Deducir la expresión de conservación de cantidad de movimiento para un cuerpo sólido en relación a una referencia no-inercial.
2. Considerar una garganta convergente descargando agua a la atmósfera con un caudal de  $150 \text{ m}^3/\text{min}$  como se muestra en la Figura 3.8. El diámetro interno es de 3 pulgadas a la entrada y 1 pulgada a la salida. Despreciar las fuerzas de fricción y calcular la fuerza de reacción de la garganta sobre el flujo, usando la forma integral de la ecuación de cantidad de movimiento.

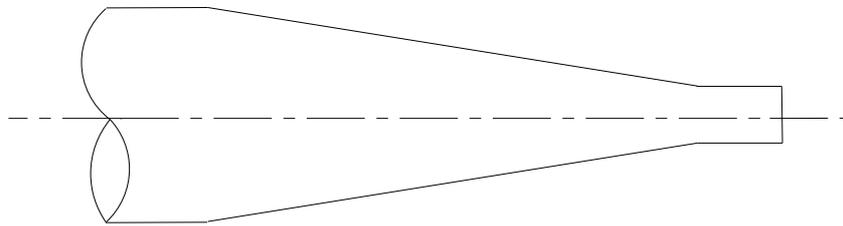


Figura 3.8: Garganta convergente descargando agua a la atmósfera.

3. A través del codo de doble salida de la Figura 3.9 se mueve agua en forma permanente. La velocidad de ingreso al codo es de  $5 \text{ m/seg}$ . Un manómetro diferencial indica que la presión en esa sección es de  $25000 \text{ Pa}$ . La velocidad media en la salida izquierda cuyo diámetro es de  $0,18 \text{ m}$ , la cual tiene dirección horizontal, es de  $10 \text{ m/seg}$ . La salida derecha tiene un diámetro de  $0,20 \text{ m}$  y forma un ángulo de  $45$  grados con la horizontal. Calcular el empuje horizontal y el vertical que el agua y el aire ejercen sobre el codo. Estimar el volumen del codo.

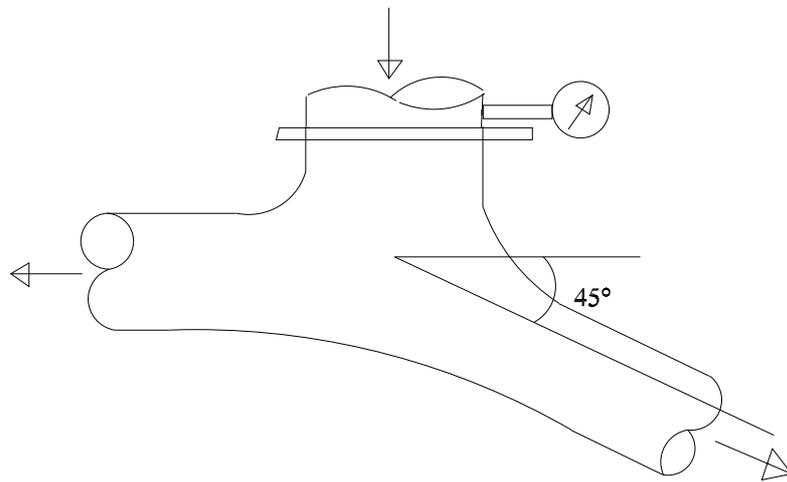


Figura 3.9: Codo con dos salidas a través del cual circula agua.

# Capítulo 4

## Bibliografía

- [1] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice-Hall Inc, United States of America, 1971.
- [2] R.B. Bird, W.E. Stewart y E.N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [3] J. Gleick. *CAOS: A criação de uma nova ciência*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1990.
- [4] W.M. Lai, D. Rubin y E. Krempl. *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [5] I. Prigogine y I. Stengers. *A Nova Aliança*. Editorial Universidade de Brasília, UnB, Brasília, 1984.
- [6] H. Rouse. *Elementary Mechanics of Fluids*. Dover Pub. Inc, New York, 1946.
- [7] I.H. Shames. *Mecânica de Fluidos*. McGraw Hill, 3ra. ed, Colombia, 1995.
- [8] A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics*. Longman Scientific & Technical, New York, 1980.
- [9] G.A. Tokaty. *A History and Philosophy of Fluid Mechanics*. Dover Pub. Inc, New York, 1971.