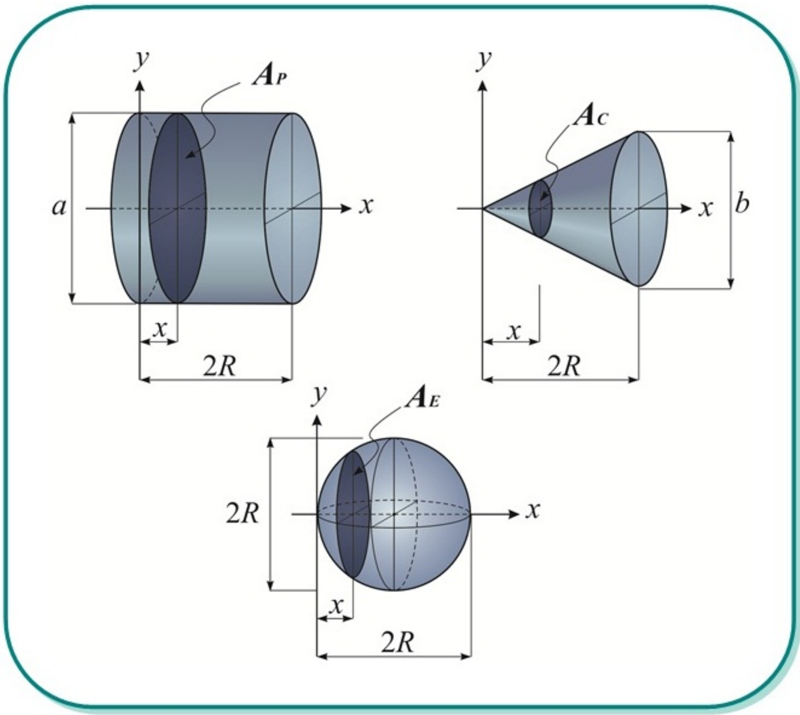
Editorial de la
Universidad Tecnológica Nacional
U.T.N. - Argentina

Disertación

El privilegio del Ingeniero al compartir una de las máximas invenciones de la mente humana

DR. ING. CARLOS P. FILIPICH



CONFERENCIA MANTENIDA POR EL DR. ING. CARLOS FILIPICH EN LA ACADEMIA DE INGENIERÍA DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES CON MOTIVO DE SU INCORPORACIÓN COMO ACADÉMICO CORRESPONDIENTE

(18 de mayo de 2011)

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional – edUTecNe
http://www.edutecne.utn.edu.ar
edutecne@utn.edu.ar

CONFERENCIA MANTENIDA POR EL DR. ING. CARLOS P. FILIPICH EN LA ACADEMIA DE INGENIERÍA DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES CON MOTIVO DE SU INCORPORACIÓN COMO ACADÉMICO CORRESPONDIENTE

"**El privilegio del Ingeniero al compartir, posiblemente, una de las máximas invenciones de la mente humana**"

Señoras y Señores, autoridades de la Academia, colegas.

Antes de lanzarme en el intento de hilvanar la idea del título, expreso mi agradecimiento a todos quienes participaron y aceptaron mi designación como Académico Correspondiente. No quiero caer en el lugar común de inmodestias y afines pero en cambio dejar pública constancia de mi reconocimiento especial al amigo Ingeniero Roberto Igolnikow. Confío, que ni aquéllos ni Roberto tengan que arrepentirse. ("Cuenten conmigo"…)

(Ver addendum después de las referencias)

Una vez elegido y enunciado el título de la charla, descubrí al tratar de esbozarla, que algunos minutos eran más que suficiente para desarrollarla. Cuando pregunto el tiempo de duración que se estilaba normalmente para estos casos, me responden que alrededor de 60 minutos… Comenzaron los problemas para Uds. y para mí… Me había entusiasmado con la idea y cuando debía plasmarla, el oro no relucía… Si tuviera que hablar sobre algunas de las temáticas técnicas o científicas que con los años he abordado provenientes de mi dedicación al Cálculo Estructural, a la Docencia Universitaria y fundamentalmente los últimos 35 años a la Investigación, les garantizo que no estaría preocupado, como lo estoy ahora, por los lapsos, cortos o largos, disponibles para la exposición. Por otro lado, y por supuesto, esto no es solo mi patrimonio, entiendo que lo mismo nos ocurre a todos cuando se presenta la oportunidad de poder hablar de nuestros temas preferidos o conocidos y a los que nos hemos dedicado. No será este el caso. No fue nunca mi intención de una charla con un cariz demasiado técnico, ni del castigo que soportarán…Bien. Acá el asunto era y es distinto. Debía encuadrarme dentro de un desarrollo y consecuente exposición que no fuera excesivamente técnica aunque, como verán, conceptual y básicamente lo es. Además, conseguir que pudiera tener llegada a todas las especialidades de la ingeniería, que fuera medianamente interesante y amena al máximo dentro de las posibilidades que este ingeniero puede lograr. Es decir, y en resumen, me había metido, quizá no presuntuosamente, en algo muy difícil, que Uds. juzgarán y decidirán, si lo conseguí o no al finalizar esta charla. Aunque para entonces yo habré zafado de esta audaz incursión…

Describir en pocas palabras la temática que presentaré se reduce a enunciar que se trata de "Longitudes, Áreas y Volúmenes". Para ampliar un poco, digamos entonces, que hablaré del cálculo de arcos, áreas y volúmenes aunque sin la rigurosidad del matemático y con la simpleza y practicidad sin metafísica ni filosofía, de la mayoría de los ingenieros. Esta disyuntiva -matemática e ingeniería- o al menos, matemáticos e ingenieros, siempre aparece en la trayectoria profesional. Inclusive -al menos recuerdo mi experiencia- desde la época de estudiantes aquel "desprecio" por quienes nos dictaban Análisis, Álgebra o Geometría... Si bien no es el motivo específico de mi exposición, permítanme insistir sobre esta dicotomía, y parafrasear lo que le escuché hace ya varios años al profesor español Luis Antonio Santaló en un Congreso de Matemática Aplicada en la Capital Federal, a propósito del matemático y del profesional técnico como es un ingeniero. Seguramente algunos conocerán el relato pero creo que vale la pena reiterarlo:

Decía Santaló que un profesional ingeniero recibe el encargo de un comitente para optimizar un nuevo modelo de bicicleta. Comienza a adentrarse en la mecánica, cinemática y dinámica, condiciones de equilibrio, ecuaciones de movimiento, teoría giroscópica, aceleración de Coriolis, rozamiento y mil pesadas ecuaciones… para disponer del conjunto de herramientas que el funcionamiento de este vehículo requiere y poder recién, entonces, intentar optimizarlo de alguna manera. Lejos estaba todo esto de su capacidad, de su tiempo disponible y principalmente de sus ganas de encarar semejante problema. De pronto una feliz idea irrumpe y suaviza su preocupación; vislumbra la posibilidad de superar semejante desafío analítico. ¿Por qué? Porque tiene un amigo muy especial que es matemático. Qué mejor que recurrir a él y pedirle la gauchada de una ayuda. En efecto se encuentran y el ingeniero reclama la milagrosa mano para superar la encrucijada y le plantea el problema de la bicicleta optimizada… Pero aparece la primera sorpresa. Este matemático -como muchos- vivía en un mundo teórico y cerrado; le pregunta ¿qué es una bicicleta? Cuando el ingeniero logra reaccionar gracias a una fuerte dosis de Coramina, procede a explicarle de la mejor manera de qué se trata: "…esencialmente es un sistema mecánico de 2 ruedas, con un manubrio, con 2 pedales, con un asiento, con un conductor que empuja y el aparato te traslada de un lado a otro…". "Ok", es la lacónica respuesta del matemático amigo… Pasan las semanas sin respuesta alguna. Al ingeniero lo presionan, "¿Tenés algo? Adelantame lo que sea…" Se cansa a su vez, de llamar al amigo… Ya desesperado y a punto de blanquear la situación y el correspondiente papelón, el milagro se produce: más lacónicamente que antes, el especial matemático amigo le informa que encontró una solución… Esperanzado, analizando inclusive compartir honorarios, se reúne con él, pero escucha lo siguiente: "…resolví el problema para un dominio múltiplemente conexo, con varios puntos de bifurcación y diversas rutas al caos, pero finalmente encontrando una solución transitoria que me condujo el planteo diferencial no lineal básico de un sistema de "r" ruedas, de "m" manubrios, de "p" pedales, de "q" asientos y de "n" conductores…" Ojos abiertos tan grandes como la desazón del pobre colega ingeniero. No puede articular ni una frase, ni pedir explicación alguna… Pero el teórico continúa: "cuando r es igual a 2, m es igual a 1, q es igual a 2, y s y n son iguales a 1, tenés tu bicicleta…"

Creo que la conclusión de la historia, no totalmente imposible ni fantástica del todo, es la diferencia entre el técnico que aplica matemáticas, filtrada y con recetas (baste pensar en los códigos actuales de elementos finitos y similares) y los matemáticos puros. Sin embargo, como consuelo debo decir al cabo de los años, que a estos debemos considerarlos por un lado como un mal necesario, y por otro como un bien inevitable.

Anticipándome al encuadre que deseo redondear con la presente charla, digamos que el privilegio de la cierta genial invención enunciada en el título, no es patrimonio exclusivo de los ingenieros; también lo tienen, entre muchos otros, los matemáticos, los físicos, los economistas, etc.

Retomando el hilo, el tema y la idea no son totalmente originales, y como es fácil imaginar, desde tiempos inmemoriales, autores con el nivel de calidad y genialidad que se nos ocurra, se han dedicado a profundizar sobre este tema, y escrito profusamente, más de lo que una persona podría leer, entendiendo y analizando, en toda su vida… Por lo tanto, comenzaré decidiendo un sesgo drástico, e incorporando algo de historia anecdótica, con los primeros esbozos en esta temática y de algunos autores que desarrollaron por necesidad y a veces empíricamente, estos cálculos de longitudes de arcos, áreas de superficies planas y volúmenes de cuerpos que se nos presentan en la vida cotidiana. Me apresuro a decirles que todo lo que describiré se reduce, ya que no apelaré a demostración ni algoritmo alguno, solo a enunciar y mostrar algunas de las nociones de álgebra, geometría y cálculo que se incorporan durante la preparación básica de todos los ingenieros argentinos. Luego mostraré algunos esquemas de cómo la inteligencia, pero especialmente el ingenio de estos personajes los condujeron a resolver complicados problemas en la antigüedad. Hablaré algo -muy poco ya que la educación universitaria no es ni de lejos un tema de mi predilección- de lo que pienso de la preparación actual del ingeniero y hacia dónde creo que la misma propende.

Llegar por último según lo pienso y que motiva estas palabras a destacar el privilegio del ingeniero al adquirir con su currícula la máxima idea que la mente humana pudo descubrir. Base de todo lo que hoy día el habitante del planeta Tierra dispone y utiliza y que continuará haciendo por mucho tiempo. Entiendo que el tema no se divulga como merecería ni es sencillo hacerlo. Es decir, en resumen, la charla reivindica a la máxima invención del hombre hasta el presente pero, como advierten, todavía no la he nombrado.

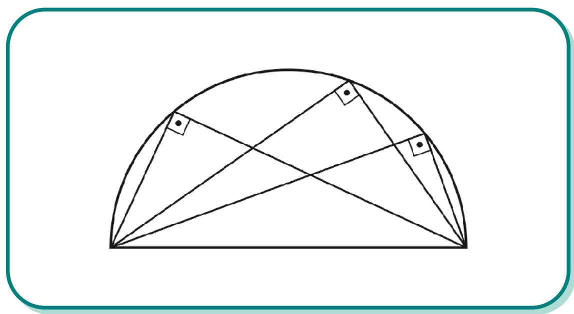
Para proceder más o menos ordenadamente, comienzo con los primeros conceptos de **número, magnitud y forma** que pueden ser ubicados en las zonas de los valles fértiles de China, Egipto, India y Mesopotamia, del Tigris y el Éufrates. Es decir donde durante los tiempos iniciales del homo sapiens, las civilizaciones se establecían, y por necesidad utilitaria de sus habitantes, los primeros esbozos de geometría, genéricamente hablando, aparecieron y se desarrollaron. En cuanto a occidente concierne, nuestro legado proviene de Babilonia y Egipto en primera instancia y por supuesto y fundamentalmente de Grecia.

Las Tabletas Cerámicas Cuneiformes de los Babilonios y los Papiros de los Egipcios, allá en los primeros siglos del segundo milenio previos a Cristo, pero encontrados recién en el siglo XIX y siglo XX, daban por sentado un resultado geométricamente básico: **la superficie de un rectángulo es el producto de la base por la altura**. Por lo tanto, encontrar la superficie de un triángulo aparece casi naturalmente por elemental disección del rectángulo. Así siguiendo se concretan la superficie del trapecio, de los polígonos regulares e irregulares y los primeros intentos de la superficie del círculo y con éste el número Pi. También conocían (aunque se cree que de manera absolutamente empírica) el volumen del prisma como área de la base por su altura. Es sorprendente que la necesidad de medir y poder repartir básicamente, con justicia, el alimento obtenido de las cosechas de esos valles fértiles, dé lugar a semejantes resultados y por supuesto a otros que no son esencialmente geométricos y constituyen por ejemplo los primeros albores del álgebra. Sin embargo, como siempre, nadie es, ni fue, perfecto…, no existe demasiada indicación ni énfasis de pruebas lógicas en el pensamiento de egipcios y babilonios. Tampoco de la alternativa y generalización de trabajar literalmente o simbólicamente y en cambio de hacerlo sólo con casos particulares y con números concretos. Pero fue más que suficiente para disparar las bases del proceso matemático.

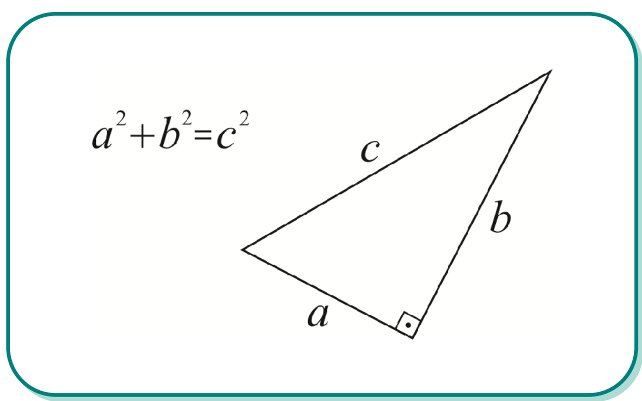
Estos conocimientos fueron asimilados por los griegos. Hacia el siglo VI AC. se produce la **iniciación del razonamiento lógico y explícitamente deductivo** que hoy conocemos, y aplicamos.

Entre otros, Tales (primera mitad del siglo VI AC) y Pitágoras (hacia el año 500 AC) son dos de los principales exponentes.

Tales demuestra una serie de teoremas pero, en general, cuando nos referimos al Teorema de Tales entendemos lo siguiente "El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto".



Pitágoras, o la escuela Pitagórica semi religiosa e inclusive, sectaria, trabaja en innumerables temas pero claro está, que el Teorema de Pitágoras es el emergente sin ninguna duda.

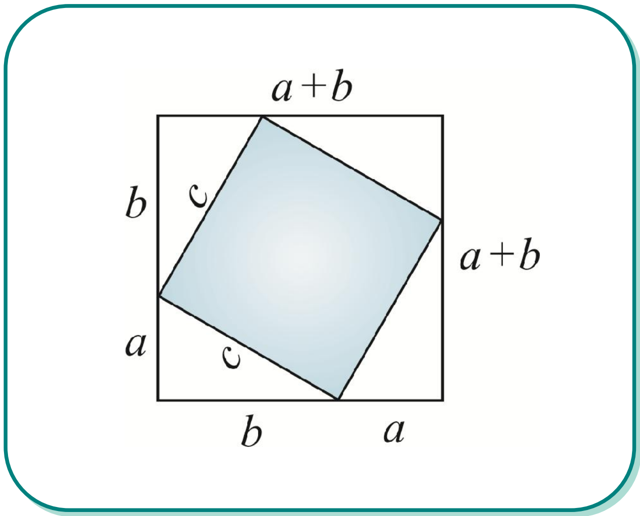


Se cree sin embargo, sin desmerecer por supuesto a Pitágoras, que los babilonios al conocer la expresión del cuadrado de un binomio y calcular por dos caminos la superficie del cuadrado de lado $(a+b)$ en el cual se inscribe otro de lado c ya habrían encontrado "la fórmula de Pitágoras" antes que él.

Fórmula del Cuadrado del Binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Fórmula de Pitágoras por los Babilonios



Área Total: $$c^2 + 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Todo el bagaje geométrico (aunque también algebraico) del cálculo de longitudes, áreas y volúmenes que en estos siglos fue acumulándose, necesitó una reexaminación y fundamentación completa, tarea que ocupó gran parte de siglo IV AC. Se concreta, entonces, en una de las mayores proezas intelectuales de la humanidad: Los trece volúmenes de los **"Elementos" de Euclides** escritos hacia el año 300 AC.

Este incompleto, sin detalles y casi irrespetuoso resumen que presento tiene la finalidad de llegar a una primera conclusión, que basaré en un flanco portentoso de Arquímedes como precursor del **cálculo integral** en la era antigua. Debe completarse con otras dos figuras griegas de la época: Demócrito (alrededor de 460-370 AC) y Eudoxio (estudiante de la Academia de Platón circa 408-355 AC).

La parte del trabajo de Demócrito que deseo señalar es la siguiente. Se conocía, como dije, el valor del volumen de un prisma desde más de 1000 años antes. Demócrito, por una adecuada disección de un prisma de base triangular en 3 pirámides iguales (tetraedros), encuentra que el volumen de una pirámide triangular es un tercio de la superficie del prisma. Como toda pirámide puede dividirse en un número arbitrario de pirámides congruentes, se llega a que el valor del **volumen de una pirámide cualquiera y aún del cono es la tercera parte de la superficie de la base por su altura**.

De Eudoxio (de Nidos) destacamos dos líneas que serán básicas para la tarea de Arquímedes: **Las proporciones geométricas y el método exhaustivo o por agotamiento**.

Las definiciones de Eudoxio generalizan las nociones familiares actuales de proporcionalidad o de igualdad entre racionales.

En cuanto al fundamental Método por agotamiento, del cual no hay uniformidad de opiniones en cuanto a su autoría, es el primer intento conocido de manejar cierto concepto de "límite" tal como lo conocemos del cálculo diferencial, aunque los griegos no trabajaban, y en realidad evitaban, tanto el infinito como lo infinitesimal.

Eudoxio propone el axioma de agotamiento.

Sean dos magnitudes M_0 y ε arbitrarias y una secuencia M_1, M_2, M_3 ....tal que:

$$M_1 < \frac{M_0}{2}\,;\; M_2 < \frac{M_1}{2}\,;\; M_3 < \frac{M_2}{2}\,;\ldots \text{ etc.}$$

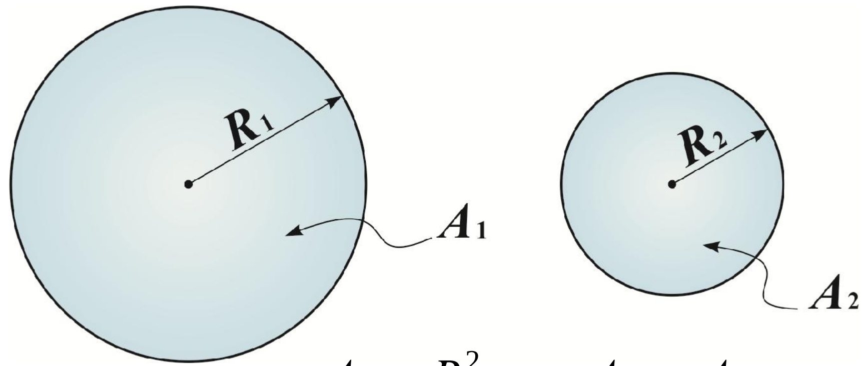
Puede verificarse que es posible llegar que para N suficientemente grande: $M_N < \varepsilon$

Como último enunciado previo a ejemplificar el "cálculo integral" de Arquímedes, digamos que con el método exhaustivo de Eudoxio, se llega sin pasaje al límite, a la expresión de la superficie del círculo. Se utilizan los siguientes 2 Lemas:

1. Lema 1: **La relación entre las áreas de 2 polígonos regulares semejantes, es proporcional al cuadrado de sus lados.** Se demuestra en base a las proporciones.
2. Lema 2: **Dado un círculo C de área $a(C)$ y un número $\varepsilon > 0$, existe un polígono regular P de área $a(P)$, inscrito en C, tal que $a(C) - a(P) < \varepsilon$**. Se demuestra en base al Método de Agotamiento eligiendo como M_n la diferencia entre el área del círculo y un polígono de n lados.

   Con los lemas enunciados se demuestra el siguiente Teorema:

   Si C_1 y C_2 son círculos de radio R_1 y R_2 respectivamente, entonces $a(C_1)/R_1^2 = a(C_2)/R_2^2 = \pi$



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{A_1}{R_1^2} = \frac{A_2}{R_2^2} = \pi$$

La prueba de este teorema se debe a Euclides y se emplea el método de agotamiento y una doble reducción al absurdo. Por otro lado Arquímedes deduce **exactamente** la constante de proporcionalidad π, aunque numéricamente no avanza más allá que una cantidad relativamente reducida de términos (pensemos que no tenía calculadora ni la nomenclatura de nuestros días, pero la encuentra con un error alrededor del 0.03% o sea con un error del 3/10000…). Sin embargo no será π el motivo de la parte final de mi exposición, que a continuación comienzo.

Describiré parcialmente la tremenda genialidad de Arquímedes, matemático griego que vivió entre los años 287 y 212 AC en Siracusa, ciudad perteneciente a la actual isla italiana de Sicilia. En el desarrollo de su obra, se adelanta en casi 20 siglos al cálculo integral, con una potencia y creatividad no superada hasta la llegada en el siglo XVII de Isaac Newton (a entender de muchos, la mayor mente que la raza humana conoció. Aunque yo tuve un colega en la Universidad que lo negaba porque era inglés…)

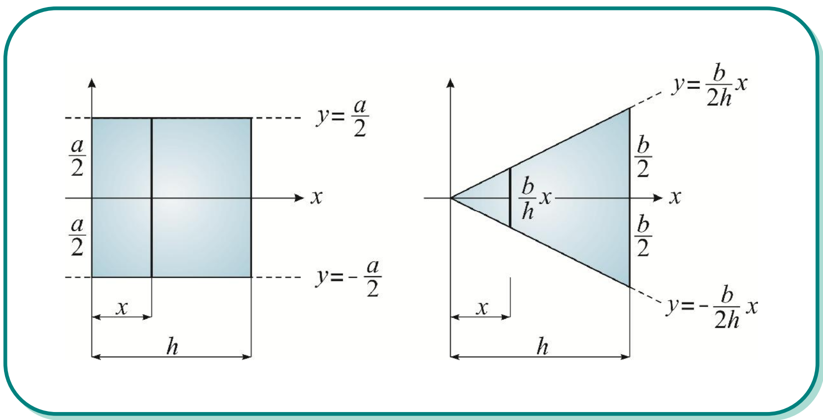
Deseo mostrar lo cerca que Arquímedes estuvo del cálculo integral (aunque no del diferencial) trabajando solamente con la ecuación de algunas curvas planas simples y centros de gravedad que previamente conocía y cuyas leyes enunció, con la superficie del círculo, el número π, y **las leyes de la palanca** que también le corresponden.

Permítanme otra anécdota personal que es una confesión de parte pero que a esta altura de mi carrera puedo reconocer si bien no solucionar… Dictaba Elasticidad en la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional, y en una bolilla correspondiente a las ecuaciones de equilibrio, debía utilizar los teoremas de la divergencia, es decir las identidades para pasar de integrales dobles a triples y viceversa, que mis alumnos habían visto, en el mejor de los casos, varios años antes (hoy día tengo mis serias dudas, aunque estén en los programas de análisis, de que siquiera se nombre el tema…). No era mi pretensión que los muchachos recordaran las expresiones ni exigirlas en los exámenes, sino recurrir a la herramienta y la vía para llegar a un resultado. A los que todavía no se habían dormido ni desmayado, trataba de motivarlos diciendo entre otras cosas:

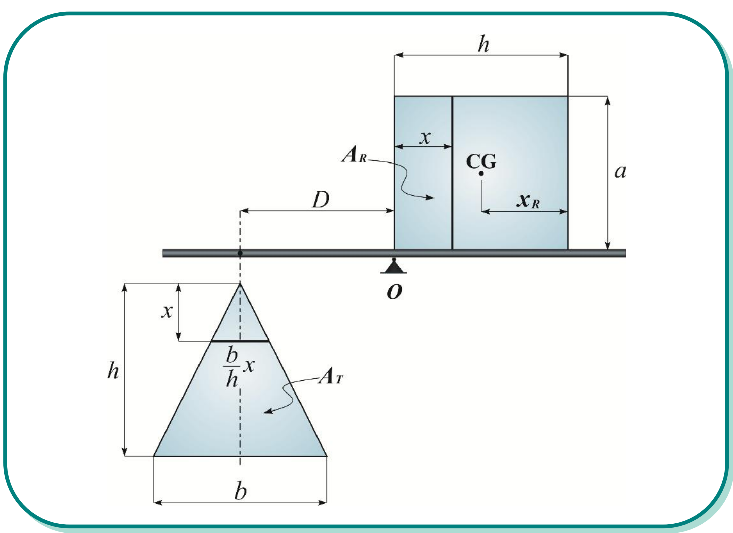
“Piensen que sin el cálculo integral, no conoceríamos los volúmenes de los cuerpos sólidos que usamos corrientemente, como por ejemplo el de la esfera…”. Esta afirmación era una falacia debida en ese tiempo a mi ignorancia sobre la obra de Arquímedes; lo supe tiempo después, cuando un colega (matemático) me recomendó dos excepcionales libros, y leí “Gemas del Cálculo” de George F. Simmons y “El desarrollo histórico del Cálculo” de C. H. Edwards Jr. En ellos “descubro” que Arquímedes con la palanca de primera clase había resuelto semejante problema nada menos que 2200 largos años atrás… Con el tiempo accedí a otros libros sobre el tema, siempre motivado por la idea del título de la presente conferencia, pero el papelón íntimo no me lo quita nadie y esta confesión me alivia en algo y me confirma un viejo apotegma: “nunca te arrepentirás de quedarte callado…”

En las siguientes láminas describiré rápidamente de qué forma Arquímedes (con una palanca de primera clase sin peso) calcula la superficie del triángulo (área encerrada por rectas) conociendo la superficie y centro de gravedad de un rectángulo.

Sean un rectángulo y un triángulo isósceles del cual queremos calcular su área A_T, $x \in [0, h]$



Arquímedes ubica apropiadamente las áreas sobre una palanca sin “peso” de primera clase.



Conoce $A_R = a \cdot h$ y $x_R = \dfrac{h}{2}$, desea hallar A_T

Sea m_{OR} el momento de una línea del rectángulo “apoyado” perpendicular al eje respecto del apoyo (fulcrum):

$$m_{OR} = a \cdot x$$

y m_{OT} el momento de las líneas del triángulo “colgado” perpendiculares al eje y cuyo centro de gravedad (CG) por simetría es en el centro de cada segmento o sea:

$$m_{OT} = \frac{b \cdot x}{h} \cdot D$$

Para que la palanca esté en equilibrio para todo x

$$m_{OR} = m_{OT}$$

O sea se halla que:

$$D = \frac{a \cdot h}{b}$$

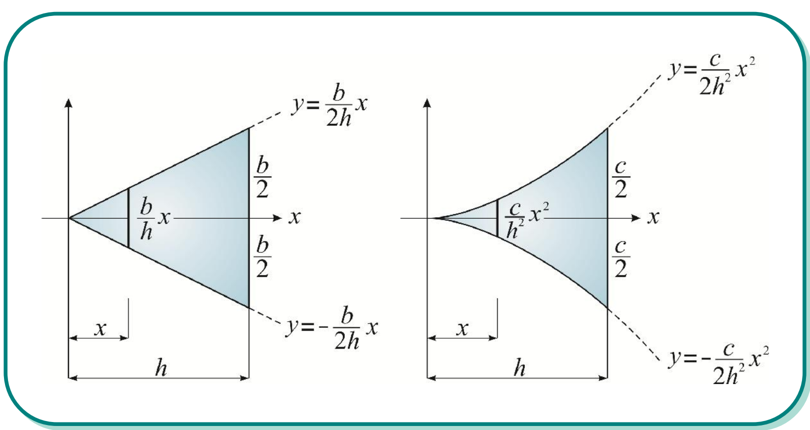
Si se verifica el equilibrio para cada “tajada” se cumplirá para las áreas que son “llenadas” por los segmentos y entonces:

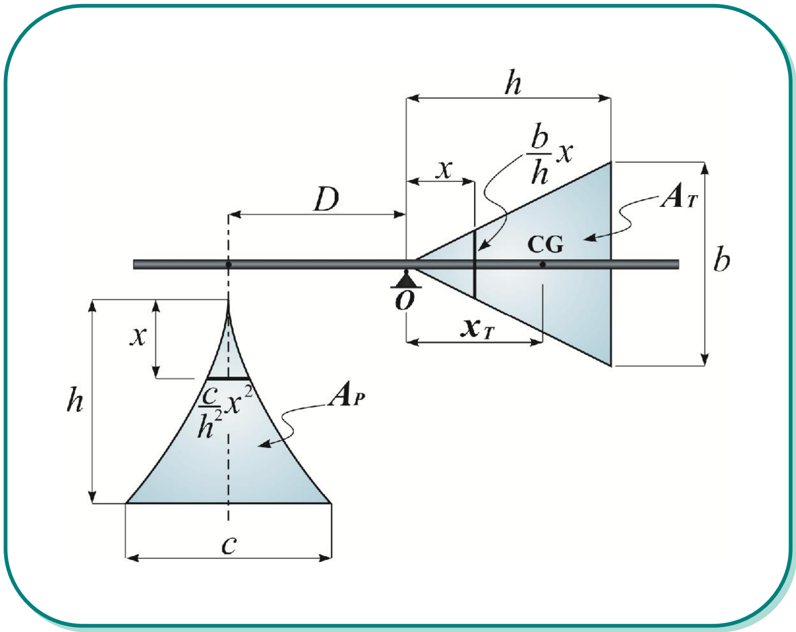
$$A_T \cdot D = A_R \cdot x_R$$

$$A_T \cdot \frac{a \cdot h}{b} = \frac{a \cdot h^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}$$

Agrego un segundo ejemplo calculando el área encerrada por parábolas de segundo grado conociendo el área y centro de gravedad del triángulo.

Análogamente busca el área A_P de un segmento parabólico en base a A_T y la ubicación del CG del triángulo.





Conoce $A_T = \frac{b \cdot h}{2}$ y $x_T = \frac{2}{3} \cdot h$

El momento m_{OT} de una línea del triángulo "apoyado" perpendicular al eje respecto del apoyo (fulcrum):

$$m_{OT} = \frac{b \cdot x}{h} \cdot x$$

el momento m_{OP} de las líneas del segmento parabólico "colgado" perpendiculares al eje:

$$m_{OP} = \frac{c \cdot x^2}{h^2} \cdot D$$

Si la palanca esté en equilibrio para todo x

$$m_{OT} = m_{OP} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{b \cdot h}{c}$$

"Llenando" las áreas con los segmentos obtenemos:

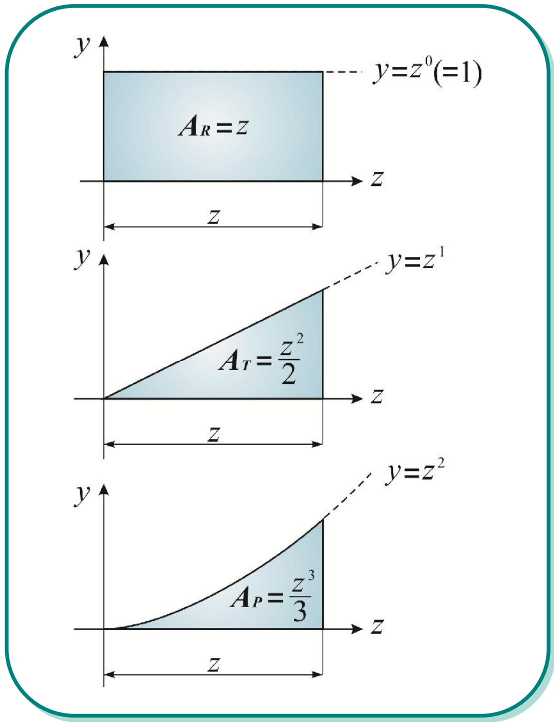
$$A_P \cdot D = A_T \cdot x_T$$

$$A_P \cdot \frac{b \cdot h}{c} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_P = \frac{c \cdot h}{3}}$$

Se podría seguir –no se alarmen, no hoy- pero estos ejemplos muestran cómo este genial personaje del mundo antiguo encontró el algoritmo para la integración de polinomios (muy cercano al cálculo integral moderno).

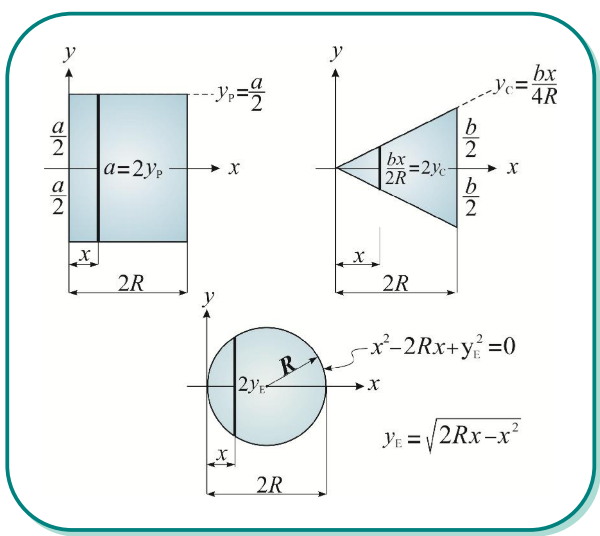
En efecto, si en las figuras anteriores hacemos $h = z$ y respectivamente:

$\frac{a}{2} = z^0$, $\frac{b}{2} = z^1$ y $\frac{c}{2} = z^2$



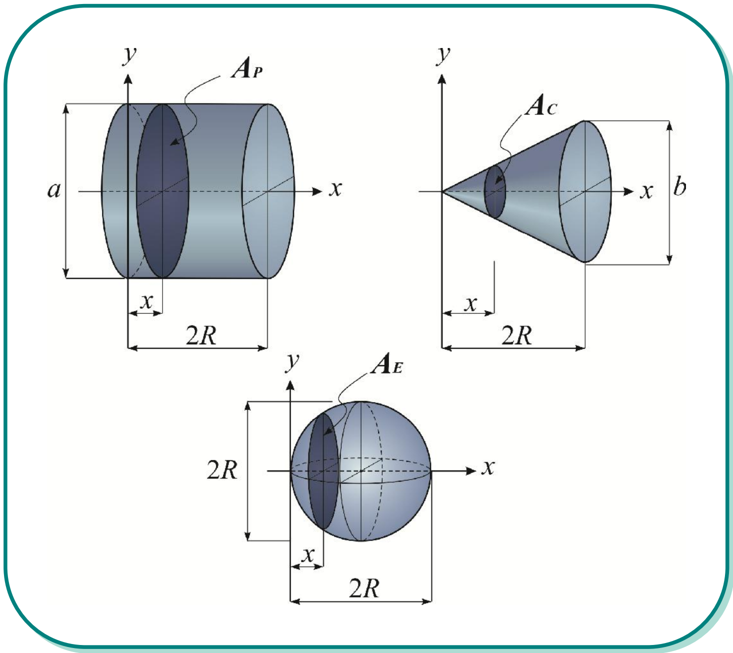
El último ejemplo que mostraré, entonces, para corroborar que Arquímedes -que fue muerto por un soldado en la segunda guerra Púnica aunque existía la orden de los generales romanos de tomarlo vivo- hubo uno solo, y admirar cómo halla exactamente el **volumen de una esfera empleando la palanca...**

Sean tres superficies planas generadas por curvas de ecuaciones conocidas $x \in [0, 2R]$ donde R es el radio de la circunferencia (también de la esfera)



Se hacen rotar las tres figuras alrededor del eje x generando respectivamente un prisma circular, un cono y una esfera.

Para cualquier valor de x indicamos las superficies ("tajadas") circulares.



Vemos que $\forall x$ las áreas de los círculos sombreados valen:

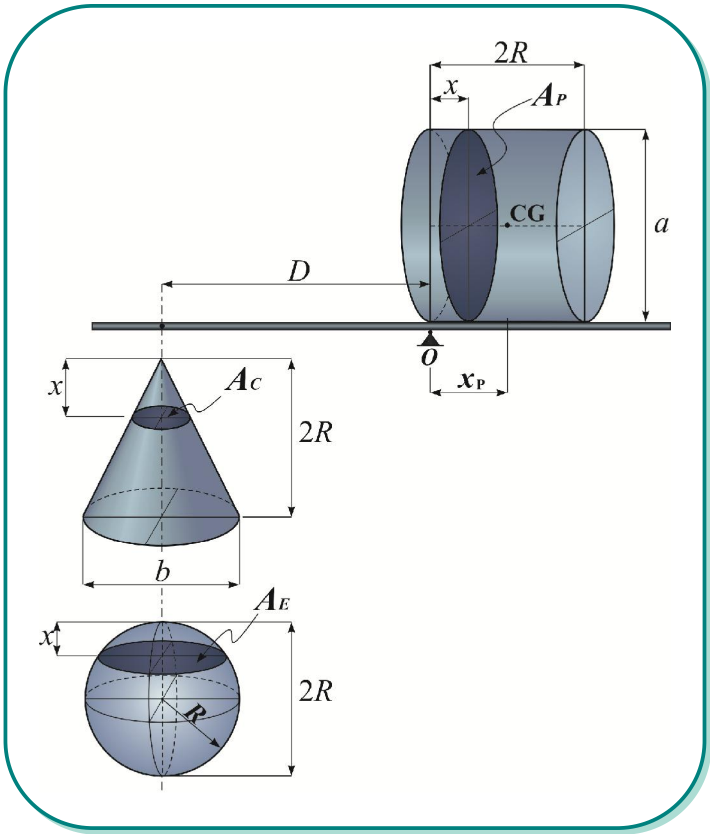
$$A_P = \pi \cdot y_P^2 \ ; \ A_C = \pi \cdot y_C^2 \ ; \ A_E = \pi \cdot y_E^2$$

O sea:

$$A_P = \frac{\pi \cdot a^2}{4} \ ; \ A_C = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot x^2}{16R^2} \ ; \ A_E = \pi \cdot \left(2R\,x - x^2\right)$$

Sobre una palanca sin "peso" de $1^{\text{ra.}}$ clase ubicamos adecuadamente los sólidos y equilibramos las "tajadas" circulares "apoyando" a la derecha del apoyo el cilindro y "colgando" a la izquierda el cono y la esfera. El momento de cada tajada circular respecto del apoyo vale respectivamente

$$m_{OP} = A_P \cdot x \ ; \ m_{OC} = A_C \cdot D \ ; \ m_{OE} = A_E \cdot D$$



Para que la palanca esté en equilibrio debe cumplirse entre tajadas circulares con cualquier x que:

$$m_{OP} = m_{OC} + m_{OE}$$

O sea:

$$\frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot x = \left[\frac{\pi \cdot b^2 \cdot x^2}{16R^2} + \pi \cdot \left(2R\, x - x^2 \right) \right] \cdot D$$

Polinomio homogéneo de 2° grado en x.

Factor de x^2: $\quad \frac{\pi \cdot b^2}{16R^2} - \pi = 0$

Factor de x: $\quad \frac{\pi \cdot a^2}{4} = 2R\, D\, \pi$

Entonces

$$b = 4R \quad ; \quad D = \frac{a^2}{8R}$$

Digamos que Arquímedes tuvo la "fortuna" del genio que investiga. En efecto para tajadas circulares cuyas áreas crecen con x (cono), crecen y disminuyen con x (esfera), y se mantienen fijas con x (cilindro), obtiene un valor de D independiente de la coordenada x…

Esto garantiza equilibrio de las superficies circulares $\forall x$.

"Llenando" los sólidos con las superficies circulares correspondientes y conociendo que:

- V_P (volumen del prisma): $V_P = \frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot (2R)$
- V_C (volumen del cono): $V_C = \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot \frac{2R}{3}$
- $x_P = R$ (distancia del CG del prisma al apoyo)

y denominando V_E al volumen de la esfera buscado se debe cumplir el equilibrio también para los sólidos, o sea:

$$\left(V_E + V_C\right) \cdot D = V_P \cdot x_P$$

Obtiene así que:

$$\boxed{V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \, R^3}$$

Es decir, Arquímedes se adelantó contando solamente con mecánica del cuerpo rígido y geometría euclídea a las integrales triples. Es probable que algunos de ustedes conozcan el método, pero de todas maneras creí que era muy interesante describirlo someramente, más aún considerándolo como uno de los logros más reconocidos por la ciencia de todos los tiempos, pero especialmente todavía, al tomarlo como envión final para concluir y redondear el título de esta exposición que no definí claramente todavía, y que ustedes suspirando educadamente tal vez ya entrevean, aunque sin la confirmación clara, la idea que me motiva. De todos modos, Arquímedes dejó mucho más. No es el caso ni mi intención siquiera relevar sucintamente su increíble obra. Quise solo, destacar cómo aparecen los primeros atisbos del **cálculo integral**.

La clásica era del desarrollo matemático griego abarcó desde aproximadamente el año 600 AC al 400 DC: Apolonio y las secciones cónicas; Herón y el principio del área del triángulo con el semiperímetro; Pappus y los centros de gravedad de sólidos y superficies de revolución; Hypatia, la primera mujer en matemáticas. Pero como expresamos, alcanzó su climax alrededor del tercer siglo AC con Arquímedes.

Con la caída del Imperio Romano Occidental en el siglo V DC (año 476), Europa Occidental permanece en una oscuridad científica comparada con el encumbramiento griego precedente. Por no ser un historiador de la ciencia no incluyo nada de la matemática árabe e hindú que es mucha y abrevió, mejoró y desarrolló la herencia científica griega. Lo que pretendo, como dije, es encauzar mi charla hacia la motivación y justificación del título elegido.

Es así que aparece en este veloz vuelo de pájaro acerca de longitudes, áreas y volúmenes, la figura de Fermat (el del famoso Último Teorema de Fermat) hacia los primeros años del 1600 (siglo XVII). Dejé de lado personalidades como Kepler, Descartes, y Mersenne. ¿Por qué? Porque mi propósito es concentrarme en las primeras construcciones de la tangente de curvas analíticas. Esta tarea precede el tratamiento de la integración y el cálculo de áreas bajo las curvas. Y quien primero resolvió los problemas de máximos y mínimos, tomando en consideración el comportamiento de una función cerca de sus valores extremos, fue justamente Fermat. Lamentablemente nunca explicó con suficiente claridad la base lógica de su método. Pero resolvió problemas notables, aunque de ninguna manera recurrió al concepto de límite, que hoy los ingenieros, entre otros científicos y técnicos, absorbemos, aceptamos y manejamos en los primeros años de nuestra preparación universitaria.

Dejo también de lado a Cavalieri, Torricelli, Pascal y Huygens para, por fin, llegar a la **figura excluyente del pensamiento en el planeta Tierra hasta nuestros días: Isaac Newton (1642-1727)**.

Otra digresión. La última... En general, estoy convencido que cada vez más -la afirmación, ojalá que sea temeraria, corre exclusivamente por mi cuenta- en nuestro país la educación del ingeniero se está transformando en una preparación con tres desabridos ingredientes simultáneos: por un lado la actitud del alumno de esperar recetas prácticas que alguien (seguramente un ser "superior y especial" y desconocido y casi seguro extranjero) ya trabajó y deglutió y facilita para que nuestros estudiantes no deban pensar ni esforzarse. Por otro es la decepcionante y superficial divulgación en las diversas cátedras solamente de resultados, usos y esfuerzos de otros (de la calidad, tipo y nivel que vemos en los canales de cable) sin la particular profundización que cualquier tema requeriría en el marco de la formación de los ingenieros. El tercer ingrediente consiste -por creer ingenuamente en las buenas intenciones- en incrementar la formación del alumno con la inclusión de un sinnúmero de gabinetes y materias (del tipo "ingeniería y piquetes" o similares) en desmedro de la carga horaria de algunas materias y la desaparición traumática de otras asignaturas ingenieriles propiamente dichas. Para complementar el panorama (quizá exageradamente apocalíptico), les adiciono una experiencia que me sorprendió en su momento. Hace unos pocos años actuaba como jurado en un concurso para cubrir un cargo de Profesor en Álgebra y Geometría Analítica en ingeniería. La única candidata de buenos antecedentes y muy buena exposición superó la prueba sin inconvenientes. Cuando procedemos al coloquio entre jurados y postulante, nos solicita permiso para hablar de un programa que había diseñado. Nos pareció muy buena la idea ya que seguramente, pensé, se trataba de algo técnico y de uso específico para la asignatura. Pero, en cambio, se trataba de un programa sobre un "video-juego" electrónico (por definirlo de alguna manera) para que el alumno, utilizando un montón de horas y divertimento en clase, pudiera llegar a vislumbrar y supuestamente a entender **<u>qué era un sistema lineal de ecuaciones</u>** ya que estábamos en presencia de un "tema complicado"… En fin. Si un alumno de ingeniería no puede darse cuenta llanamente de lo que significa un sistema de ecuaciones (como por otro lado lo hicimos tantos y muchos más continúan haciéndolo tanto aquí como en el resto del mundo), debe elegir otra orientación u otra carrera donde esta "gigante dificultad y otras análogas" no le aparezcan evitando las pérdidas injustificables de tiempo, esfuerzo y dinero…

Lo que quiero expresar, casi con cierta tristeza, es que por ley natural los vacíos se llenan. Si nuestra preparación continúa desvaneciéndose, otros, con más capacidad, complementarán nuestra tarea que no podremos afrontar fehaciente ni eficazmente.

Esta cháchara tuvo la finalidad de dejar caer que quizá en un tiempo no muy lejano, también se eliminen de la currícula los análisis matemáticos en ingeniería. Esta alternativa quitaría sentido a la presente exposición con su ostentoso título. Por ello antes de que esta debacle se produzca, paso a hablar de Newton, y de sus relevantes descubrimientos.

Si se le preguntara a una persona de la calle con media formación, si sabe quién fue u oyó hablar de Newton y qué hizo, es probable que si es capaz de responder, dirá que se la cayó una manzana y descubrió la Ley de Gravedad. Lo que es relativamente cierto. También leeremos en los suplementos científicos periodísticos visuales y escritos y en la mayoría de los textos científicos que manipulamos, que trabajó en óptica, que propuso el comportamiento corpuscular de la luz y la descomposición espectral de la misma. También esto es plausiblemente verdad.

Pero prácticamente ninguno señalaría cual es, a mi entender, el aporte más destacado, y que en pocas palabras y a continuación esbozo sus principales detalles. Se trata no sólo de la mera invención de un hecho importante y fundamental sino el reconocimiento de que el mismo es importante. Esto establece la base de futuros progresos. A veces la simple creación de una palabra o la notación para expresar una clase de ideas, se convierte en un hecho científico, y conecta las ideas y el pensamiento subsecuente. En el caso de Newton -también de Leibniz, y la historia todavía no encuentra al vencedor en esta "guerra del cálculo"- se trata de algo verdaderamente excepcional. Es el descubrimiento del cálculo diferencial e integral o simplemente cálculo, pero unido al reconocimiento por primera vez de su significado excelso expresado por **el teorema fundamental del cálculo**. Es decir, explícitamente plantea la relación inversa entre los problemas de la tangente a una curva y al área bajo ella. En terminología de nuestros días, la relación inversa entre derivadas e integrales. Antes de la contribución de Newton y Leibniz, los predecesores no lograron captar el profundo sentido del teorema y reconocer que daba fundamentación a un nuevo sujeto caracterizado por un método especial. El genio que nos ocupa muestra la introducción del tema a través de una composición de movimientos, motivando el método de "flujos" (derivadas) y la clave para aplicaciones geométricas. En 1665 Newton estudia el problema de la tangente combinando las componentes de velocidad de un punto móvil. Consideró las curvas, como el lugar de intersección de dos líneas, una vertical y otra horizontal, ambas en movimiento, funciones del tiempo pero independientes. El vector velocidad horizontal es de longitud $\dot{x}$, y el horizontal tiene la longitud $\dot{y}$. Por la composición triangular de los vectores velocidad (ya se conocía para velocidades constantes la ley del paralelogramo), obtiene que la pendiente de la tangente a la curva es $\dot{y}/\dot{x}$. En nomenclatura actual (que por otro lado es la de Leibniz, ya que Newton utilizó otra simbología) había hallado que $\dot{y}/\dot{x} = \frac{dy}{dx}$. El primer problema que aborda exitosamente es el de encontrar los flujos $\dot{x}$ e $\dot{y}$ dada la curva. Es así que resuelve la derivada de un polinomio, donde aparece por vez primera el sentido de pasaje al límite, y habla de tiempos "infinitésimamente cortos".

Tenía, entonces, resuelta la derivación. Newton plantea ahora el problema inverso: encontrar y en función de x, dada $\dot{y}/\dot{x} = \frac{d\,y}{d\,x} = \phi(x)$. Se trata simplemente del problema que hoy denominamos como antidiferenciación o más genéricamente solución de una ecuación diferencial. Newton había señalado que si A es el área encerrada por una curva para cualquier x se cumple que $\frac{dA}{dx} = y$. En su lista de problemas en octubre de 1666, Newton discute el cálculo de áreas por medio de esta idea. Es la primera aparición histórica del Teorema Fundamental del Cálculo en la forma explícita. Adicionalmente es difícil imaginar cómo pudo sentirse Newton, por ejemplo, cuando entre las aplicaciones combina su Ley de Gravedad y su Cálculo para confirmar de forma determinística las leyes de Kepler del movimiento planetario en el sistema solar…

A partir de esos días, el desarrollo en el planeta Tierra cambió para siempre. Todo en el quehacer cotidiano y en cualquier actividad, directa o indirectamente dependen inevitablemente del Cálculo. Por ejemplo la Mecánica clásica, relativista o cuántica, Electricidad, Electrónica, Química, Astronomía, Biología, Genética, Cibernética, Robótica, Comunicaciones, Medicina, Economía, Meteorología, etc. Podría pensarse que las orientaciones humanísticas son independientes de la gran invención. Sin embargo, con solo pensar en la clasificación bibliográfica por medio de bases de datos, de nuevo vemos la dependencia. En fin. Sería imposible tratar de enumerar todo lo que el cálculo ha permitido y seguirá influyendo en el progreso que minuto a minuto observamos actualmente.

Ahora bien, los que emplean o han recibido superficial o profundamente estos conceptos pueden apreciar de qué se trata, frente al llamado de atención que modestamente intento en esta conferencia. De todas maneras, por aquello de que "el mito se pierde con la intimidad", sucede frecuentemente que tal vez no hayamos reflexionado nunca acerca del privilegio de disponer, en alguna medida, de tal información. Los ingenieros estamos entre los que compartimos esta formidable herramienta con otras especialidades que también la reciben. Reclamo, además, que ojalá no se dejen de impartir estos conceptos en la ingeniería argentina, pero también, que se le advierta al alumno durante el dictado, que comenzará a adentrarse en una rama del conocimiento, que es nada menos que el máximo logro de una mente terráquea. No seré yo quien consiga esto. Ni tampoco quien logre de forma sencilla, difundir cuál es la excluyente base del desarrollo humano entre los neófitos, que son la mayoría y tal vez vivan muy felices porque jamás han oído hablar de Newton ni del cálculo. Dentro de mis enormes inseguridades en lo que se refiere a la comunicación, idoneidad y mantenimiento de la atención de forma amena sobre una temática tan elevada, quise aprovechar el momento de sano orgullo al ser incorporado por mis pares como Académico, para contribuir a trasladar, aunque ustedes no lo querían y seguramente mucho menos lo esperaban, una inquietud que tengo desde hace años y que quizá no sea más que una consecuencia de mis propias limitaciones. Ahora bien. Necesitaba, para expresarla, el auditorio al que pudiera llegar y qué mejor que la Academia de Ingeniería de la Provincia de Buenos Aires a la cual pertenecen y han pertenecido Ingenieros, muchos de los cuales incidieron profundamente en mi formación…

Les agradezco la distinción y la oportunidad de compartir este momento.

Nada más.

Dr. Ing. Carlos Pedro Filipich
La Plata. Argentina.
18 de mayo de 2011

REFERENCIAS

- C. H. Edwards, Jr. "The Historical Development of the Calculus" Springer-Verlag New York 1982.
- G. F. Simmons "Calculus Gems. Brief Lives and Memorable Mathematics" McGraw-Hill Inc. 1992.
- J. S. Bardi "A Guerra do Calculo" Editora Record Rio de Janeiro-Sao Paulo 2008.

ADDENDUM:

Por ser el 18 de mayo el día de la Escarapela Argentina y coincidir con la fecha de la charla, agregué espontáneamente una anécdota ficticia para tratar de amenizar… Es esta: meses atrás le comenté a un conocido muy muy envidioso, que estaba por ser designado como Académico. Me respondió lleno de ira, "vos no vas a ser Académico ni el día de la Escarapela", y sin embargo no tuvo razón. Hoy me incorporo como Académico y es el día de la Escarapela…