EL INFINITO AL ALCANCE DE LA MANO

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL

JUAN EDUARDO NÁPOLES VALDES

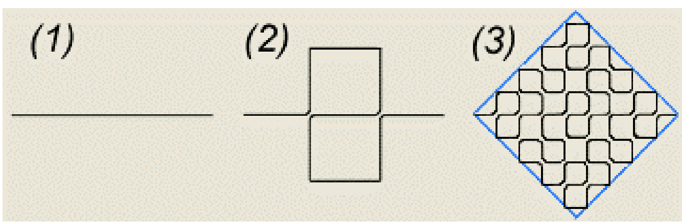
2003

Conferencia 1

INTRODUCCIÓN. Euclides (Siglo III) edificó su geometría a partir de la intuición, por nuestros sentidos, del espacio exterior. Los conceptos básicos se adaptaban a la experiencia sensible, dependiendo del grado de aproximación de las formas y extensiones que el hombre podía percibir directamente. También la mecánica, muy vinculada con la geometría, dependió de los intervalos de tiempo adaptados a nuestra vida fisiológica y a la duración media de la misma. Si pudiéramos admirar los pequeños detalles de la realidad circundante, y la duración de nuestra vida fuera de miles de años o fracciones de segundo, el concepto del mundo exterior hubiera sido muy distinto e igualmente diferentes hubieran sido, seguramente, la geometría y la mecánica, aún conservando las mismas características del razonamiento deductivo para descubrir y ordenar los conocimientos.

Hoy todo el mundo está familiarizado con los gráficos, especialmente con los que indican el crecimiento de ciertos indicadores económicos en función del tiempo. La idea de que cualquier punto del plano puede representarse mediante dos números x e y, o sea, el isomorfismo entre el plano y $\mathbf{R}^2$, es tan simple (como todas las ideas geniales), que resulta sorprendente que el mundo tuviera que esperar hasta 1637, para que Descartes tuviera dicha idea.

Pensemos en la idea de curva. Para los griegos, y durante siglos, la idea de curva se correspondía con la trayectoria de un punto móvil y, por tanto, en cada punto debía haber



Curva de Peano

una dirección de llegada y otra de salida, las cuales podían coincidir, como ocurría de manera general, excepto en alguno puntos singulares en los que el cambio brusco de dirección se traducía en una discontinuidad de la tangente o bien, desde Newton, en una discontinuidad de la derivada de la función cuyo gráfico era la curva considerada. Las curvas sin tangente en ningún punto (Weierstrass) o las que llenan un área (Peano) no aparecen hasta el siglo XIX, ya con una matemática muy evolucionada, y aun así fueron consideradas como casos patológicos, producto del poder razonador de la matemática, pero lejos de toda intuición y, con ello, lejos de toda interpretación vinculante con algún fenómeno natural apreciable por la intuición.

Las ideas simples de recta y plano, o de otras figuras elementales de la geometría tradicional, no tendrían interpretación en la naturaleza vista con detalles más amplios, como tampoco existiría la regularidad y la armonía de los movimientos de los cuerpos celestes si se pudieran contemplar, condensados, a través de miles o millones de años. Si se mide la longitud de una costa en kilómetros, despreciando pequeñas irregularidades, se obtiene un valor finito y una forma dibujable en un mapa corriente a una escala no demasiado grande. Pero si se intenta medir o dibujar la misma costa con precisión de milímetros o unidades menores, teniendo en cuenta todos los pequeños entrantes y salientes, se obtiene una curva completamente irregular, es decir, lo que en un mapa ordinario es una curva regular y simple, en la realidad, si se toma una escala mucho mayor, resulta un continuo de zig-zags con pequeños segmentos de longitud tendiente a cero, y con una longitud total tendiente a infinito[1].

Todo esto hace que hoy se piense en una nueva geometría, cuyos objetos se presentan muy irregulares y los sucesos poco o nada predecibles (sistemas caóticos). Es la llamada

[1] Este es el primer ejemplo de "fractal" propuesto por Mandelbrot, ver de su autoría **"Los objetos fractales"**, Editorial Tusquets, traducción castellana, Barcelona, 1988 y **"The fractal geometry of Nature"**, W. F. Freeman, N. York, 1983.

geometría fractal, de la que vamos a dar algunas ideas generales. El nombre de fractal procede de que estudia conjuntos de puntos para los cuales se puede definir, de cierta manera, una dimensión fraccionaria, dimensión que-permite medir el, grado de complejidad del conjunto, variando desde las curvas corrientes de dimensión uno, hasta curvas que llenan áreas del plano, de dimensión dos. También se han estudiado fractales en el espacio y espacios de más dimensiones, pero aquí no los vamos a considerar[2].
A primera vista, puede parecer una geometría artificial, sin conexión con la realidad, pero como observa Mandelbrot (introductor de la palabra "fractal") es solamente una cuestión de escala y, en realidad, los fractales aparecen en la Naturaleza con mucha más frecuencia que las curvas regulares, las cuales resultan solamente al tomar la realidad en primera aproximación. En el movimiento browniano de partículas, la distribución de las estrellas en las galaxias, las formas del relieve terrestre, los fenómenos turbulentos y en muchos otros casos, aparecen los fractales de manera natural. Según Mandelbrot, *"la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo infinitesimal"*.
Los fractales aparecen muchas veces como iteración de procesos geométricos regulares, al estilo clásico, pero que al repetirse sucesivamente van complicando su forma. Los modelos de estas repeticiones son solamente realizables a través de computadoras, que pueden operar con números grandes y con muchas cifras decimales. Por esto los fractales están muy unidos al uso de las computadoras y es a través de ellas que se están estudiando en su gran variedad de forma que, a su vez, dan lugar a muchos interesantes y difíciles problemas teóricos.
Bueno, finalmente llegó el momento de compartir este curso “Una Introducción a la Geometría Fractal”. Como su nombre lo indica el mismo intentará dar un amplio panorama acerca de esta emergente rama de la Matemática, mostrar sus aplicaciones en distintas y variadas disciplinas, si bien el propósito del curso será de carácter general, paralelamente haré hincapié y profundizaré en la parte de creación de algoritmos y como acabo de mencionar la parte puramente teórica de la Matemática que involucra a los Fractales.
Sinceramente espero que les resulte de interés, utilidad y que lo disfruten. Espero también que este sea el punto de inicio de varios proyectos que puedan surgir en el futuro.
Para introducirnos de lleno en el mundo de los Fractales, lo primero que quiero contarles son las primeras palabras del libro **“Fractals Everywhere”** (**“Fractales en todos lados”**) de Michael F. Barnsley, uno de los pioneros y más importantes divulgadores del tema que existen: *“La Geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares".*
¿Creen que Michael exageraba?. En realidad esa pregunta no la podrán contestar hasta que no hayan finalizado este curso. Una de mis misiones es mostrarles que ese párrafo solo refleja la realidad y la visión de miles de científicos y artistas de todas las gamas sin importar de que rama cultural provengan o en que especialidad desarrollen sus actividades. Esta visión se incrementará más aún en todos aquellos que decidan utilizar programas de computadoras (los cuales veremos en clases futuras) para comenzar a navegar, crear y descubrir *infinitas* y hermosas estructuras matemáticas a las cuales llamamos Fractales.
Una importante advertencia que siempre me gusta mencionar al comienzo de toda charla es la de tener un obsesivo cuidado de no ver estructuras fractales donde no las hay. Uno de los objetivos de esta primera conferencia es la de reconocer tales sistemas, lo cual profundizaremos cuando veamos más en detalle la Teoría del Caos. Como decía Barnsley en su impactante párrafo, la imagen de los objetos naturales que nos rodean cambiará de manera contundente, así que la advertencia queda hecha.

[2] Ver Mandelbrot (1983).

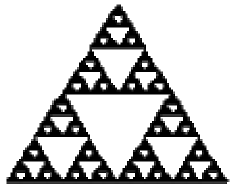


Figura 1. El triángulo de Sierpinski

Un poco de historia. Los Fractales son los objetos matemáticos que constituyen la Geometría de la Teoría del Caos. Los sistemas caóticos y dinámicos fueron conocidos y descubiertos mucho antes que los Fractales. De hecho se pueden encontrar y reconocer figuras con características fractales como la del triángulo de Sierpinski (ver Figura 1) en grabados de tela de hace varias décadas atrás, hasta en los años de 1400 se hallaron grabados japoneses con estas estructuras.

Antes de que Newton, Leibniz y colaboradores crearan en el siglo XVII lo que hoy conocemos como Calculus y estudiamos en la facultad como Cálculo, Análisis Matemático o Cálculo Infinitesimal, se conocían funciones con abrutas irregularidades y discontinuidades, pero los científicos de aquella época supusieron que esas mismas funciones discontinuas eran muy escasas y que raramente surgirían en sistemas naturales, por lo que las consideraban excepciones a la matemática tradicional y simplemente las dejaban de lado.

Un grupo de matemáticos comenzó a darse cuenta que en la naturaleza se daba muy seguido el fenómeno de irregularidades y que no eran excepciones como se suponía. Los primeros que comenzaron a demostrar teóricamente esta problemática fueron Cantor (con su famoso y casi místico conjunto de Cantor, Figura 2) y Peano. Hasta llegar a los años de 1880 con Poincaré, al que se lo conoce como el padre de la Teoría del Caos.

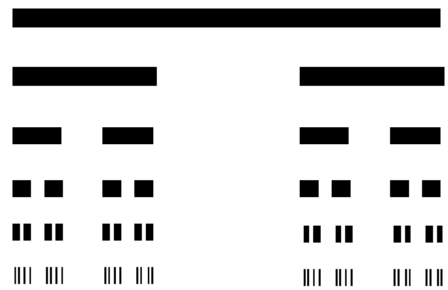
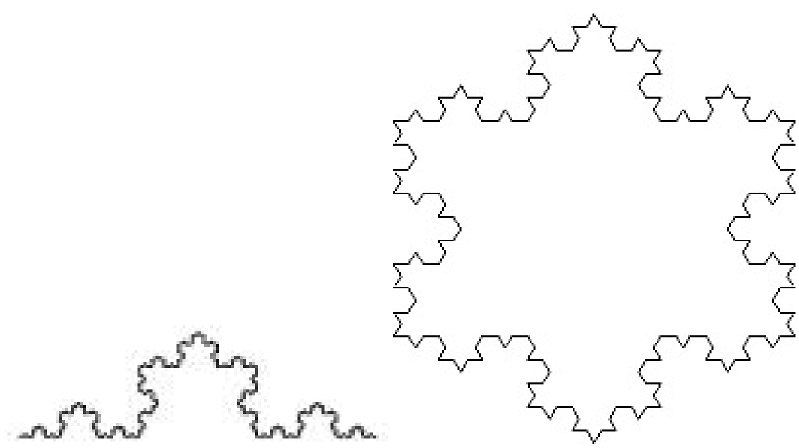


Figura 2. Conjunto de Cantor



3-A 3-B

Figura 3. El Copo de Nieve de von Koch ó Snowflake

Otra estructura matemática ya conocida en esa época y que más tarde pasó a formar parte de uno de los fractales más reconocidos es el de Koch "Snowflake" Curve, o la curva de "Copo de nieve" de Helge von Koch (Figura 3).

Entonces, hasta el momento vimos de manera general como los sistemas dinámicos y caóticos se fueron introduciendo en el pensamiento de la comunidad científica y como fueron surgiendo nuevas necesidades para reformular teorías y crear nuevas herramientas que pudieran describir sistemas que hasta ese entonces eran considerados excepciones y a los cuales se les realizaban diferentes aproximaciones y se les aplicaban diversos "trucos" matemáticos para ajustarlos a las herramientas disponibles en esos tiempos. Más adelante veremos los problemas que surgen al aplicar estos tipos de técnicas de aproximación y omitir variables y detalles que con el trascurso del tiempo pueden derivar en sistemas caóticos y totalmente impredecibles, pero no nos adelantemos.

Hemos visto también que objetos con estructuras que hoy reconocemos como fractales han existido durante muchos años (basta tomar como ejemplo las figuras anteriormente mencionadas) y es por ello que diversos libros y autores difieren al contarnos la historia de cómo surgió esta rama de la Matemática.
A pesar de toda esta introducción aún no les he contado como nacieron los fractales propiamente dichos ni como fueron formulados teóricamente.

¿Cómo surgieron los Fractales?[3]. Ahora sí, por fin llegamos. No fue hasta el año 1958 cuando Benoit Mandelbrot ingresa a trabajar en los laboratorios de IBM para hacer un análisis del ruido y perturbaciones eléctricas. Mientras realizaba dichos estudios encontró un patrón en su comportamiento y por lo tanto comenzó a descifrar una estructura escondida. Algo así como jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas, fluctuaciones que no podían ser descriptas por la matemática estadística que existía. Mientras seguía adelante con sus tareas empezó a imaginar en que otros sistemas podría encontrar patrones similares que no puedan ser descriptos con exactitud por la matemática existente y que se comportaran de igual manera. Su visión lo llevó a hacerse una pregunta que para la mayoría de nosotros puede resultar obvia y hasta para muchos otros ser tonta o en el mejor de los casos sin sentido. Su famosa pregunta fue ¿Cuánto mide realmente la costa de Inglaterra?. Ok, cualquier que tome un libro de geografía o un mapa va a poder contestar esto sin ningún tipo de problema. Imaginemos que el dato que encontramos es de 12.429 kilómetros[4]. Ahora bien, esos 12.429 Km., ¿de donde provienen?. ¿Cómo se midieron?. Para contestar esto voy a proponer 3 situaciones diferentes, con distintos puntos de vista:

1) Si medimos las costas de Inglaterra desde un satélite, vamos a ver que sus bordes son suaves, armónicos, con líneas casi rectas y ángulos prácticamente redondeados.
2) Probemos ahora medir la misma distancia, pero desde un avión que vuela mucho más bajo que el satélite. Qué pasa en este caso? Ahora que vemos las cosas con más detalle por estar más próximos, nos damos cuenta que los bordes no eran en realidad tan suaves como se había observado anteriormente, sino que notamos muchas más rugosidades.
3) Imaginemos por último un tercer punto de partida, algo extremista, pero vale. Esta vez no estamos ni en un satélite, ni en el avión; esta vez nos encontramos parados sobre la misma costa de Inglaterra con una regla como la que usábamos en la escuela, y nos ponemos a medir roca por roca, rugosidad por rugosidad, detalle por detalle.

¿Cuál creen que será el resultado de las distintas mediciones?. Siempre habrá arrojado el mismo resultado?. Si fue variando, ¿cuál habrá sido el de mayor extensión?. Sería bueno que antes de seguir leyendo sacaran sus propias conclusiones y las justificaciones de por qué pasa eso.
La realidad y la geometría tradicional nos muestra que una figura con bordes rectos o redondeados tiene una longitud menor que otra equivalente pero llena de rugosidades. Comparemos por ejemplo un círculo perfecto con la figura que vimos anteriormente de von Koch, (Figura 3-B). La segunda tiene una longitud mucho más grande en sus bordes que la circunferencia. Teniendo en cuenta esto volvamos al caso de la costa de Inglaterra y la

[3] Ver Anexo 1, para algunas fechas significativas en la "historia" de los fractales.

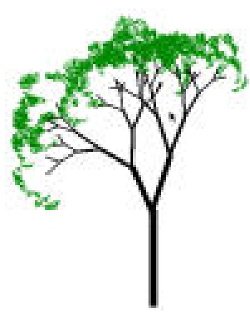
[4] http://www.cia.gov/cia/publications/factbook/

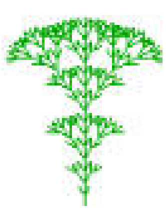
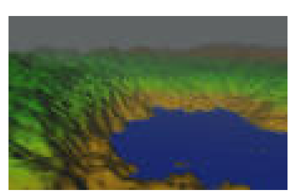
pregunta de Mandelbrot. Si acabamos de decir que una longitud sin rigurosidades es menos extensa que una totalmente irregular, entonces podemos asegurar que los resultados de las 3 mediciones serán en todos los casos diferentes, y el de mayor extensión será el tercer caso, ya que es en el cual nos topamos con más detalles, a los cuales hubo que medir uno por uno. En realidad el resultado de este último caso se acercaría a infinito en el marco teórico.
¿De qué dependerán nuestras mediciones, entonces?. Justamente de la escala que utilicemos para medirlas, y no es para nada una casualidad que estas deducciones se desprendan de los mismos patrones que encontró Mandelbrot en sus estudios sobre flujo electrónico, recordemos *"jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas"*. Esas escalas como Mandelbrot reconoció poseían un patrón, y ese patrón las relacionaba diciendo que si bien no eran iguales a diferentes escalas, si lo eran de manera estadísticamente similar, y ésta es una de las características principales de los fractales ya que mismo pasaremos a estudiar.

¿Qué son los Fractales?. Cada vez que uno toma un libro sobre Geometría Fractal[5] y busca una definición clara surgen por algún motivo diferentes enunciados. Lo que personalmente sospecho que no se trate de un problema de exactitud, sino que se requiere de tal abstracción para comprender el concepto de Fractal que los puntos de vista varían drásticamente por más que se esté hablando de lo mismo. Otra consecuencia puede llegar a ser que la Geometría Fractal se ha trasformado en una herramienta multidisciplinaria utilizada por científicos, artistas, psicólogos, sociólogos, etc ... entonces, un matemático no va a dar una definición de la misma forma que la dará un programador de computadoras o un artista plástico. Por lo tanto, para poder contarles que es un fractal, y al ser este que nos reúne un grupo multidisciplinario, decidí enunciar un conjunto de definiciones y

[5] En la actualidad existen infinidad de escritos sobre el conjunto Mandelbrot, que fue presentado al mundo ajeno a la IBM en el artículo **"Computer Recreations"** (Scientific American, agosto, 1985, pp.16-25). Para lectores interesados en el tema, además del libro de Mandelbrot ya citado (muy técnico y prácticamente inaccesible para el lector matemático medio), recomendamos **"The beauty of fractals"**, Springer-Verlag, 1986 de H.-O. Peitgen y P.H. Richter, que es el primer libro en tecnicolor que muestra el conjunto M, posteriores desarrollos se describen en **"The science of fractal images"**, Springer-Verlag, 1988 de H.-O- Peitgen y Dietmar Saupe. También muy técnico, pero con capítulos preparatorios es **"Measure, topology and fractal geometry"** de Gerald A. Edgar, publicado por la Springer-Verlag en 1990. Mucho más accesible para el lector aficionado (pero intrépido) es **"The Armchair Universe"** (W. H. Freeman, 1988) que contiene el artículo original publicado en el Scientific American en 1985, con actualización e información sobre software disponible para PC. En esta dirección es conveniente señalar **"Geometría Fractal"** (Nueva Librería, Buenos Aires, 1994) de Vera W. De Spinadel, Jorge G. Perera y Jorge H. Perera, con una magnífica introducción matemática al tema. Yo me he sentido muy satisfecho con **"Fractal Creations. Explore the magic of fractals on your PC"** (Waite Group Press, 1991) de Timothy Wegner y Mark Peterson, el cual trata la teoría de los fractales y detalla como usar el programa Fractin V 15.11, revelando la programación en C, que permite construir los fractales rápidamente. Este programa permite generar fractales, así como manipularlos, editarlos y alterarlos. A diferencia de otros programas, los fractales se generan casi instantáneamente (de hecho con este programa es que hemos generado los fractales que ilustran este capítulo). De Michael F. Barnsley es **"Fractals eveywhere"**, Academic Press Professional, 1993[2], el que muestra cómo la geometría fractal puede ser usada para modelar objetos reales en el mundo físico, es considerado el libro de texto sobre fractales más completo hasta el momento. La teoría matemática de la geometría fractal, descansa sobre tres fundamentos matemáticos: la *teoría de la medida*, la *topología métrica* (quizás la más necesaria) y las *probabilidades*. Algunas lecturas recomendadas son W. Hurewicz and H. Wallman-**"Dimension Theory"**, Princeton University Press, 1941; este es un libro sobre dimensión topológica. Quizás no muy actual, pero contiene todo lo necesario a este campo, K.J. Falconer-**"The geometry of fractals sets"**, Cambridge University Press, 1985. Texto moderno dedicado a la dimensión de Hausdorff y C.A. Rogers-**"Hausdorff Measures"**, Cambridge University Press, 1970. Libro dedicado a los aspectos más técnicos de la materia, ilustrando el hecho que los matemáticos habían descuidado muchas cosas, en la dirección dada por Hausdorff.

pensamientos y al final intentar unirlos todos para que junto con mi propia visión, poder formular una definición lo más clara y contundente posible[6].
Empecemos. Por el momento entonces solamente voy a enumerar una serie de frases sueltas:
1) Los Fractales son los objetos matemáticos que conforman la Geometría de la Teoría del Caos.
2) La Geometría Fractal es también conocida como la "Geometría de la Naturaleza.
3) La palabra Fractal, enunciada por Mandelbrot proviene del latín y significa roto, quebrado. (esto se asocia con las discontinuidades de funciones matemáticas que mencionaba en párrafos anteriores).
4) La Geometría Fractal es un nuevo lenguaje; ya que los puntos, rectas, esferas, elipses y demás objetos de la geometría tradicional son reemplazados por algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos.
5) Los Fractales son objetos cuya dimensión es no entera o fraccionaria.
6) Un objeto fractal es aquél que su dimensión fractal de Hausdorff -Besicovich supera a su dimensión topológica.
7) Un objeto fractal es aquél que posee las siguientes dos características: a) Autosimilitud, b) Dimensión Fractal
8) Un fractal es un objeto en el cual sus partes tienen "alguna" relación con el todo. (esto está íntimamente ligado a la Autosimilitud)
Bien, cualquiera de estas ocho definiciones es correcta. Algunas son más completas, otras más técnicas y otras aportan tan solo meros datos pero no llegan a ser definiciones con todas las de la ley.
Veamos algunas en particular. Comencemos con la primera; cada teoría o ley matemática posee sus propias herramientas que la soportan y la describen. Las más comunes son la geometría euclidiana, el álgebra, o el mismo cálculo, este último en especial se da en la Física. La teoría del Caos no es la excepción a la regla, y se sustenta, entre otras cosas, sobre la Geometría Fractal.
La segunda nos dice, que a la Geometría Fractal se la conoce como la "Geometría de la Naturaleza", y este caso no lo voy a explicar con palabras, sino con imágenes:

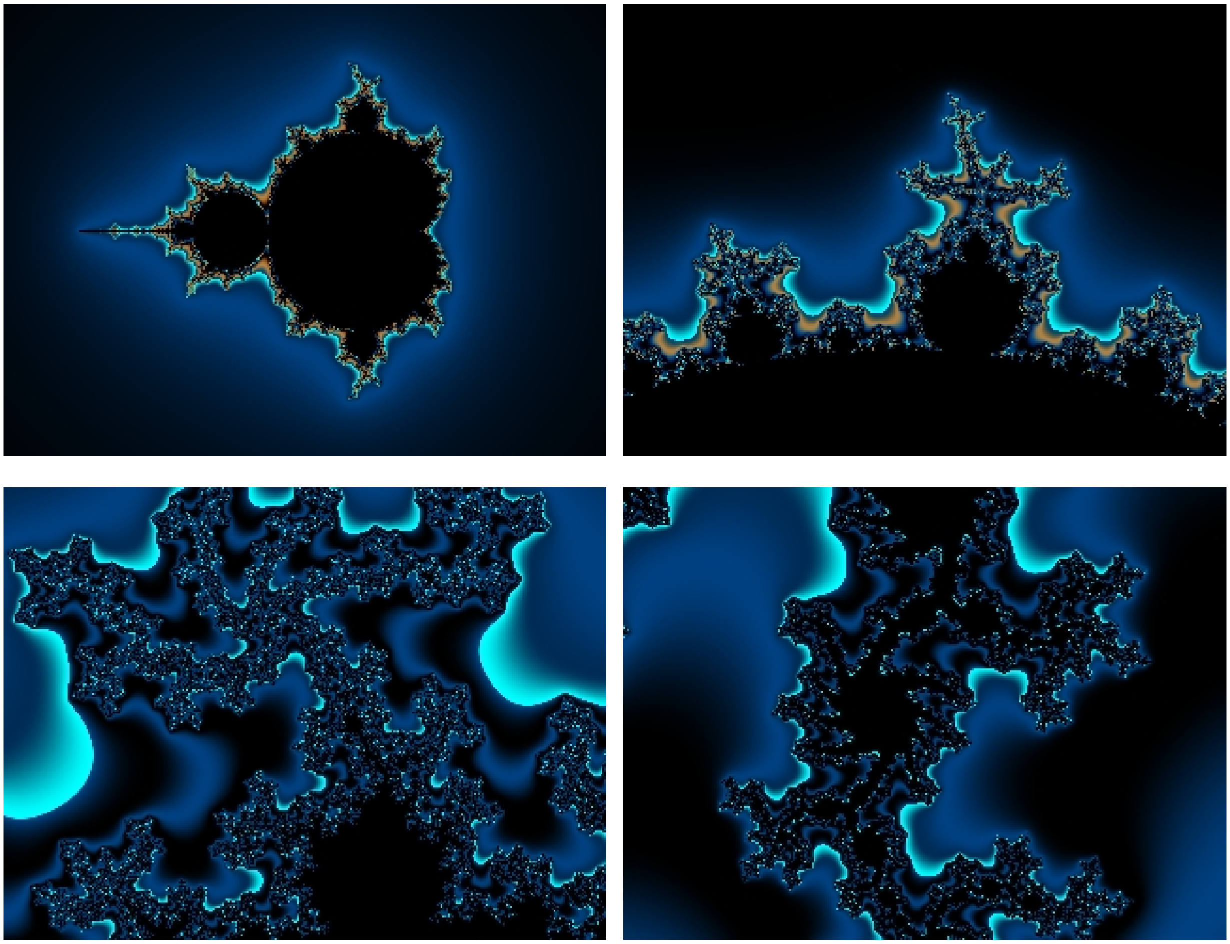




Sigamos adelante. El tema de dimensión fractal y de Autosimilitud es el que viene en la próxima clase. Por lo tanto ahora solo daré algún ejemplo para al menos dejarlos con la idea de que se trata.
a) *Autosimilitud.*

[6] Ver Anexo 2.

Cada porción de un objeto tiene las mismas características del objeto completo. También se puede decir que cada área de un fractal conserva, de manera estadísticamente similar, sus características globales.
Pero veamos un ejemplo gráfico, con el conjunto de Mandelbrot, el fractal más conocido.



La primera de estas cuatro imágenes es el conjunto de Mandelbrot en su estado original, o sea, sin ninguna iteración, o para que se entienda mejor, sin haber hecho ningún ZOOM dentro de la imagen. Las siguientes figuras se generan ampliando un sector del fractal y viendo que se encuentra dentro. Por ejemplo, a la segunda se le hizo un ZOOM, a la tercera cinco ampliaciones consecutivas y por último a la cuarta se le aplicaron 10 ZOOM. Nótese que estoy hablando de un ZOOM inicial en un área determinada, si hubiese elegido otro lugar de fractal donde comenzar a interactuar, hubiese generado imágenes distintas, pero al mismo tiempo estadísticamente similares, sin importar la porción del fractal designado.
Muy importante, noten que no uso la palabra ZOOM con el significado de ampliación de la imagen, sino es solo para dar una idea figurativa, lo que realmente se hace con un software para generar fractales es iteraciones! Lo veremos más adelante. Pero básicamente digo que cada vez que elijo un trozo de imagen para ampliar dentro de ellas encuentro infinitas imágenes similares.
Es tarea de cada uno de ustedes encontrar regularidades en esas imágenes. Cuando las hayan detectado encontrarán patrones similares, eso es justamente la Autosimilitud, característica fundamental de los fractales, aunque veremos que no todos la poseen.
b) *Dimensión Fractal*[7].

[7] Ver Anexo 3.

En Matemática estamos acostumbrados a trabajar con cuatro dimensiones, que son las siguientes:

- Dimensión 0 → Un punto
- Dimensión 1 → Una línea recta
- Dimensión 2 → Un plano
- Dimensión 3 → El espacio

Existe una quinta que es la de un conjunto vacío, se dice que el mismo posee una dimensión de –1.
Existen también otros conceptos distintos de dimensión como los que mencionaba en una de las definiciones anteriores de fractales, y una de ellas es la dimensión de Hausdorff – Besicovich y se basa en la autosemejanza de objetos. Basados en la dimensión de Hausdorff –Besicovich se puede decir que la ya conocida por ustedes Curva de von Koch tiene una dimensión de 1.2619 y supera su dimensión topológica de 1 por generarse a partir de una recta. Por ahora es suficiente, más adelante retomo estos temas. Solo para darles una idea de lo que es una dimensión fractal, fraccionaria o no entera, segunda característica que poseen TODOS los fractales.
Hasta aquí hemos recorrido un camino relativamente largo e intenso para llegar tan solo a poder encontrar una definición lo más justa posible de la Geometría Fractal y que englobe varios temas abstractos y tal vez nada intuitivos. Así que acá va el primer ensayo para una posible definición *"La Geometría Fractal, llamada también Geometría de la Naturaleza, es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descriptas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional. Estos objetos tienen como características fundamental las propiedades de Autosimilitud y la de convivir en extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias"*
Para despedirme de esta primera conferencia quiero contarles que hoy en día la Geometría Fractal ha avanzado a pasos gigantescos, no se olviden que fue concebida hace tan solo 30 años y ya se aplican a estudios en medicina, sobre todo en las áreas de cardiología y neurología (estos dos sistemas representan justamente la eterna lucha entre el Orden y el Caos ... también lo veremos), en economía en estudios bursátiles, en psicología, en sociología, biología, en computación en el área de Algoritmos No Lineales para Criptografía, y obviamente en matemática, física y química donde se están reformulando gran cantidad de teorías conocidas hasta el momento.
Algunos sistemas naturales reconocidos como caóticos y descriptos a través de los Fractales pueden ser: todo lo relacionado con turbulencias, ya sea en el aire o agua; todo lo referido a ramificaciones, como ser redes neuronales, ríos; propagaciones de poblaciones y enfermedades; estructuras montañosas y vegetales. Y esto tan solo para nombrar algunos ejemplos.

Ejercicios. Por lo visto en esta primera clase, no son muchos los ejercicios que puedo proponer, así que solamente voy a enunciar tres que me parecen importantes para tener las primeras nociones básicas y poder seguir adelante de una manera mucho mas clara.
1) Releer la explicación de escalas de medición en el ejemplo dado para calcular la longitud de las costas de Inglaterra. Entender por qué la tercera opción arroja un resultado de una extensión mucho mayor que las anteriores, e intentar deducir por qué en ese mismo caso, la dimensión puede acercarse a infinito.
2) Volver a ver las imágenes en la sección de Autosimilitud, y encontrar todos los detalles que luzcan parecidos en las 4 figuras dadas.
3) Encontrar ejemplos de sistemas en la naturaleza, o fuera de ella, que sean fractales, justificar por qué lo son, y encontrar sistemas que posean una estructura fractal, obviamente también justificarlo.