Conferencia 2

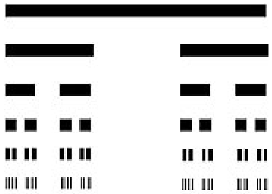
Esta conferencia involucra conceptos técnicos algo más complejos que la anterior, algunos de los mismos están especialmente dirigidos a aquellos que estudian y se dedican a campos relacionados con la matemática, otros, en cambio, también son de carácter técnico pero si considero necesario que los conozcan e intenten comprender con claridad, ya que son el pilar fundamental de esta teoría. Intentaré diferenciar claramente ambos casos.

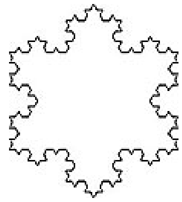
Más sobre los Fractales. En la conferencia anterior hemos hecho una pequeña introducción sobre la historia de los Fractales, como han surgido y por qué. Todo en matemática tiene un motivo de ser y una razón de existir, y por supuesto una necesidad que cubrir. Leyes, teoremas, postulados, axiomas y teorías, no están ahí solamente para satisfacer una inquietud intelectual de los matemáticos o construir entes abstractos en la mente de sus creadores. La matemática es una herramienta fundamental en nuestra vida cotidiana. Todas las disciplinas exactas, naturales y técnicas han progresado en un alto porcentaje gracias a ella, y los fractales no son la excepción, han nacido para cubrir una necesidad específica: la de comprender determinados sistemas naturales que por sus complejas características internas, no pueden ser descriptos y estudiados de una manera detallada y convincente por la geometría o matemática tradicional.
Anteriormente hemos transitado también un largo camino de conceptos y propiedades de la Geometría Fractal el cual nos guió hacia el final a una definición general que intenta englobar sus características más importantes, a continuación la enunciaré nuevamente *"La Geometría Fractal, llamada también "Geometría de la Naturaleza", es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descriptas a través de algoritmos matemáticos y computacionales; los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional. Estos objetos tienen como características fundamental las propiedades de Autosimilitud y la de convivir en extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias".*
Bien, ahora nos toca estudiar de una manera más detallada cada uno de estos aspectos, de no hacerlo incurriríamos entonces en un mero texto de divulgación, lo cual no es mi intención para nada.

Distintos tipos de Fractales. Dijimos que los Fractales tienen dos características fundamentales, ellas son:
1) Autosimilitud
2) Dimensión Fractal

Anteriormente habíamos definido Autosimilitud como la característica que presentan determinados objetos en los cuales los detalles más pequeños que lo componen tienen alguna relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de una manera infinita. *(Ver conferencia 1 y las imágenes de ejemplo)*.
Comencemos ahora con otras cuatro propiedades que se encuentran ocultas en esa definición:
1) Existen dos tipos bien definidos de fractales (en realidad daremos una clasificación realmente completa, más adelante). Los LINEALES y los NO LINEALES. Estoy seguro que intuitivamente y con las imágenes que hayan visto con anterioridad en diferentes galerías los podrían reconocer sin problema. De hecho uno de los participantes del curso, Geova, planteó que hace un tiempo había creado los algoritmos y programas de manera autodidacta para generar fractales como el Triángulo de Sierpinski y la Curva de von Koch, y que otros como el Conjunto de Mandelbrot no le habían salido fácilmente. Bueno, los primeros fractales son justamente los lineales y se generan a través de algoritmos conocidos por la matemática euclídea, el Conjunto de Mandelbrot se genera a través de números complejos, y tiene una dificultad mucho mayor. Igualmente ahora les voy a contar sus diferencias y a dar ejemplos, muchos de ellos ya conocidos por ustedes. Los *fractales lineales* son aquellos que se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas. Esto implica algo muy importante, los fractales lineales son exactamente idénticos

en todas sus escalas hasta el infinito. En un rato cuando estemos construyendo fractales espero que quede más claro. Por el momento aquí van los ejemplos.


A-Conjunto de Cantor


B–Curva de von Koch

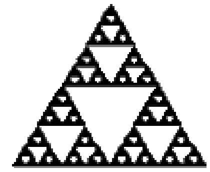
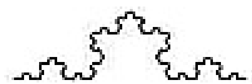

C-Triángulo de Sierpinski

Figura 1

En cualquiera de las tres imágenes anteriores cuando uno comienza a “sumergirse” dentro de esos objetos siempre va a encontrar exactamente la misma estructura, sin distorsiones, solo cambiará su escala.(comparar con las distorsiones sufridas a diferente escala en el Conjunto de Mandelbrot explicado en la parte de Autosimilitud de la conferencia 1) En la primera, por ejemplo, siempre encontraremos una línea recta, en el tercero siempre un triángulo a diferentes escalas, y en la segunda una estructura como muestra esta imagen:



Los fractales *no lineales*, en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, y usando un término proveniente de la matemática Caótica, distorsiones *no lineales*. La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales. Ejemplos de ellos son: el súper conocido por todos nosotros Conjunto de Mandelbrot (figura 2-A) o el Conjunto de Julia (figura 2-B).

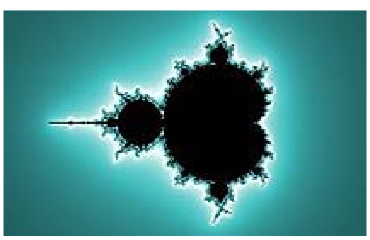


Figura 2-A

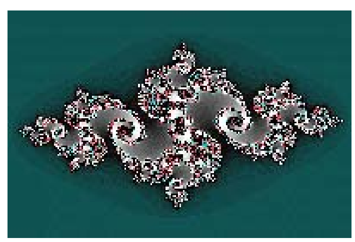


Figura 2-B


Figura 2-C

2) De esta última propiedad (1) que hemos visto, podemos sacar una conclusión sumamente importante, y a la que hay que prestarle MUCHA atención. Los Fractales pueden ser generados a partir de elementos de la matemática tradicional (fractales lineales), o a través de números complejos.
De hecho, el conjunto de Mandelbrot se genera a través de iterar una cierta cantidad de veces la ecuación compleja $z \rightarrow z^2 + c$.
Todo lo que viene ahora para explicar como se utiliza esta ecuación no es necesario que lo entiendan aquellos no interesados en la parte matemática, pero si considero muy importante que sepan que el Conjunto de Mandelbrot, al igual que los demás fractales no lineales tienen su origen en los números complejos.
Para recordar un poco las propiedades de estos números, digamos que se dividen en dos partes, una real y una imaginaria. A la parte imaginaria la denotamos con i lo cual es igual a $\sqrt{-1}$. Recordemos también que los complejos pueden escribirse de varias maneras, en este caso nosotros usaremos la forma binómica, donde si (2+3i) es un número complejo, entonces 2 es su parte real y 3 es su parte imaginaria.
Vamos a analizar ahora la ecuación de Mandelbrot $z^2 + c$.
Dados dos números complejos z y c (los mismos que están en la ecuación) y donde:

$z = x + yi$
$c = a + bi$

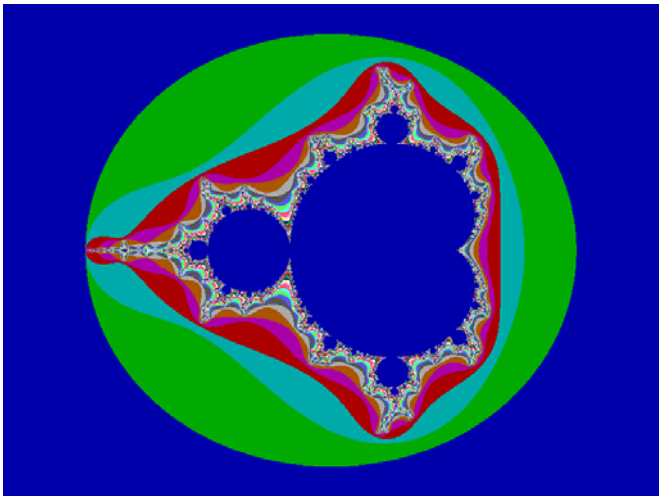
La ecuación nos dice que elevemos z al cuadrado y luego le sumemos c ... hagámoslo entonces $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2$. Por potencias sucesivas de los números complejos sabemos que $i^2 = -1$, por lo tanto nuestra expresión nos quedaría $x^2 + 2xyi – y^2$. Ya tenemos la primera parte, z^2, ahora nos toca sumarle el complejo c, $x^2 + 2xyi – y^2 + a + bi$. Para sumar lo que debemos hacer es agrupar la parte real y luego la parte compleja, entonces tendríamos $x^2 – y^2 + a + 2xyi + bi$. Ya tenemos la expresión final de la ecuación que genera el Conjunto de Mandelbrot, lo que debemos hacer ahora iterarla, para ello, hay que elegir justamente, el número de iteraciones. Los fractales matemáticos perfectos y teóricos tienen un número infinito de iteraciones y detalles.
¿Qué son las iteraciones?. Es repetir y volver sobre sí mismo una cierta cantidad de veces. En el caso de los fractales lo que iteramos son fórmulas o ecuaciones como la que recién hemos visto para generar el Conjunto de Mandelbrot. Este conjunto tiene una característica asombrosa: su *simplicidad*. A diferencia de casi toda la Matemática Superior, cualquiera puede comprender cómo se genera. Su obtención no requiere nada más que ... ¡*la suma y la multiplicación*¡, no hay necesidad de recurrir a operaciones más complejas y menos aún a nociones matemáticas que solo mencionándolas, nos llevan a un mundo exótico y desconocido.
Cómo iteramos esas fórmulas sería la siguiente pregunta ... bueno, la respuesta es sencilla, hacerlo realidad es más complicado. Lo hacemos mediante algoritmos.
¿Alguien se preguntó alguna vez por que los fractales no se crearon anteriormente?. Creo que la respuesta adecuada a ello está ligado directamente al desarrollo de las computadoras, sin ellas los fractales no existirían. Casi todo el mundo conoce la famosa fórmula de Einstein $E=mc^2$ (al margen de su comprensión o no), pues bien, la ecuación que define al Conjunto M ¡*es más sencilla que esta*! y contiene el mismo número de términos. Veámosla $z = z^2 + c$, una ecuación aparentemente tan sencilla, y sin embargo, toda la vida del Universo no alcanzaría para explorar todas sus ramificaciones.
Seguramente todos nos hemos recreado alguna vez, con esos pasatiempos infantiles de formar una figura, uniendo los números sucesivos, pues bien, ese principio es el que se usa para formar el Conjunto M sobre un papel cuadriculado, sabiendo solo sumar y multiplicar. No obstante, existen ciertas dificultades de orden práctico, que impidió que esto fuera tan simple ... concretamente, la finitud de la vida del hombre. Por lo tanto, el conjunto debe generarse invariablemente por ordenador y, normalmente, se representa en pantalla.

El paso inicial. Simplifiquemos la ecuación inicial aún más. Tomemos $z = z^2$. Para indicar que esta función no tiene dominio continuo y que se genera a sí misma, de una manera iterada, escribamos $z_{n+1} = z_n^2$, Por ejemplo, si partimos de 2, tendríamos la sucesión 2, 4, 16, 256, 65 536, etc. y el punto que estaba originalmente a solo 2 unidades del origen, se aleja de manera creciente. Supongamos ahora que tomemos como punto inicial el 1, la sucesión obtenida en este caso es 1, 1, 1, ... Si tomamos el punto inicial en un valor menor que 1, digamos 0.99999999999999999... este valor puede tener más o menos nueve, no importa, en una cantidad finita de términos, empiezan a aparecer términos cada vez menores, hasta que la computadora es incapaz de distinguir el cero real del término obtenido. Todo esto puede resumirse en las siguientes conclusiones:

* Si el valor inicial, o sea, $z_0=1$, se tendrá $z_n=1$, para todo valor de $n>1$.
* Si $z_0>1$, entonces $z_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
* Si $z_0<1$, entonces $z_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto, este círculo de radio 1, es una especie de barrera, que divide el plano en dos regiones disjuntas.

Este tipo de curva se le denomina Curva de Jordan, en honor del matemático francés Camile Jordan, quien estableció el siguiente resultado: *"Sobre el plano, tal curva divide a éste en dos regiones distintas, que no tienen punto en común, pero que poseen a la curva como su frontera común"*. A pesar de la aparente simplicidad de este teorema, su demostración es extremadamente difícil. Por conveniencia, llamaremos a la región interior (la rodeada por la circunferencia) el Conjunto S.
Ahora bien, ¿qué pasa con la ecuación original, donde existe un parámetro c?. Existirá también la Curva de Jordan?.
Tomen un caso sencillo, digamos z_0=0, c=1. De esta forma tendremos la siguiente sucesión 0, 1, 2, 5, 26, 677, etc. De aquí es fácil obtener que el Conjunto M (de Mandelbrot) tendrá una forma muy distinta de la del Conjunto S. Lo curioso es que puntos situados a una distancia de 1 unidad del origen tienen imágenes muy distintas. De hecho, el Conjunto M es solo simétrico con respecto al eje x, no como S, que era perfectamente simétrico (recuerden que una circunferencia tiene excentricidad 1).
De la imagen del Conjunto M que hemos presentado pueden observar los siguientes detalles que lo distinguen enormemente extraordinariamente del Conjunto S. En primer



lugar, la frontera entre ambos es totalmente distinta, mientras que un uno, es una circunferencia, en el otro es extremadamente sinuosa (basta iniciar su ampliación, para entrever la magnitud de tal diferencia), se cuenta que Mandelbrot recorrió el diccionario buscando una palabra adecuada y solo al final propuso el nombre técnico con el que pasó a la posteridad: *fractal*.
Cada color indica el “nivel” del conjunto, para ser más exactos, las líneas divisorias tienen el mismo significado que en un mapa atmosférico tienen las isobaras, o las isotermas. Con frecuencia, los espacios entre línea y línea están coloreados para que la vista pueda captar el relieve con más facilidad. Esto adquiere un gran matiz artístico, si se observan con animación ...
De todo lo anterior podemos concluir que la obtención del Conjunto M, podía haberse realizado cuando el hombre aprendió a contar. En la práctica hemos visto que una imagen puede implicar *miles de millones* de cálculos, de modo que ni hablar de esa obtención antes de la aparición de las computadoras.
Esencialmente, el Conjunto M es un mapa, pero contrario al relato de Robert Louis Stevenson, donde el mapa revela donde está el tesoro. Aquí ...¡el mapa es el tesoro!.

Un interludio matemático. Definamos más técnicamente, algunos de los elementos de los que hemos hablado. En primer lugar, en lugar de R^2, hablaremos del conjunto de los números complejos C (el que es homeomorfo a R^2), a la sucesión z_0, z_1, z_2, ... la llamaremos *órbita*, el parámetro c también lo consideraremos complejo.
Por tanto, trataremos con la fórmula:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \qquad (1)$$

En este caso, la frontera estará dada por la fórmula $|z_{n+1}|$=2, donde $|z_{n+1}|$ es la distancia del punto z_{n+1} al centro. Si $|z_{n+1}| < 2$, se calcula otra iteración, en caso contrario, se escapa al infinito la órbita. Los puntos donde se cumple la condición anterior, serán los puntos del Conjunto M. Por tanto, podemos definir el Conjunto M, como *el conjunto de puntos que no escapan a un círculo de radio 2, usando la iteración (1)*.

Al Conjunto M lo podemos hacer "crecer" a una escala de 1 billón de veces, imagen que Ud. puede ver en su PC usando *Fractin*. Esto es diez veces la distancia de la Tierra al Sol, casi la distancia de éste a Júpiter.
Como decía hace un instante, los fractales teóricos tienen detalles infinitos. Por ejemplo si nos adentramos en el triángulo de Sierpinski siempre encontraremos otro triángulo con las mismas características que el anterior pero a diferente escala, eso significa que está iterado infinitas veces. Esto es algo que no podemos experimentar, ya que crear un algoritmo de iteración infinita haría que una computadora se colgase o tildase. Por ello, si alguno ya usó algún software como el Fractint, Ultrafractal, o cualquier otro para generar imágenes fractales, habrá notado que llega un momento en que la pantalla irremediablemente se queda en negro o blanco. Si son observadores deberían haberse preguntado por qué pasó eso si los fractales en teoría tienen detalles infinitos y siempre deberíamos encontrar una nueva imagen. Bueno, esto se debe justamente a lo que hablábamos recién, todavía no se han podido escribir programas con iteración infinita. (al menos hasta donde yo sé, si me equivoco por favor corríjanme)
Esto último pasa en la Naturaleza también, como ya vimos existen varios sistemas que tienen características fractal, autosimilares, como ser árboles, ríos, neuronas, etc ..., Si vemos un árbol en su totalidad, y luego tomamos una rama, ésta última tendrá características muy similares al árbol en su totalidad. En la misma rama podemos otras más pequeñas y en ellas a su vez otras más chicas aún. Esas características transforman a un árbol en un objeto fractal. Pero llega un momento en que ya no hay manera de seguir descomponiendo la rama de un árbol. Por lo tanto no sería un fractal perfecto, que como ya hemos deducido hace un momento solo existen en el campo teórico.

4) Dijimos muy superficialmente en la conferencia anterior que todos los fractales DEBEN tener una dimensión fractal (*próximo tema*), pero no todos los fractales son autosimilares, estos últimos son los menos, pero es necesario mencionarlos. Un ejemplo de ellos son los fractales plasmáticos, y tienen una forma muy indefinida. Veamos una imagen.

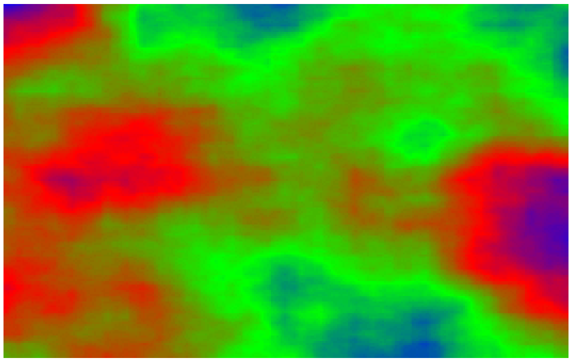
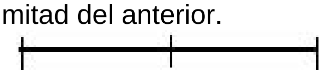


Imagen de un fractal plasmático. Generado con el Fractint

Dimensión Fractal. Hasta aquí hemos profundizado conceptos de la conferencia anterior, en especial las diferentes clases de fractales, desde los teóricos puros hasta sus diferencias con los que encontramos en la Naturaleza y aquellos que somos capaces de generar a través de computadoras. Hablamos también de manera más detallada sobre las características que presenta la Autosimilitud y diferenciamos cuando se da el fenómeno de “perfectamente similar” y de “estadísticamente similar”.
Ahora nos toca entrar de lleno en el que tal vez sea el concepto más importante, y en el cual más esfuerzo deberán hacer para comprender, para ello tendrán que dejar de pensar en la matemática tradicional por un momento y adentrarse en las geometrías no-euclídeas.
Ya hemos visto que los fractales DEBEN poseer una dimensión fractal. Eso implica que la misma debe ser:
1) no entera
2) su dimensión de Hausdorff - Besicovich debe superar su dimensión topológica.

Recordemos que las dimensiones topológicas son 5:
Dimensión -1 → Un Conjunto Vacío
Dimensión 0 → Un punto
Dimensión 1 → Una línea recta
Dimensión 2 → Un plano
Dimensión 3 → El espacio
Como los fractales están compuestos por elementos cada vez más pequeños de sí mismo (Autosimilitud), el concepto de longitud pasa a ser algo muy complejo y hasta casi sin sentido, de esta manera el concepto de dimensión comienza a jugar un papel fundamental. De ahora en adelante no deberíamos preguntarnos cuanto mide un fractal, sino cual es su dimensión.
Calcular la dimensión fractal de un objeto puede ser una tarea por demás complicada, de hecho hay muchos fractales a los que aún no se les ha podido calcular su dimensión con precisión. Es todo un tema de debate la dimensión fractal de la corteza del cerebro humano por ejemplo, aunque se dice que ronda los 2.8... Para poder comprender estos nuevos conceptos voy a trabajar ahora con fractales lineales, lo cual va a resultar mucho más sencillo que con los no lineales, ya que como acabo de mencionar, estos últimos pueden resultar muy tediosos y se necesitan otros conocimientos que escapan a este curso. (Para quienes lo deseen podemos debatir este tema por otros medios).
Empecemos entonces. Para ello, y por le momento, tengamos presente que partiendo de una dimensión entera, debemos llegar a una no entera.
¿Es una línea recta un fractal?.
Espero que todos hayan contestado que NO!.
¿Qué debe pasar entonces para que no lo sea?.
Espero que todos hayan contestado que su dimensión topológica coincide con la de Hausdorff – Besicovich o a lo sumo es menor que ella. Si alguno de ustedes tuvo algún tipo de inconvenientes para responder estas dos preguntas, sugiero que antes de seguir leyendo repase las definiciones de dimensión que vimos anteriormente.
Probemos esto. Tomamos un línea recta.

Ahora debemos medirla, para ello necesitamos un instrumento y una escala. Imaginemos que tenemos una regla de 1 metro de longitud, y que justo la distancia de esa recta es de un metro. Obtengo lo siguiente:
Un Segmento S → S = 1 (nuestra escala)
Una Longitud L → L = 1 metro (una vez nuestra escala de medición)
Vamos ahora a otra posibilidad. Como habíamos hablado en el ejemplo de las costas de Inglaterra, si por algún motivo necesitamos más precisión en nuestra medición, debemos elegir entonces una escala menor (leer conferencia 1, explicación de la longitud de la costa de Inglaterra).
Supongamos ahora, que tenemos la misma recta, pero esta vez tomamos un elemento de medición que sea justamente la mitad del anterior.



Nuestras mediciones ahora reflejan los siguiente resultados:
Dos Segmentos → S = 2.
Longitud 2L → L = 2 (dos veces nuestra escala de medición).
Esto significa que si tenemos la recta original de 1 metro, y la medimos con una regla de 50 cm. obtendremos 2 segmentos de 50 cm cada uno, o sea, dos veces nuestra escala de medición.
Llegamos a la parte más importante de lo que va del curso. Que es definir la Dimensión Fractal, pero esta vez expresada matemáticamente. Para ello utilizaremos las mediciones de las rectas que realizamos hace un momento. Pero antes pensemos un poco ... Resulta muy fácil para nosotros decir que la dimensión de una recta es 1, la de un plano es 2 y el espacio donde vivimos es 3, pero ¿de qué hablamos realmente cuando hablamos de dimensión?, ¿cómo la definimos?.

La dimensión está directamente ligada con los grados de libertad. Cuando la dimensión es 0, solo podría existir ahí un punto inmóvil, y sin límites. Si en cambio la dimensión es 1 ya tenemos una recta y existe un grado de libertad, que es el de moverse de izquierda a derecha por ejemplo. Ahora, si la dimensión es 2 tenemos un plano, con 2 grados de libertad, podemos movernos de izquierda a derecha nuevamente y de arriba hacia abajo. Por último, si la misma es 3 estamos en una situación como la anterior solo que se le agrega un tercer grado de libertad que es la profundidad.

Existen varias definiciones más precisas pero también complejas y habría que adentrarse un tanto en la topología, cosa que no voy a hacer. Lo que si voy a hacer es darles la expresión matemática para calcular una dimensión. La misma es $S = L^D$. Donde *S* es la cantidad de segmentos o su longitud *L* es la escala de medición *D* es justamente la Dimensión.

Bien, por ahora es una definición, no hay mucho por explicar.

Seguramente todos recordarán del secundario como se "despeja" una incógnita de una ecuación. Por ejemplo, si teníamos $x + 1 = 2$ nos quedaba que $x = 2 - 1$ por lo tanto $x = 1$. Si teníamos $x^2 = 4$, nos quedaba que el módulo de X es igual a la raíz cuadrada de 4 .... Por lo tanto $x = 2$ ó $x = -2$.

Ahora tenemos algo un poco más complicado para despejar (solo para aquellos que hace tiempo que no están relacionados con la matemática). Tenemos $S = L^D$.

Para poder "despejar" la D, justamente lo que deseo averiguar, voy a aplicar logaritmo a ambos miembros de la igualdad $\text{Log } S = \text{Log } L^D$.

Por propiedades de los logaritmos puedo decir que $\text{Log } S = D \text{ Log } L$.

Por último divido ambos miembros por Log L y obtengo $D = \text{Log } S / \text{Log } L$.

Ya tengo la expresión final para calcular cualquier dimensión.

Volvamos a nuestro ejemplo de las rectas que medimos anteriormente. En la primera experiencia la longitud del segmento (L) era de un metro, o sea 1 ... y la cantidad de segmentos (S) también era 1, por lo tanto nuestra ecuación quedaría $D=\text{Log}1/\text{Log}1$, así $D=1$. Cualquier "cosa", dividida por esa misma "cosa" da siempre por resultado 1.

Que pasa en nuestra segunda parte de la experiencia de medición. Tenemos ahora que $L=2$ y $S=2$. Por lo tanto $D= \text{Log } 2 / \text{Log } 2$, de donde $D = 1$. Coinciden !!!. Y además como era de sospechar la dimensión de una recta es siempre 1 sin importar que escala usemos. Si hubiésemos elegido una escala de 3 nos quedaba $D=\text{Log}3/\text{Log}3$. Lo cual obviamente es 1.

Y para generalizar, si hubiésemos elegido una escala n, $D = \text{Log } n / \text{Log } n$. Lo cual también es 1.

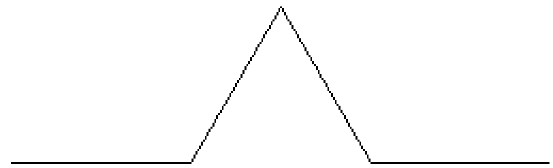
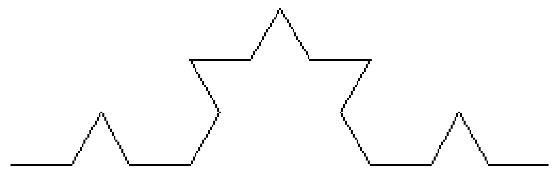
Como conclusión final hemos probado que una recta NO es un fractal. Análogamente se prueba que un cuadrado tampoco lo es ... la dimensión será igual a 2 (coincide con el plano) y un cubo tampoco es un fractal, su dimensión es 3 (coincide con el espacio). Se los dejo como ejercicio!.

Ahora lo que todos estaban esperando ... ¿cómo es la dimensión de un fractal?.

Para ello vamos a volver a tomar un fractal amigo y ya conocido por todos ustedes. La curva de von Koch (ver figura 1-B).

Un fractal se genera en tres etapas. En la primera de ellas elegimos una figura generadora. En nuestro caso será una línea recta. Después aplicamos un algoritmo, y por último comenzamos a iterar la figura resultante luego de haberle aplicado dicho algoritmo. Entonces las etapas quedarían resumidas así:

1) Imagen generadora	———————————— Imagen 2-a

2) Aplicación del algoritmo	 Imagen 2-b
3) Se comienza a generar el fractal. (Iteración)	 Imagen 2-c

Traducido al lenguaje coloquial, diremos que tomamos una línea recta, le aplicamos un algoritmo tal que al apoderarse de esa misma recta la divida en tres segmentos iguales, una vez hecho eso, quiero que el algoritmo elimine el segmento del centro y lo reemplace por otros dos, formando así un triángulo como muestra la segunda instancia (imagen 2-B). Hasta ahí los dos pasos de generación, ahora comienza la iteración. Y cada iteración hará exactamente lo mismo, o sea, lo que le indique el algoritmo. Cada vez que vea una línea recta, la tomará y la dividirá en tres partes iguales, eliminará el segmento del medio y lo reemplazará por otros dos iguales formando un triángulo. Es más difícil de explicar con palabras que viéndolo gráficamente.

Volvamos ahora sí a lo que más nos importa, que es calcular la dimensión de la curva de von Koch.

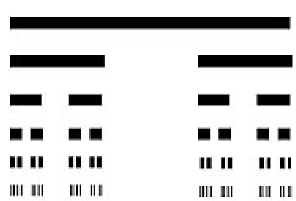
En este caso nuestra L es 3, ya que dijimos que el algoritmo dividiría nuestra imagen generadora en 3 segmentos iguales (lo mismo ocurría cuando dividíamos la recta en dos segmentos iguales, L era igual a 2). Y aquí aparece la gran novedad. Nuestro algoritmo toma una de esos segmentos y lo transforma en dos. Por lo tanto nuestra S no será 3, sino 4 (ver imagen 2-B). Y aplicando la fórmula de dimensión obtenemos D=LogS/LogL, D=Log4/Log 3, por lo que D = 1.26185...

Hemos obtenido una dimensión fraccionaria, no entera! Y además supera la dimensión topológica de nuestra imagen generadora que es 1.

Por lo tanto, y sin ningún lugar a dudas, la curva de von Koch es un fractal

Veamos ahora, y por último en esta segunda clase, que pasa con el Conjunto de Cantor. Anteriormente les dije que tenía una propiedad que era interesante debatir para ver si se lo puede considerar como fractal o no ... así que les muestro esa propiedad y luego lo discutimos.

Traigamos frente a nuestros ojos nuevamente la Figura 1-A.



Tenemos otra vez como imagen generadora una línea recta (se genera de arriba hacia abajo). Estudien con detalle lo que ven y notarán que ahora S = 2 y L = 3. Por el contrario de lo que sucede con el Conjunto de Cantor, el algoritmo nos divide ahora la recta en 3 segmentos iguales, pero elimina a uno de ellos y no agrega nada como sucedía antes. Por lo tanto tenemos D = Log 2 / Log 3 y D = 0.6309.............

Bien, obtuvimos una dimensión fraccionaria. Pero ¿qué cambió?. Ella es menor que su dimensión topológica correspondiente a 1 por ser una línea recta su generador. Esto es algo que le preocupó a Mandelbrot, pero expertos en fractales consideran igualmente al Conjunto de Cantor, y a otros con estas particularidades, como fractales.

Ejercicios.

1) Nuevamente propongo encontrar 3 sistemas en la Naturaleza, o fuera de ella que sean fractales, y 3 sistemas que no lo sea.
2) Probar que un punto y un cuadrado no son fractales.
3) Para los que se animan, calcular la dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski.

Conferencia 3

En esta conferencia y la siguiente, clasificaremos los fractales desde distintos tipos de vista, y daremos algunas características "técnicas", quizás más que en otros momentos, pero que serán necesarias.

1. Fractales como límites de poligonales. Uno de los primeros fractales es la llamada *Curva de Von Koch*[8] (Figura 1). Para su generación, consideremos un segmento de longitud unidad y lo dividimos en 3 partes iguales. Como primer paso se construye un triángulo equilátero sobre el segmento central y se suprime la base. Queda la primera poligonal de la Figura 1, que representamos por P_1 y cuya longitud es $L(P_1)=4(1/3)$. Repitiendo la operación sobre cada uno de los 4 lados, se obtiene la poligonal P_2 de 4^2 lados y de longitud total $L(P_2)=4^2(1/3)^2$. Procediendo sucesivamente según la misma ley, la próxima poligonal tendrá 4^3 lados y longitud total $L(P_3)=4^3(1/3)^3$. Al llegar al paso n tenemos una poligonal P_n de 4^n lados y longitud total $L(P_n) = (4/3)^n$.

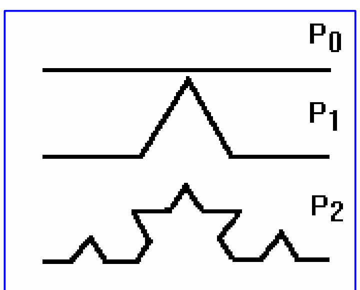


Figura 1

En el límite, para $n\to\infty$ resulta una curva de longitud infinita, la Curva de Von Koch. Es la imagen continua de un segmento y no tiene tangente en ningún punto, salvo los extremos.

Los matemáticos reconocieron, durante la crisis de 1875-1925, que una comprensión aceptable de la irregularidad o fragmentación (como de regularidad y conexión) no puede ser satisfecha con la definición de dimensión tal y como se entendía en esos años: el número de coordenadas. El primer paso de un análisis riguroso es la carta de Cantor a Dedekind del 20 de junio de 1877, el próximo paso es el de Peano en 1890 y el paso final, en los años 20.

En estos tiempos, los matemáticos usaban el término dimensión en un sentido vago. Una configuración era llamada E-dimensional, si el menor número de parámetros reales, necesarios para describir sus puntos, en un cierto sentido, es E. Los peligros e inconsistencias en esta formulación, fueron puestos en claro por dos destacados trabajos de la última parte del siglo XIX: la correspondencia uno-a-uno de Cantor, entre los puntos de una línea y los puntos de un plano, y la aplicación continua de un intervalo sobre todo un cuadrado, debido a Peano. La primera destruyó la convicción de que un plano es más rico en puntos que una línea, y mostró que la dimensión puede transformarse por una aplicación uno-a-uno. La segunda, contradijo la creencia que la dimensión puede ser definida como el menor número de parámetros continuos reales, necesarios para describir un espacio, y mostró que la dimensión puede ser "creada" por una transformación uno-a-uno.

---

[8] El matemático danés Niels Helge von Koch publicó tal curva por primera vez en el trabajo **"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire"**, Arkiv fur Mathematik, Astronomich Fysik I, 1904, 681-704.

Después de la famosa tesis de Frechét de 1906, las investigaciones sobre métricas y espacios métricos crecieron exponencialmente, uno de los principales investigadores del tema fue el destacado matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942), una de cuyas direcciones de trabajo, relaciona los conceptos de medida y dimensión[9]. Sea p un número real no negativo arbitrario, $0 \leq p < +\infty$ y dado $\alpha > 0$ consideremos $\mu_p^\alpha = extr \inf_{d(X_k) < \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} [d(X_k)]^p$, donde $X = \cup X_k$ es una descomposición finita o infinita numerable cualquiera de X, en subconjuntos X_k de diámetro $d(X_k)$ menores que α.

Cuando $\alpha \to 0$, el número $\mu_p^\alpha(X)$ tiende en forma monótona creciente a un determinado límite (finito o infinito) $\mu_p(X)$.

Esta medida puede servir para definir la dimensión de un conjunto, debido a que un conjunto puede tener medida p-dimensional finita y no nula, a lo sumo para un sólo valor p. Observemos que la dimensión de Hausdorff de un conjunto no es necesariamente un entero, por ejemplo, la dimensión del conjunto ternario de Cantor (ver §50-2, nota 3 del texto citado antes) es ln2/ln3 = 0,63093, como se demuestra en la memoria original de Hausdorff **"Dimension und ausseres mass"**[10].

Por otra parte, en 1913 Brouwer construyó una definición de dimensión precisa, y topológicamente invariante[11], la cual para una amplia clase de espacios, es equivalente a la usada hoy en día. Este trabajo de Brouwer, permaneció desconocido por varios años, así, en 1922, independientemente de Brouwer y entre sí, Menger y Urysohn, redescubrieron el concepto de Brouwer, con algunas mejoras importantes.

Como ya dijimos, en 1919 Hausdorff definió para cualquier conjunto topológico una s-medida y una dimensión. En el caso particular de la Curva de Von Koch, en el paso P_n, la s-medida se define por la expresión $L_s(P_n)=4^n(1/3^n)^s$, es decir, se sustituye la longitud de cada lado $1/3^n$ por $(1/3^n)^s$. Para s=1 la medida coincide con la longitud ordinaria. Al pasar a la Curva de Von Koch ($n \to \infty$) resulta que la s-medida tiende a 0 si $4/3^s<1$ y tiende a infinito si $4/3^s>1$. Precisamente el valor de s que separa estas dos posibilidades o sea $4/3^s=1$, de donde s=log4/log3 = 1,2619... se define como *dimensión* de la Curva de Von Koch. Como no es un número entero, la curva cae dentro de los llamados conjuntos fractales por Mandelbrot. Hay varias definiciones de dimensión de un conjunto, pero en este trabajo nos referiremos siempre a la anterior, que se llama dimensión de Hausdorff[12].

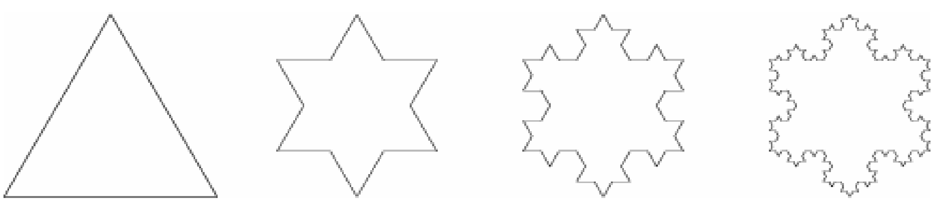


Figura 2

[9] Ver P.R. Halmos-**"Measure Theory"**, Van Nostrand Cía, Inc., 1961.

[10] Math. Ann., 79, 1919, 157-179.

[11] L. E. J. Brouwer-**"Collected works"**, A. Heyting and H. Freudenthal (eds.), New York: Elsevier North Holland, 1975.

[12] FALCONER, K.J.-**"The geometry of fractals sets"**, Cambridge University Press, 1985.

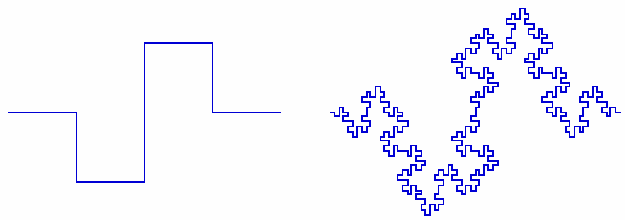


Figura 3

Obsérvese que la dimensión es un concepto local, en el sentido de que no depende del segmento de partida. Partiendo de cualquier lado de la curva P_n, para cualquier valor de n, la curva resultante tiene la misma dimensión de la curva total. Además, es semejante a ella, por lo que se dice que la Curva de Von Koch pertenece a la clase de fractales *autosemejantes,* es decir, cualquier porción del mismo es una reproducción a cierta escala del fractal total.

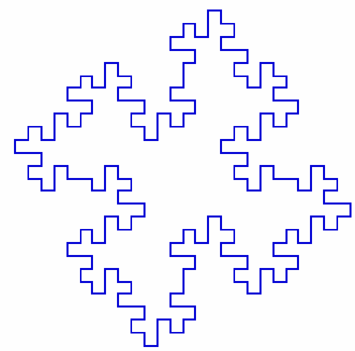


Figura 4

Si lo que hemos hecho a partir del segmento de longitud unidad, se hace sobre cada lado de un triángulo equilátero, se tiene un triángulo limitado por tres arcos de curvas de Koch. Si se incluye el triángulo de partida, la figura resultante se llama *el fractal "copo de nieve"* (Figura 2)[13].

El modelo teórico de la *Curva de Koch* necesitaría un número infinito de iteraciones para construirse.

Teniendo en cuenta que el área de un triangulo equilátero de lado x viene dada por la expresión A(x) = $\sqrt{5}\, x^2/4$, y que el número de lados que conforman el copo de nieve de von Koch para la iteración n-ésima es $4^n.3$. Cuya longitud (de lado) en la iteración n-ésima es $x/3^n$, el perímetro del copo de nieve de von Koch vendrá dado por la expresión $L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n 3x}{3^n} = \infty$.

El área del copo de nieve de Koch viene dado por la serie $S(x) = A(x) + \text{Suma}\left[4^n 4A\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right) : n = 0,1,2,\ldots\right]$.

Este "monstruo" matemático tiene una peculiaridad: Tiene perímetro L(x) infinito[14] pero su área es finita, y está acotada por ocho quintos del valor del área del triángulo de la iteración n=0 de lado x. Es decir $S(x) \le \frac{8}{5} A(x) = \frac{8\sqrt{5}\,x^2}{20} = \frac{2\sqrt{5}\,x^2}{5}$.

[13] Estudios recientes y detallados de la Curva de Von Koch y otros fractales, así como diversas aplicaciones y utilización en la enseñanza, programas para generarlos y muchos otros detalles, pueden verse en http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html, www.znet.com/~wchow/koch.htm, http://homepages.borland.com/efg2lab/FractalsAndChaos/vonKochCurve.htm, http://archive.ncsa.uiuc.edu/Edu/Fractal/Fractal_Home.html y muchos sitios más, que el lector encontrará sin dificultad.

[14] La longitud de esta curva evoluciona de acuerdo a la siguiente sucesión: 1, 4/3, 16/9, 64/27, 256/81... , $L=(4/3)^n$. Dado que la sucesión anteriormente indicada no converge hacia ningún valor, estamos ante una curva de longitud infinita. Y no sólo eso, sino que cualquier intervalo entre dos puntos también cumple esta propiedad.

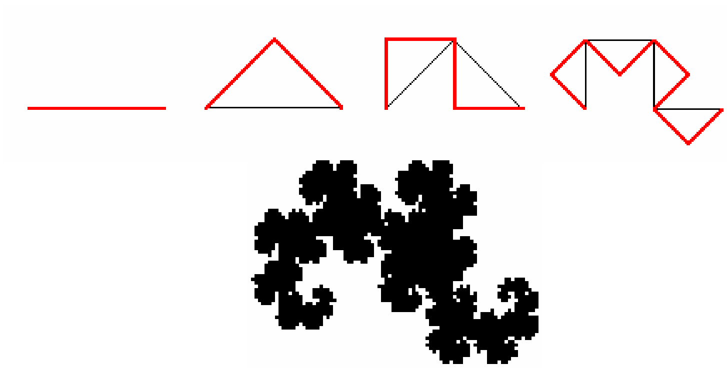


Figura 5

Vamos a aplicar el criterio de D'Alembert para comprobar que la serie que determina el área de la curva de Koch es convergente, es decir que encierra un recinto finito aún teniendo un perímetro infinito,

así $$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4^{n+1}3\sqrt{5}\,x^2}{43^{2(n+1+1)}}}{\dfrac{4^{n}3\sqrt{5}\,x^2}{43^{2(n+1)}}} = \frac{4}{9} < 1.$$

De donde, como el límite es menor que 1, la serie será convergente y tendrá una suma finita.

Visto el ejemplo de von Koch es fácil generar otros fractales por una ley de recurrencia. Así, si en vez de dividir el segmento unidad de partida en 3 partes iguales, se divide en 4 partes iguales y la segunda y la tercera se sustituyen por los tres lados indicados en la Figura 3, la poligonal obtenida Q_1 tiene 8 lados de longitud 1/4 y por tanto su longitud total es $L(Q_1)=8(1/4)$. Repitiendo la operación sobre cada uno de estos lados resulta una poligonal Q_2 de 8^2 lados, cada uno de longitud $1/4^2$. En la cuarta iteración resulta una poligonal de la forma indicada en la segunda Figura 3.

Procediendo sucesivamente n veces se tiene la poligonal Q_n de longitud $L(Q_n)=8^n(1/4^n)$. La s-medida de Hausdorff se define como antes, tomando $(1/4^n)^s$ en lugar de la longitud de cada lado, o sea $L_s(Q_n) = (8/4^s)^n$. Para que, para $n\to\infty$, esta s-medida no tienda ni a 0 ni a ∞, debe ser $8/4^s=1$ de donde s= log8/log4 =3/2=1,5 que es la dimensión del fractal límite de la Figura 3.

Si se repite la construcción anterior sobre cada lado de un cuadrado, se obtiene una curva fractal cerrada (Figura 4), naturalmente de la misma dimensión s= 3/2.

Otro fractal interesante es el llamado *dragón,* que se obtiene repitiendo sucesivamente los lados de una poligonal de la manera que se indica en la Figura 5. Es decir, se sustituye un segmento de partida por los dos catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento de partida D_o, supuesto de longitud unidad. La figura resultante D_1 tiene longitud $L(D_1) = 2/\sqrt{2}$. Se repite la operación sobre cada lado, obteniéndose la poligonal D_2 de longitud $L(D_2)=2^2/(\sqrt{2})^2=2$. Procediendo sucesivamente y colocando los ángulos rectos de cada paso en sentido alternado, como indica la figura, se obtiene la poligonal D_n de longitud $L(D_n)=2^n(1/\sqrt{2})^n$. La s-medida de Hausdorff será $L_s(D_n)=2^n(1/\sqrt{2})^{ns}$ y por tanto, para que al tender $n\to\infty$, el límite no sea ni cero ni ∞ debe ser $2/(\sqrt{2})^s=1$, o sea s=2. Esta es la dimensión del dragón. Por ser de dimensión 2 resulta que el fractal dragón es del tipo de las curvas llamadas de Peano, que llenan un área del plano. En la última figura de la Figura 5

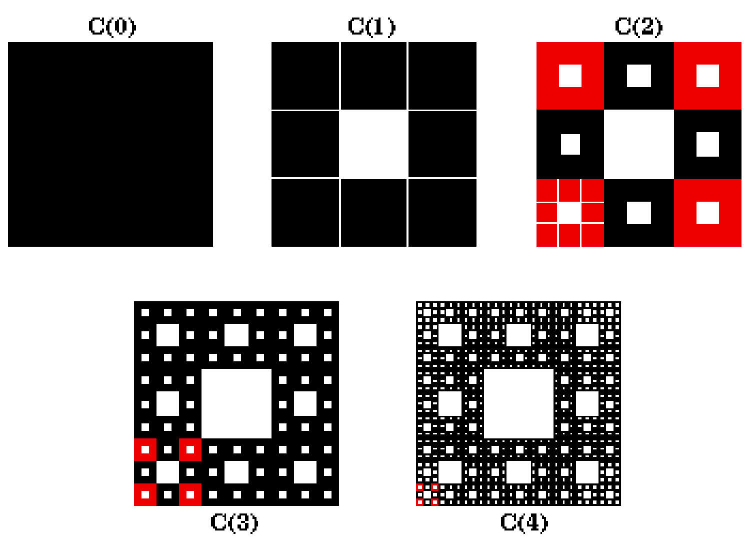


Figura 6

el dragón es toda la parte oscura y, en realidad, conserva el nombre de fractal por la forma de su contorno.

2. Fractales como límites de áreas. En vez de procesos en que se repiten líneas poligonales, se pueden considerar conjuntos fractales procedentes de áreas de las cuales, también por un proceso iterativo, se van suprimiendo ciertas partes.

Alrededor de 1915, Waclaw Sierpinski (1862-1969) concibió su archiconocido fractal, el llamado *tamiz de Sierpinski* (Figura 8). Partiendo de un triángulo, el S(0) (no tiene por qué ser equilátero) dibujamos otro uniendo los puntos medios de sus lados. La figura resultante contiene cuatro triángulos semejantes al anterior, pero sólo tres comparten su orientación. Ese cuarto triángulo no pertenece a la curva, y este detalle desencadena propiedades sorprendentes. En la siguiente iteración repetimos el mismo esquema con los tres triángulos aludidos, y así sucesivamente. Por tanto, el área total del triángulo de Sierpinski es nula (obviamente tras infinitas iteraciones)[15]. Por otra parte, el perímetro de todos los triángulos generados sí es infinito[16].

Procediendo sucesivamente, el tamiz S(n) consta de 3^n triángulos semejantes a S(0) con razón $(1/2)^n$. Puesto que siempre se dejan los contornos, en el límite, para $n\to\infty$ queda un conjunto que constituye el tamiz de Sierpinski. Sumando las áreas de los triángulos sacados se ve fácilmente que coincide con el área del triángulo inicial, es decir el tamiz de Sierpinski tiene medida nula (ver nota 10). Su dimensión de Hausdorff se define a partir de la s-medida de S(n) que, por definición, es igual a la suma de la potencia s de los diámetros de los triángulos que lo componen. Como el diámetro de un triángulo es igual a su lado mayor, si llamamos a al lado mayor de S(0), resulta que la s-medida de S(n) es igual a $3^n (a/2^n)^s=a^s(3/2^s)^n$. Para que esta medida no sea 0 ni ∞ cuando $n\to\infty$, el valor de s, que por definición es la dimensión del tamiz de Sierpinski, debe ser tal que $3/2^s=1$, o sea, s=log3/log2 = 1,5849...

Otro fractal clásico es la *alfombra de Sierpinski* (Figura 6). Se parte de un cuadrado C(0), supuesto de lado a*.* Cada lado se divide en 3 partes iguales y por paralelas a los lados se divide C(0) en 32 cuadrados de lado a/3*,* de los cuales se quita el cuadrado central. Lo que queda es el conjunto de 8 cuadrados periféricos de lado a/3 y por tanto de diagonal (que es el diámetro) igual a a(√2/3). La s-medida se define siempre como la suma de las potencias s-ésimas de los diámetros de los conjuntos parciales y, por tanto, para esta alfombra C(1) es $8a^s(\sqrt{2}/3)^s$.

Repitiendo la operación en cada uno de los 2^3 cuadrados periféricos resulta una segunda alfombra C(2) cuya s-medida vale $8^2a^s(\sqrt{2}/3^2)^s$ (es la tercera alfombra de la Figura 6). La cuarta alfombra C(3) de la Figura 6 tiene la s-medida $8^3a^s(\sqrt{2}/3^3)^s$ y así siguiendo, la alfombra C(n) tiene de s-medida $8^na^s(\sqrt{2}/3^n)^s=a^s(\sqrt{2})^s(8/3^s)^n$. Para que esta medida, para $n\to\infty$ no sea 0 ni ∞ debe ser $8/3^s=1$ y, por tanto, la dimensión de la alfombra de Sierpinski así definida es s = log8/1og3 = 1,8927...

La dimensión es independiente de la medida de los lados del cuadrado inicial, como en el caso anterior de los triángulos. Por esto podemos suponer que se parte del cuadrado de lado unidad.

Una generalización natural de la alfombra de Sierpinski consiste en dividir el cuadrado inicial en b^2 congruentes (b es número natural mayor o igual que 3) por paralelas a los lados y quitar el conjunto de los $(b-2)^2$ cuadrados interiores (dejando los $b^2-(b-2)^2=4(b-1)$ cuadrados del contorno). Repitiendo la operación sucesivamente con cada uno de estos cuadrados del contorno se obtiene una alfombra generalizada de Sierpinski cuya dimensión, por el método de siempre, se calcula que vale s = log4(b -1)/log b. Para b = 3 resulta el caso anterior.

---

[15] No es difícil observar que el área definida va decreciendo con arreglo a la sucesión (en el caso de un triángulo equilátero de área 1): 1, 3/4, 9/16, 27/64, 81/256 ..., $A=(3/4)^n$.

[16] Siendo 1 la longitud del lado del primer triángulo, el perímetro total crece así 3, 9/2, 27/4, 81/8, 243/16..., $P = 3 \times (3^n)/(2^n)$.

Otros ejemplos.

1. Una variante de la alfombra de Sierpinski consiste en dividir el cuadrado inicial supuesto de lado 1, en b^2 cuadrados congruentes por división de cada lado en b partes iguales, siendo b un número impar. Se suprime el cuadrado central y quedan otros $b^2 -1$ cuadrados de lado 1/b. Repitiendo la operación sobre cada uno de ellos, y procediendo como siempre, resulta un fractal de dimensión $s = \log (b^2 -1)/\log b$.

2. En un cuadrado de lado unidad se dibujan los cuadrados de los vértices de lado k<1/2 (Figura 7). Se suprime luego la cruz resultante y sobre cada cuadrado de las esquinas se repite la operación, con valores de k, sucesivamente k^2, k^3, ... En el límite resulta un fractal de dimensión $s = \log 4/\log (1/k)$[17].

3. Hasta aquí, todos los fractales que hemos visto son de dimensión fácil de calcular directamente. Ello es debido, esencialmente, a que se trata de fractales *autosemejantes,* que van repitiendo proporcionalmente una determinada construcción y cada conjunto parcial es una reproducción del conjunto total. La construcción de fractales autosemejantes puede realizarse 'con comodidad con una computadora. Se trata de la repetición de transformaciones del plano en sí mismo que en general son simples combinaciones de traslaciones, dilataciones y rotaciones, todas ellas expresables como funciones lineales (afinidades)[18].

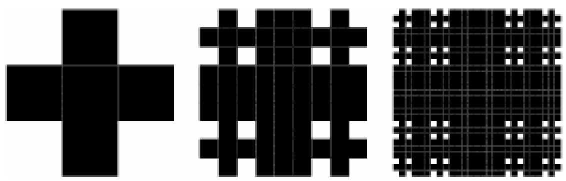


Figura 7

En otros casos el cálculo de la dimensión es más difícil. Por ejemplo, si a partir de un triángulo curvilíneo formado por 3 arcos tangentes de circunferencia se van quitando sucesivamente círculos tangentes a otros tres, en el límite resulta *el fractal de Apolonio* (Figura 11), cuya dimensión exacta no se conoce, aunque aproximadamente se ha estimado que vale s=1,3058[19].

Conferencia 4

I. Iteración de transformaciones del plano en sí mismo. Hasta aquí hemos considerado fractales clásicos que aparecen de manera natural al estudiar conjuntos de puntos del plano que son de medida nula, pero que se puede definir en ellos de cierta manera una dimensión, que puede servir para diferenciarlos entre sí y analizar distintas propiedades de los mismos.

Otra manera, más moderna, de definir fractales consiste en la iteración de una transformación dada del plano en sí mismo, iteración que, cómo límite, puede dar lugar a fractales interesantes.

Si en el plano real de puntos P(x,y} se tiene una transformación

$$T^{(1)}: x^{(1)}=f(x,y),\ y^{(1)}=g(x,y), \text{ o sea } P^{(1)}=T^{(1)}P \qquad (1)$$

con f, g funciones que cumplen ciertas condiciones, se pueden obtener las sucesiones de puntos transformados $P^{(2)} = T^{(1)}P^{(1)} = T^{(2)}P, ..., P^{(n)} = T^{(1)}P^{(n-1)} = T^{(n)}P, ...$

Puede ocurrir que para $n\to\infty$, los transformados $T^{(n)}P$ tengan particularidades muy diferentes según sea el punto inicial P, y estas particularidades permiten dividir el plano en regiones, cuyas curvas de separación tienen muchas veces el carácter de fractal.

---

[17] Ver Falconer-Ob. Cit., p. 16.

[18] Algunos ejemplos de programas para ello se pueden ver en el artículo de T.J. Bannon-**"Fractals and transformations"**, Mathematics Teacher, march 1991, vol. 84,178-185.

[19] Otras generalizaciones pueden verse en Mandelbrot (1983).

Un caso muy simple, que no da lugar a fractales, pero es instructivo, es el caso afín:

$$T^{(1)}: x^{(1)} = ax + by + c \ , \ y^{(1)} = px + qy + r$$

que introduciendo las matrices

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se puede escribir

$P^{(1)} = AP$ y por tanto $P^{(n)} = A^n P$ (2)

Según sea la matriz A cabe estudiar los casos en que la sucesión de puntos $P^{(n)}$ tiende a infinito o permanece a distancia finita, siendo o no periódica. Es un ejercicio clásico de geometría proyectiva. También se pueden considerar varias transformaciones afines del tipo (2) y, sea al azar o de manera determinada, ir aplicando sucesivamente estas transformaciones, obteniéndose a veces fractales interesantes, como ya observamos anteriormente[20]. Los casos interesantes, sin embargo, son aquellos en que las funciones f(x,y), g(x,y) no son lineales.

2. Un ejemplo de STEIN-ULAM. Como aplicación de las computadoras electrónicas de su época, Stein y Ulam estudiaron en 1964 [12] algunos casos interesantes, de los que vamos a dar un ejemplo.
Consideremos un triángulo equilátero $P_1P_2P_3$. Sus puntos interiores se pueden determinar por sus distancias x_1, x_2, x_3 a los lados (Figura 13) que se llaman coordenadas triangulares y cumplen las condiciones

$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \ x_i \geq 0,$ (3)

La transformación cuadrática

$$x_1' = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$$
$$x_2' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$
$$x_3' = x_1^2$$

por verificarse $x_1' + x_2' + x_3' = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1$ se transforma el triángulo (contorno incluido) en sí mismo. Cabe, por tanto, estudiar las órbitas (transformados sucesivos) de los puntos P del triángulo. Obsérvese que para los vértices existe el ciclo (P_1, P_2) y la sucesión $P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2$ ... Stein y Ulam afirman, sin demostración, que para casi todo punto P del triángulo sus transformados terminan formando un ciclo de tres elementos $Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow$..., el cual depende de P. Al parecer, quedan muchos puntos por aclarar, como el estudio de los puntos P cuyos iterados no tienden a ningún ciclo (probablemente un fractal), cálculo del área del triángulo QRS en función de P, si existen ciclos de cualquier orden, etcétera. Tal vez, con la potencia de las modernas computadoras los problemas de Stein-Ulam pudieran aclararse.
Otro ejemplo análogo que tratan Stein y Ulam es el de la transformación

[20] Ver también, sobre ello, el artículo de Elena García-**"La computación como recurso"**, Elementos de Matemática, Universidad CAECE, Diciembre 1991 (N^o XXII), Vol. VI.

$x_1' = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$
$x_2' = x_1^2 + 2x_2x_3$
$x_3' = 2x_1x_3$

que tiene el punto fijo A (1/2, $\sqrt{2}/4$, (2- $\sqrt{2}$)/4) y el ciclo (P_2,P_3). Los puntos cuyos iterados por la transformación convergen a A y los que terminan oscilando según el ciclo (P_2,P_3) están separados por una curva complicada (fractal), no conocida exactamente. Se presentan también varios problemas no resueltos, por ejemplo el cálculo del área de los puntos cuyos iterados tienden a A y la de aquellos cuyos iterados tienden al par (P_2,P_3).
Puede también ser interesante considerar otras transformaciones cuadráticas diferentes de las anteriores y analizar los posibles ciclos de sus iteraciones. Stein y Ulam estudian también transformaciones de tercer grado.

3. Transformaciones en el plano complejo. En vez de expresar las transformaciones del plano real en sí mismo en la forma (1), es muchas veces práctico introducir los números complejos z = x + iy (x, y reales) y estudiar las transformaciones de la forma $z_1 = f(z)$, siendo f(z) una función de la variable compleja z. La iteración de funciones de esta forma fueron objeto de estudio por los matemáticos franceses P. Fatou y G. Julia entre los años 1918 y 1920, principalmente. Se puede ver la bibliografía correspondiente en el artículo de Blanchard [4]. Pero como no disponían de computadoras para materializar tales iteraciones en casos particulares, tanto para comprobar los resultados obtenidos teóricamente como para orientar la investigación, los estudios, aunque profundos, no pudieron llegar muy adelante. En realidad se progresó poco hasta que Mandelbrot y otros pusieron de nuevo el asunto sobre el tapete alrededor de las décadas de los años 70 y 80. El interés fue creciendo constantemente y en varias direcciones, como aplicación de la potencia de las modernas computadoras, como puede verse en la bibliografía citada al final, en cuyos textos se citan trabajos recientes y muchos problemas por resolver[21].
Para el estudio de los fractales, los casos más interesantes son aquellos en que f(z) es un polinomio P(z). A partir de un punto z_0 se obtiene la sucesión

$$z_1 = P(z_0)\ ,\ z_2 = P(z_1) = P^{(2)}(z_0),\ ...,\ P_n = P(z_{n-1}) = P^{(n)}(z_0)$$

que se llama la *órbita* de z_0. Si llega un momento en que $z_n = z_0$, se dice que la sucesión z_0, z_1, z_2, ..., $z_n = z_0$ constituye un *ciclo* de la transformación, de orden n. Si $z_1 = z_0$ se trata de un punto fijo z_0.
Por la regla de la cadena del cálculo infinitesimal, representando por un acento la derivada, si se tiene un ciclo de orden n formado por z_0, z_1, z_2, ..., $z_n = z_0$ resulta

$$P^{(n)\prime}(z_0) = P'(z_{n-1})\, P'(z_{n-2}) \ldots P'(z_0)$$

y análogamente, si se parte del punto z_1

$$P^{(n)\prime}(z_1) = P'(z_0)\, P'(z_{n-1}) \ldots P'(z_1)$$

lo cual nos dice que en un ciclo de orden n las derivadas del polinomio iterado $P^{(n)}$ toman el mismo valor en todos sus vértices, el cual se llama el *multiplicador* p, o sea

---

[21] Ver BLANCHARD, P.-**"Complex analytic dynamics in Riemann sphere"**, Bull. Amer. Math. Society, 11, 1984,85-141; DEVANEY, R.L. and L. KEEN (editors)-**"Chaos and Fractals"**, Proc. of Symposia in Applied Mathematics, Amer. Math. Soc. Vol. 139, 1989; PEITGEN, H. O. and P.H. RICHTER-**"The beauty of fractals"**, Springer, Berlin, 1986 y PEITGEN, H. O. and D. SAUPE (editors)-**"The science of fractals images"**, Springer, Berlin, 1988.

$$\rho = P^{(n)\prime}(z_0) = P'(z_{n-1})\, P'(z_{n-2}) \ldots P'(z_1)$$

Partiendo de un punto $z_0 + u$ próximo a z_0 se tiene

$$P^{(n)}(z_0 + u) = P^{(n)}(z_0) + \rho u + u^2(\ldots)$$

y por tanto, para u suficientemente pequeño, si $|\rho| < 1$ el punto transformado de z_0+u, después de recorrer el ciclo, se acerca a z_0 y si $|\rho| > 1$ se aleja. Como lo mismo ocurre si se parte de puntos próximos a $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, tienen sentido las definiciones siguientes
si $|\rho| < 1$ el ciclo se llama *atractivo*
si $|\rho| = 0$ el ciclo se llama *superatractivo*
si $|\rho| > 1$ el ciclo se llama *repulsivo* o *dilatador*
si $|\rho| = 1$ el ciclo se llama *indiferente* o *neutro*
Para el estudio de los fractales son interesantes los ciclos atractivos.
Nos vamos a limitar al caso más importante y más estudiado en que el polinomio P(z) es de segundo grado, o sea $z_1 = az^2 + bz + c$, $a \neq 0$. En este caso, por una traslación $z \to z + A$ se tiene $z_1 + A = az^2 + (2aA + b)z + aA^2 + bA + c$ y tomando $A= -b/2a$ resulta la transformación $z_1 = az^2 + b$ que por la dilatación $\sqrt{a}z \to z$ queda

$$z_1 = z_2 + c \qquad (4)$$

siendo c un número complejo. Es decir, las transformaciones polinómicas de segundo grado, por una traslación y una dilatación pueden siempre reducirse a la forma simple (4). Obsérvese que la traslación y la dilatación conservan siempre el punto $z = \infty$ del plano. Además, la transformación (4) poniendo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z = x + iy$, $c = c_1 + ic_2$ equivale, en coordenadas reales, a la transformación dada por las ecuaciones $x_1=x^2-y^2+c_1$, $y_1=2xy+c_2$.
Vamos a referirnos con detalle a la transformación (4).

Conjunto de Julia. Dada la transformación (4) que podemos escribir $z \to P_c(z)=z^2+c$ y sus sucesivos iterados $P_c^{(2)}(z) = P_c(P_c(z))$, $P_c^{(3)}(z) = P_c(P_c^{(2)}(z)) = P_c(P_c(P_c(z)))$, ... el plano z queda dividido en dos conjuntos, a saber $K_c= \{z \in C/P_c^{(m)}(z)$ se conserva acotado para $m \to \infty\}$, $A_c(\infty)=\{z\ E\ C/P_c^{(m)}(z) \to \infty$ para $m \to \infty\}$, donde C indica el conjunto de los números complejos, o sea, el plano complejo. La separación de los dos conjuntos, o sea, la frontera común entre ambos $\partial K_c = \partial A_c(\infty) = J_c$ se llama el *conjunto de Julia* de la transformación $z \to z^2 + c$.
Muchas veces, como veremos en algunos ejemplos, se trata de un fractal interesante y complicado.

Puntos unidos. Los puntos unidos de la transformación $z \to z^2 + c$ son las raíces de la ecuación $z_0^2 - z_0 + c = 0$, o sea $z_0 = (1/2)\,(1 \pm (1-4c)^{1/2})$. El multiplicador para ellos vale $\rho = P_c'(z_0) = 1 \pm (1-4c)^{1/2}$. Si $c = 1/4$ hay un solo punto unido que es indiferente o neutro ($|\rho|=1$). Si $c \neq 1/4$ de los dos valores de P sólo puede haber a lo sumo uno con $|\rho|<1$, o sea, existe siempre un solo punto unido atractivo o no existe ninguno.
Queremos ver el conjunto de puntos c del plano complejo, para los cuales la transformación $z \to z^2+c$ tiene un punto unido atractivo. Para ello es conveniente hacer la traslación $z \to z-A$ tras la cual queda $z - A \to Q(z) = z^2 - 2Az + A^2 + c$ y tomando A de manera que sea $A^2+A+c=0$ y haciendo el cambio $A \to (-1/2)A$ queda $z \to z^2 + Az$, $c = A/2 - (A/2)^2$ con el punto unido $z=0$, para el cual el multiplicador vale $\rho = P_c'(0) = A$. Luego, para que el punto $z = 0$ sea atractivo, debe ser $|A| < 1$. Volviendo al plano c, el contorno del dominio correspondiente a $|A|<1$, o sea, el conjunto correspondiente a la circunferencia $|A| = 1$, poniendo $A= \exp(it)$, resulta $c=(1/2) \exp it - (1/4) \exp 2it$ o sea, las coordenadas x, y de $c = x + iy$, satisfacen la condición

$$x= (1/2) \cos t - (1/4) \cos 2t\ , \quad y= (1/2) \operatorname{sen} t - (1/4) \operatorname{sen} 2t$$

de donde $x^2 + y^2 = (5/16) - (1/4) \cos t$. Es decir, en el plano c, el conjunto de puntos para los cuales $z \to z^2 + c$ tiene un punto unido atractivo (el cual, caso de existir, debe ser único) es el interior de la curva que en coordenadas polares se expresa $r^2 = (1/4)(5/4 - \cos t)$, es decir, es una *cardioide*. El conjunto de sus puntos interiores se suele representar por W_0.

Para hallar los posibles ciclos de segundo orden, o sea, los pares de puntos tales que $z_i = P_c(z_0)$, $z_0 = P_c(z_1)$, se tiene la ecuación $z_0 = (z_0^2 + c)^2 + c$, o sea, $z_0^4 + 2cz_0^2 - z_0 + c^2 + c = 0$ como esta ecuación debe tener los puntos unidos, raíces de la ecuación $z_0^2 - z_0 + c = 0$, puesto que cada punto unido forma por sí solo también un ciclo de segundo orden, la ecuación anterior debe ser divisible por esta última, resultando como ecuación de los ciclos de segundo orden propiamente dichos la siguiente

$$z_0^2 + z_0 + c + 1 = 0, \text{ o sea } z_0 = (1/2)\left(-1 \pm (-3-4c)^{1/2}\right)$$

y el multiplicador es $\rho = P_c'(z_0) P_c'(z_1) = 4z_0 z_1 = 4(1 + c)$. Por tanto los puntos del plano c tales que $z \to z^2 + c$ admite un ciclo de segundo orden atractivo, forman el dominio definido por $|1 + c| < 1/4$, o sea, es el círculo de centro (-1,0) y radio 1/4.

Análogamente, se pueden buscar los puntos c para los cuales la transformación $z \to z^2 + c$ presenta un ciclo atractivo de tercero, cuarto, quinto, ...orden. Procediendo sucesivamente, en el límite, resulta un conjunto H de puntos del plano c para los cuales la transformación $z \to z^2 + c$ presenta un ciclo atractivo. Si se considera el conjunto de puntos del plano c para los cuales la iteración sucesiva de $z \to z^2 + c$ se conserva siempre a distancia finita, se tiene el llamado *conjunto de Mandelbrot* M. De manera que, evidentemente $H \subset M$ y se conjetura que H=M. El conjunto de Mandelbrot se inicia con la cardioide y el círculo, pero luego, al considerar los valores c a los que corresponden ciclos atractivos de orden superior en la transformación $z \to z^2 + c$, a dicha figura se van añadiendo protuberancias, de forma variable, que conducen a la muy conocida Figura 1 que representa dicho conjunto de Mandelbrot. Se sabe que se trata de un conjunto conexo, pero se ignora si también es localmente conexo. Tampoco se conoce la dimensión de su contorno, que es el fractal de Mandelbrot o conjunto de Julia que separa los puntos del plano c para los cuales la iteración de $z \to z^2 + c$ permanece a distancia finita, de todo el resto que corresponde a valores de c para los cuales la iteración $z \to z^2 + c$ tiende a infinito.

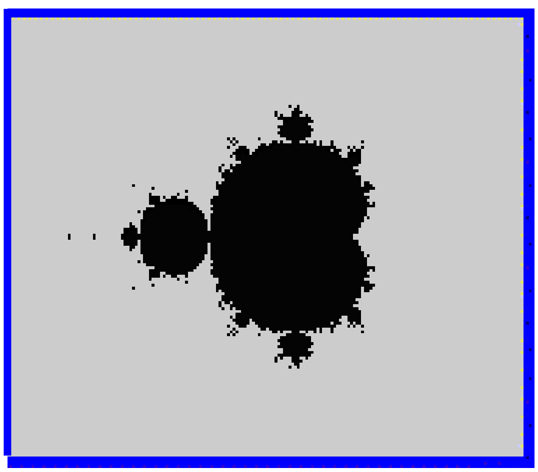


Figura 1

Hemos definido el conjunto de Mandelbrot a partir de la transformación $z \to z^2 + c$ en el plano complejo z. Pero se puede definir también directamente en el plano complejo c, considerando la sucesión

$$c,\ c^2 + c,\ (c^2+c)^2 + c,\ [(c^2 + c)^2 + c]^2 + c,\ \ldots$$

Los puntos del conjunto de Mandelbrot son entonces los puntos c para los cuales esta sucesión se mantiene acotada, o sea, a distancia finita del origen c = o. Las distintas protuberancias o ramificaciones que presenta el contorno del conjunto de Mandelbrot a veces parece que se repiten, a escala reducida, pero no se trata de un fractal autosemejante, es decir, al proseguir la iteración cada vez más lejos, con computadoras más potentes, aparecen formas y figuras diversas que coloreadas convenientemente dan lugar a figuras atractivas y muy llamativas.

La frontera del conjunto de Mandelbrot es de una gran complejidad y su estudio solamente se ha podido hacer gracias a las actuales computadoras, que hacen el papel de potentes microscopios que permiten ir ampliando las sucesivas figuras que aparecen, una tras otra, cada una comprendiendo a todas las que le siguen. Según el tamaño de los números con que la computadora sea capaz de operar, así será la precisión de los detalles que se pueden observar. Eligiendo convenientemente algún punto del conjunto se pueden obtener para su alrededor dibujos de muy distintas formas, de manera que la operación aparece como un continuo descubrimiento de paisajes y estructuras no predecibles de antemano. Con ello, las computadoras permiten, por primera vez en la historia de la matemática, reproducir la imagen de figuras infinitamente pequeñas, cuyo estudio se hace fascinante por su variedad e impredecibilidad.

De manera análoga a como el desarrollo decimal de los números irracionales es una sucesión infinita e impredecible de números naturales, los fractales dan lugar a sucesiones bidimensionales de infinitas figuras de distintas formas, tampoco predecibles sin antes haber realizado todas las figuras anteriores de la sucesión. Los fractales autosemejantes vendrían a ser así como los números racionales, cuyo desarrollo decimal es periódico. Los fractales no autosemejantes presentan, a medida que se van ampliando sus sucesivos detalles, una infinita variedad de imágenes, siempre diferentes e independientes entre sí. Es, pues, notable la analogía entre los microscopios que permiten observar lo infinitamente pequeño de los objetos naturales y las computadoras que permiten hacer lo análogo para objetos matemáticos de alta complejidad, como son los fractales no autosemejantes.

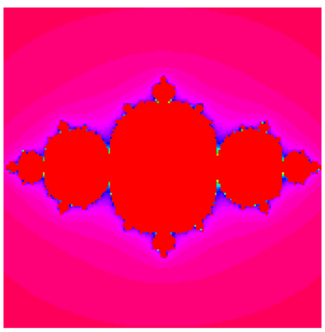


Figura 2

Detalles interesantes sobre las técnicas computacionales para obtener imágenes ampliadas de algunas partes del conjunto de Mandelbrot y otros análogos pueden verse en una serie de artículos de Dewdney en la revista *Investigación y Ciencia,* edición española del *Scientific American,* del año 1985.

4. Algunos ejemplos de fractales. Partiendo de la transformación $z \to z^2 + c$ y dando valores diversos a c*,* la definición que hemos dado antes de los conjuntos K_c, $A_c(\infty)$ y del conjunto de Julia permite obtener ejemplos curiosos y a veces nada simples de fractales. Veamos algunos:

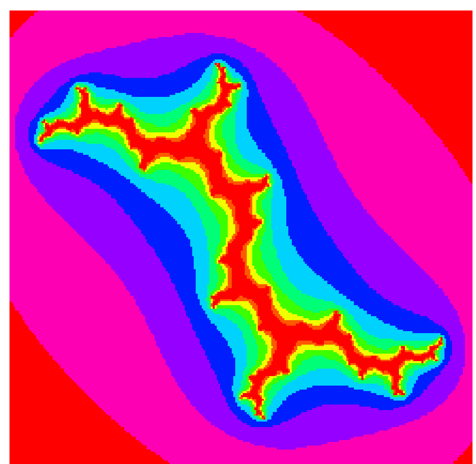


Figura 3

1. c = 0. La sucesión z, z^2, z^3, ...es convergente para $|z|\leq 1$ y divergente para $|z|>1$. Luego el conjunto K_o es el círculo unidad y el $A_0(\infty)$ la parte exterior del mismo. El conjunto de Julia es la circunferencia $|z|=1$.

2. c =-1. Se trata de la transformación $z \to z^2 - 1$. Presenta el período (0,-1). El conjunto de Julia es el fractal de la Figura 2, simétrico, pero muy complicado.

3. c = -2. Se trata de la transformación $z \to z^2 - 2$. Presenta el período 0, -2, 2, 2,... El conjunto de Julia es el segmento cerrado (-2,2). Los puntos interiores de este segmento forman K_{-2} y los exteriores $A_{-2}(\infty)$.

4. c = i. Es la transformación $z \to z^2 + i$. El fractal formado por el conjunto de Julia tiene la forma de la Figura 3. Se llama una *dendrita.* Carece de puntos interiores. .

5. Para que los puntos 0, c, $c^2 + c$, $(c^2 + c)^2 + c$ formen un ciclo de tercer orden, el último debe coincidir con el primero y por tanto c debe ser raíz de la ecuación $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$.

Son importantes los conjuntos derivados de la transformación $z \to z^2+c$ cuyo valor de c sea una de las raíces de la ecuación anterior. Por ejemplo, para la raíz c_0 = -0,12256117... + i0,7448617... la transformación $z \to z^2+c_0$ da lugar al llamado *conejo de Douady* (como conjunto de Julia de la misma), que es un fractal curioso cuya dimensión no se conoce (Figura 4).

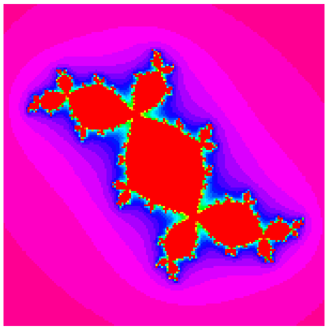
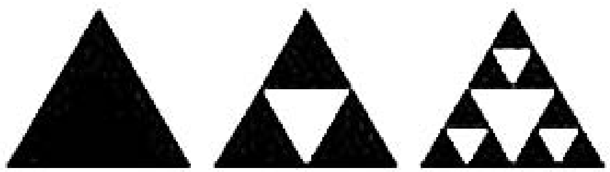


Figura 4

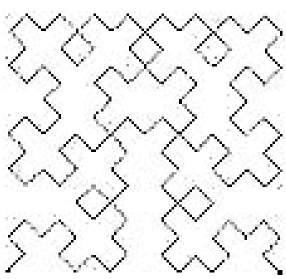
6. Otros fractales interesantes se obtienen como conjunto de Julia de la iteración de una transformación de la forma $z \to Az+z^2$, para distintos valores de A tales que $|A|=1$[22].

Conferencia 5

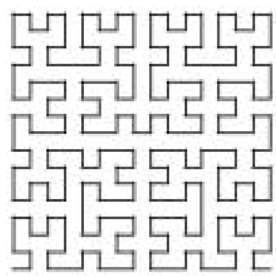
Teoría del Caos. Otra observación interesante: uno de los ejercicios propuestos pedía calcular la dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski. La misma es D = (log 3)/(log 2) = 1,58496.
Veamos la figura:



Les dejo a ustedes que puedan detectar, mirando el grafico, de donde proviene el Log 3 y el Log 2.
El tema es el siguiente, 1.584... es un dimensión fractal, perfecto, pero la figura original es un triángulo, por lo tanto su dimensión topológica es de 2; y según Mandelbrot, un objeto fractal es aquél que su dimensión fractal SUPERA estrictamente su dimensión topológica. Veamos las imágenes:



Curva de Peano



Curva de Hilbert

Extrañamente la dimensión fractal de la curva de Peano es de 2, una dimensión entera. Más allá de eso, esta curva matemática es reconocida como uno de los fractales más famosos D=Log 9 / Log 3 = 2.
El tercer punto que quiero destacar y que quedó de la conferencia anterior, es el asunto de la dimensión del punto, si el mismo es fractal o no. Lamentablemente han sido muy pocos los que opinaron sobre este tema, así que lo dejaré pendiente. Lo que si propongo es que pensemos en su Autosimilitud.
Ya tenemos un panorama bastante grande de los Fractales, ahora nos toca abordar determinados aspectos de la *Teoría del Caos*. Esta conferencia no será tan extensa como las anteriores ya que será ampliada más adelante. Pero sí necesito dar algunos conceptos

---

[22] Ver Blanchard-Ob. Cit .

importantes que serán necesarios para utilizar en futuras clases. Intentaré basarme más que nada en ejemplos y en postulados.
El título solo nos da un panorama de lo que veremos a continuación: CAOS. Este tema tiene además un fuerte trasfondo filosófico. Preguntas tales como: Juega Dios a los dados? haciendo alusión al azar con que se presentan los hechos en la Naturaleza; el eterno enfrentamiento entre el Orden y el Caos, o el Reduccionismo y Determinismo y figuras tales como la Entropía de la mecánica clásica y termodinámica; todos unidos conforman un combo explosivo que llevan a enunciar postulados de lo que hoy se lo reconoce como una "Nueva Ciencia".
Antes de las definiciones, voy a dar un par de conceptos que considero son claves.

Los Fractales implican Caos, pero el Caos no implica Fractales.

Veamos, la Geometría Fractal es tan solo una pequeña parte de la Teoría del Caos, esta última se basa en una diversidad muy grande de herramientas matemáticas que van mucho más allá de los Fractales. Si, como hemos visto anteriormente, aquellos sistemas no lineales o caóticos que tengan Autosimilitud y una dimensión fraccionaria serán estudiados por la Geometría Fractal, pero no todos los sistemas caóticos poseen estas cualidades, por lo tanto se requiere otro tipo de técnicas para estudiarlos.

Diferencia entre la Matemática tradicional y la Teoría del Caos.

Cuando estudiamos en Física materias como Mecánica Clásica, nos topamos con ecuaciones tales como $s=s_0+v_0\ t+½at^2$, la cual nos da por resultado la posición de un objeto que viaja a una velocidad determinada y a un tiempo y aceleración dados.
O las muy famosas leyes de Newton, como por ejemplo la segunda que nos dice F=ma. Ella nos muestra que el valor de la sumatoria de todas las Fuerzas es igual a la masa multiplicada por la aceleración.
Lo que intento dejar en claro con estos ejemplos es que, según la matemática tradicional, conocidas tales condiciones iniciales puedo saber con exactitud como se va a comportar un cuerpo o un sistema a lo largo del tiempo. En teoría, si conozco donde se encuentra un cuerpo, a que velocidad se mueve, que aceleración posee y en que trayectoria se desliza, voy a poder saber sin problemas donde va a estar y que características tendrá su movimiento en el tiempo que yo elija.
¿Qué sistemas describen realmente estas ecuaciones?. En primer lugar, obviamente se aplican a sistemas naturales y mecánicos reales, si no, la Física no tendría ningún sentido. En segundo lugar, y el que nos interesa particularmente a nosotros, estas fórmulas se aplican a sistemas IDEALES. ¿A qué me refiero con ideal? Si bien ecuaciones como las de los ejemplos anteriores tienen en cuenta detalles como el rozamiento, la resistencia del aire y otra serie de variables, JAMÁS van a poder contemplar la totalidad de variables que se presentan en las condiciones iniciales de un sistema. Vamos a dar dos ejemplos que se encuentran en los extremos y ello nos va a llevar a nuestra primera definición:

1) En la Naturaleza tenemos sistemas que se asemejan al comportamiento mecánico de un reloj. Ello implica que planteando una serie de condiciones iniciales podremos saber como ese mismo sistema se va a comportar más delante, en un tiempo dado, de una manera "casi" exacta. Un ejemplo claro de ello es el sistema planetario. Astrónomos pueden predecir un eclipse de Sol cientos de años antes de que ocurra con una asombrosa certidumbre. La palabra casi, es la que introduce el concepto de Caos.

Veamos ahora el segundo ejemplo, el del otro extremo.

2) Seguramente todos han oído hablar del famoso "Efecto Mariposa" que dice algo así como si una mariposa aletea en el Amazonas, bajo circunstancias propicias esa onda puede generar un huracán en las costas bretonas el próximo año.

Bueno, ambos ejemplos son los extremos de lo que se produce en la Naturaleza, el primero sumamente mecánico y predecible y el segundo que en principio parece regido solamente por el azar.
Vamos a ensayar ahora una definición, en primera instancia podríamos decir *"Los sistemas caóticos son aquellos que se encuentran afectados directamente por sus condiciones iniciales, transformándolos en el transcurso del tiempo en sistemas imposibles de predecir".*

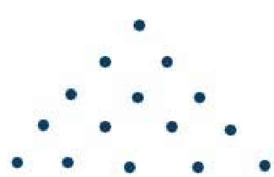
Vamos a seguir avanzando para llegar a una definición más contundente. Absolutamente todos los sistemas se encuentran afectados por sus condiciones iniciales, no hay duda en ello, lo que si es importante destacar es lo que venimos hablando hasta ahora, esas condiciones afectaran a los sistemas de varias formas a lo largo de su evolución, haciéndolos crecer de una manera que podemos predecir o de otra que resultará caótica y difícil de prever(ver los dos ejemplos anteriores).
Antes de seguir, voy a dar más ejemplos de sistemas caóticos para fijar estas ideas.

- El clima meteorológico, no se puede predecir con razonable exactitud con más de una semana de anticipación. Y no siempre se acierta haciendo un pronóstico ese mismo día, por más tecnología avanzada que se utilice. Esto se debe a la gran cantidad de variables que son precisas conocer.
- En la bolsa de comercio, un simple rumor sobre la suba o baja de acciones puede potenciarse a lo largo del tiempo y causar un efecto caótico (comparar con el ejemplo de la mariposa, como se potencia esa onda en el aire y como se potencia el rumor y cuales son los resultados).
- Hace aproximadamente 6 años la Tierra tardó en girar alrededor del Sol un segundo más de lo estipulado. Se cree que se debió en principio a las mareas. Ese segundo de más causará que en cientos de millones de años la Tierra pierda su órbita. (para nosotros mucho tiempo, para la Naturaleza un tiempo razonable).

Entonces, vean como un simple detalle como un rumor, un segundo o el aleteo de una mariposa, puede causar a lo largo del tiempo que un sistema que parecía ordenado y afectado por leyes naturales exactas y deterministas, en un momento dado se transforme en un sistema totalmente caótico y que al parecer está regido más por el azar que por la Naturaleza.
Es sumamente interesante e importante calcular esos puntos de inflexión donde un sistema pasa de ser ordenado a caótico.
Esto nos lleva a enunciar dos postulados importantísimos de la Teoría del Caos, los que considero imprescindibles que queden claro para cada uno de ustedes.
Para la Teoría del Caos, no existen sistemas ni 100% ordenados, ni 100% caóticos. Esta teoría acepta tanto el Orden como el Caos y los relaciona en una dualidad de la siguiente manera *"En todo sistema ordenado, el caos siempre está presente o implícito"* y *"En todo sistema caótico, el orden siempre está presente o implícito"*.
Estos postulados son los que personalmente siempre me han llamado la atención y los que me han convencido de que esta Teoría es la que mejor describe los sistemas naturales, en conjunto con la Geometría Fractal.
Pero analicemos un poco que nos dicen y luego daremos tres ejemplos que se dan en la Naturaleza y que son dignos de estudiar, los cuales nos llevarán a replantearnos un serie de cosas que hasta ahora creíamos sin meditar.
Imaginemos un sistema ordenado. Uno podría ser el que mencioné anteriormente, la Tierra girando armónicamente alrededor del Sol (sistema ordenado y predecible), y que en determinado momento se demora un segundo en cumplir el recorrido total en su órbita, lo que determina que será expulsada de la misma a lo largo del tiempo. (consecuencias caóticas) De este ejemplo se desprende el primer postulado. En todo momento el sistema terrestre es ordenado, pero lleva implícito consigo mismo el caos, que va trabajando muy de a poco y silenciosamente y en un determinado punto se apoderará por completo del mismo y generará consecuencias insospechadas o catastróficas.
Veamos ahora un ejemplo para entender el segundo postulado.
En este caso debemos elegir un sistema totalmente opuesto al anterior. Que comience siendo caótico y derive en orden. Esto se estudia mucho en comportamientos sociales, así que aprovechemos a dar un ejemplo en este campo y luego veremos otros que se dan en la naturaleza que son más complejos.
Imaginemos varias empresas chicas, las cuales están en problemas financieros que las llevan a comportarse de una manera caótica y desordenada en el mercado. No se sabrá que puede pasar el día de mañana con ellas, si quebrarán, si recibirán algún préstamo, si

despedirán personal, etc ... Una situación caótica a la cual estamos tristemente acostumbrados en estos tiempos. Ahora piensen en este caso, una de esas mismas empresas tiene lo que a la otra le hace falta. Una tiene tecnología pero no tiene personal capacitado, la otra le sobra personal pero no posee tecnología, otra tiene contactos en el exterior pero no buenos productos para vender, a otra le sobran buenos productos, pero no los conoce nadie, no están inmersos en el mercado. Esta situación muestra que una empresa tiene justamente lo que le falta a la otra, y por separado todas funcionan de manera caótica y errática. Qué pasaría si todas o algunas de ellas se uniesen a base de contratos legales, un organigrama bien establecido y confianza entre sus socios. Lo que era un sistema totalmente desordenado por separado, encontró sus patrones y puntos en común y derivó en un sistema armónico, ordenado y productivo.
Algo sumamente importante, y por donde siguen pasando las claves para entender esta teoría es lo siguiente.
Según el postulado de la Teoría del Caos que mencioné oportunamente, él nos decía que en la Naturaleza jamás vamos a encontrar sistemas 100% ordenados ni 100% caóticos, por lo tanto, de estos ejemplos se desprende una consecuencia que debemos tener siempre en cuenta:
Por más que un sistema haya derivado en caos, o que se haya vuelto ordenado y estable, potencialmente vuelve a pasar lo inverso. Ahora, aquel que era estable y derivó en caos vuelve a llevar implícito consigo mismo el volver a transformarse en orden nuevamente. Y aquel que era caótico y desordenado y derivó en orden, ahora lleva el caos implícito en su esencia. Esto lleva a conformar un circuito que no es ni más ni menos como se genera y se construye la Naturaleza.
Más ejemplos de sistemas Caos-Orden. Veamos algunos ejemplos adicionales, que considero instructivos.

Ejemplo 1. El primero de ellos no es tan complicado, y hasta lo pueden experimentar ustedes mismos.



Imagínese que en esta pirámide cada uno de esos punto es un clavo. Todos se encuentran incrustados en una pared vertical.
Ahora, esto que les voy a contar se ha realizado en laboratorios, en condiciones de vacío total y con brazos de robot sumamente precisos, vean los resultados.
El robot toma una pequeña bola o pelota perfectamente circular, sin irregularidades. La coloca sobre el tope de la pirámide, o sea, en el primer clavo y luego la suelta. Esa bolita comienza a caer rebotando de clavo en clavo y pasando siempre entre medio de dos de ellos y llegar al siguiente nivel sin detenerse hasta llegar la base. En la base de mi dibujo se encuentran solamente 5 clavos, pero la idea es que sean muchos más, una cantidad superior a los 100 para poder probar esto. Bueno, cuando la bolita llega a la base, esta sale de la pirámide como dijimos antes por entre medio de dos clavos, imaginemos para el primer ejemplo entre el clavo 10 y 11 comenzando a contar de izquierda a derecha.
El mismo robot, aparentemente con las mismas condiciones iniciales vuelve a tomar la misma bolita y a repetir el ejercicio. Al comienzo la trayectoria es similar a la primera experiencia, pero llega un momento que pasa a través de dos clavos distintos, lo que deriva, una vez que llega a la base, que salga por dos clavos que nada que ver con los de la primera medición. Por ejemplo entre los clavos 67 y 68. Sucesivamente, cada vez que la

experiencia se repite, el resultado nunca es el mismo[23], la bolita sale siempre por la base entre dos clavos diferentes y a mucha distancia entre una medición y otra. Su trayecto también sufre modificaciones a partir de un punto y siempre es distinto. Tengamos nuevamente en cuenta que se realizaba en condiciones de vacío y con un brazo de robot preciso y aún así el sistema se comportaba de una manera caótica o azarosa, como decíamos, no se puede predecir por donde saldrá la bolita, y las mediciones arrojan resultados completamente distintos en cada medición.
Esto es un típico caso que demuestra lo sensible que son los sistemas no lineales a sus condiciones o variables iniciales, las que con el paso del tiempo, causan efectos y resultados imposibles de predecir. Primer postulado de la Teoría del Caos que vimos hoy.

Ejemplo 2. Seguramente todos conocen el juego de computadora llamado Tetris. En el estudio convocaron a una persona que no conociera de que se trataba dicho juego. Le inyectaron glucosa radioactiva (el cerebro se alimenta de glucosa), y lo sentaron frente a la PC sin darle instrucciones de cómo jugar. Con un monitor se siguió la evolución. La glucosa radioactiva iluminaba las regiones del cerebro que la persona utilizaba para intentar entender el Tetris, las cuales en primera instancia se manifestaban en gran cantidad. Luego se le enseñó a jugar al mismo tiempo que se le repetía el mismo procedimiento con la glucosa. Mientras la persona más aprendía, menos regiones del cerebro se iluminaban, el cerebro iba asimilando y acumulando información, ya no necesitaba buscar aleatoriamente datos por toda su corteza. Una vez que la persona comprendió por completo el juego, apenas una leve región del cerebro se iluminaba.
Este es un caso muy significativo de la transformación de un sistema caótico (todo el cerebro iluminado en busca de información de cómo jugar) a uno ordenado (una leve región iluminada una vez asimilado el juego). Otro de los postulados que vimos anteriormente.

Ejemplo 3. *El Solitón de John Russell*[24]. Si arrojamos una piedra en un estanque de agua la misma generará una perturbación, produciendo pequeñas olas, las cuales se diluirán en un tiempo breve, dependiendo en principio de la fuerza con que se la haya arrojado y las condiciones del agua en ese momento. Ahora bien, John Rusell observó un fenómeno increíble. En situaciones muy especiales, cuando las condiciones iniciales se presentan de una manera única, hay olas en el océano que se unen formando una nueva con características propias. Esta nueva ola, llamada SOLITON viaja centenares de kilómetros sin perder su forma. Si un barco la atraviesa, al instante recobra su estructura original y sigue adelante. No importa si hay vientos o tormentas, la misma sigue su trayectoria inmutable. Este fenómeno es muy famoso y ha sido muy estudiado. Se ha intentado reproducir artificialmente en universidades por alumnos de Matemática y Física, hay conferencias especializadas en el tema, y cursos especiales solamente referidos a este raro fenómeno, que puede englobar todos los misterios del Caos.
Es otro ejemplo de cómo un sistema caótico como ser olas en el océano se unen y forman un nuevo sistema totalmente ordenado y armónico.
Si alguien desea profundizar más en este tema para debatirlo más adelante, el departamento de Matemática de la Universidad de Heriot-Watt tiene un excelente material, lamentablemente el mismo está en ingles, pero no es difícil conseguir documentación en español en Internet. Los enlaces son:

Página Principal de los Solitones:
http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/

Historia de John Russell y los Solitones:

---

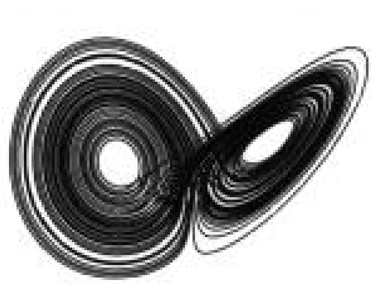
[23] En realidad no es "tan así", lo que quiero decir es que el resultado es impredecible, no sabemos *a priori* entre qué clavos va a caer la bolita.

[24] Ver Anexo 5.

http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html

Recreación del Solitón:
http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html

Ejemplo 4. *Atractores*[25]**.** Un tema fundamental, el cual no voy a poder profundizar en este momento, es el tema de los Atractores. Los mismos son el camino de ida y vuelta que nos conducen al Caos.
En ejemplos anteriores, como el del juego del Tetris, vimos que cuando la persona aprendía a jugar a la perfección se iluminaba solo una región del cerebro. Decimos entonces, que en ese momento se formó un Atractor.
En el ejemplo de la ola de John Russell, ese Solitón es un Atractor puro.
Quizás el Atractor más conocido y popular sea el de Lorentz, el cual se lo asocia entre otras cosas al clima meteorológico. Su imagen es la siguiente



Espero en algún momento del curso, o en una etapa posterior poder retomar el tema de los Atractores ya que como dije es un tema fundamental dentro de la Teoría del Caos.
Otro tema que me queda pendiente es contar un poco la historia de cómo surgieron las ideas del Caos. En especial las preguntas que realizó Poincaré a quien se lo considera el fundador de esta teoría. Pero creo que ya tienen las herramientas suficientes para poder seguir adelante en este curso y encarar la segunda etapa.
Pero, en estos momentos, mientras escribo este texto, me doy cuenta que es un tema que se presta para mucho más, entonces, he decidido añadirlo para ampliarlo la próxima clase, lo cual aprovecharé para enlazar con la ITERACIÓN, lo cual derivará más adelante en la generación de Fractales y un estudio más en detalle de la parte matemática involucrada en el tema.

Ejemplo 5. *El juego del Caos.* Algunos fractales aparecen al repetir ciertas transformaciones del plano en sí mismo, en las que interviene al azar. Ellos constituyen casos particulares del llamado "juego del Caos". Un ejemplo es el siguiente.
Se parte de un rectángulo cualquiera y se eligen tres vértices, sean A, B, C, como en la primera Figura 12. Se parte de un punto cualquiera P_1, interior al rectángulo, y se elige uno de los vértices A, B, C al azar. Si resulta elegido, por ejemplo el punto B, se toma por punto P_2 (transformado de P_1) el punto medio del segmento P_1B. Se elige otra vez al azar uno de los puntos A, B, C y se toma como nuevo punto transformado P_3 el punto medio del segmento que une P_2 con el nuevo punto elegido (en la Figura 12 es nuevamente el B). Si el punto que luego resulta elegido al azar es el C, el punto P_4 será el punto medio de P_3C, y así sucesivamente se obtiene la sucesión $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ Para n grande, puede ser del orden del millón, se observa que, curiosamente, los puntos transformados se van agrupando formando el tamiz de Sierpinski de la segunda Figura 12.
Se pueden idear muchos ejemplos por el estilo y de esta manera obtener, con la computadora, fractales a veces de forma insospechada. Ellos son ejemplos del llamado

[25] Ver Anexo 6.

"azar determinista", que aunque parece una denominación contradictoria ha dado lugar, y sigue dando, a muchos estudios[26].

Ejercicios y Propuestas.
Escribir un ensayo de lo que han entendido hasta el momento sobre la Geometría Fractal y la Teoría del Caos. Esa monografía debe incluir los siguientes puntos:

- Que se entendió por Geometría Fractal, y que es un fractal.
- Dar ejemplos de sistemas con características fractales y caóticos, y otros que no lo sean.
- Pensar áreas y situaciones de aplicación.
- Dar en todo momento su punto de vista, no solo información técnica.

Conferencia 6

Con respecto a la Autosimilitud, pudiéramos preguntarnos si determinadas funciones matemáticas tradicionales pueden llegar a ser fractales, por ejemplo, la función y=senx. Estoy seguro que dicha función no tiene dimensión Fractal, por lo que en primer lugar podría asegurar que no lo es. Pero igualmente sería interesante analizarlo desde el punto de vista de la Autosimilitud. Veamos estas imágenes.

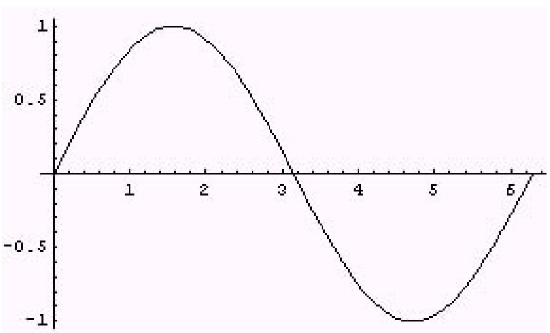


Fig. 1-A

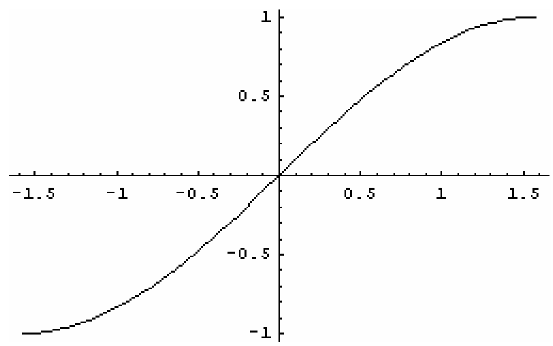


Fig. 1-B

En la Figura 1-A vemos la función senx entre los valores 0 y 2π. En la Figura 1-B observamos la misma función pero esta vez entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. ¿Qué conclusiones podemos sacar de aquí?. En primer lugar diremos que con seguridad no es un Fractal lineal, ya que la Autosimilitud no es perfecta. Desde mi concepto personal de Autosimilitud tampoco lo veo "estadísticamente similar". ¿Qué ven ustedes?.
Debemos añadir que existen determinados códigos en Lenguaje C que para generar imágenes como la Curva de Von Koch utilizan las funciones Seno y Coseno. Al final de esta conferencia irá dicho ejemplo.
Si puedo asegurar que la definición de Mandelbrot acerca de la Dimensión Fractal, es que esta ultima debe ser estrictamente superior a su Dimensión Topológica.
En nuestra vida cotidiana estamos acostumbrados a usar frases como "Esta es la excepción a la regla" ó "Toda regla tiene su excepción".
Lo que notamos con los fractales, es que cada vez que calculamos una dimensión surge algo que nos hace dudar. Ejemplos de excepciones son:

- Conjunto de Cantor – Dimensión Fractal = 0.6309... (Menor que su dimensión topológica de 1).
- Triángulo de Sierpinski – Dimensión Fractal = 1.5849... (Dimensión fraccionaria mayor que 1, pero menor a su dimensión topológica de 2 por ser un triángulo).

[26] Sobre ello se puede ver el artículo de Barton, R.-**"Chaos and Fractals"**, Mathematics Teacher, 1990, vol. 83, 524-529, o el capítulo de Barnsley del libro de Peitgen-Saupe citado antes.

- Curvas de Peano y Hilbert – Dimensión Fractal = 2 (Ambas ni siquiera tienen una dimensión fraccionaria, sino entera).

Cuatro de los fractales más famosos son reconocidos como tales por expertos a pesar de ser excepciones (cosa que desde un punto de vista estrictamente matemático le quita seriedad.) Mi modesta opinión y sentido común dice que se debería reformular la definición de Dimensión Fractal o habría que buscar otras herramientas para calcularla con más exactitud. Recuerden que todos los casos que acabo de nombrar se tratan de fractales lineales, fáciles de estudiar, con los fractales complejos suceden otras cosas mucho más intrigantes. Quizás Mandelbrot solo se refería a los fractales complejos, que son los que realmente se dan en la Naturaleza y descartó los lineales cuando hablaba de dimensión.

Por último, y para finalizar este resumen, recordemos que los fractales puros y perfectos se dan solo en el campo teórico, me refiero al detalle infinito producido por las iteraciones, y jamás se presentan en la Naturaleza, ni siquiera por el momento podemos reproducirlos con algoritmos computacionales, no existen bucles infinitos.

Hemos visto en la conferencia anterior diversos ejemplos de la dualidad que existe entre el Caos y el Orden. Hemos visto también, de manera superficial por el momento, como los Fractales se generan a través de diferentes iteraciones, y pusimos como ejemplo el Conjunto de Mandelbrot, el cual surge de iterar la fórmula compleja $z \rightarrow z^2 + z$ donde z es un número complejo y c una constante.

La Iteración de ecuaciones mediante algoritmos ha revelado una serie de propiedades matemáticas asociadas a la descripción de sistemas naturales realmente asombrosos. Dicha iteración es el camino que nos conduce a los *atractores* y por consiguiente a la permanente y eterna metamorfosis entre el Caos y el Orden.

Ahora veremos un caso que se da en la Naturaleza en la que un sistema pasará de un estado caótico a uno ordenado a través de iteraciones sobre sí mismo.

Una de las aplicaciones reales y más espectaculares de la Teoría del Caos se da en fenómenos demográficos, como son la expansión de colonias de insectos, virus, población de ciudades y territorios por los humanos, epidemias, etc.

Increíblemente algunas de estas poblaciones son sumamente ordenadas, crecen rápidamente, se extinguen de golpe, tienen ciclos perfectos de reproducción o mantienen matemáticamente una tasa de natalidad casi perfecta. Otras, en cambio, son sumamente caóticas.

Para dar un ejemplo de ello, voy al libro que me

El ejemplo habla de un parásito llamado “mariposa lagarta”. Este parásito vive en verano y muere de frío en invierno, antes de morir deposita sus huevos los cuales nacerán al comienzo del próximo verano.

Veamos ahora cual es la ecuación matemática que se utiliza para estudiar poblaciones demográficas que se duplican año tras año $x_{n+1} = 2x_n$

Donde x será el tamaño de nuestra población y los subíndices representarán un tiempo inicial y uno final.

El número de individuos en una población jamás es estable, aumenta o disminuye de un año a otro dependiendo varios factores naturales. Viendo nuestra ecuación imaginemos que nuestro primer año de medición es 1 ($x_n = 1$) y además sabemos que al año siguiente la población se duplicó ($x_{n+1} = 2 = 2x_1$).

La fórmula nos quedaría $x_2 = 2x_1$.

Supongamos que la población inicial es de 1000 larvas. Obviamente, de acuerdo a nuestra formula, la población del próximo año será de 2000 y la del tercer año será de 4000 ($x_3=2x_2$).

Naturalmente este crecimiento lineal tampoco se da en una manera tan perfecta, como es el de duplicarse de año en año, por lo tanto a la ecuación anterior si le agregamos un nuevo término dará una impresión mas realista, este término es N, que indica la tasa de natalidad. Entonces nos queda $x_{n+1} = Nx_n$

Hay que aclarar que esta ecuación es general y sirve para darnos una idea global de la expansión poblacional. Luego, para cada comunidad en especial, se harán los ajustes particulares.

Hasta aquí nada novedoso, sabiendo la tasa de natalidad, y como ha variado una población de un año a otro, podremos saber como se comportará a lo largo del tiempo. Pero esto se da solo, y nuevamente volvemos al concepto de matemática tradicional visto en clases anteriores, en sistemas ideales. Pero eso contradice a las leyes del Caos, y definitivamente no nos da un panorama realista de la situación.

Para solucionar ese inconveniente, a partir de este momento comienza a formar parte del juego lo que a todos nosotros nos interesa: la iteración y todos los conceptos caóticos. Ingeniosamente alguien añadió un término no-lineal a esa ecuación.

Ahora tenemos $x_{n+1} = Nx_n(1-x_n)$

Analicemos, en la misma ecuación tenemos dos veces el término x_n y lo más curioso que uno está enfrentado al otro. ¿Qué quiere decir que estén enfrentados?. Cuando crece x_n, el término (1- x_n) sin dudas disminuye. Cuando x_n tiende a 0 fíjense que la ecuación nos queda prácticamente como la original, o sea, sin el nuevo término ya que este se asemeja a 1. En cambio, cuando crece x_n y se acerca a 1, el nuevo término se acerca a 0, haciendo disminuir todo el término que se encuentra a la derecha del signo igual, o sea, la población un año después de nuestra medición.

Esto está directamente ligado a que una población no puede crecer infinitamente, sino que sé auto regula. Ese último término añadido a la ecuación original nos muestra la "cota", en otras palabras, los límites que puede crecer una población. Esa cota, matemáticamente, es entre 0 y 1, sin importar la cantidad de individuos dentro de la población, es solo una regulación matemática.

Aprovecho a decir, que la auto-regulación y la auto-organización son dos de las características de los sistemas no lineales y caóticos.

¿Por qué a la ecuación anterior le decimos no-lineal?. Noten que cuando x_n crece, al mismo tiempo se auto regula con (1- x_n) y termina haciendo disminuir el resultado final de la ecuación. Entonces, dicha ecuación, no está creciendo ni linealmente, ni exponencialmente; está regulándose no-linealmente.

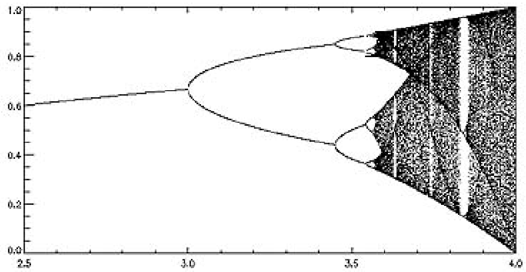
Imaginemos que la tasa de natalidad es de 0.99. Esto significa que la población disminuirá 0.01 cada año, y hasta la población más grande se extinguirá.

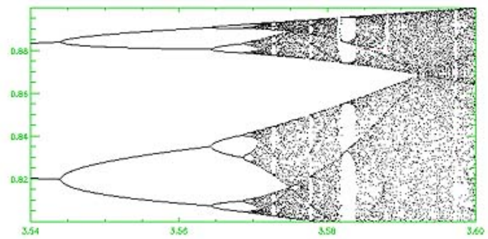
Cuando la tasa de natalidad es 1.5 la población oscilará entre varios valores, y luego se estabilizará en un valor constante de 2/3, o sea, el 66% de la población original.

Cuando la tasa es de 2.5 nuevamente hay una oscilación grande, pero luego vuelve a estabilizarse en 2/3.

Entonces, de acuerdo a lo que vimos la semana pasada, sin ningún lugar a dudas el 2/3 es un firme candidato a convertirse en un ATRACTOR. Más adelante haremos un análisis más técnica de estas cuestiones.

Las oscilaciones de las que hablaba, se deben a varios factores, como ser climáticos, alimenticios, espacio disponible para desarrollarse, etc. Por ejemplo, si tenemos una tasa de natalidad altísima, va a haber muchos habitantes en la comunidad, pero el alimento y el espacio pueden resultar escasos, por lo tanto muchos comenzarán a morir. Hasta llegar a regularse en un determinado número. Por el contrario, si el espacio y el alimento abundan, y la población es muy chica, se dan condiciones propicias para desarrollarse y aumentar la cantidad de integrantes. Nuevamente llegará un momento en el que sean demasiados, y otra vez se auto-regularán. Esto ciclos son justamente los que demuestra la ecuación no lineal que estamos analizando y la manera como forman sus atractores. Gráficamente pueden representarse así:





Dijimos que uno de los números claves era 2/3 o 66%. Ahora, cuando la tasa de natalidad es de 3.56, nuevamente el sistema comienza a oscilar caóticamente. Esos puntos clave como dijimos son atractores, y en cada punto caótico que detectemos será un nuevo atractor construyendo así un grafico de bifurcaciones como los que vemos en las imágenes anteriores.
El gran desafío de los matemáticos es detectar esos puntos y construir así el mapa del Caos, o de crecimiento de un sistema a lo largo del tiempo.
Nuevamente, noten que al parecer, un sistema completamente caótico como el crecimiento de población de las larvas lagartas llega un momento en el que se ordena (cuando llega al 66% de su población original) Pero el caos está potencialmente siempre presente, acechando y cuando la tasa de natalidad supera el 3.56 nuevamente el Caos está presente hasta ordenarse nuevamente en otro punto, un nuevo atractor y produciendo bifurcaciones en su gráfica.
Noten lo más importante de esta clase, esas imágenes de atractores anteriores, tienen una estructura FRACTAL !!!.
Creo que este es un ejemplo de lo más claro que podía dar para ver la dinámica de un sistema natural no-lineal, y la relación que existe con las estructuras fractales, y de paso mostrar como una ecuación no-lineal se realimenta y se auto-regula a sí misma generando el concepto de iteración mas importante que existe para los sistemas fractales y caóticos.

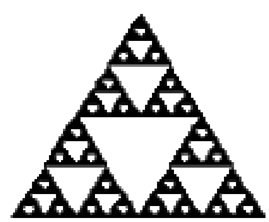
Fractales, Caos y Matemática Tradicional[27]

1) Triángulo de Pascal y Triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Pascal, también conocido como triángulo aritmético tiene la siguiente forma:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Triángulo de Pascal



Triángulo de Sierpinski

El mismo se construye así:

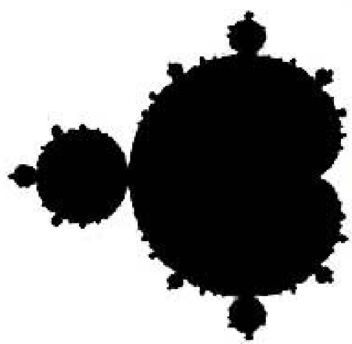
- La primera fila es el tope del triángulo, y es la fila 0.
- todas las filas comienzan y terminan con 1
- cada fila tiene n + 1 elementos
- los demás elementos se obtienen sumando los dos de la fila anterior entre los cuales se encuentra situado. (solo es cuestión de prestarle atención para saber leerlo)

[27] Ver también Conferencia 9.

Esta figura se utiliza mucho en matemática, y representa entre otras cosas los coeficientes de las series de potencias o binomios de Newton. También se lo utiliza en combinatoria, probabilidades y estadística.
Ahora, si sombreo los números impares de Pascal, adivinen que obtengo... sí! Acertaron, EL TRIANGULO DE Sierpinski.
Noten como una estructura fractal se encuentra escondida dentro de una figura de la matemática clásica conocida desde hace más de 700 años como ser el Triángulo de Pascal.

2) *¿El número π dentro del conjunto de Mandelbrot?.*

Aunque he repetido unas cuantas veces esta imagen, vamos a verla nuevamente.



Matemáticos, investigando en Teoría de Números (quizás una de las ramas más apasionantes de la Matemática) han decidido estudiar el Conjunto de Mandelbrot. Dividieron el estudio en dos partes, primero el cuello de esta imagen, y luego su parte posterior. Cuando expliqué en conferencias anteriores como se forma el Conjunto de Mandelbrot, partí de la ecuación compleja $z \rightarrow z^2+c$. Una vez que tenemos la iteración realizada, podemos probar que puntos pertenecen al conjunto y cuales no, reemplazándolos en dicha ecuación, recuerden que dichos puntos se encontrarán en el campo complejo.
Nuevamente la parte matemática involucrada para probar lo que voy a decir ahora escapa totalmente al interés de este curso, lo planteo simplemente como una curiosidad entre la matemática clásica como ser el número π y el conjunto de Mandelbrot, tal vez dos de las figuras más representativas de la matemática en estos días.
Esta primera tabla representa las iteraciones de los x pertenecientes al cuello del conjunto.

X	Número de iteraciones
1.0	3
0.1	33
0.01	315
0.001	3143
0.0001	31417
0.00001	314160
0.000001	3141593
0.0000001	31415928

Esta segunda tabla representa las iteraciones de la parte posterior del conjunto

X	Número de iteraciones
1.0	2
0.1	8
0.01	30
0.001	97
0.0001	312
0.00001	991

0.000001	3140
0.0000001	9933
0.00000001	31414
0.000000001	99344
0.0000000001	314157

Apuesto a que todos han encontrado algo muy similar al número π en estas estructuras. No se ustedes, pero yo no creo en las casualidades[28].

¿Por qué destaco estos aspectos?. Tengan en cuenta algo, teoremas, enunciados y demostraciones como por ejemplo Pitágoras y otros tan conocidos como este último han existido por cientos de años, y han pasado por millones de manos de investigadores, teóricos o estudiantes, digamos que ya no se le pueden descubrir nuevas facetas matemáticas a teoremas tan reconocidos. Es más, creo que tan solo quedan por develar y probar cuatro o cinco intrigas matemáticas. Pero la Teoría Fractal es muy reciente, no tiene mas de 20 años, y todos nosotros somos una de las primeras manos que reciben a esta nueva ciencia. Tenemos un campo muy grande para estudiar, para postular ideas, para corregir enunciados, para descubrir aplicaciones y para probar nuestra propia visión del tema. Lo fantástico de esto es que cualquiera con mucha disciplina, que estudie mucha matemática y programación de computadoras, sentados frente a su PC puede descubrir un mundo totalmente nuevo. Pero es imprescindible tener un punto de vista propio e intercambiar ideas y conocimientos multidisciplinarios. Espero que al menos este curso termine por motivarlos a comenzar tal experiencia.

Por último, y ya finalizando esta conferencia, los invito a aquellos que aún no tienen software para generar fractales que comiencen a bajarlos de Internet desde ahora porque el lunes que viene vamos a comenzar con ese tema.

Los que les recomiendo son los siguientes:

Fractint. Es el programa pionero, con el que yo comencé hace aproximadamente 5 años. El mismo tiene un importante valor matemático aunque las imágenes que produce no son tan artísticas como otros programas.

El mismo es gratis, y corre bajo el sistema operativo DOS. Hay una versión para Windows que no he probado, y hay otra para Linux aunque bastante limitada. Este programa es sobre el que más hablaré. Se puede bajar gratis desde http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html

UltraFractal. Es otro software muy popular y mucho más artístico. En su pagina hay una lista de distribución de mail en la cual se intercambian mas de 30 imágenes por día. El mismo no es gratis, se puede bajar una versión de prueba por 30 días. También hablaré de este software. Se puede bajar desde http://www.ultrafractal.com

Revisen el sitio también, tiene muy lindas galerías.

Ahora si, lo último por hoy y solo para aquellos interesados en los códigos de programación les dejo dos, para generar Sierpinski y Von Koch escritos en lenguaje C.

Programa 001 Curva de Von Koch – Lenguaje C.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <graphics.h>
#include <math.h>

#define PI 3.141593

#define XCENTRO 359
```

[28] Ver Aaron Klebanoff and John Rickert-**"Studying the Cantor Dust at the Edge of the Feigenbaum Diagrams"**, *Coll. Math. J.* 29 (1998),189-198 y http://www.frii.com/~davejen/mandel.html.

```
#define YCENTRO 173

#define XMAX 680

#define YMAX 400

#define XYREL 1.3

main()
{

  int driver = DETECT, modo;
  double orden, t[6], h, m, n, l, k, s, x, y;

  clrscr();

  /* Habilito el modo grafico */
  initgraph(&driver, &modo, "C:\\BC5\\BGI");

  /* Se dibuja el marco en la pantalla */
  rectangle(0, 0, XMAX, YMAX);

  /* Comienza la imagen */
  for (orden = 1; orden <= 5; orden++) {

    /* Se fijan las coordenadas del inicio */
    x = 180.0;    y = 10 + 63 * (5 - orden);
    h = pow(3.0, ((-1.0) * orden)) * 280.0;

    /* Se ubica el cursor en el comienzo de la curva */
    moveto((int)(x), YMAX - (int)(y));

           /* Se construye la curva */
           for (n = 0.0; n <= pow(4.0, orden) -1; n++) {

             /* Se calculan las coordenadas del proximo punto */
             m = n;
             for (l = 0.0; l <= orden - 1.0; l++) {
          t[l] = (int)m % 4;
          m = floor(m / 4.0);
             }

             s = 0.0;
             for (k = 0.0; k <= orden - 1.0; k++) {
          s = s + (int)(t[(int)k] + 1) % 3 - 1;
                        }
          x = x + cos(PI * s / 3.0) * h * XYREL;
          y = y + sin(PI * s / 3.0) * h;

          /* Se dibuja un segmento hasta el punto calculado */
      lineto((int)x, YMAX - (int)y);
             }
           }
           /* Se emite un sonido cuando finaliza la graficacion */
           putchar('\a');
```

```
        /* Se espera el ingreso de algun caracter paraterminar el programa */
        getch();

        /* Se abandona el modo grafico */
        closegraph();

    return 0;

        }
```

Programa 002 Triángulo de Sierpinski – Lenguaje C.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <graphics.h>

void TrianguloSierpinski(void);

void main(void)
{
        int gd=VGA;
        int gm=VGAHI;
        initgraph(&gd, &gm, "C:\\BC5\\BGI");

        TrianguloSierpinski();
        getch();
}

void TrianguloSierpinski(void)
{
        char Direct;
        int iterate;
        unsigned int x1, y1, x2, y2;

        x1 = x2 = 320;
        y1 = y2 = 0;

        for(iterate = 0; iterate < 20000; iterate++)
        {
          Direct = random(3);

          if(Direct == 0)
          {
                x1 = (x2 + 320) / 2;
                y1 = (y2 + 0) / 2;
          }
          else if(Direct == 1)
          {
                x1 = (x2 + 0) / 2;
                y1 = (y2 + 480) / 2;
          }
          else if(Direct == 2)
          {
```

```
            x1 = (x2 + 640) / 2;
            y1 = (y2 + 480) / 2;
        }
        putpixel(x1, y1, WHITE);

        x2 = x1;
        y2 = y1;
      }
}
```

Noten en el código para generar Von Koch, que se realiza a través de las funciones Seno y Coseno, de ahí que hoy decidí hacer hincapié en lo que surgió en los foros, si la función Seno podría ser un fractal.

Conferencia 7

Tocaremos el uso de diferentes programas para generar fractales. Haré hincapié en primer lugar en el Fractint y luego en el UltraFractal. También nombraré otros recursos interesantes.
Antes de comenzar quiero realizar dos comentarios importantes.
1) El propósito de esta conferencia no es el de ser un tutorial o un curso sobre estos programas, sino el de dar las herramientas básicas para que puedan generar sus propios fractales inmediatamente y entender el software para luego poder profundizarlo por ustedes mismos. Si esta conferencia les servirá para comenzar
2) En varias ocasiones estaré mencionando la palabra ZOOM. Desde este momento quiero aclarar que no es la palabra correcta para describir el proceso por el cual vemos un fractal por dentro. La palabra exacta sería iteración. La ventaja de la primera es la de ser muy intuitiva, y el concepto justo de iteración lo entenderán cuando les quede claro el de Dimensión Fractal.
¿Qué programa es mejor? La respuesta a ello varía dependiendo de varios factores. Los programas de fractales podrían dividirse en dos categorías muy grandes, las mismas son:
- Estudio de Fractales
- Diseño de Fractales desde un punto de vista artístico.

Luego cada una de esas categorías se subdividirá en otras más pequeñas. Por ejemplo:
El estudio de fractales se puede encarar desde un uso:
- Matemático.
- A nivel Programación.
- Desarrollo de algoritmos.
- Creación de fractales IFS (los mencionaré más adelante).
- Evolución de Atractores.

Los fractales artísticos pueden dividirse en:
- Creación de imágenes.
- Galerías virtuales.
- Música Fractal.
- Películas Fractales.

Para cada una de esas categorías y subcategorías hay software y aplicaciones especificas.
Vamos a comenzar en primer lugar con el Fractint.

1) FRACTINT

Características principales.
- Para acceder al programa, pueden hacerlo desde http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html
- La última versión disponible es la 20.0
- Existen versiones para los siguientes sistemas operativos: Win – DOS – Unix.

- El Fractint es totalmente libre, sin costo alguno para cualquiera de esas plataformas.

Bien, esas son las primeras características que deben tener en cuenta. Sinceramente la versión para Windows jamás la probé, y lo que he escuchado sobre ella no es para nada recomendable. La versión para Linux si la he testeado y es bastante rudimentaria comparada con la versión para DOS, pero para un estudio matemático de los fractales es sumamente potente, no así desde un punto de vista artístico ya que las paletas de colores no están implementadas como en otros programas.

Por lo tanto, sin dudas, la versión que les recomiendo es la que corre bajo DOS.

Si es la elección por la que finalmente optan, el archivo va a venir comprimido en una extensión ZIP, y lo bueno es que con tan solo descomprimirlo en una carpeta creada por ustedes, automáticamente tendrán disponible el ejecutable para hacer andar el programa. *(fractint.exe)* No hace falta ningún otro requerimiento de instalación o configuración.

Nota: para descomprimir el archivo frain200.zip que han bajado es necesario hacerlo con un programa como el Winzip o WinRar.

Bien, por el momento nada nuevo referido a los fractales. Los pasos que deberían haber hecho en resumen para adquirir y tener el Fractint en su PC son:

- Haberse conectado al sitio de Fractint (link mencionado anteriormente)
- Haber bajado el archivo frain200.zip para DOS.
- Haber creado una carpeta llamada Fractint (no importa en que directorio)
- Haber descomprimido el archivo frain200.zip con el WinZip o WinRar en dicha carpeta.
- Una vez descomprimido el archivo, dentro de la carpeta Fractint (o como ustedes la hayan llamado), encontrarán el archivo ejecutable fractint.exe

Espero que todos hayan podido llegar hasta aquí. Para ejecutar el Fractint solo tienen que hacer doble click en el archivo ejecutable fractint.exe y se les abrirá una ventana de DOS. Aquellos que dominen y se acuerden algo del DOS obviamente es preferible correrlo directamente desde el DOS y no desde WIN.

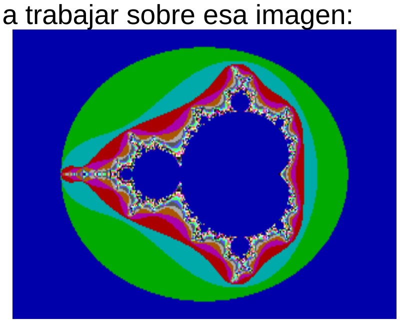
A) Una vez dentro del programa, lo primero que aparece es una larga lista de desarrollados del Fractint (quizás vea el nombre de alguno de ustedes en futuras versiones del programa).

B) Para salir de dicha pantalla y avanzar hacia la próxima basta con presionar la tecla ENTER.

C) Lo primero que les pide es que seleccionen el modo de video que posee su PC: Select Video Mode Hagan ENTER ahí. A menos que conozcan con exactitud su placa de video, es preferible que opten por la que el Fractint ha reconocido por defecto. Para ello presionen ENTER.

D) Y ahora sí! Aparece su primer fractal. A esta altura no hace falta mencionar que es el Conjunto de Mandelbrot, pero bueno... vamos a nombrarlo por las dudas.

E) Ahora podemos comenzar a trabajar sobre esa imagen:



Si todo anduvo bien esta es la primera imagen que verán.

Una de las grandes ventajas que tiene este programa, es que no requiere el uso del mouse prácticamente para nada, por lo tanto podremos realizar todas las operaciones con el uso de las teclas. Veremos algunas de ellas:

PgUp o PageUp o RePag En cada teclado que veo esta tecla tiene un nombre diferente, pero en definitiva es la tecla para subir o retroceder una pagina de un texto. Con esta tecla lo que podremos hacer es un recuadro para luego ubicarlo en la región del fractal donde queremos “sumergirnos” o hacer un ZOOM o iterarlo, como más claro les resulte llamarlo. Veamos:

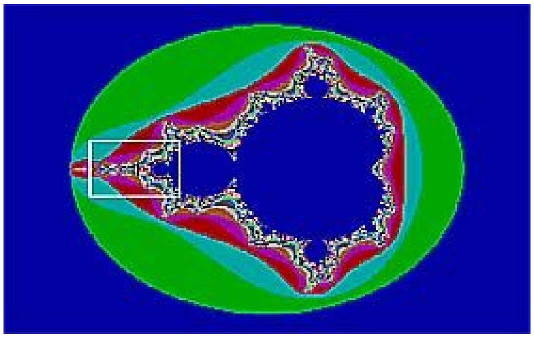


Fig. 2-A

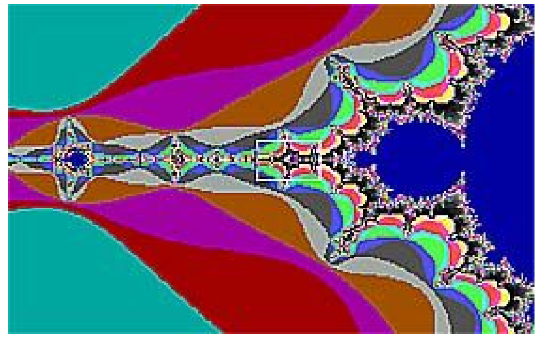


Fig. 2-B

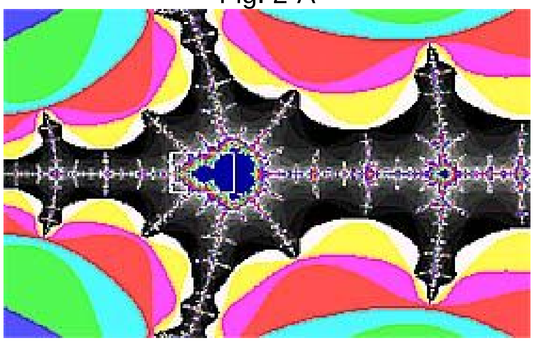


Fig. 2-C

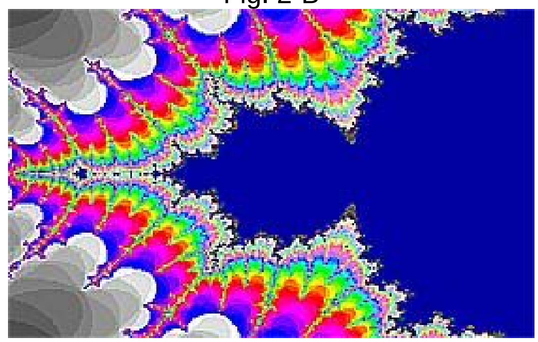


Fig. 2-D

NOTA: Cuando ustedes presionen *varias veces* la tecla PgUp el recuadro se dirigirá hacia el centro del fractal, para moverlo dentro de la imagen de un lado hacia otro deben usar las cuatro flechas del teclado: los cursores.

Fíjense en el ejemplo que di recién, noten en la figura 2-A el recuadro blanco que hice. En la figura 2-B aparecerá el resultado luego de haber presionado ENTER una vez creado ese rectángulo. Así sucesivamente en cada una de las imágenes.

NOTA: Para achicar el rectángulo donde queremos hacer nuestro ZOOM como dije recién utilizamos la tecla PgUp, como intuitivamente se darán cuenta para agrandar ese rectángulo usaremos la tecla PgDn o PageDown o AvPag

Aquí viene la parte interesante y la que nos permite aprender más allá de generar bonitas imágenes. Podemos repetir este proceso de crear nuevos rectángulos y sumergirnos en diferentes áreas del fractal una cierta cantidad de veces. Pero llegará un momento donde vamos a tener toda la pantalla de un solo color. Los fractales teóricos tienen detalle infinito, por lo tanto se supone que se podrían realizar infinitos ZOOMs dentro cada imagen, pero no es así, todavía no se ha podido crear un programa para realizar ese tipo de cálculos y probablemente nunca se pueda.

El Fractint no tiene solo el Conjunto de Mandelbrot para investigar, sino que trae más de 100 fórmulas para interactuar. Para acceder a ellas, podemos hacerlo con la tecla t la cual nos mostrará todos los tipos de fractales disponibles. El que vimos hasta ahora es el llamado Mandel, prueben todos los demás, y comiencen a hacer zoom en cada uno de ellos.

Otra opción a la tecla t es, desde el menú principal, Select Fractal Type.

Algo interesante y muy destacado en el Fractint es que trae una sección de fractales IFS, los cuales nosotros llamamos anteriormente "fractales lineales". Podrán generar desde esa sección entre otros, el triángulo de Sierpinski o la hoja de helecho que vimos en otras clases, pero insisto, no desde un punto de vista artístico.

Otra cosa muy importante es la extensión de los archivos reconocidos por Fractint. Los .PAR son los parámetros que ustedes podrán abrir con este programa para empezar a estudiarlo. Por ejemplo, yo puedo crear en mi computadora un fractal con el Fractint y guardar sus parámetros, puedo subir a Internet ese archivo PAR y cualquiera de ustedes bajarlo, abrirlo desde sus PC y comenzar a trabajar sobre él. Está lleno de sitios de artistas fractales que

suben sus fórmulas y sus parámetros para que otros usuarios trabajen sobre ellos. Por lo tanto, cada vez que vean en alguna pagina de fractales, algún parámetro PAR, podrán abrirlo con el Fractint y crear nuevas imágenes a partir de él.
Algo sorprendente y sumamente útil que nos presenta Fractint es que una vez que hicieron zoom y vieron una imagen que les gusto, pueden guardarla en formato GIF. Pero esta imagen no será común y corriente, o sea, una imagen plana. Ese GIF tendrá incorporado todo el código y parámetros que se utilizaron para crear esa imagen. Suena complicado, pero lo que realmente implica es que si yo abro con el Fractint esa imagen nuevamente puedo seguir haciendo ZOOMs sobre ella como si fuera un código de programación y no una imagen plana.
Guardar una imagen es sumamente sencillo. Basta con presionar la tecla S y automáticamente Fractint guardará ese fractal en el directorio que han creado y donde instalaron el programa. Se guarda con el nombre fract001.gif luego ustedes pueden renombrarlo. Si a continuación guardan otra imagen, como es lógico esta tendrá el nombre fract002.gif.
Otra opción para guardar sus fractales es desde el menú principal: Save image to file
Si bajan parámetros e imágenes desde algún sitio en Internet, para poder abrirlas en su PC primero deberán buscarlas, para ello: presionen la tecla r o en su defecto desde el menú principal: load image from file.
Para escapar siempre de un menú a otro, o para salir de una imagen, presionen la tecla Esc.
Bien, estas son las herramientas más básicas que le permitirán crear sus primeras imágenes fractales. Hagamos un resumen:
Una vez instalado el programa y habiendo corrido el archivo Fractint.exe:
1) ENTER para salir de la pantalla de presentación.
2) ENTER para seleccionar el modo de video.
3) ENTER para seleccionar el reconocido por defecto por Fractint.
4) Ya tendrán su primera imagen en pantalla, el Conjunto de Mandelbrot. Para trabajar sobre él:
- PgUp para crear el rectángulo que ubicarán en la región del fractal en el cual deseen hacer ZOOM. Sirve también para achicar el tamaño del rectángulo.
- Utilizar las cuatro flechas del teclado para mover ese rectángulo de un lado hacia otro en la pantalla.
- PgUp para agrandar el rectángulo.
- t para seleccionar otro tipo de fractal.
- s para guardar la imagen deseada en formato GIF.
- r para buscar imágenes o parámetros en su PC para luego abrirlos con el Fractint
- Esc para escaparse de cada imagen o menú.
- F1 es la ayuda, muy útil !!.

Perfecto, todo lo que se puede hacer con el Fractint es maravilloso, esta última versión acepta archivos PAR de música fractal, lo cual es todo un tema. Existen varios programas que trabajan en conjunto con el Fractint para crear diversas aplicaciones, y otro aspecto interesante pero más avanzado es que cada vez que abran un nuevo fractal verán las opciones para cambiar los parámetros y generar nuevas imágenes a partir de ello, pueden experimentar aunque no entiendan de que se trata a ver que pasa, pero no nos adelantemos mucho más, este es solo el comienzo de un camino tan inmenso como el mismo detalle fractal.
Pero antes de dar por finalizada esta introducción al Fractint, quiero mostrarles otra opción que seguramente les gustará. El manejo de colores.
Si sobre una imagen presionan la tecla c dos veces comenzarán a ver una catarata de colores, los cuales pueden manejar presionando c nuevamente para detenerlo o con las teclas + y – para avanzar o retroceder en la gama de colores. No les cuento más así hacen las pruebas por ustedes mismos. Recuerden utilizar también la tecla Esc cuando hayan encontrado el color que más les guste.
Existe otro modo para crear fractales desde un punto de vista más artístico pero resulta algo complejo hacerlo con el Fractint así que voy a explicar ese tema en la sección del

UltraFractal. Para aquellos que igualmente deseen experimentar la paleta de colores se abre presionando la tecla e. Las extensiones de los archivos que contienen paletas de colores son los .MAP.

Links interesantes sobre el Fractint.
- 1) Home Page de Fractint http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html
- 2) Interesante tutorial de Fractint
  http://areafractal.tierradenomadas.com/fctint.html
- 3) La página de Jim Muth. (Fractal of the Day) Este muchacho desde el año 1997 viene subiendo una imagen diferente cada día en las listas de mail sobre Fractint. Lo bueno es que también sube sus parámetros (http://home.att.net/~Paul.N.Lee/FotD/FotD.html).
- 4) Galerías de Imágenes hechas con Fractint y sus respectivas formulas y parámetros (archivos PAR). http://www.les.stclair.btinternet.co.uk/fractals/fractin1.htm.

Esta última página puede resultarles de especial interés y les permitirá aprender muchísimo. Verán imágenes hechas con este programa, pero además podrán bajar las formulas y los parámetros de todas esas imágenes. Esto funciona más o menos así:
- Bajan alguno o todos los paquetes ZIP con imágenes, por ejemplo el primero que contiene 30 y se llama kscope.zip.
- Una vez que los hayan bajado les recomiendo que los copien al directorio donde han instalado el Fractint y luego descomprimirlos con el WinZip o similar.
- No solo deben contar con los parámetros, sino que muchos de ellos dependen de fórmulas necesarias para que esos fractales puedan crearse. Esas fórmulas son hechas por cada una de las personas que desarrollan imágenes fractales. Cuando estén más avanzados espero ver sus propias fórmulas dando vueltas por Internet. En la página hay un link para que puedan bajarlas, el archivo se llama lparfrms.zip y ya que estoy se los dejo linkeados por las dudas que no lo encuentren.
- Cuando ya tengan descomprimidos en el directorio donde tienen instalado el Fractint tanto los parámetros como las fórmulas, ya podrán abrirlos, hacer ZOOM en cada uno de ellos y crear nuevas imágenes.
- Para abrirlos recuerden presionar la tecla r que les permite buscar archivos en sus directorios.

Bueno, como dije al comienzo esta conferencia no es un tutorial de Fractint, solo quería comentarles las características principales para que ya puedan generar sus imágenes. Ahora depende de ustedes. Lo que les aconsejo es lo siguiente:
- Lean todo este material con detenimiento.
- Aunque no les salga nada sigan intentando y dando vueltas por el programa y cada una de sus opciones.
- Cuando realmente descubran que no les salen las cosas, pregunten, en los foros de debate he abierto un espacio especial para eso.
- Busquen otros textos explicativos. Como por ejemplo el link que les deje hace un instante sobre el tutorial en Área Fractal.
- Utilicen siempre F1 que es una muy buena ayuda.
- Si se animan participen en las listas de distribución de mail y en los foros de debate internacionales.

2) ULTRAFRACTAL

Características principales.
- Para acceder al programa, pueden hacerlo desde: http://www.ultrafractal.com

La última versión disponible es la 3.0, aunque yo recomiendo fuertemente la anterior, la 2.05 que se puede bajar desde http://tucows.gms.lu/mmedia/adnload/194925_75032.html
- Existen versiones para diferentes versiones de Windows y está escrito en lenguaje Pyton.
- UltraFractal es shareware, tiene un período de prueba de 30 días.

Bien, esas son sus características principales. La ventaja que tiene sobre el Fractint es que

su interfaz es mucho más linda y por sobre todas las cosas es mucho más intuitivo. Para los que recién están comenzando en el manejo de software para la generación de fractales, creo que este es un muy buen comienzo, es muy fácil de instalar, muy fácil de manejar y podrán generar imágenes de gran belleza.
Empecemos, toda la filosofía es igual que la del Fractint y la de cualquier otro software. Se trata de abrir un archivo, comenzar a hacer zoom dentro de él y de esa manera generar nuevos fractales. Para aquellos más adelantados también se trata de crear sus propias fórmulas.
Al igual que el Fractint una vez que se corre el programa aparecerá en la pantalla el Conjunto de Mandelbrot. Ya no hay que hacer malabarismo para crear un rectángulo y luego hacer zoom en la imagen, ahora simplemente se hará manteniendo presionado el botón del mouse y moviéndolo hasta la región del fractal que deseen ampliar. Aparece un pequeño menú flotante donde encontrarán opciones para girar la selección, aumentar o disminuir su tamaño.
Aparecen otras dos pantallas a modo de menú, una de propiedades que tiene que ver con la formula utilizada, sus parámetros, transformaciones que se le pueden aplicar a un fractal para deformarlo y otras propiedades algo más complicadas. Pueden experimentar tranquilamente con todas ellas, y guiarse con el tutorial que se encuentra en el HELP – Getting Started.
La segunda ventana se divide en 3 partes:
1) Layers: Esta opción es la que le dará el toque artístico a sus fractales. Le permitirá combinar varias capas y agregar efectos. Quienes sepan de diseño grafico y manejen software como el PhotoShop les resultará muy fácil, aquellos que no estén tan familiarizados con estos programas no les queda otra que practicar muchísimo, bajarse parámetros de fractales ya diseñados y aprender de ellos, leer tutoriales y cuando no les salga algo preguntar. Todo es cuestión de practica.
2) Image: En esta ventana tenemos todas las características de la imagen que obtendremos por resultado: Altura de la imagen, ancho y resolución (conviene que no supere los 300)
3) Comments: son solo características optativas que se agregarán al código, como ser el nombre de quien creó el fractal, la fecha de creación y algún comentario como su e-mail o pagina Web donde suben sus fractales.
NOTA IMPORTANTE: En la primera ventana, la de propiedades, encontrarán una pestaña que dice FORMULA, y dentro de ella un espacio para completar las iteraciones que desean. (Maximun Iterations) Esta opción muestra la cantidad de zoom que podrán hacer sin perder fidelidad en la imagen y el nivel de profundidad donde siempre van a seguir encontrando una nueva imagen al hacer zoom. Noten que el límite que propone el UltraFractal es de 100.000, generalmente se usa una iteración de entre 500 y 2500, más de eso puede hacer que cuando alguien abra la imagen que han creado, tarden horas completas en cargarla. Recuerdo cuando comencé con el Fractint hace más de 6 años atrás, en esa época tenia una PC 486 con 4 MG de memoria. Muchas veces he dejado noches completas la computadora encendida tan solo para que hiciera una iteración. Mandelbrot, cuando comenzó a generar sus primeros fractales en IBM, tardaba semanas completas y eso que usaba computadoras que en aquella época eran de última generación y todas en un clauster. Por lo tanto, tengan cuidado cuando elijan la cantidad de iteraciones, recuerden que ya dijimos que no existían fractales con iteración infinita, al menos por ahora!
Veamos más cosas que pueden hacerse con este programa. Estudiemos ahora la estructura de directorios que se han creado luego de la instalación del UF. Hay 6 carpetas:
- Alpha
- Export
- Formula
- Fractal
- Gradient
- Parameters

Por el momento vamos a estudiar 3 de ellas.

Cuando uno genera fractales a través de este tipo de programas, podemos decir que la creación del fractal se divide en dos grandes partes:

- Fórmula
- Parámetro

Lo que pasa es que al hacer todo de una manera gráfica mucha gente no tiene en cuenta estos dos aspectos. Una comparación de ello es para quienes diseñan páginas Web, pueden hacerlo con el Bloc de Notas en un simple TXT o con un programa gráfico como del DreamWeaver, el resultado será el mismo, la manera de hacerlo no, una es mucho más didáctica y fácil que la otra.

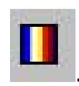
Entonces, con la instalación básica del UF vienen aproximadamente 20 fractales de muestra, sus parámetros están guardados en la carpeta PARAMETERS y sus respectivas fórmulas, como no podía ser de otra manera, se encuentran en la carpeta FORMULA. Hasta el momento esto no debería ser ningún problema para ustedes, ni siquiera tienen que ingresar a las mencionadas carpetas. Pero, si desean bajar más imágenes, como seguramente sucederá, entonces deberán fijarse bien donde guardan sus archivos, más adelante retomo esto.

Para abrir un fractal, pueden ir a FILE – OPEN – (Directorio donde se instaló UF – Parameters) – Elegir el fractal deseado.

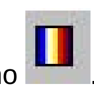
Una vez que lo tenemos en la pantalla, como expliqué antes, con el mouse podemos comenzar a hacer zoom e iteraciones para generar nuevos fractales.

Veamos un poco el tema de los colores que en este programa resultan muy interesantes.

Con este icono  comenzará a generarse un movimiento que mostrará toda la gama de colores de una determinada paleta (GRADIENT) Es equivalente a cuando presionábamos la tecla c en el Fractint. Es asombroso como varía la forma de un fractal tan solo con cambiar su color.

Para ver la paleta que estamos usando en este momento existe otro icono .

Para cambiar de una paleta a otra, el tema es algo complicado. Hay que seguir los siguientes 5 pasos:

1) Ir a FILE – BROWSE - GRADIENT. Ahí verán una serie de paletas disponibles.
2) Elegir la que más les guste y hacer doble click sobre ella para abrirla.
3) Presionar al mismo tiempo las teclas ctrl - c (equivalente a COPIAR).
4) Una vez hecho eso, volver a la imagen y presionar nuevamente el icono .
5) Veremos entonces la paleta anterior con la que estábamos trabajando, ahora solo falta presionar al mismo tiempo las teclas ctrl – v (equivalente a PEGAR)

Realizados estos 5 pasos, automáticamente el fractal adoptará la nueva paleta de colores.

Bueno, puede que por este medio resulte todo algo complejo, pero verán que cuando estén frente al programa todo resultará más intuitivo. Queda en ustedes investigar y meterse en todas las opciones, esta es tan solo una pequeña guía de ayuda, pero es imprescindible que ustedes investiguen, investiguen e investiguen, metiéndose en todas las opciones posibles y experimentando que sucede.

Otra muy buena manera de aprender es bajándose fractales hechos por artistas, abrirlos con el UltraFractal y trabajar sobre ellos. Además de ver las imágenes, estudien y lean también los códigos!

En el sitio de UltraFractal.com se encuentra disponible una lista de distribución de mail donde a diario se intercambian más de 100 imágenes. Si tienen paciencia, tiempo, saben inglés, y están dispuestos a recibir una alta cantidad de mails diarios, les aconsejo fuertemente que se suscriban y hagan correr todos los fractales que ellos envían, y por supuesto, envíen sus propios trabajos también.

Así como en el Fractint los parámetros eran archivos PAR, en UltraFractal son UPR, existen bases de datos enormes en Internet para bajar UPRs, por ejemplo los de la lista de mails que les comenté se encuentran en:

http://users.pandora.be/jan.vyvey1/fractals.htm

Allí encontrarán más de 20.000 parámetros disponibles en paquetes ZIP, los cuales deberán descomprimir dentro de la carpeta PARAMETERS que les mencionaba anteriormente.
Como también les comenté, la mayoría de esos fractales están generados a través de fórmulas que han escrito diferentes personas a lo largo del mudo, las cuales son igualmente necesarias bajar; también vienen en paquetes ZIP los cuales hay que descomprimir en el directorio FORMULA. Se pueden bajar desde:

http://formulas.ultrafractal.com/

Realmente no sé que tan actualizados estarán esos paquetes. Si cuando cargan algún fractal, les muestra algún tipo de error, seguramente es porque no puede encontrar la fórmula adecuada, y habrá que comenzar a investigar donde pueden encontrarse.
Galerías de imágenes, tutoriales, más fórmulas, parámetros y otros recursos pueden encontrarse en:

http://www.ultrafractal.com/resources.html

Bueno, esto es todo por ahora con el UltraFractal, les deseo suerte, y la única forma en la que van a tener éxito es siendo perseverantes y seguir adelante por más que se topen con problemas o no entienda algún tema en particular.

3) Otros Programas

Por supuesto que el Fractint y el UltraFractal no son los únicos programas para generar fractales, existen cientos de ellos. Algunos otros que me gustaría destacar son Fractal Explorer. Puede bajarse de:

http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/index.html

ó

http://www.freedownloadscenter.com/Multimedia_and_Graphics/Graphics_Editors/Fractal_Explorer_Download.html

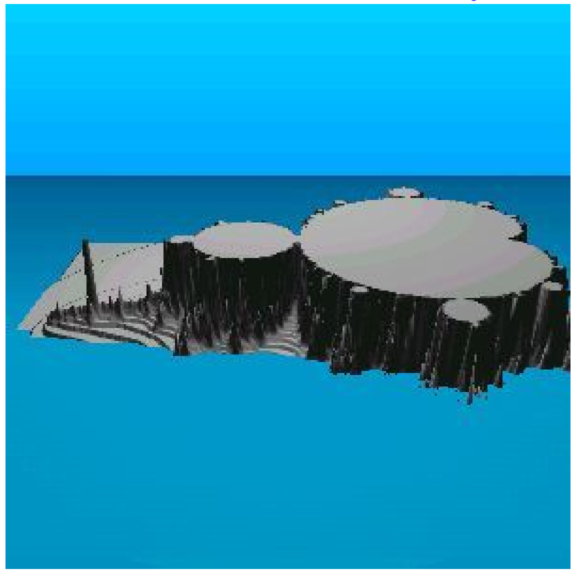
Una galería de imágenes de este programa se puede encontrar en:

http://members.optusnet.com.au/~peterstone/gallery.html

Si bien no es tan artístico como el UltraFractal, este tiene una opción para generar paisajes fractales en 3D, lo cual me ha resultado muy interesante. Para ello deben contar además con la Fractal Landscapes Library y descomprimirla en el directorio que han instalado el Fractal Explorer. La pueden bajar de:

http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/download.htm

Un ejemplo de esta imagen puede ser:



Noten que Conjunto de Mandelbrot tan interesante.
Otro programa que me gusta mucho es el Tierazon, el mismo puede bajarse de:

http://fractals.iuta.u-bordeaux.fr/fergusonsc/

En este último sitio, se encuentran varios programas más para generar fractales!.
Lo que tiene de bueno el Tierazon es que se pueden crean películas fractales en formato AVI realmente espectaculares, las mismas se generan a través de iteraciones o haciendo zoom dentro de la imagen. Estoy preparando un par de estas películas y las subiré pronto a FractalTec.

Un muy buen tutorial de este programa y de Arte Fractal, se encuentra en: http://www.fractalarts.com/ASF/Tutor1.html

Por último, el programa que quiero recomendarles ahora es el Chaos Pro. El mismo puede bajarse desde:

http://www.chaospro.de/

y tiene un muy buen tutorial incorporado.

Conferencia 8

Los Fractales nacen de la siguiente idea, Mandelbrot, en su libro "Geometría Fractal de la Naturaleza" dice algo así como *"Las copas de los árboles no son triángulos, las montañas no son conos, las nubes no son elipses... "*. Lo que quiso expresar con esto es muy claro, las herramientas y figuras de las que consta la Geometría Tradicional o Euclidiana no describen con exactitud o de una manera convincente diversos sistemas que se encuentran en la Naturaleza (Recuerden de la Conferencia 4, lo importante de describir con sumo detalle todos los sistemas dinámicos y caóticos).
Como fue explicado en la Conferencia 1, Mandelbrot estaba estudiando el "ruido" que existía en determinados fluidos eléctricos. En los mismos detectó un patrón de semejanza, y el mismo mostraba que a diferentes escalas estas perturbaciones se repetían de una manera similar o auto-similar.
No hace falta decir que tales observaciones le provocaron una gran inquietud y lo llevó a pensar en que otros sistemas podría encontrar tales patrones.

Lo primero que formuló fue su famosa pregunta: "¿Cuánto mide la costa de Inglaterra?" (ver Conferencia 1).
Entonces, de acuerdo a estas observaciones, resultados obtenidos y a su nueva "visión de la Naturaleza" formula el concepto de Fractal, al cual le asigna dos características fundamentales:

- Autosimilitud.
- Dimensión Fractal.

Antes de comenzar con estas propiedades, recordemos que existen dos tipos de fractales bien definidos:

- Lineales.
- Complejos.

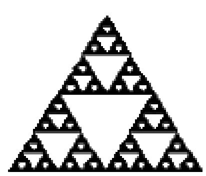
Los primeros se generaban justamente a partir de conceptos, figuras y algoritmos lineales, como ser rectas o triángulos. (ejemplos de ellos son el Triángulo de Sierpinski, la Curva de Von Koch o el Polvo de Cantor).
Los segundos se generan partiendo de iteraciones complejas, como es $z \rightarrow z^2 + c$.
Con esta iteración se genera el Conjunto de Mandelbrot. Otro ejemplo de fractal complejo es el Conjunto de Julia.

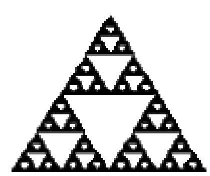
1) AUTOSIMILITUD.
Bien, con estos datos, ya podemos comenzar a retomar el tema de Autosimilitud.
Había definido esta propiedad de la siguiente manera *"cada porción de un fractal tiene la misma forma o se asemeja al fractal completo".*
Había dividido también la categoría de Autosimilitud en dos subconjuntos más:

- Estrictamente Autosimilares.
- Estadísticamente Autosimilares.

Estas dos subdivisiones causaron varios inconvenientes en los foros de debate, voy a ver si puedo explicarlos de una mejor manera:

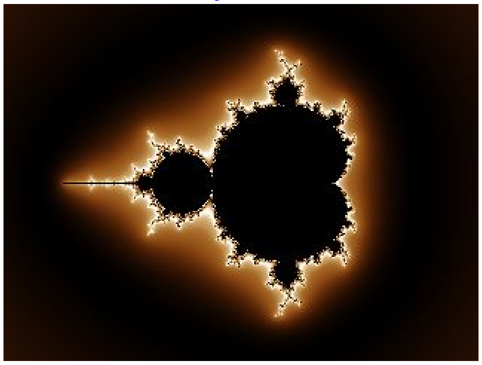
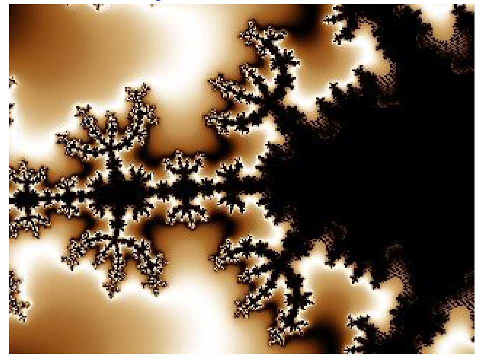
A) Estrictamente Autosimilares.
En primer lugar quiero recordar que esta categoría se asocia a los Fractales LINEALES. Si comenzamos a sumergirnos dentro del Triángulo de Sierpinski por ejemplo, siempre encontraremos un nuevo triángulo exactamente igual al original (fractal inicial.) Veamos las figuras:





Uno puede decir que ambas figuras son las mismas, pero no!. La primera es la figura original del Triángulo de Sierpinski y la segunda es un trozo de la primera ampliado o iterado.
Por supuesto que ambos se verán iguales, y eso se debe justamente a que son ESTRICTAMENTE AUTOSIMILARES. Sucede lo mismo si uno toma la Curva de Von Koch por ejemplo, y elige una zona adecuada para ampliar de dicho fractal.

B) Estadísticamente Autosimilares.
Esta segunda subdivisión de la Autosimilitud está directamente relacionada con los Fractales Complejos.
Lo que quiero decir con ello, es que en este caso la Autosimilitud no es "perfecta" como en los que acabamos de ver, sino que es muy aproximada.
Veamos un ejemplo a ver si de esta manera queda más claro:

Bien, en la primera figura tenemos el Conjunto de Mandelbrot original, sin haberlo iterado aún. En la segunda, tenemos una sección del mismo conjunto, pero esta vez luego de haberle aplicado 5 ZOOMs o iteraciones con el programa UltraFractal. (ver conferencia anterior).
Lo que nos muestran estas dos imágenes, es que la segunda tiene características muy similares a la primera, pero no es exactamente igual a como sucedía con el caso anterior del Triangulo de Sierpinski donde sus ZOOMs nos revelaban siempre la misma imagen, (exactamente igual a la original.) Cuando sucede esto decimos que el fractal es "Estadísticamente Autosimilar". Y son los que se presentan en la Naturaleza, en el mundo real. Como ya dijimos varias veces, los primeros son solamente teóricos, matemáticos.
El siguiente cuadro resume estos puntos:

$$AUTOSIMILITUD\begin{cases} Estrictamente \quad Autosimilar \Rightarrow Fractales \quad Lineales \\ (Similitud\ directa,\ en\ toda\ escala\ del\ \ fractal,\ a\ su\ \ figura\ original) \\ Triángulo\ de\ Sierpinski,\ Conjunto\ de\ Cantor,\ Curva\ de\ von\ Koch \\ Estadísticamente\ Autosimilar \Rightarrow Fractales\ Complejos \\ (Similitud\ \ muy\ aproximada\ a\ la\ \ figura\ original\ en\ toda\ su\ escala) \\ Conjunto\ de\ Mandelbrot,\ Conjunto\ de\ \ Julia,\ etc. \end{cases}$$

2) DIMENSIÓN FRACTAL.
El otro tema que hay que repasar es el concepto de Dimensión Fractal. Para ello, nos enfrentamos a dos problemas diferentes que surgieron en los foros de debate:
- Problemas para entender el concepto.
- Diferentes puntos de vista y falta de acuerdo en determinados aspectos.

Para salvar el primer inconveniente voy a intentar explicar más claramente estos conceptos y detallarlos con ejemplos. Con respecto a los diferentes punto de vista, no hay mucho que pueda hacer, voy a contarles lo que dice la mayoría de los libros, expertos y lo que he escuchado en diferentes debates, y luego seguir intercambiando ideas y quizás nos pongamos todos de acuerdo.
Primero vamos a situarnos en esta problemática. Tenemos tan grabado en nuestros cerebros el concepto de dimensión que seguramente muy pocos se han puesto a pensar lo que realmente significa ese término. De hecho la respuesta no es nada fácil, ni siquiera antes de haberse descubierto los fractales. Quien definió con propiedad la dimensión fue Euclides, y la asoció a los grados de libertad que necesita un objeto para existir o el espacio requerido donde "vivir". Así un punto tiene una dimensión de 0, una recta de 1, un plano de 2, y por último el espacio de 3.
Desde un punto de vista un poco más matemático podría decir que la dimensión es la cantidad de vectores independientes que se necesitan para generar o describir un espacio (no me refiero al espacio 3D).
Hasta aquí nada nuevo, esto es más que conocido por todos nosotros.

Ahora bien, cuando Mandelbrot comenzó a estudiar el tamaño de las costas de Inglaterra se dio cuenta que ésta arrojaba diferentes resultados dependiendo de la escala con que se la midiese. Recuerden el ejemplo de la primera conferencia cuando se repetía la misma experiencia y se medía desde un satélite, un avión y luego caminando sobre la misma costa. Entonces, obviamente el concepto de tamaño de un fractal ya no puede asociarse con la longitud, volumen, área o perímetro al que estamos acostumbrados en la Geometría Euclidea. Nace así el concepto de Dimensión Fractal, el cual se lo utiliza para responder a la pregunta ¿Cuánto mide un fractal?.

Perfecto, aquí se nos presenta el primer concepto importante, y es el de por que necesitamos de una dimensión fractal. Cuando nos topemos con un sistema fractal y nos pregunten cuanto mide, que tamaño tiene, que lugar ocupa, como evoluciona en un espacio, etc., ya no podremos responder: el fractal mide 3 metros o 2 pies, o se mueve en R^3 (espacio de los reales.) Todo lo que tenemos para describir a esas preguntas es la Dimensión Fractal.

Por todo lo anterior tenemos que la Dimensión Fractal nace para solucionar los siguientes problemas:

- Determinar *cuanto mide* un objeto fractal, y
- Estudiar el tamaño de un fractal, *independientemente de la escala* con la que se lo esté midiendo.

Nota. Recuerden que los fractales teóricos tienen detalle infinito. Esto significa dos cosas:

a) Su longitud sería infinita si la viéramos desde el punto de vista matemático tradicional. (o cero para el Conjunto de Cantor... después vuelvo sobre esto).

b) Cada vez que tomemos una sección de un fractal y la ampliemos siempre vamos a encontrar una imagen estadísticamente o estrictamente similar al fractal original, y esto sin importar cuantas veces hemos ampliado o iterado el fractal.

Noten también que esto sucede solo en el campo teórico, en la Naturaleza y en el mundo real los fractales no tienen detalle infinito, llega un momento donde la Autosimilitud se pierde.

Sigamos adelante. Ya dijimos que las dimensiones Euclideas (0-1-2-3) no nos sirven para describir el tamaño de un fractal, por lo tanto necesitamos otra manera de medirlo. Existe una ecuación que describe la dimensión de objetos autosimilares. Es la llamada dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la cual no es ni más ni menos que una generalización de la dimensión Euclidea.

Esta dimensión se representa por la siguiente fórmula $S = L^D$. Donde S es la longitud de los segmentos L la escala de medición D es la Dimensión que buscamos.

Algebraicamente para “despejar” D, justamente lo que nos interesa, aplicamos logaritmos $\text{Log } S = \text{Log } L^D$. Y por propiedades de los logaritmos podemos decir $\text{Log } S / \text{Log } L = D$.

Ya tenemos despejada nuestra incógnita y solo nos queda hacer cuentas.

Para que quede más claro aún podemos decir que S es la longitud de los segmentos, o en su defecto, el número de piezas autosimilares.

L la escala de medición o el factor de magnificación (aumento).

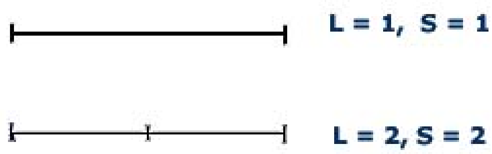
Antes de continuar hagamos un resumen, así nadie se pierde. Hasta aquí solo he presentado una nueva ecuación para calcular dimensiones, y he descripto cada una de sus componentes, y como despejar la incógnita que nos interesa, D, la dimensión.

Por ahora nada más, solo “trucos” algebraicos. Así que sigamos avanzando. Vamos a comenzar a mostrar un ejemplo grafico de cómo aplicar esta fórmula, primero a figuras de la geometría tradicional para mostrar que también funciona con ellas, ya que como dije es una extensión de la dimensión descripta por Euclides. Luego pasaré a aplicarla a fractales lineales conocidos.

a) Recta.

Vamos a aplicar en primer lugar esta ecuación a una recta. Ya sabemos que su dimensión topológica o euclídea es de 1. Vamos a ver si con esta nueva definición de Hausdorff - Besicovitch logramos el mismo resultado.

Imaginemos que tenemos una recta de 1 metro de longitud. Si la medimos con una regla de la misma medida, coincidirá justamente con su longitud. Entonces, reemplazando en nuestra ecuación tenemos L = 1 y S = 1.
Ahora, si medimos esa misma recta, pero con un instrumento del doble de precisión tendremos L = 2 y S = 2 (ver cuadro).
Ahora, generalizando, si medimos la recta con un instrumento de n veces de precisión, la recta se dividirá en n segmentos, por lo tanto, L = n y S = n
Veamos en el grafico:

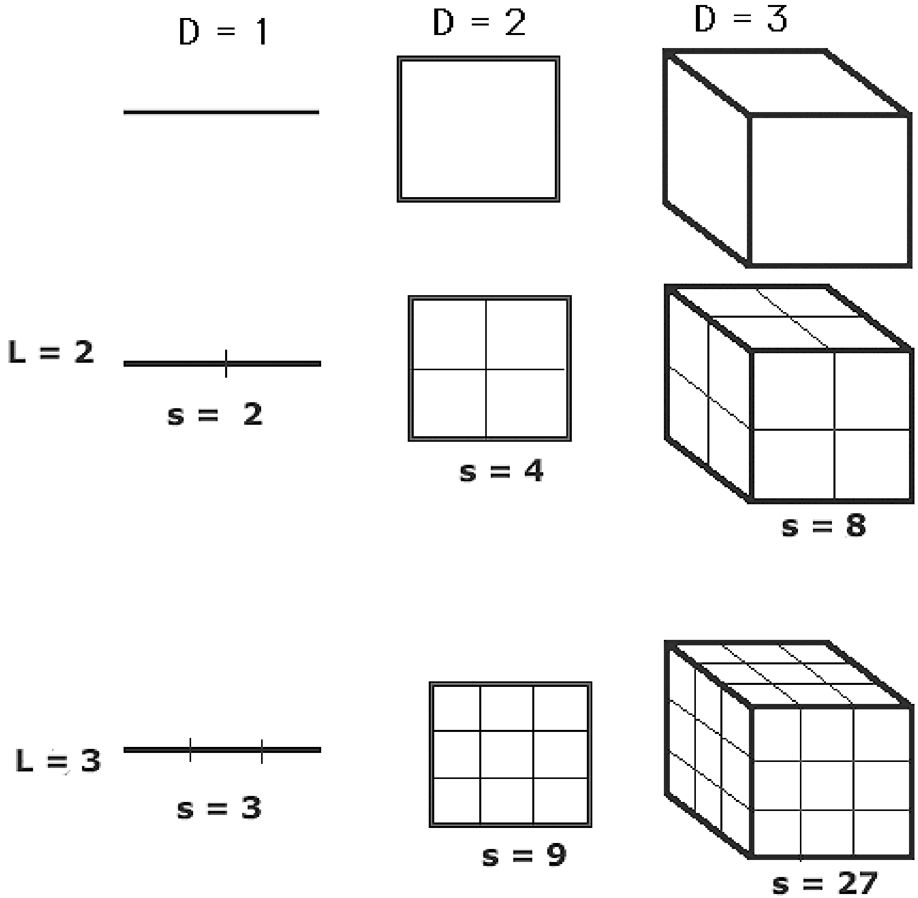


Haciendo cuentas, tenemos D = Log 2 / Log 2 = 1, D = Log 3 / Log 3 = 1, ..., D = Log n / Log n = 1.
Esto significa que sin importar que escala de medición o instrumento de precisión utilicemos para medir la recta, su dimensión será siempre 1. MUY IMPORTANTE!.
b) Cuadrado.
Si ahora tenemos en lugar de una recta, un cuadrado y lo medimos L = 1 y S = 1. Si como hicimos antes aumentamos su escala al doble de precisión tendremos L = 2 y S = 4 de esta forma:

Nos queda D = Log 4 / Log 2 = 2 Fíjense como coincide con su dimensión topológica!.
Les dejo ahora dos cuadros para ver lo que pasa con las dimensiones topológicas y sus relaciones con la dimensión de Hausdorff - Besicovitch y luego paso a los fractales.

Figura Euclídea	Dimensión	No. de Segmentos
Línea	1	$2 = 2^1$
Cuadrado	2	$4 = 2^2$
Cubo	3	$8 = 2^3$
Similitud al duplicar	d	$n = 2^d$

Este cuadro muestra la cantidad de segmentos autosimilares que se forman al medir una recta, cuadrado o cubo con un instrumento de medición el doble de preciso al original. Veamos ahora un cuadro más grafico:



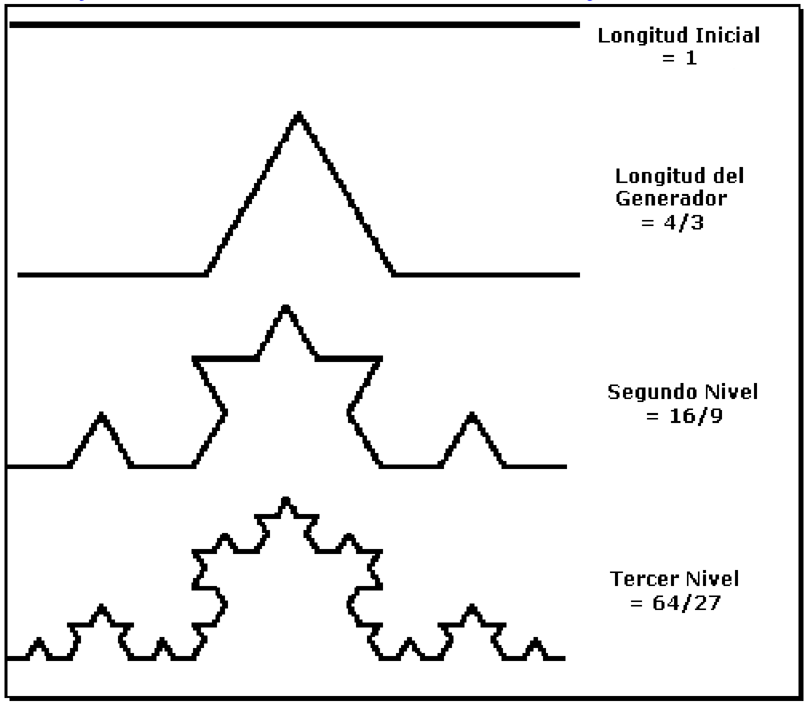
$$S = L^D$$

Dimensión de Hausdorff - Besicovitch en los fractales

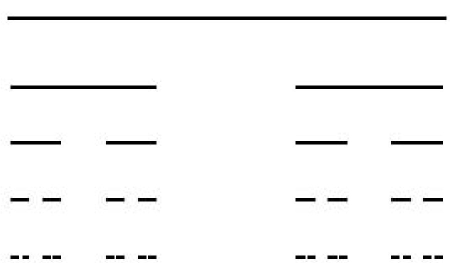
Acabamos de ver como aplicamos esta fórmula para calcular dimensiones a figuras Euclideas, traslademos esto ahora a nuestros fractales.

El ejemplo 1 sería la Curva de von Koch, pero como ya está explicada en la conferencia 2 no voy a volver a repetirla con tanto detalle.

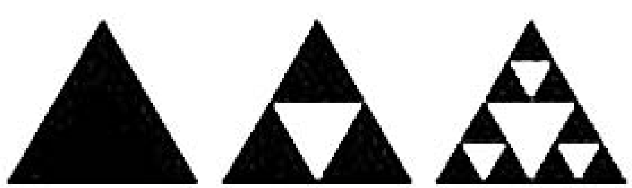
Tan solo para recordar diré que se calculaba haciendo Log 4 / Log 3 = 1,26185... y la deducción se puede observar en el siguiente grafico:



Calculen, así Log4/ Log 3 = 1,26185...; Log16/ Log9=1,26185...; Log64/Log27=1,26185...
Hemos llegado aquí a lo más importante. Noten, que sin importar la escala de medición (1, 2, 3,..., n) la dimensión de la Curva de Von Koch sigue dando el mismo resultado: 1,26185...
Justamente lo que planteaba Mandelbrot, buscar un método que permita medir un objeto fractal, independiente de la escala con el que se lo viera.
Otro ejemplo que también ya vimos es la Curva o Polvo de Cantor, en el cual D=Log2/Log3=0.6309 y la imagen para interpretarlo es la siguiente:



Les dejo a ustedes armar los niveles y hacer las cuentas con los Logaritmos como hice en el ejemplo anterior.
Otro ejemplo es el Triángulo de Sierpinski, veamos, habíamos llegado a la colusión de que su dimensión era 1.585... y se conseguía haciendo Log 3 / Log 2.
La imagen para interpretar esto es:



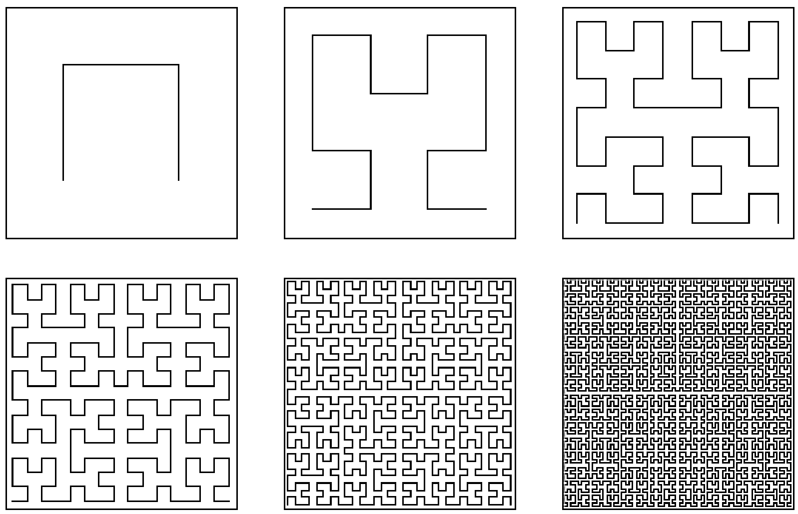
El Triángulo de Sierpinski se forma de la siguiente manera.

- Se inicia con un triángulo equilátero, conectado desde sus puntos medios de sus tres lados formando un nuevo triángulo equilátero invertido.
- Luego se remueve ese triangulo invertido o de color blanco en la figura.
- En cada iteración el algoritmo repetirá el mismo procedimiento cada vez que se tope con un con un triángulo nuevo (negro ya que el blanco es un espacio vacío).

También les dejo a ustedes volver a hacer las cuentas como hice con la Curva de Von Koch y calcular los diferentes Logaritmos y obtener siempre el mismo resultado para los diferentes niveles de iteración.

Como último ejemplo veremos la Curva de Peano la que también generó bastante polémica en los foros.

La figura inicial para construirlo es una recta, luego el grafico de interpretación es el siguiente:



Como se puede ver, a medida que hacemos más iteraciones, esta curva que partió de ser una simple recta, está a punto de llenar un plano de dimensión 2 completo. La séptima imagen que podría haber agregado es la de un cuadrado todo negro, que se forma con la última iteración, o sea, cuando el plano se cubrió por completo. Es por eso que la figura tiene dimensión fractal de 2. Y se logra viendo Log 9 / Log 3 = 2.

Para finalizar esta parte de la conferencia (ya falta poco!) les dejo otro cuadro comparativo.

	Escala S	Número de Segmentos L	Nuestra Fórmula $S=L^D$	Dimensión D=logN/logs
Conjunto de Cantor	1/3	2	$2=3^D$	D=log2/log3=0,631
Curva de Koch	1/3	4	$4=3^D$	D=log4/log3=1,262
Curva de Peano	1/3	9	$9=3^D$	D=log9/log3=2
Triángulo de Sierpinski	1/2	3	$3=2^D$	D=log3/log2=1,585

Bueno, para terminar esta conferencia de repaso vamos a hablar del tema más controversial que ha salido en los foros de debate, y son los siguientes.

Las Excepciones. Todo lo que vimos hasta ahora son definiciones y características muy estudiadas. Pero ahora entra en juego el punto de vista de cada uno en particular, lo cual siempre resulta algo confuso, ya que la matemática es una disciplina exacta, y las excepciones no están contempladas. Así que estudiemos con más detalle esta problemática a ver que podemos solucionar.

El tema surge con una definición de Mandelbrot, que dice que la Dimensión Fractal debe ser estrictamente superior a su dimensión topológica.

Veamos nuevamente todos los ejemplos que estuvimos haciendo hoy.

En primer lugar, la recta, cuadrado y cubo no son fractales ya que la dimensión de Hausdorff - Besicovitch es IGUAL a su dimensión topológica. (1) Así que en este caso no hay problemas.

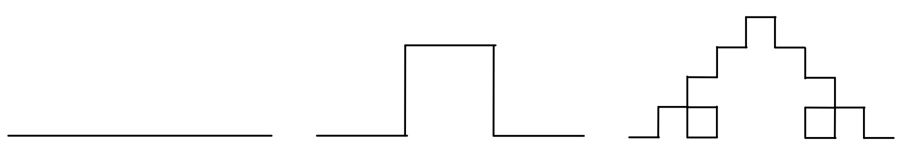
En segundo lugar vimos la Curva de Von Koch, sin dudas este encaja perfecto en la definición de Fractal, ya que su dimensión Fractal es SUPERIOR a la topológica. Parte de una recta de dim. 1 y comienza a crecer sin llegar a cubrir el plano completo de dos dimensiones, por lo tanto su dimensión fractal se ubicará entre medio de ellas, llegando como vimos a 1.26185...

Luego vimos el Polvo de Cantor (sin dudas la Gran Excepción) Su dimensión fractal es de 0.6309... En este caso es MENOR a su topológica de 1 por iniciarse a partir de una línea recta. Lo cual es lógico, ya que en lugar de ir llenando el plano de dos dimensiones e ir acercándose a este número, se va convirtiendo en polvo (de ahí su nombre), hasta llegar a una longitud (en matemática tradicional) de 0.

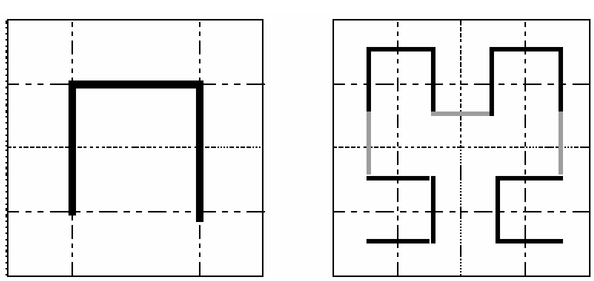
Otra particularidad importante, que no la he visto nombrar en muchos lados, es el Triángulo de Sierpinski. Su dimensión es de 1.585... Pero, su figura original es un triángulo, por lo tanto de dimensión topológica igual a 2, entonces, su dimensión fractal vuelve a ser MENOR que su dimensión topológica, y según la definición de Mandelbrot, Sierpinski no sería un fractal, pero al mismo tiempo está reconocido por expertos como el fractal más famoso. Este es un caso similar al Cantor, si ustedes ven el grafico de Sierpinski notarán triángulos negros y otros blancos, bueno, los blancos son trozos del fractal que se han eliminado. Por lo tanto, el fractal en lugar de ir creciendo va disminuyendo como acabo de decir pasa con Cantor. Si pudiéramos poner una lupa sobre esta imagen, podríamos ver infinitos agujeros (triángulos blancos eliminados)

El último detalle curioso, que algunos lo encuadran en la categoría de excepción y otros no, son las curvas de Peano y Hilbert. Es muy cierto que su dimensión fractal es MAYOR que su topológica, por lo tanto no tendría problemas con la definición de Mandelbrot, pero esta tiene la particularidad de ser una dimensión entera, 2. Todos estamos acostumbrados a ver dimensiones fraccionarias, por lo tanto esta es una curiosidad a tener en cuenta, lo cual es muy lógico, ya que esta curva nace de una recta y luego de iterarla, llega a cubrir el plano de dim. 2 completamente.

Ejercicios. 1. Determine la dimensión del siguiente fractal, cuyos tres primeros pasos se detallan, partiendo de un segmento de longitud 1:



2. ¿Cuál es el próximo paso en la construcción de la Curva de Hilbert?.



3. Describa el proceso de generación de un fractal y calcule su dimensión.

Conferencia 9

Como sabemos, la geometría tradicional, la euclídea, es la rama de la Matemática que se encarga de las propiedades y de las mediciones de elementos tales como puntos, líneas, planos y volúmenes. La geometría euclídea también describe los conjuntos formados por la reunión de los elementos más arriba citados, cuyas combinaciones forman figuras o formas específicas.
Sin embargo, las formas encontradas en la Naturaleza, como montañas, franjas costeras, sistemas hidrográficos, nubes, hojas, árboles, vegetales, copos de nieve, y un sinnúmero de otros objetos no son fácilmente descriptos por la geometría tradicional.
La Geometría Fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las aparentemente complicadas formas de la naturaleza. Éstas poseen a veces una invariancia remarcable de simplificación bajo los cambios de la magnificación, propiedad que caracteriza a los fractales, como ya hemos visto.
Esta conferencia está centrada en establecer un paralelo entre la geometría plana euclidiana y la geometría de los fractales y esclarecer algunos puntos técnicos relacionados con la dimensión fractal. Para ello, comencemos con el siguiente cuadro resumen.

Diferencias fundamentales entre la Geometría Euclídea y la Fractal

Euclídea	*Fractal*
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna (aprox. 10 años)
Dimensión entera	Dimensión fractal
Trata objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Descripta por fórmulas	Algoritmo recursivo (iteración)

Como hemos discutido a lo largo del curso, el Fractal es, matemáticamente, una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación. A menudo los fractales son semejantes a sí mismos; esto es, poseen la propiedad de que cada pequeña porción del fractal puede ser vizualizada como una réplica a escala reducida del todo. Existen muchas estructuras matemáticas que son fractales: el triángulo de Sierspinski, la curva de Koch, el conjunto Mandelbrot, los conjuntos Julia, y muchas otras.
La característica que fue decisiva para llamarlos fractales es su dimensión fraccionaria. No tienen dimensión uno, dos o tres como la mayoría de los objetos a los cuales estamos acostumbrados. Los fractales tienen usualmente una dimensión que no es entera, ni uno ni dos, pero muchas veces entre ellos, digamos 1,55.
Es importante reconocer que los fractales verdaderos son una idealización. Ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero; los objetos reales son producidos por procesos que actúan sólo sobre un rango de escalas finitas. En otras palabras, los objetos reales no tienen la infinita cantidad de detalles que los fractales ofrecen con un cierto grado de magnificación.
La noción de dimensión fractal (fraccional) provee una manera de medir qué tan rugosa es una curva. Normalmente consideramos que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. A esta idea de dimensión se lo llama dimensión topológica. Sin embargo, una curva rugosa que recorre una superficie puede ser tan rugosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Superficies como el follaje de una árbol o el interior de un pulmón pueden efectivamente ser tridimensionales. Podemos, entonces, pensar de la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3.
Para calcular la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite, logaritmo, escalas y medidas. En el cálculo de la dimensión de fractales muy complejos como el conjunto Mandelbrot se usan computadoras, pero para fractales más simples se usan fórmulas

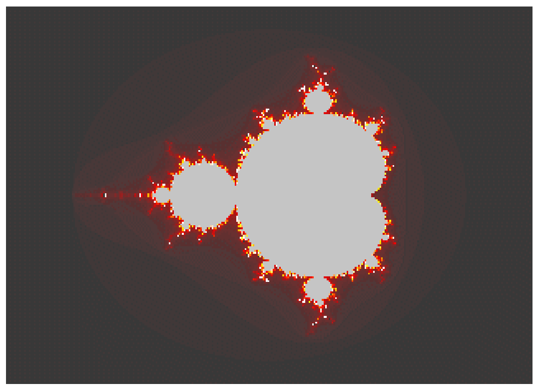
matemáticas, una muy común es la de Hausdorff-Besicovitch, pero hay varios métodos. Damos aquí un ejemplo simple: el cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpinski, utilizando un método llamado similitud por duplicación.
Si tomamos un segmento de longitud 1 y lo duplicamos tendremos dos segmentos iguales al original.
Si duplicamos los lados de un cuadrado de lado 1 tendremos 4 cuadrados iguales al original
Tomamos ahora un cubo de largo, alto y ancho 1 y duplicamos todas sus medidas. Tenemos ahora 8 cubos iguales al original.
Dispongamos estos datos en una tabla.

Figura	**Dimensión**	**No. de Copias**
Línea	1	$2 = 2^1$
Cuadrado	2	$4 = 2^2$
Cubo	3	$8 = 2^3$
Similitud al duplicar	d	$n = 2^d$

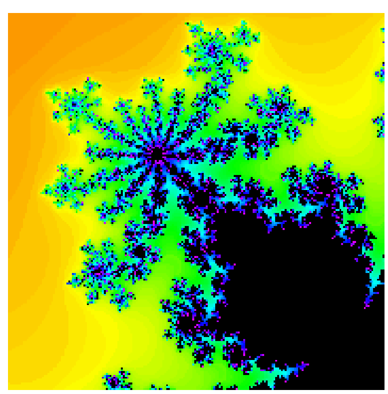
Se nota ahora que, al duplicar los lados de una figura el número de figuras iguales a la original es igual a 2 elevado a un número que es igual a la dimensión de la figura.
Así, si F es el número de figuras iguales a la original (copias) y es la D dimensión de la figura, hemos obtenido que D = log F/log 2.
Se puede usar esta fórmula para encontrar la dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski puesto que al duplicar la longitud de los lados, se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez a 3 triángulos de la misma escala que el primero; por lo tanto, F = 3.
Usando nuestra fórmula D = (log 3)/(log 2) = 1,58496.
Sabemos que el conjunto de Mandelbrot es generado por iteraciones. Iteración significa repetir un proceso varias veces. En matemática este proceso es casi siempre la aplicación de una función. Para el conjunto de Mandelbrot, la función involucrada es la función no-lineal más simple de imaginar, $z^2 + c$, donde c es una constante. Veremos más tarde el valor exacto de c.
Para iterar $z^2 + c$, comenzamos con lo que llamaremos una semilla para la iteración. Esta semilla es un número (real o complejo) que representaremos por z_0. Aplicando la función z^2+c a z_0 obtenemos un nuevo número $z_1 = z_0^2 + c$.
Ahora, iteraremos usando el resultado del cálculo anterior para el cálculo siguiente:
$z_2 = z_1^2 + c$
$z_3 = z_2^2 + c$
$z_4 = z_3^2 + c$
$z_5 = z_4^2 + c$
y así sucesivamente. La lista de números z_0, z_1, z_2,... generada por esta iteración se denomina órbita de z_0 bajo la iteración de $z^2 + c$.
Una de las principales preguntas en esta área de las matemáticas es ¿Cuál es el destino de órbitas típicas?, ¿Convergen o divergen?, ¿Son cíclicas o se comportan erráticamente?. En realidad, el conjunto de Mandelbrot es una versión geométrica de la respuesta a esta pregunta.
Comencemos con unos ejemplos. Supongamos que c=1. Luego, si elegimos la semilla 0, la órbita es:
$z_0 = 0$
$z_1 = 1 = 0^2 + 1$
$z_2 = 2$
$z_3 = 5$
$z_4 = 26$
z_5 = número grande
z_6 = número más grande
y notamos que esta órbita tiende al infinito.

Ahora supongamos que c=0, la órbita de la semilla 0 es muy diferente: esta órbita permanece constante para todas las iteraciones:
$z_0 = 0$
$z_1 = 0$
$z_2 = 0$
Si ahora suponemos que c = -1. Para la semilla 0, la órbita es:
$z_0 = 0$
$z_1 = -1$
$z_2 = 0$
$z_3 = -1$
Aquí vemos que la órbita va de 0 a -1 y viceversa, un ciclo de periodo 2.
Para entender el destino de las órbitas, es más fácil proceder geométricamente. A menudo, se consigue más información del destino de las órbitas con un gráfico que representa los resultados de cada iteración para un cierto c. En los gráficos de abajo mostramos los resultados de las órbitas de 0 para c=-1,1; -1,3; -1,38; y -1,9.
Para c = -1,1 vemos que la órbita se aproxima a un ciclo de periodo 2.
Para c = -1,3 la órbita tiende a un ciclo de periodo 4.
Para c = -1,38 vemos un ciclo de periodo 8.
y cuando c=-1,9 no hay ningún ciclo aparente para la órbita; los matemáticos usan la palabra caos para este fenómeno. Para verlo de otra manera, mostramos el gráfico de la estadística en la que se considera los primeros 20.000 resultados de la órbita de 0 bajo z^2 - 1,9. En este gráfico hemos divido el intervalo [-2, 2] en 400 subintervalos, y cada vez que el resultado de una iteración pertenecía a un subintervalo, se incrementaba en 1 la estadística.
Antes de proceder, hagamos una observación obvia. Bajo la iteración de z^2 + c, la órbita de 0 tiende al infinito o no. Cuando la órbita no va al infinito, ésta se comporta de varias maneras. Puede ser constante, cíclico o caótico, pero la observación fundamental es que existe una dicotomía: a veces la órbita va hacia el infinito, otras veces, no. El conjunto de Mandelbrot es el gráfico que representa esta dicotomía cuando la semilla es 0. Por lo tanto, el conjunto de Mandelbrot es un registro del destino de la órbita de 0 bajo la iteración de z^2+c.
Entonces, ¿cómo es posible que el conjunto de Mandelbrot sea un gráfico plano?. La respuesta es que, en vez de considerar sólo los valores reales de c, también consideramos los complejos. Por ejemplo, la órbita de 0 bajo z^2 + i esta dada por:
$z_0 = 0$
$z_1 = i$
$z_2 = -1 + i$
$z_3 = -i$
$z_4 = -1 + i$
$z_5 = -i$
$z_6 = -1 + i$
y vemos que esta órbita, finalmente, se convierte en un ciclo de periodo 2. Si cambiamos c por 2i, entonces la órbita se comporta de otra manera:
$z_0 = 0$
$z_1 = 2i$
$z_2 = -4 + 2i$
$z_3 = 12 - 14i$
$z_4 = 52 - 334i$
z_5 = grande (lejos del origen)
z_6 = más grande
y vemos que esta órbita tiende al infinito en el plano complejo (los números de la órbita se alejan cada vez más del origen). Otra vez hacemos la observación fundamental de que la órbita de 0 bajo z^2 + c tiende al infinito o no.
El conjunto Mandelbrot introduce algo de geometría en la observación fundamental mencionada anteriormente. La definición precisa es: El conjunto Mandelbrot M, consiste de todos aquellos valores (complejos) de c cuyas órbitas de 0 bajo z^2 + c correspondientes no

escapan al infinito. De nuestros cálculos anteriores, vemos que c = 0, -1, -1.1, -1.3, -1.38 e i pertenecen al conjunto Mandelbrot, mientras que c = 1 y c = 2i no pertenecen.
Así surge de manera natural la pregunta ¿Por qué alguien se interesaría por el destino de la órbita de 0 bajo $z^2 + c$?. ¿Por qué no la órbita de i?. ¿O 2 + 3i?. ¿O cualquier otra semilla compleja?. Como veremos más adelante, existe una buena razón para preguntarnos acerca del destino de la órbita de 0; de algún modo la órbita de 0 nos dice mucho sobre el destino de otras órbitas bajo $z^2 + c$.
Antes de enfocar esta idea, vemos que la definición misma del conjunto Mandelbrot nos da un algoritmo para calcularlo. Consideremos simplemente un cuadrado en el plano complejo, centrado en el origen con lados de longitud 4. Coloquemos un conjunto de puntos uniformemente distribuidos dentro de este cuadrado. Cada uno de estos puntos deberá ser considerado como un valor complejo de c. Luego, para cada c, preguntamos a la computadora si su órbita de 0 correspondiente escapa al infinito o no. Si no escapa al infinito, pintamos el punto de gris. Pero, no es posible determinar si ciertos valores de c escapan al infinito, ya que sólo podemos iterar un número finito de veces. Ciertos valores de c cerca del borde de M tienen órbitas que escapan al infinito sólo después de una cantidad grande de iteraciones. A estos puntos se les pinta de acuerdo a cuántas iteraciones se realizaron.



El Conjunto Mandelbrot. Esta figura es sólo una aproximación del conjunto Mandelbrot.
Una segunda pregunta es ¿Cómo sabemos si la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ realmente escapa al infinito?. Afortunadamente, hay un fácil criterio que ayuda:
El criterio del escape: Supongamos que $|c| \leq 2$. Si la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ alguna vez sale del círculo de radio 2 centrado en el origen, entonces esta órbita definitivamente tiende al infinito.
Puede parecer que este criterio no es valioso, puesto que sólo funciona cuando $|c| \leq 2$. Sin embargo, es sabido que todo el conjunto Mandelbrot reside dentro de este disco, por lo tanto estos son los únicos valores de c que necesitamos considerar.
Nótese que el conjunto Mandelbrot consiste de muchas protuberancias pequeñas. Una inspección de cerca de estas protuberancias nos muestra que todas tienen formas diferentes.
Por ejemplo, considérese una protuberancia directamente sujeta al cardioide principal de M, llamamos a ésta, bulbo principal. Esta protuberancia tiene, a su vez, una cantidad infinita de protuberancias más pequeñas sujetas a él que parecen antenas. En particular, como es claramente visible en la figura, la "antena principal" sujeta a cada protuberancia parece consistir de un número de rayos que varían para cada protuberancia.



Es sabido que si c pertenece al interior de un bulbo, la órbita de 0 es atraída a un ciclo de periodo n. El número n es el mismo para cualquier c dentro de este bulbo. Por ejemplo, c=-1 y c=-1,1 ambos pertenecen al interior del bulbo primario más grande, que está justo a la izquierda del cardioide principal. Para estos valores de c, la órbita de 0 es atraída a un ciclo de periodo 2. El número n es considerado como el periodo del bulbo.
Existe una relación peculiar y sorprendente entre el número de rayos de la antena principal sujeta a un bulbo y el periodo de éste: estos números son exactamente iguales.
Mediante cálculos hechos con computadora se obtuvieron

los periodos de las órbitas para ciertos c, dichos periodos corresponden a los bulbos que contienen a cada c.

Los fractales han sido y están siendo usados de varias maneras. Tanto artistas como científicos están intrigados por el gran valor de los fractales. Los fractales están siendo aplicados en campos que van desde la compresión de imágenes hasta las finanzas. Recién estamos comenzando a darnos cuenta de la importancia y de la utilidad de la geometría fractal.

Una de las más estrechas relaciones con la realidad es la similitud entre fractales y objetos de la naturaleza. La semejanza entre los fractales y ciertos objetos de la naturaleza es tan grande que no podemos dejar de tenerla en cuenta. Fórmulas matemáticas son usadas para modelar formas naturales semejantes a sí mismas.

Veamos (a modo de introducción) algunas aplicaciones de los fractales, donde han demostrado su eficacia.

Compresión de Imágenes. Los fractales han sido y están siendo usados de varias maneras. Tanto artistas como científicos están intrigados por el gran valor de los fractales. Los fractales están siendo aplicados en campos que van desde la compresión de imágenes hasta las finanzas. Recién estamos comenzando a darnos cuenta de la importancia y de la utilidad de la geometría fractal.

Una de las más estrechas relaciones con la realidad es la similitud entre fractales y objetos de la Naturaleza. La semejanza entre los fractales y ciertos objetos de la Naturaleza es tan grande que no podemos dejar de tenerla en cuenta. Fórmulas matemáticas son usadas para modelar formas naturales semejantes a sí mismas.

Una de las aplicaciones más utiles de los fractales y de la geometría fractal está en la compresión de imágenes. Es también una de las ideas más controversiales. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Un SFI es el conjunto de funciones que describen partes de un fractal que, una vez juntas, recrean dicho fractal en su totalidad. Si un fractal puede ser descripto por un número pequeño de funciones, el SFI es una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente desplegada y a cualquier grado de magnificación con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el SFI que describa la imagen.

Efectos Visuales. Una de las más triviales aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No solamente engañan la vista, sino que también de algún modo confunden a la mente. Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos.

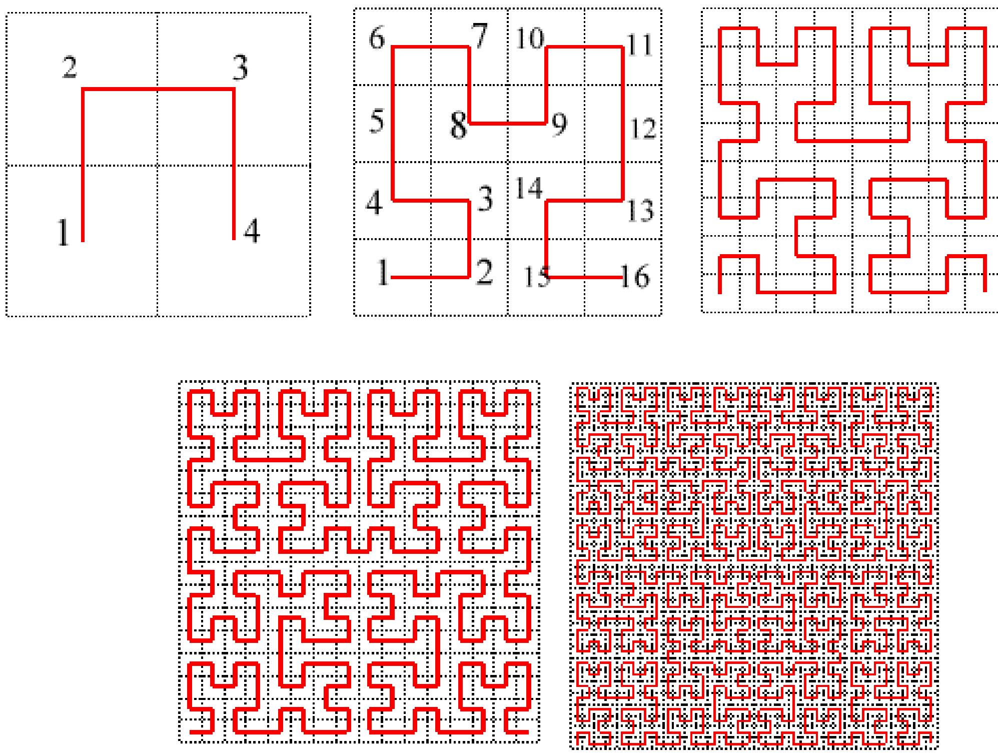
Música Fractal. Otra aplicación de los fractales aparentemente irrelevante es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo las de Bach y las de Mozart, pueden ser reducidas y todavía retener la esencia del compositor. Están siendo desarrolladas muchas nuevas aplicaciones software para el desarrollo de música fractal.

Una de las aplicaciones más útiles de los fractales y de la geometría fractal está en la compresión de imágenes. Es también una de las ideas más controversiales. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Un SFI es el conjunto de funciones que describen partes de un fractal que, una vez juntas, recrean dicho fractal en su totalidad. Si un fractal puede ser descripto por un número pequeño de funciones, el SFI es una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente desplegada y a cualquier grado de magnificación con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el SFI que describa la imagen.

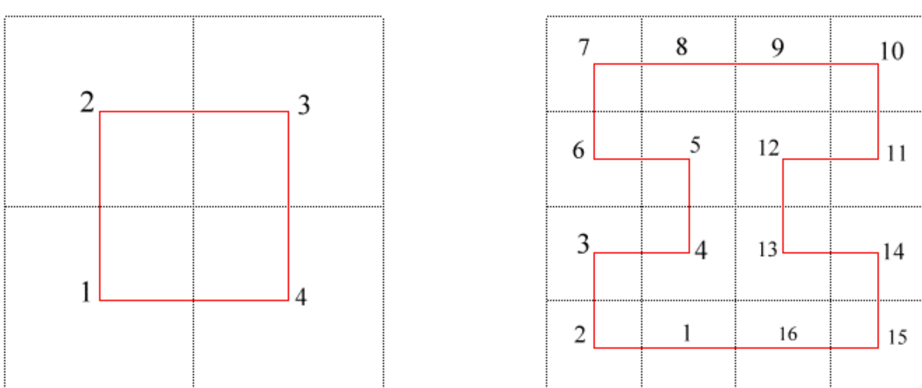
Después de todo lo expuesto anteriormente, podemos concluir que, aunque la geometría fractal aún no se haya entendido completamente, posee aplicaciones realmente útiles en distintos campos, y es en sí sumamente fascinante.
Muchos investigadores continúan su exploración a través de esta área, como Douady, Hubbard, Yoccoz, McMullen y otros, pero mucho más queda por ser descubierto.

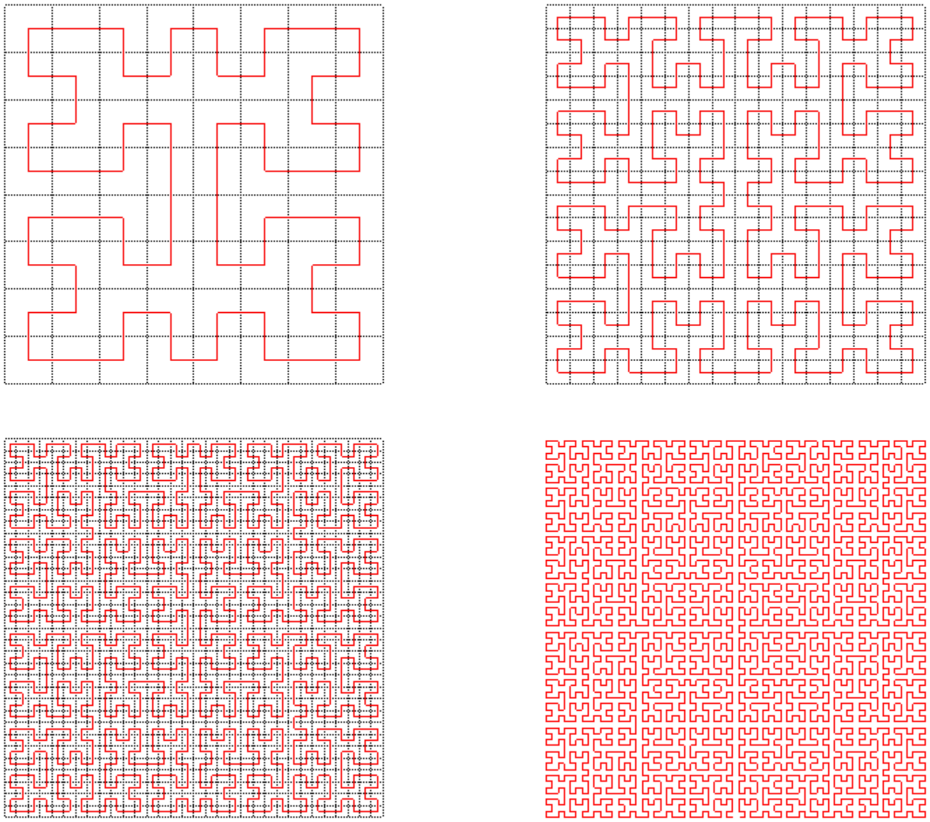
Para concluir, quiero presentar algunos fractales clásicos, desarrollados paso a paso.

CURVA DE HILBERT

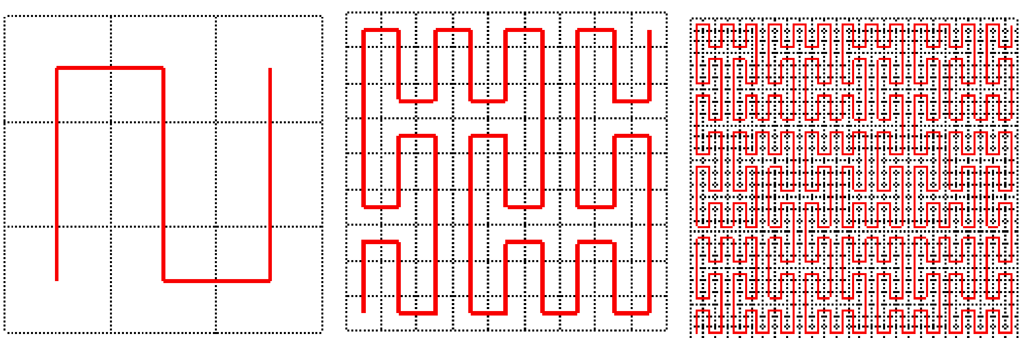


CURVA DE MOORE





CURVA DE PEANO



Conferencia 10

Preliminares. En el estudio de un fenómeno, científicamente hablando, éste es observado, sus detalles son minuciosamente descritos con el auxilio de las Matemáticas y se buscan ecuaciones que lo representen.

Pasamos entonces, de lo real a un modelo matemático.

Este modelo, en el cual se expresa la evolución del fenómeno en el tiempo, es un Sistema Dinámico. Podemos decir también, que un Sistema Dinámico es un sistema físico que varía con el tiempo. Se puede pensar en un sistema dinámico, como una forma de describir la evolución temporal de todos los puntos de un espacio E. Este espacio E puede ser, por ejemplo, el espacio de los estados de un sistema físico o biológico.

Una manera simple de crear un sistema dinámico en Matemática, consiste en "permitir" que una función f:**R**$\rightarrow$**R**, se retroalimente en el tiempo, es decir, cuando la componemos consigo

misma de manera iterada. Si denotamos por $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ la n-ésima iterada, a la sucesión de sus iteradas, la llamaremos *la órbita* de x, denotada por $O^+(x)=\{x,f^1(x),f^2(x), ...,f^n(x), ...\}$.
Estudiar la dinámica del sistema es, entre otras cosas, estudiar el comportamiento final -asintótico- de las órbitas.
En particular puede suceder, que la órbita del punto x=a sea *periódica*, o sea, que consista de los mismos puntos repetidos periódicamente; en otros términos, existe k tal que $f^k(a)=1$, para $k\in\mathbf{N}$ y $f^i(a)\neq a$ para todo $0<i<k$. En este caso, diremos que a es un punto periódico con período k y que $\{a, f^1(a),f^2(a), ...,f^n(a), ...\}$ es su órbita periódica.
Una pregunta natural es *¿Si f tiene un punto con período k puede esperarse que f tenga otros puntos con períodos m para k≠m?, ¿Puede tenerse alguna relación entre los períodos, que implique su existencia?.*
La respuestas a estas preguntas no son triviales, ya que si f tiene un punto a con período k>1 entonces se puede garantizar que f tiene por lo menos un punto fijo, es decir, un punto de período 1. Ahora bien, para los demás períodos, ¿qué podemos concluir?.
En 1975, fue publicado un artículo de Li y Yorke[29] donde apareció la "primera" respuesta a estas interrogantes y la respuesta involucraba un nuevo término matemático *el caos*. Ellos demostraron que si una función continua $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tiene un punto de período 3, entonces tenía puntos periódicos para cada uno de los períodos n, siendo $n\in\mathbf{N}$. Claramente, el comportamiento de f era complejo, algo caótico, pues todo se podía esperar de sus órbitas.
Straffin demostró elegantemente más adelante[30], que si una función f tiene un punto periódico con período impar k>1, entonces debe tener puntos periódicos para todos los períodos mayores o iguales a k-1. La elegancia de este trabajo radica en la relación que estableció el autor entre la teoría de grafos dirigidos -digrafos- con la dinámica de la órbita. A cada punto periódico le asoció un digrafo cuyos vértices eran los puntos de la órbita, de tal manera, que el grafo organizaba la información que conllevaba la órbita; sin embargo, no todo digrafo puede ser el grafo asociado de un punto periódico, es más, todavía no se han determinado bajo qué condiciones, esto es cierto.
Sin embargo, poco después se descubrió, que estos resultados eran casos particulares de un resultado de 1964 del matemático soviético Sarkovskii[31], que había permanecido ignorado para la comunidad matemática durante más de 15 años y en el cual se da una respuesta completa a las interrogantes arriba enunciadas. Existen innumerables trabajos dedicados al resultado de Li y Yorke (o resultados relacionados con éste[32]), incluso el título del mismo "Período tres implica caos", se convirtió en uno de las frases más usadas en los estudios del caos. Sin embargo, el aún no traducido trabajo de Sarkovskii, sigue desconocido para muchos matemáticos[33], en particular debido a los métodos de demostración empleados. En nuestra conferencia, queremos presentar una demostración abreviada del resultado fundamental de Sarkovskii[34], abundar sobre la relación de este teorema (que como veremos, es la conclusión de varios trabajos anteriores) y el caos, y

---

[29] T. Li and J.A. Yorke-**"Period three implies chaos"**, Amer. Math. Monthly 82(1975), 985-992.

[30] P. Straffin-**"Periodic points of continuous functions"**, Mathematical Magazine 51(1978), 99-105.

[31] A.N. Sarkovskii-**"Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en si misma"**, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, T.XVI, No.1, 1964, 61-71 (en ruso).

[32] Ver el trabajo introductorio de M. de Gracia Mendonça-**“Puntos periódicos de funciones continuas”**, Revista de Educación Matemática 14(1999), 26-34.

[33] Recomendamos los trabajos de J. E. Nápoles V.-**"Una nota sobre el Teorema de Sarkovskii"**, Lecturas Matemáticas, 16(1995), 211-214 y de G. Rubiano-**"Acerca del Teorema de Sarkovskii"**, Lecturas Matemáticas 15(1994), 21-26.

[34] Otra demostración breve y elegante, fue dada en Ch. Ho and Ch. Morris-**"A graph theoretic proof of Sarkovskii's theorem on the periodic points of continuous functions"**, Pacific J. Math. 96(1981), 361-370, siguiendo las ideas de Straffin.

mostrar algunas aplicaciones de éste a la resolución de ecuaciones funcionales, un tópico que es más escaso aún en la literatura.

El Teorema de Sarkovskii. El trabajo de Sarkovskii, que tiene sus antecedentes en dos trabajos del mismo autor[35], es uno de una serie de artículos relacionados con funciones que transforman un intervalo en si mismo y cómo podemos caracterizar esa transformación por un conjunto de puntos bien determinados.

Sabemos que toda función continua de variable real f(x), $-\infty < x < +\infty$, genera una transformación continua T de la recta en si misma: $x \to f(x)$. Resulta, que la propiedades de la transformación T quedan definidas en la estructura básica del conjunto de puntos fijos de la transformación T.

En el trabajo de Sarkovskii se investiga el problema acerca de la dependencia entre la existencia de ciclos de diferentes órdenes y sus principales resultados son enunciados con ayuda del siguiente hecho. Consideremos el conjunto de los números naturales en el que se introduce la relación n_1 *precede a* n_2 $(n_1 < n_2)$, si para cualquier transformación continua de la recta en si misma, la existencia de un ciclo de orden n_1 implica la existencia de un ciclo de orden n_2.

No es difícil probar que tal relación cumple con las propiedades reflexiva y transitiva, y por tanto, el conjunto **N** con esta relación representa un conjunto ordenado de la manera siguiente (en realidad, Sarkovskii usa el término *cuasiordenado*, siguiendo la terminología de G. Birkhoff en su **"Theory of Structures"**):

$$3 < 5 < 7 < 9 < 11 < \ldots < 3.2 < 5.2 < \ldots < 3.2^2 < 5.2^2 < \ldots < 2^3 < 2^2 < 2 < 1. \qquad (1)$$

Sobre esta base concluyó:

Teorema. Si una función continua $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tiene un punto periódico con período k, entonces también tiene un punto con período n, para cada k<n (en (1)).

Notemos que el teorema es un resultado unidimensional en el sentido que no hay un resultado análogo para dimensiones mayores, ni siquiera en el mismo círculo. Algunas generalizaciones de este resultado son las de Schirmer[36], quien demostró una versión del teorema para espacios topológicos linealmente ordenados y conexos. Los espacios que satisfacen el teorema, se le conocen como *Espacios de Sarkovskii*[37].

En el Teorema de Sarkovskii, si una función tiene un punto con período k, donde k no es una potencia de 2, entonces posee infinitos puntos periódicos con infinitos períodos distintos. A una función con esta propiedad, Block y Coppel, la llaman *función caótica*[38]. La aplicación F: $M \to M$, donde M es un espacio métrico, se llama *caótica* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. F depende de las condiciones iniciales.
2. F es topológicamente transitiva.
3. Los puntos periódicos de F son densos en M.

---

[35] Uspeiji Matematicheskii Nauk, T.XII, No.4, 1960 y Doklady Akad. Nauk URSS, T.189, No.5, 1961.

[36] H. Schirmer-**"A topological view of Sarkovskii's theroem"**, Houston J. Math. 11(1985), 385-395.

[37] S. Baldwin-**"Some limitations toward extending Sarkovskii's theorem to connected linearly ordered spaces"**, Houston J. Math. 17(1991), 39-53.

[38] L.S. Block and W. Coppel-**"Dynamics in one dimension"**, Lectures Notes in Mathematics 1513, 1991.

Un buen ejemplo de un sistema caótico, es el de la *ecuación logística*[39], sobre la que hablaremos más adelante[40].
Por otra parte, debemos decir que Lasota y Jorke[41], sugirieron la noción de *turbulencia*, para caracterizar con más detalles las órbitas periódicas y no periódicas. Así, una función $f{:}I\to I$, siendo I un intervalo real no degenerado, se dice turbulenta, si existen subintervalos compactos, J y K, con a lo sumo un punto en común, tales que $J\cup K\subseteq f(J)\cap f(K)$.
De más está decir, que los siguientes resultados no eran tan obvios:

I) Si f es turbulenta, f tiene puntos periódicos de todos los períodos.
II) Si f es caótica (para n distinto de 2^k) si y solo si, f^n es turbulenta.

En nuestra exposición, necesitamos los siguientes resultados obtenidos por Sarkovskii, que serán presentados, manteniendo la notación de éste.

Teorema 1. *Si la transformación T posee un ciclo de orden k>2, entonces T también admite un ciclo de segundo orden*[42].

Sean α_1, α_2, ..., α_k los puntos de ciclo, teniéndose que

$T\alpha_i=\alpha_{i+1}$, i=1,2,...,k-1,
$T\alpha_k=\alpha_1$.

Sean $\alpha_1<\alpha_i$ $(i\neq 1)$, $\alpha_r>\alpha_i$ $(i\neq r)$
Consideremos el intervalo (α_1,α_{r-1}) (suponemos que r>2; si r=2 hay que tomar el intervalo (α_k,α_r)). Dependiendo de si existen o no en (α_1,α_{r-1}) puntos fijos de primer orden; denotaremos mediante β ya sea al punto fijo de primer orden más cercano a α_{r-1}, o bien al punto α_1 (si en (α_1,α_{r-1}) hay puntos fijos de primer orden, el punto fijo más cercano a α_{r-1}, existe debido a la continuidad de T).
Puesto que $T\alpha_{r-1}=\alpha_r>\alpha_{r-1}$, entonces $Tx>x$, para $x\in(\beta,\alpha_{r-1}]$. Si β es un punto fijo de primer orden, entonces, como no es difícil ver, para cualquier entero j>0 existe una vecindad del punto β, tal que para cualquier $x>\beta$, de esta vecindad, se tiene que $T^jx>x$.
Si $\beta=\alpha_1$ tendremos para las 0<j<k que $T^j\beta=\alpha_{j+1}>\alpha_1=\beta$.
Por otro lado, $T^{k-r+2}\alpha_{r-1}=\alpha_1<\alpha_{r-1}$.
Por lo tanto, sobre el intervalo (β,α_{r-1}) existirá un γ, debido a la continuidad de T, tal que $T^{k-r+2}\gamma=\gamma$.
Puesto que $T\gamma\neq\gamma$, entonces γ es un punto fijo de orden l, donde $1<l\leq k-r+2<k$, pero mayor que 1, también siempre existirá un punto fijo de segundo orden.

Los siguientes resultados, serán utilizados más adelante.

---

[39] Pierre F. Verhulst (1804-1849). Matemático belga conocido por sus investigaciones sobre la dinámica de poblaciones.

[40] De más está decir, que existen varias definiciones de caos, desde las que utilizan la *entropía positiva de Kolmogorov-Sinaj*, hasta la dada por R. L. Devaney en **"An introduction to chaotic dynamical systems"**, Addison Wesley, 1989.

[41] A. Lasota and J. Yorke-**"On the existence of invariant measures for transformations with strictly turbulent trajectories"**, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys. 25(1977), 233-238.

[42] Este resultado se remonta al trabajo de 1960, pero Sarkovskii en su trabajo de 1964 da una demostración más precisa.

Lema 2*. Si la transformación T tiene a α como un punto fijo de orden k=2^nl, donde l es impar, entonces la transformación* $S = T^{2^m}$ *tiene al punto α como punto fijo de orden*

$$q = \begin{cases} 2^{n-m} l, \text{si } n \geq m \\ l, \quad \text{si } n < m \end{cases}$$

Lema 3. *El punto α resulta ser un punto fijo de orden 2^m de la transformación T si y solo si* $T^{2^m}\alpha = \alpha$ *y* $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$.

Teorema 2. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden 2^n (n>1) entonces la transformación T tiene ciclos de orden 2^i (i=1,2,...,n-1)*[43].

Sea α un punto fijo de orden 2^n.
Demostremos que T posee un punto fijo de orden 2^m ($1 \leq m < n$).
Hagamos $T^{2^{m-1}} = S$.
Por el Lema 2 el punto α de la transformación S es un punto fijo de orden q=2^{n-m+1}, o sea, mayor que dos.
Por el Teorema 1, la transformación S tiene un punto fijo de segundo orden, o sea, $S^2\beta=\beta$, $S\beta\neq\beta$. Por lo tanto, en virtud del Lema 3 tenemos $T^{2^m}\beta = \beta$ y $T^{2^{m-j}}\beta \neq \beta$.

De la misma forma, se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden k, siendo k distinta de las potencias de 2, entonces la transformación T posee ciclos de orden 2^i (i=1,2,....)*[44].

De este resultado se sigue que existen transformaciones con ciclos de orden arbitrariamente grandes, puesto que una transformación que tenga un ciclo de determinado orden, en particular distinto de las potencias de 2, siempre es fácil de construir.
El Teorema 3 también muestra que es suficiente con fijar el valor de la función f(x), definida por la transformación T, en un número finito de puntos (generadores del ciclo), por ejemplo en 3 puntos y entonces existirán infinitos ciclos independientes de cómo variemos (continuamente) el valor de f(x) en el resto de los puntos de la recta.

Teorema 4. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden impar k, también tendrá ciclos de orden impar mayor que k y de todos los órdenes pares.*

Este resultado no puede mejorarse en el sentido que existen transformaciones T, que tienen un ciclo de orden (2m+1), pero que no tienen ciclos de orden 2j-1 (j=2,3,...,m).
Por otro lado, este teorema puede generalizarse al caso cuando existen, para la transformación T, ciclos de todos los órdenes distintos de las potencias de 2.

Teorema 5. *Si la transformación T tiene un ciclo de orden k=2^nl, con l>1 impar, entonces T admite ciclos de orden 2^nr, con r>l cualquier número impar, y también ciclos de orden 2^{n+1}s, donde s es un número natural arbitrario.*

Si n=0, obtenemos el Teorema 4. Supongamos cierta la afirmación del teorema para n=m-1 y demostrémoslo para n=m.

---

[43] Resultado de 1961.

[44] Este también es un resultado de 1961.

Supongamos que la transformación T tiene un punto fijo de orden $2^m l$. Demostremos, por ejemplo, que en este caso T tiene también un punto fijo de orden $2^m r_0$, con $r_0 > l$ impar. Para la transformación $S=T^2$ el punto α es un punto fijo de orden $2^{m-1} l$ (Lema 2) y, de acuerdo con la proposición hecha, la transformación debe tener un punto fijo β de orden $2^{m-1} r_0$. Esto significa que $T^{2^{m-1} r_0}\beta = \beta$, $S^j\beta \neq \beta$ ($j=1,2,3,...,2^{m-1}r_0-1$), es decir $T^{2^m r_0}\beta = \beta$ y $T^i\beta \neq \beta$ para cualquier i par menor que $2^m r_0$; $T\beta \neq \beta$ ya que en caso contrario sería $S\beta=\beta$. Es así que el punto β es un punto fijo de orden $2^m r_0$.
En forma completamente análoga, se demuestra que T también admite puntos fijos de orden $2^{m+1}s$, donde s es un número natural cualquiera.
Por consecuencia, la afirmación del Teorema 5 es cierta para cualquier n.

Los teoremas 2, 3 y 5 y el hecho que siempre existe un punto fijo de primer orden, si se tienen puntos fijos de orden mayor que 1, pueden ser unidos en un solo teorema.

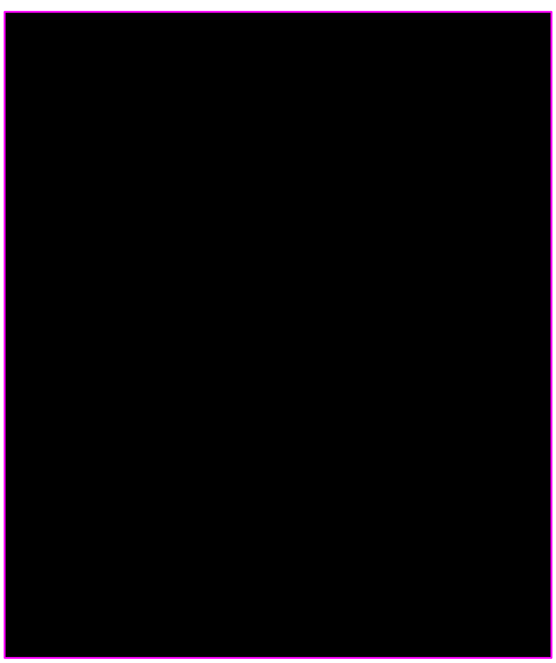
Teorema 6. *Si la transformación T tiene ciclos de orden 2^n, ($n>0$), entonces T admite también ciclos de orden 2^i ($i=0,\dots,n-1$). Si la transformación T admite ciclos de orden $2^n(2m+1)$ con $n\geq 0$ y $m>0$, entonces T tiene también ciclos de orden 2^i ($i=0,\dots,n$) y $2^n(2r+1)$, para $r=m+1, m+2, ..., 2s$ con $s=1,2,3,...$*

Este teorema resuelve completamente el problema de existencia de ciclos de ciertos órdenes, en función de la existencia de ciclos de otros órdenes. Por tanto, este resultado demuestra el teorema enunciado al principio de esta sección.
Un teorema similar a los teoremas 1-6, es el siguiente.

Teorema 7. *Entre cualesquiera dos puntos, del ciclo de orden $k>1$, se encuentra al menos un punto del ciclo de orden $l<k$.*

Lo interesante de los resultados de Sarkovskii y que es a lo que vamos a referirnos aquí, es que estos pueden ser extendidos al lenguaje de soluciones periódicas de la ecuación funcional:

$$y(x+1)=f(y(x)), \qquad (2)$$



tomando una sucesión discreta de valores del dominio. En particular, utilizando los teoremas antes mencionados, se tiene el siguiente resultado:

Teorema. *Si la transformación T es continua, entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

i) si la ecuación funcional (2) tiene soluciones periódicas con período k, entonces dicha ecuación tiene soluciones periódicas de cualquier período posterior en (1) a k,

ii) si la ecuación funcional (2) no tiene soluciones periódicas con período k, entonces tal ecuación no tiene soluciones periódicas de ningún período que preceda a k en (1).

Ilustremos la anterior afirmación. Tal vez el ejemplo más simple de sistema no lineal sea la ecuación logística:

$$x_{n+1} = a.x_n (1-x_n), \qquad (3)$$

donde x_n representa la población del año n, con relación a una población de referencia inicial x_0, x_{n+1} es entonces la población del año siguiente y a, es la tasa de crecimiento de dicha población. Esta ecuación aparece de manera natural en el estudio de la evolución de poblaciones biológicas[45], en particular, (3) se ha mostrado particularmente útil en el estudio de la evolución anual de la población de ciertas mariposas del nordeste de los EEUU, que exhiben fluctuaciones imprevisibles de un año a otro.
Queremos examinar un comportamiento a largo plazo de la población x_n. Para mantener la población en el intervalo [0,1] limitaremos a entre 0 y 4 (es fácil ver que sí a>4 y x_n =1/2 tenemos x_{n+1}>1).

Tomemos 1<a<3. Tomando cualquier población inicial $x_0 \in (0,1)$, la población se aproxima a un valor constante no nulo x*=1-1/a. De nuestros preliminares se tiene que x es un punto fijo de orden 1, en este caso no existen soluciones periódicas de ningún período.

A medida que a crece de 3 a 4 existen grandes variaciones en la estructura del sistema. Primeramente, el punto fijo se torna inestable y la población converge a un estado de equilibrio donde se alterna entre dos valores, es decir, se tiene una órbita de período 2. Para α=3.2 la población oscila entre x_n=0.5 y x_n=0.8.
Para valores mayores, por ejemplo para α=3.5, el período se torna inestable y es sustituido por una solución periódica de período 4.
A medida que α crece, la población converge a ciclos de período 8, 16, 32, 64, ...
Este es el fenómeno de *duplicación de los períodos*, que no es más que el orden de (1), pero invertido.
Quisiéramos añadir que para a≈3,83, existe un ciclo estable de tres elementos que se llama *Ventana de Periodicidad*. Para los valores de a entre 3 y 4, existe un número numerable de ventanas, pero existe un infinito no numerable de valores de a, para los cuales el modelo es caótico.
El análisis del comportamiento del sistema (3) para los restantes valores de α, puede ser completado recurriendo a resultados conocidos[46].
Resumiendo los resultados experimentales para a≥3 en una tabla se tiene:

n	a	aumento en a	cociente entre incrementos sucesivos
1	3,000000	-	-
2	3,449499	0,449499	-
3	3,544090	0,094591	4,75
4	3,564407	0,020313	4,26
5	3,568759	0,004352	4,67
6	3,569692	0,000933	4,67
7	3,569891	0,000199	4,70
8	3,569934	0,000043	4,60

[45] R. May-**"Simple mathematical models with very complicated dynamics"**, Nature 26(1976), 459-467.

[46] V.C. García-**"O caos"**, Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS, Serie C, 6(1988), J.E. Nápoles-Ob.cit. y G.N. Rubiano-Ob.Cit.

Los valores de a para los cuales se producen transiciones de un ciclo a otro, son llamados *Puntos de Bifurcación* y las transiciones son las *Bifurcaciones*, de modo que en la tabla para un n dado, el valor de a corresponde a la aparición de un ciclo de 2^n elementos.
El físico Mitchell Feigenbaun quedó sorprendido cuando notó que la sucesión a_1, a_2, ... formaba una sucesión de tipo geométrico, siendo el valor del factor 4, 6692016..., este factor se denomina *Constante de Feigenbaum* (denotándose por F), y lo notable es que aparece en modelos enteramente diferentes cada vez que se produce una duplicación de período repetido. F es, entonces, una constante universal que aparece en numerosos problemas de la Física que tienen en común una transición de fase (por ejemplo, el comportamiento del He cerca del cero absoluto).

El Teorema de Sarkovskii y la matemática escolar. Por último, quisiéramos proponer el siguiente problema (esbozando la solución general), vinculado al tema central de nuestro trabajo y que ilustra algunas de las posibles vinculaciones del Teorema de Sarkovskii, con el trabajo en el aula.

1. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$y = \frac{4 - x^2}{2},$$
$$x = \frac{4 - y^2}{2}.$$

2. *Generalizar el punto anterior, a un sistema de dos ecuaciones. Discutir el problema generalizado.*

3. *Generalizar el sistema de 1, a un sistema de p ecuaciones en las variables x_1, x_2, ..., x_p. ¿Tiene tal sistema soluciones { x_1, x_2, ..., x_p} con p diferentes números?.*

RESPUESTAS

1. *(0,2),(2,0),($-1+\sqrt{5}$, $-1-\sqrt{5}$), ($-1-\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$).*

2. *Una posible generalización es considerar el sistema y=f(x), x=f(y).*

Si x es un punto fijo de la función f, esto es, si

$x=f(x)$, (4)

se tendrá que

$f^2(x)=f(f(x))=x$. (5)

Por lo tanto, entre las raíces de (5), están todas las raíces de (4), algunas de ellas forman un ciclo de orden dos[47].

3. *Consideremos, por ejemplo, el sistema*

[47] (0,2) y (2,0).

$$x_2 = \frac{(a - x_1^2)}{2},$$
$$x_3 = \frac{(a - x_2^2)}{2},$$
$$x_4 = \frac{(a - x_3^2)}{2}, \qquad (6)$$
....
$$x_p = \frac{(a - x_{p-1}^2)}{2},$$
$$x_1 = \frac{(a - x_p^2)}{2}.$$

En este caso, usamos la composición f^n de la transformación f. Así, nuestro sistema (6) se reduce a la ecuación algebraica de grado 2^p

$f^p(x)=x.$ (7)

Luego, la pregunta enunciada, puede reformularse así ¿tiene la transformación $f_a(x) = \frac{a - x^2}{2}$ *órbitas periódicas de período p?.*

Un resumen de la respuesta obtenida (con ayuda del Teorema de Sarkovskii) es el siguiente:

- *Para $0 \le a \le 3$ hay órbitas de período 1.*
- *Cuando $a>a_1=3$, aparecen órbitas de período 2.*
- *Cuando $a>a_2=5$, aparecen órbitas de período 4.*
- *Cuando $a>a_3=5.47...$, aparecen órbitas de período 8.*

Es interesante obtener el valor límite de esta sucesión $a_\infty=5.6046...$

- *Cuando $a> a_\infty$ el carácter de las órbitas típicas cambia muy radicalmente, f_a admite no solo órbitas de período 2^p. ¿Qué períodos pueden tener las órbitas de la transformación f_a?[48].*

- *Por último, notemos que 3 es el número respecto al cual todos los demás están a la derecha, de acuerdo con el orden (1), lo que significa que cualquier transformación que tenga una órbita de período 3, admitirá órbitas de todos los demás períodos, o sea, **período 3 implica caos**[49].*

---

[48] Use el Teorema de Sarkovskii.

[49] Ver el trabajo de Li y Yorke.