Capítulo 1. **Memoria Antigua.**

"En esta época de contraste entre los estudios antiguos y los modernos es necesario hablar de uno que no empezó con Pitágoras ni terminará con Einstein, pero que es el más antiguo y, a la vez, el más moderno de todos"

G. H. Hardy (**"A Mathematicians's Apology"**)

La Mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos que se registran acerca de esta materia, son los de Arquímedes (287-212 a.n.e.) referentes al principio de la palanca y al principio del empuje[1]. A la formulación de las leyes de la composición vectorial de fuerzas dada por Stevin (1548-1620), aguardaba un progreso sustancial y el mismo autor enunció la mayoría de los principios de la Estática. El primer estudio de un problema dinámico se debe a Galileo (1564-1642) y se refiere a los experimentos sobre la caída de los cuerpos, aunque debemos considerar un precursor importante: Copérnico (1473-1543), quien con su sistema heliocéntrico, sentó las bases de una nueva ciencia: **la Mecánica Celeste**[2].

Además de la Providencia, la Edad Media y el Renacimiento no aportan nada esencial al estudio de las cosas, de aquí que en el medioevo, las ciencias aún no latían con pulso definido.

Históricamente, la integración antecedió a la diferenciación por, prácticamente, dos mil años. El antiguo método griego de exhausión y las medidas infinitesimales de Arquímedes[3], representan ejemplos antiguos de procesos límites de sumas integrales, pero no fue hasta el siglo XVII que Fermat, encontró las tangentes y los puntos críticos por métodos equivalentes a la evaluación de cocientes incrementales. El descubrió la naturaleza inversa de estos dos procesos, junto con la consecuente explicación de la anti-derivación en la determinación límite de sumas. La diferenciación, tanto inversa como directa, convirtió el algoritmo básico en una nueva y poderosa parte de la matemática. La integración fue tomada como "la memoria de la derivación" y no fue hasta 150 años más tarde, que la atención se dirigió directamente al concepto de sumación en el cálculo[4].

Capítulo 2. **Génesis.**

"Hay una asombrosa imaginación incluso en la ciencia de las matemáticas... Repetimos, hay mucho más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero"

Voltaire

El CALCULUS apareció impreso, por primera vez, en una memoria de seis páginas de Leibniz en el **Acta Eruditorium** de 1684, que contenía una definición de la diferencial y donde dio pequeñas reglas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces[5]. El incluyó también pequeñas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos.

Desdichadamente, este corto informe contuvo algunos errores, lo que contribuyó a que permaneciera enigmático a los matemáticos de la época. La base del método de fluxiones de Newton fue publicado primeramente, más bien impropiamente, como lemas en su **"Principia"** de 1687. Aquí encontramos algunas propiedades de límites e indicó pequeñas direcciones para encontrar "momentos" infinitesimales pequeños de productos, potencias y raíces[6].

Se dice que cuando Huygens, sobre 1690, deseó enseñar el nuevo método, no pudo encontrar un hombre calificado para exponer este. Newton entre 1669 y 1676 compuso varios tratados sobre los elementos de las fluxiones, pero no aparecieron impresos hasta 1704. John Craig en 1685 y 1693 publicó dos trabajos, basados en parte sobre el método de Leibniz, pero estos no fueron entendidos como introducciones y presentaban además, dificultades con la lectura, basadas en la forma geométrica en la cual fueron presentados.

Sobre el continente, los hermanos Bernoulli fueron pioneros en el nuevo cálculo, precisamente Jean fue quien instruyó a L'Hôpital, quien a su vez, preparó a Huygens. Esta fue la atmósfera de entusiasmo, que rodeó al nuevo cálculo al cerrar el siglo XVII. El mismo Jean sobre 1691-1692 preparó dos pequeños libros de textos, pero su publicación fue desplazada y el que trataba sobre el cálculo integral apareció, finalmente, en 1742 y el de cálculo diferencial, casi doscientos años después[7]. Es por tanto comprensible, la atención que se le dirigió al libro de texto de L'Hôpital **"Analyse des infiniment petits"**, como introducción a un mundo nuevo en las Matemáticas.

Ante los creadores del CALCULUS, el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales, en su inicio, se presentaba como parte de un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal. Naturalmente, la atención, al inicio, se concentraba en las diferentes ecuaciones de primer orden. Su solución se buscaba en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, con ayuda de métodos más o menos exitosamente elegidos. Para reducir este problema a la operación de búsqueda de funciones primitivas, los creadores del análisis y sus discípulos, tendían en cada ecuación diferencial a separar las variables. Este método con el que actualmente comienzan los textos sistemáticos de la teoría de ecuaciones diferenciales, resultó, al parecer, históricamente el primero.

En primer lugar, señalaremos que el término **aequatio differentialis**, fue primeramente usado por Leibniz (en un sentido bastante restringido) en 1676 para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y[8]; concepción que se conserva hasta los tiempos de Euler (en los años 1768-1770). Asimismo, es importante destacar, que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) surgen prácticamente con la aparición del CALCULUS, en la célebre polémica Newton-Leibniz se tiene un gran momento cuando Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama:

6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x

el cual en latín quiere decir *"Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa"*, o bien: *"Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa"*. Este fue, como dice Arnold, el descubrimiento fundamental de Newton que consideró necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matemático contemporáneo significa: “Es útil resolver ecuaciones diferenciales". Curiosamente Ince afirma que la fecha de aparición de estas es el 11 de Noviembre de 1675 cuando Leibniz escribió la ecuación $\int y dy = y^2/2$ (continua Ince) ...por lo tanto no resolvió una ecuación diferencial, la cual por si misma es un asunto trivial, sino que fue un acto de un gran momento, fraguando una herramienta poderosa, el signo de integral.

La primera clasificación de las EDO de primer orden (en lenguaje de la época ecuaciones fluxionales) la dio Newton. El primer tipo estaba compuesto de aquellas ecuaciones en las

cuales dos fluxiones x´, y´, y un fluente x o y están relacionados, como por ejemplo x´/y´=f(x) o x´/y´=f(y), o bien como escribiríamos en la actualidad dy/dx=f(x), dy/dx=f(y); el segundo tipo abarcó aquellas ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes x´/y´=f(x,y) (dy/dx=f(x,y)). Y finalmente, el tercer tipo abarcó a ecuaciones que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
En la Teoría de Fluxiones, Newton resuelve dos problemas principales, formulados, tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

1. determinación de la velocidad del movimiento en un momento de tiempo dado. De otro modo: determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes,

2. dada la velocidad del movimiento determinar el espacio recorrido en un tiempo dado. En términos matemáticos: determinar la relación entre los fluentes dada la relación entre las fluxiones.

El primer problema, llamado **problema directo**, representa el problema de la diferenciación implícita de funciones, en el caso general, y obtención de la ecuación de la ecuación diferencial que expresa las leyes del fenómeno. El segundo, el **problema inverso**, es el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general. En particular, en este problema se trata de la búsqueda de las funciones primitivas. Los enfoques de Newton para la solución de un problema tan general y los procedimientos de su resolución se construyeron paulatinamente.
Ante todo, la simple inversión de los resultados de la búsqueda de fluxiones le dio una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo advirtió la necesidad de agregar, en esta inversión, una constante aditiva. Después resultó que la operación de inversión, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas como Mx´+Ny´=0, obtenidas en el cálculo de las fluxiones, no siempre era posible y no se obtenía la función original. Newton advirtió esto, en el caso en que M=M(x,y) y N=N(x,y) fueran funciones racionales enteras.
Cuando la inversión inmediata del método directo no conduce al éxito, Newton acude al desarrollo de funciones en series de potencias como medio universal de la teoría de las fluxiones. La ecuación dada la resuelve, por ejemplo, respecto a y´/x´ (ó poniendo x=1) respecto a y, y desarrolla la función del miembro derecho en series de potencias y a continuación esta serie la integra término a término. Este método lo comunicó mediante otro anagrama el cual dice lo siguiente: *"El primer método consiste en la extracción de una cantidad fluente de la ecuación que contiene su fluxión, el segundo en cambio consiste en la mera sustitución de una serie en lugar de una cantidad incógnita cualquiera, de la cual pueden deducirse fácilmente las otras, y en comparación de los términos homólogos de la ecuación resultante para obtener los términos de la serie supuesta"*[9].
En la última década del siglo XVII los hermanos Bernoulli (James y Johan) introducen términos como el de "integrar" una ecuación diferencial, así como el proceso de "separación de variables" (**separatio indeterminatarum**) de una ecuación diferencial.
Alrededor de 1692, Johan Bernoulli I (1667-1748) encontró otro método, utilizado en una serie de problemas, la "multiplicación por un factor integrante" (sobre todo para resolver ecuaciones en los cuales el método anterior no se podía aplicar, digamos la ecuación αxdy-ydx=0, ya que aunque era posible separar las variables no se podía integrar, ya que en la época

no se conocía que $\int dx/x=\ln x$), método también usado por su sobrino Daniel (1700-1782) a partir de 1720.
Este método puede ser considerado como general para ecuaciones de la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

es difícil, no obstante, realizarlo debido a la elección de este factor. La costumbre de buscar factores de integración como método inicial para encontrar la solución de una ecuación diferencial fue mantenida hasta los tiempos de Cauchy (1821). Leibniz (1693) y después Johan Bernoulli I con ayuda de la sustitución $y=xt$ resolvieron las ecuaciones homogéneas de primer orden. La ecuación de Bernoulli (Johan I):

$$ady = yp(x)dx + by^n q(x)dx,$$

(a, b constantes) fue transformada mediante la sustitución $y^{1-n} = v$ (primero por Leibniz en 1693 y luego por Johan I en 1697) en una ecuación diferencial lineal de primer orden, aquí Johan anticipó el método de variación de las constantes introducido en 1775 por Lagrange. Finalmente, hacia el año 1700 Johan logró resolver la ecuación diferencial lineal de orden n:

$$\sum_{i=1}^{n} A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0,$$

introduciendo un factor integrante de la forma x^p y disminuyendo, sucesivamente, el orden de la ecuación.
Sin embargo, los métodos eran incompletos y la teoría general de las ecuaciones diferenciales, a comienzos del siglo XVIII no podía ser propuesta.
Hacia finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, la concepción que se tenía del Universo cambia, debido en gran medida, a los aportes tanto matemáticos como metodológicos, de ese genio singular que fue Isaac Newton (1642-1727). Se ve que la Naturaleza tiene una serie de regularidades que se pueden analizar y predecir; de hecho, la ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaron que era poco lo que quedaba por descubrir. La tarea de los científicos era, dilucidar las repercusiones de estas leyes en el ámbito de los fenómenos particulares.
Uno de los principales logros de este siglo, fue establecer ecuaciones para modelar fenómenos físicos, aún cuando no hubo grandes éxitos al tratar de resolverlas. Basta como ejemplo, citar a Euler (1707-1783): *"Si no nos está permitido alcanzar el entendimiento completo del movimiento de un fluido o de la mecánica o los principios conocidos del movimiento, no es a ellos a los que debemos echarles la culpa. Es el análisis que nos muestra su debilidad en este respecto"*. Por otra parte, los notables avances en la solución de las ecuaciones diferenciales (en los cuales tuvo Euler notable incidencia, como ya veremos) hacían pensar que los problemas no resueltos, tales como el movimiento de los tres cuerpos bajo la influencia de la gravedad, eran excepciones.
Resultados de carácter general comienzan a advertirse a mediados de los años 20 del siglo XVIII. En 1724, el matemático italiano J. F. Riccati (1676-1754) estudió la ecuación:

$$dy/dx + ay^2 = bx^\alpha,$$

(α, a, b constantes) determinando la integrabilidad en funciones elementales de esta, de aquí que (y a propuesta de D'Alembert en 1769) lleva su nombre, denominación extendida a todas las ecuaciones del tipo:

$$dy/dx = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

(P, Q y R funciones continuas). La investigación de esta ecuación fue ocupación de muchos matemáticos: Leibniz, Ch. Goldbach (1690-1764), Johan I, Nicolas I (1687-1759) y Daniel Bernoulli entre otros. Daniel estableció que esta se integra mediante funciones elementales si $\alpha= -2$ ó $\alpha= 4k/(2k-1)$ k entero[10].
En el año 1738 Euler aplicó a la resolución de esta la teoría de series, más adelante descubrió que cuando existen dos soluciones particulares, la integración de la ecuación se reduce a cuadraturas y que si se conoce una solución particular **v**, entonces ella puede ser transformada en una ecuación lineal mediante la transformación $y = v + 1/z$.
Ya a finales de los años 30 del siglo XVIII, Euler elaboró un algoritmo de resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, basado en la reducción del orden de ciertas ecuaciones homogéneas con ayuda de la función exponencial. En el año 1743 en uno de sus trabajos, fue publicado el método de resolución de una ecuación lineal con ayuda de la sustitución $y = e^{kx}$ y en el caso de raíces reales múltiples de la ecuación característica, utilizando $y = u\, e^{kx}$.
En el caso de la existencia de un par de raíces complejas $\alpha\pm ßi$, utilizó la sustitución $y = u\, e^{\alpha x}$, sustituciones que reducen el problema a la ecuación:

$$d^2y/dx^2 + ß^2y = 0,$$

la forma trigonométrica de cuya solución era conocida por Euler desde el año 1740.
Es a Euler a quien le corresponde la primera sistematización de los trabajos anteriores en sus "**Institutiones Calculi Integralis"** (1768-1770), donde encontramos lo que se puede llamar la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta obra contiene una buena parte (y mucho más) del material que encontraríamos en un libro de texto actual, como el estudio de las ecuaciones diferenciales de 1er orden (y su correspondiente clasificación en "separables", "homogéneas", "lineales", "exactas"), las de segundo orden (lineales, y las susceptibles de reducir el orden), y su generalización a las de orden superior. Asimismo, encontramos el método de series de potencias para resolver ecuaciones como $y''+ax^ny=0$. Lo que desde nuestra perspectiva, vale destacar de este trabajo, es su forma de **conceptualizar** las EDO, la expresión dy/dx significa para Euler un cociente entre diferenciales y no nuestra derivada actual, en una ecuación de segundo orden aparecen los diferenciales ddy, dx^2 en lugar de la segunda derivada y´´.
La búsqueda de un factor de integración era utilizada por Euler, en forma frecuente (1753), para reducir el orden de una ecuación diferencial. Así, para resolver la ecuación de segundo orden lineal no homogénea procede reduciendo el orden en la siguiente forma. Sea la ecuación:

$$X = Ay + Bdy/dx + Cddy/dx^2,$$

multiplica por el factor $e^{\alpha x}dx$ y obtiene:

$$e^{\alpha x}dx = (e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}Cddy/dx),$$

como se requiere que el factor $e^{\alpha x}dx$ reduzca el orden en uno, se supone la integral encontrada y se iguala son la ecuación diferencial lineal de primer orden $e^{\alpha x}(A'y+B'dy/dx)$, es decir, se establece la relación:

$$(e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}Cddy/dx) = e^{\alpha x}(A'y + B'dy/dx).$$

Para que esta igualdad se sostenga se requiere que la diferencial del lado derecho sea igual al integrando del primer miembro, donde A', B' y α son constantes a determinar en términos de A, B y C. Igualando tendremos:

$$A=A'\alpha,\ B=A'+B'\alpha,\ C=B'$$

de donde:

$$A'=A/\alpha,\ B'=C,\ B=A/\alpha + C\alpha.$$

Es decir, α queda determinada por las raíces de la ecuación cuadrática:

$$A-B\alpha+C\alpha^2=0.$$

De esta forma la ecuación diferencial de segundo orden se reduce a la ecuación diferencial de primer orden:

$$B'dy/dx + A'y = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x}Xdx.$$

D'Alembert (en 1766) encontró que la solución general de una ecuación lineal no homogénea, es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.
Muchos matemáticos (en particular Clairaut y Euler) siguieron elaborando el método de factor integrante. Así, en los años 1768-1769, Euler investigó las clases de ecuaciones diferenciales que tienen factor integrante de un tipo dado e intentó extender estas investigaciones a ecuaciones de orden superior. Finalmente, cerraremos esta etapa, mencionando las contribuciones de Lagrange, las cuales, al igual que Euler, fueron hacia el último cuarto del siglo XVIII. Lagrange demostró que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, es de la forma $y=c_1y_1 +c_2y_2 +...+c_ny_n$, donde $y_1, y_2, ...y_n$ son un conjunto de soluciones linealmente independientes y $c_1, c_2, ...,c_n$ son constantes arbitrarias; asimismo, también descubrió en su forma general el "método de variación de parámetros (o constantes)", hacia 1774.
De esta manera, en el siglo XVIII, el trabajo consistía en la solución de ecuaciones particulares específicas. Asimismo, fueron elaboradas las premisas para la creación de las bases

para la teoría general, con una serie de conceptos fundamentales, sobre los que hablaremos en el siguiente epígrafe.
Simultáneamente con estos trabajos, se produjeron diversos desarrollos en la Mecánica. En 1750 Lagrange tomó las ideas dinámicas de Euler y produjo una reformulación de la Dinámica. Dos ideas importantes se desprenden de su trabajo: la primera, fue **el principio de conservación de la energía** y la segunda, el introducir **coordenadas generalizadas** en el formalismo de la Mecánica, formalismo que permitió interpretar la Mecánica desde diversos puntos de vista de la Matemática. Más tarde, William R. Hamilton reformuló la Dinámica de un sistema, logrando una mayor generalidad.
Hablamos sobre una rama particular de la Física: la Mecánica Analítica, fundada por Euler, D'Alembert (1717-1783) y algunos otros científicos y que fue genialmente originada por Lagrange (1736-1813) en su obra maestra **"La Mecanique Analytique"**, que proyectó en Turín, cuando tenía 19 años, aunque fue publicada en París en 1788 ya cuando contaba con 52 años de edad. En esta obra, hace notar que la ciencia de la Mecánica, puede ser considerada como la geometría de cuatro dimensiones, o sea, una nueva forma de considerar la Mecánica, que se hizo popular desde 1915 cuando Einstein la utilizó en su Teoría Especial, de principios de siglo.
El estudio analítico de la Mecánica, rompe con la tradición griega, pues a diferencia de Newton, que consideraba útiles las figuras en sus estudios de los problemas mecánicos, Lagrange mostró que se alcanzaban mejores resultados, si desde el principio se empleaban métodos analíticos generales.
Precisamente, esta es una característica que queremos destacar de la Mecánica Analítica: su carácter bifronte. Por un lado, es teoría de los sistemas mecánicos, el conjunto de esquemas estructurales de la mecánica clásica, y por el otro, **ciencia puramente matemática** (C. Lanczos), composición de métodos y estructuras matemáticas interrelacionadas, que pueden estudiarse independientemente del contenido físico.
Desde este punto de vista, la mecánica analítica puede considerarse parte de la matemática. Esto fue comprendido genialmente por Lagrange desde el siglo XVIII.
D’Alembert (en 1766) encontró que la solución general de una ecuación lineal no homogénea, es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.
Muchos matemáticos (en particular Clairaut y Euler) siguieron elaborando el método del factor integrante. Así, en los años 1768-1769, Euler investigó las clases de ecuaciones diferenciales que tienen factor integrante de un tipo dado e intentó extender estas investigaciones a ecuaciones de orden superior.
Finalmente, cerraremos esta etapa, mencionando las contribuciones de Lagrange, las cuales, al igual que Euler, fueron hacia el último cuarto del siglo XVIII. Lagrange demostró que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, es de la forma $y=c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$, donde las y_i , con $i=1,...,n$, son un conjunto de soluciones linealmente independientes y las c_i son constantes arbitrarias; asimismo, también descubrió en su forma general el “método de variación de parámetros (o constantes)”, hacia 1774.
De esta manera, en el siglo XVIII, el trabajo consistía en la solución de ecuaciones particulares específicas. Asimismo, fueron elaboradas las bases para la teoría general, con una serie de conceptos fundamentales, sobre los que hablaremos a continuación.

3. Fundamentos Generales

"La suerte está echada, he escrito mi libro, lo leerán en la época presente o en la posteridad, no importa cuando, bien puede esperar un siglo un lector, puesto que Dios ha esperado seis mil años un interprete de sus palabras".

J. Kepler

En el año 1743 surgieron los conceptos de integral particular y general, encontradas por Euler ya en 1739. Ellos fueron publicados en la memoria donde se trata de un único algoritmo de resolución de ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes. En sus trabajos de estos años, Euler consideró también las soluciones singulares de una serie de ecuaciones, las cuales ya eran conocidas del **"Methodus incrementorum..."** (1715) de Brook Taylor (1685-1731).
Taylor advirtió una solución singular considerando la ecuación:

$4x^3-4x^2 = (1 + z^2)^2(dx/dz)^2.$ (1)

Mediante la sustitución $x = v/y^2$, $v = 1 + z$ transformó (1) en la ecuación:

$y^2-2zyy' + vy'^2 = 1.$ (2)

Diferenciando esta, tenemos:

$$2y'' (vy' - zy) = 0$$

y a continuación, igualando a cero la expresión entre paréntesis y sustituyendo en la ecuación (2) $y' = zy/v$, Taylor obtuvo la expresión $y^2=v$, $x=1$, la cual denominó "cierta solución singular del problema".
La falta de claridad de este tipo de solución y su denominación de singular, se conservó en las obras de Clairaut, el cual consideró (en 1736) la solución singular de la ecuación:

$$y = (x+1)\, dy/dx - (dy/dx)^2.$$

Euler, no obstante, ya en el año 1736 advirtió que si se encuentra un factor integrante $\mu(x,y)$ de la ecuación diferencial, entonces $1/\mu= 0$ puede dar lugar a una solución singular. Por ejemplo:

$$xdx + ydy = (x^2 + y^2 -r^2)^{1/2}\, dy,$$

tiene como factor integrante $\mu= (x^2 + y^2 -r^2)^{-1/2}$ y la solución singular será $x^2 + y^2 -r^2 = 0$.
La claridad en este concepto fue obtenida por Lagrange sólo en los años 1774-1776, dando una interpretación geométrica de las mismas como envolvente de las curvas integrales. Una exposición sistemática y unificada la dio el propio Lagrange en 1801-1806 en sus **"Lecciones sobre el cálculo de funciones".**

La teoría general de la que tanto se había hablado, aparece expuesta por vez primera, como ya dijimos, en el famoso "**Institutiones...**" de Euler, obra que consta de tres tomos que vieron la luz sucesivamente en los años 1768, 1769 y 1770 y con un suplemento en 1794, culminando la serie de libros de Euler dedicados a la exposición sistemática del análisis contemporáneo.
Existe una etapa intermedia entre esta época y los trabajos de Poincaré y Liapunov, caracterizada fundamentalmente, por un lado, por los métodos en series para la búsqueda de soluciones, los cuales produjeron las llamadas funciones especiales y por otro, por la investigación sobre los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial, los cuales sirvieron, como afirma Ince *"para determinar en forma rigurosa, la pregunta de la existencia de soluciones de aquellas ecuaciones que no fueron integrables por métodos elementales"*[11].
Por otra parte, el doble carácter de la Mecánica Analítica, la convierte en medio natural donde resulta posible el proceso de conversión de "lo mecánico" en "lo matemático".
De esta manera, los estímulos `externos', provenientes de la Mecánica, del desarrollo de la matemática, se convierten en factores `internos' de este desarrollo. Se pensó entonces, que la Naturaleza era posible describirla con un conjunto pequeño de leyes. Estas leyes, como regla general, eran establecidas en términos de ecuaciones diferenciales. Dado un estado natural del sistema en un tiempo determinado y las leyes que lo describen, se consideraba que en principio se podía determinar con toda precisión, todo estado futuro.
Por desgracia, estas consideraciones de carácter general, pronto mostraron su debilidad al intentar reducir las divergencias entre la teoría y la práctica. El uso de la teoría newtoniana para calcular las órbitas planetarias, requirió mucho trabajo y esfuerzo, por parte de los más grandes científicos de los siglos XVIII y XIX, desde Euler a Lagrange, pasando por Laplace y Hamilton, y culminando con Poincaré. Todos estos aportes vinieron a conformar lo que se conoció con el nombre de Mecánica Celeste y que fue anticipada por Copérnico[12]. Esta disciplina tendría como objetivo, estudiar uno de los problemas más difíciles de la física y las matemáticas, el llamado problema de los N cuerpos (en nuestro caso el Sol y los planetas) que interactúan gravitacionalmente.
Para fines del siglo XIX se había alcanzado un grado tal de precisión, que el descubrimiento de una discrepancia de ocho segundos a lo largo del siglo, en el movimiento aparente de Mercurio, provocó una crisis de tal magnitud, que desembocó, a los pocos años, en la Teoría Especial de la Relatividad[13].
Como hemos dicho, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó a desarrollarse en el siglo XVII, simultáneamente con el surgimiento del cálculo diferencial e integral. Se puede decir, que la necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales para las exigencias de la Mecánica (es decir, para encontrar las trayectorias de los movimientos), a su vez, fue el estímulo para la creación del nuevo método de cálculo por Newton y Leibniz. Las leyes de Newton constituyen un modelo matemático simple del movimiento mecánico.
A través de las ecuaciones diferenciales ordinarias o de la aplicación del nuevo cálculo a los problemas de la Geometría y la Mecánica, se logró resolver problemas que a lo largo de mucho tiempo no admitían solución. En la Mecánica Celeste, resultó posible, no sólo obtener y explicar hechos ya conocidos, sino también, hacer nuevos descubrimientos (por ejemplo, el descubrimiento del planeta Neptuno por Leverrier en 1846, sobre la base del análisis de las ecuaciones diferenciales). De esta manera, el primer rasgo de las ecuaciones diferenciales es su estrecha vinculación con las aplicaciones, en otras palabras, la teoría de las ecuaciones diferenciales "nació" de las aplicaciones. Exactamente, en la teoría de las ecuaciones diferenciales, la matemática actúa como parte integrante de las ciencias naturales, sobre la cual

se fundamenta la deducción y comprensión de las regularidades cualitativas y cuantitativas que componen el contenido de las ciencias de la Naturaleza. Más aún, las ciencias naturales son para la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, una fuente maravillosa de nuevos problemas, ellas determinan en medida considerable la dirección de sus investigaciones y les dan una orientación correcta. Es más, las ecuaciones diferenciales no pueden desarrollarse sin el contacto con los problemas físicos. Esto no es sólo porque la Naturaleza es más rica que la fantasía humana, sino porque las aplicaciones actúan, en muchos casos, como un “examen” que toda teoría debe superar.

La teoría sobre la no resolubilidad de ciertas clases de ecuaciones diferenciales, desarrolladas en años recientes, muestra que incluso ecuaciones lineales "muy simples", pueden no tener solución, no sólo en el sentido corriente, sino en las clases de funciones generalizadas y en las clases de hiperfunciones y, por consiguiente, para estas ecuaciones no puede ser construida ninguna teoría "sustanciosa". En el plano histórico, la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, pasó a ser la primer forma matemática de la Mecánica clásica. Se reveló la estructura variacional de la mecánica y desde el punto de vista matemático se hizo posible considerar la Mecánica como Cálculo de Variaciones. El desarrollo del formalismo lagrangiano, llevó a la geometrización de la Mecánica que, hacia finales del siglo XIX, adquirió la forma de geometría multidimensional de Riemann. A la vez, la geometrización del formalismo hamiltoniano originó la geometría del espacio de fases y, en realidad, reveló otra cara de la Mecánica: la Geometría Simpléctica.

Algunas de las mencionadas ramas de la Matemática -el cálculo de variaciones y la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden- se modelaban (como ya dijimos) en paralelo con la elaboración de los formalismos de la Mecánica Analítica. En otros casos, se identificaban los formalismos de la mecánica con teorías matemáticas ya formadas y se daban impulsos adicionales para el desarrollo de esas teorías.

La equivalencia de algunos formalismos de la Mecánica Analítica, contribuyó a que se comprendieran las profundas relaciones entre ramas de las Matemáticas que antes parecían tan diferentes. Las tareas de la Mecánica Analítica en el marco de uno u otro formalismo, con frecuencia llevaban a elaborar partes absolutamente nuevas de la Matemática, como la teoría de grupos y de las Algebras de Lie y la Topología (por ejemplo, en relación con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias).

Cuando se comprendía la identidad de la estructura matemática de la Mecánica con una u otra teoría matemática, ello era siempre positivo para la Mecánica, ante la cual se abrían nuevas posibilidades para resolver un círculo cada vez más amplio de problemas y aplicar estos métodos en la física y la astronomía.

4. El Problema de la Existencia y Unicidad

"Cualquiera que sobresale del nivel medio ha recibido dos educaciones - la primera de sus maestros; la segunda, más impersonal e importante, de sí mismo".

Eduard Gibbons

Como destacara Arnold[14], la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias *"permite estudiar los más diversos procesos de evolución que pueden determinarse, tener dimensión finita y ser diferenciables"*. Estas tres propiedades forman la base de la mecánica de los sistemas discretos. Un proceso se llama determinado, si su estado pasado y futuro puede obtenerse a partir de su estado presente. El conjunto de todos los estados del proceso, se llama Espacio de Fases. El proceso se denomina de dimensión finita si su espacio de fases lo es, i.e., si el número de parámetros, necesarios para describir completamente su estado, es finito. El proceso se llama diferenciable, si su estado de fases tiene estructura de variedad diferencial.

A propósito de lo anterior, la expresión exacta de la idea de la determinación, son los teoremas de existencia y unicidad. Para una ecuación escalar de primer orden y'=f(x,y), esta preocupación comienza con Euler -en su **"Institutiones..."**- con su método de las quebradas, el cual se usa en la actualidad como un método numérico, lo continúa Cauchy demostrando semejante teorema por primera vez en sus conferencias (1789-1857), dictadas en 1820-1830 bajo el título **"Exposition d'une Méthode à l'aide de laquelle on peut intégrer par approximation un grand nombre d'Equations différentielles au premier ordre"** y lo presentamos a continuación, por su indudable valor histórico y metodológico.

Teorema de Cauchy. Si el segundo miembro de la ecuación diferencial

$$y'=f(x,y), \qquad (3)$$

es analítica en ambas variables, x e y, en una vecindad del punto (x_0,y_0), entonces la ecuación (3) posee una única solución y(x) que satisface la condición inicial

$$y(x_0)=y_0 \qquad (4)$$

y esta solución es analítica en una vecindad de x_0.

Es fácil entender que el requerimiento de que f sea analítica es artificial, por otra parte, esta restricción falla en muchos problemas de aplicaciones, así, como teoría general, es muy exigente.

El resultado clásico conocido hoy, es el producto de diversos refinamientos:

Teorema de Existencia y Unicidad. Si la función f es definida y continua en una cierta región abierta y conexa D del plano y satisface en ella una condición de Lipschitz respecto a y entonces, por cada punto interior de D, pasa una y sólo una curva integral de la ecuación diferencial (3).

Una característica importante en el trabajo de Cauchy, es el cambio que se da en la forma de conceptualizar una ecuación diferencial ordinaria. En efecto, en Cauchy no sólo encontramos nuestra definición de una ecuación diferencial, ordinaria[15], sino que además su discurso es muy parecido al de cualquier texto actual. Por cierto, durante esta misma época, en el libro de Lacroix, **"Traité Elémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral"**, 1837, encontramos un punto de vista análogo.

El método de demostración, basado en la consideración de las quebradas de Euler, dado por Cauchy en sus lecciones de la Ecole Polytechnique (considerando la continuidad de f (x,y)), está resumido en una memoria litografiada en Praga y en 1835 y publicado en forma más completa por su discípulo F. N. Moigno (**"Lecons de Calcul"**, 2, 1844, p.385, 513) pero la esencia del método se remonta a Euler en su **"Institutiones Calculi Integralis"**, de ahí el nombre dado. La prueba por Aproximaciones Sucesivas es debida a C. E. Picard

(1856-1941) y E. L. Lindelof (1870-1946). Este teorema fue usado por J. Liouville (1809-1882) y Cauchy en diversos casos especiales. Sin embargo, el método de Cauchy-Lipschitz tiene sobre el de Picard-Lindeloff, la ventaja que permite construir la solución en todo intervalo finito donde ésta es continua.
La condición de Lipschitz es superflua para el teorema de existencia. Con la única hipótesis de la continuidad de f ha probado C. Arzelá (1847-1912) que (3) admite al menos una solución por (x_0,y_0). Una demostración de Montel (**Thése**, 1907), que utiliza las quebradas de Euler puede verse en Valiron (**"Cours d'analyse mathématique"**).
Por otra parte, debe imponerse la condición de Lipschitz u otra similar para asegurar la unicidad. W. F. Osgood (Monatsh. Math. Phys., 9, 1898) ha colocado el problema sobre una base firme, probando que si f es continua en un entorno de (x_0,y_0), existe en general un haz de curvas integrales por dicho punto, comprendidas entre dos extremos $y=\Phi_1(x)$, $y=\Phi_2(x)$. La unicidad equivale a $\Phi_1(x)=\Phi_2(x)$, y para esto, una condición suficiente es:

$$|f(x,y)-f(x,z)| < w(|y-z|),$$

siendo w(u) una función continua ≥ 0 para $u\geq 0$, nula sólo si $u=0$ y tal que para $\varepsilon>0$ haga divergente la integral $\int_0^{\varepsilon} \frac{du}{w(u)}$. Funciones con estas propiedades son Ku, Kuln(1/u), Kuln(1/u)lnln(1/u), ... la primera es la condición de Lipschitz, las demás son condiciones más generales. Más recientes son los teoremas de unicidad de Nagumo (Japonese J. of Math., 3, 1926), Perron (Math. Annalen, 95, 1926; Math. Zeitschrift, 28, 1928), Müller (Math. Zeit 26 (1927) 619-645), Wallach (Amer. J. Math. 70 (1940) 345-350), Olech (Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (1956), 555-561) y Wintner (Bull. Un. Mat. Ital. (3) 21 (1956) 496-498), extendidos y/o generalizados en trabajos sucesivos de Antonino, Arino, Bownds, Bushell, Checa, Cleave, Díaz, Everitt, Gautier, Lemmert, Metcalf, Penot, Race, Redheffery, Romaguera, Volkmann, Walter y otros que harían demasiado larga esta lista.
Precisamente de Müller es el siguiente ejemplo de aproximaciones sucesivas no convergente. Sea:

$$u'=U(t,u),\ u(0)=0, \tag{5}$$

donde U(t,u) será definida para $t\geq 0$ y todo u. Consideremos las aproximaciones $u_0(t)\equiv 0$ y

$$u_{n+1} = \int_0^t U(s,u_n(s))ds, \text{ si } n \geq 0.$$

Sea $U(t,0) = 2t$, por tanto $u_1(t) = t^2$; poniendo $U(t,t^2)=-2t$, así $u_2(t) = -t^2$. Finalmente, poniendo $U(t,-t^2)=2t$ se tiene $u_3(t) = t^2$. Entonces $u_{2n}(t) = -t^2$ para $n > 0$ y $u_{2n+1} = t^2$ para $n\geq 0$. Podemos completar la definición de la función U(t,u) como una función continua haciendo $U(t,u)=2t$ si $u\leq 0$, $U(t,u)=-2t$ si $u\geq t$, y como una función lineal de u cuando $0\leq u\leq t$, $t>0$ fijo. De esta forma, obtenemos un ejemplo en el cual U(t,u) es no creciente con respecto a u (para $t\geq 0$ fijo). En este caso la solución de (5) es única (Corolario 6.3 de P. Hartman-**"Ordinary Differential Equations"**, John Wiley & Sons, 1964) sin embargo, ninguna subsucesión de las aproximaciones sucesivas converge a una solución.

En los últimos años, sucesivos resultados sobre la unicidad de las soluciones han sido obtenidos para cuando las condiciones de tipo Lipschitz no pueden ser aplicadas, son resultados que utilizan una descomposición de la función del segundo miembro o condiciones más débiles sobre esta.
Sin embargo, hay un detalle sobre el que queremos volver y es el del "famoso" teorema de existencia de Peano.
A fines del siglo pasado, G. Peano (1858-1932) publica dos artículos, en los cuales formula dos teoremas de existencia diferentes, considerando que x y f pertenecen al d-espacio euclideano $\mathbf{R}^d$ y t es real. Sea K un número positivo, J=[0,1], f continua en Jx $\mathbf{R}^d$ y $|f(t,x)|\le K$ para $(t,x)\in J\times\mathbf{R}^d$.

Teorema 1(1886). Sea d=1. El problema inicial

$x'(t)=f(t,x(t))$ para $t\in J$, $(0)=0$, (6)

posee soluciones x_{min} , x_{max} tal que para toda solución $x_{min}(t) \le x(t) \le x_{max}(t)$ para $t\in J$.

Teorema 2(1890). Sea d≥1. El problema inicial (6) posee al menos una solución.

Observemos que en el caso d=1, el Teorema 2 es una consecuencia trivial del Teorema 1. Esto significa que toda prueba del Teorema 1 es también una prueba del Teorema 2, por otra parte, las demostraciones del Teorema 2 son más simples que las del Teorema 1.

Quisiéramos aclarar un error muy común en casi todos los textos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Todos los atores que mencionan el nombre de Peano, llaman en todo momento al Teorema 2 el *Teorema de Peano,* cuando en realidad hemos visto que no es un único resultado.

Una prueba elemental del Teorema de Peano es aquella en la cual se evita la equicontinuidad y en lugar del Lema de Arzelá-Ascoli se utilizan propiedades especiales de $\mathbf{R}$ (ó $\mathbf{R}^d$), sin entrar a valorar la noción de constructividad enfatizada por numerosos autores. Muchas pruebas elementales del Teorema 1 existen, sin embargo las del Teorema 2 son escasas, una demostración de este tipo es de interés didáctico al menos, puesto que el caso d=1 del Teorema 2, es tratado separadamente en muchos textos, por otra parte la existencia de x_{min} , x_{max} puede justificarse como el ínfimo, supremo del conjunto de todas las soluciones de (6) probando que este es no vacío (exactamente el planteamiento del Teorema 2).
Extensiones del teorema de existencia a soluciones de tipo Carathéodory, utilizando el Análisis Recursivo, etc., aún son objetos de estudio.
Todo lo anterior lo podemos resumir en la figura 1 que muestra bien a las claras, el estado exacto de las investigaciones en este campo. Detengámonos, aunque sea brevemente, para explicar cada uno de estos términos. Del primero de ellos podemos decir que no es más que algunas de las investigaciones a las que ya hemos hecho referencia sobre la unicidad de las soluciones digamos; el segundo tópico refleja las investigaciones sobre espacios de funciones acotadas, positivas, ...; el tercer tópico merece un tratamiento especial, se pensó que las investigaciones en este campo, para ecuaciones diferenciales definidas sobre espacios infinito-dimensionales podían seguir el mismo esquema, uno de los primeros resultados en tal

sentido es debido a F. E. Browder (en 1964) y W. J. Knight demostró que estaba incorrecto[16]. Quizás en este orden de cosas, el ejemplo típico es el debido a Dieudonné[17]:
Sea $\mathbf{N}=\{1,2,3,...\}$ y tomemos:

$$l_\infty := l_\infty(\mathbf{N})=\{x/x=(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ sucesión acotada}\},$$

introduzcamos el subespacio acotado de l_∞:

$$c_0=\{x/x\in l_\infty,\ \lim_{n\to\infty} x_n=0\}.$$

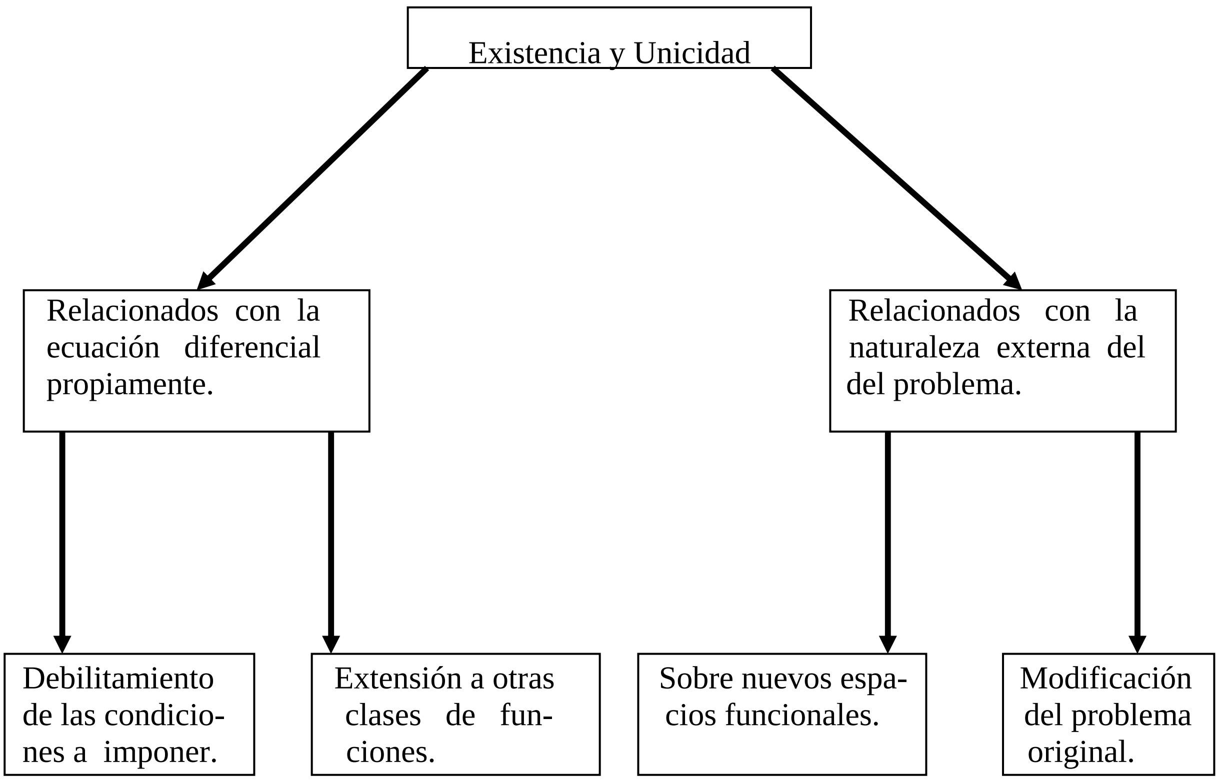


FIGURA 1

La función ($\varepsilon\in\mathbf{R}$):

$$\varphi(\varepsilon)=\begin{cases} 2, \text{ si } \varepsilon\geq 4 \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{ si } 0\leq\varepsilon\leq 4, \\ 0, \text{ si } \varepsilon\leq 0 \end{cases}$$

es acotada, creciente y uniformemente continua. Las fórmulas:

$$f_n(x)=1/n+\varphi(x_n),\ n\in\mathbf{N},\ x\in l_\infty,\ \ f(x)=(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}},\ x\in l_\infty,$$

definen una función $f: l_\infty \to l_\infty$ acotada, creciente y uniformemente continua. Vemos fácilmente que $f(c_0) \subseteq c_0$, pudiéramos suponer que el Problema de Cauchy:

$$u(0)=0,\ u'=f(u),$$

posee una solución única $u:[0,T] \to l_\infty$, sin embargo Dieudonné mostró que $u(t) \not\in c_0$ $(0<t\leq T)$. Esto muestra a las claras, que requerimientos de otro tipo eran necesarios al abordar el estudio de la Existencia y la Unicidad en espacios de infinitas dimensiones.
El último tópico es, quizás, el más reciente y está referido al estudio de la Existencia y Unicidad en Inclusiones Diferenciales u otras ecuaciones diferenciales en las que intervienen diferentes nociones de derivadas, etc.

Capítulo 5. **Cien Años de Teoría Cualitativa.**

"El científico debe saber todo de un poco y un poco de todo"

K. A. Timiriasev

En los límites de la Mecánica Celeste, la Teoría de las Oscilaciones y (en parte) de la Física Matemática, se desarrollaron al margen de métodos cualitativos, nuevos métodos de integración, en particular, los que se resuelven con series según las funciones especiales. Esto significó, el desarrollo del aparato del Análisis Matemático, completando de esta manera, el cuerpo de una teoría matemática relacionada con las ecuaciones diferenciales ordinarias y no como había estado sucediendo hasta ese momento, el desarrollo de los métodos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, a raíz del desarrollo de las propias teorías matemáticas. Esto es un índice, por supuesto, de la calidad del pensamiento matemático de finales del siglo pasado.
Por otra parte, en el estudio de ciertos sistemas físicos, resulta interesante, y casi siempre necesario, conocer propiedades (de las soluciones de la ecuación o sistema que modela tal sistema) tales como acotamiento, estabilidad, periodicidad, etc., sin tener que recurrir a la ardua y laboriosa tarea, que en muchos casos es impracticable, de encontrar expresiones analíticas para las soluciones. De este modo, surgió el problema de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de "su propia expresión", dando lugar a la **Teoría Cualitativa** de ecuaciones diferenciales, teoría que surge en la segunda mitad del siglo XIX y que fue abordada inicialmente por Jules Henri Poincaré (1854-1912) y Alexander Mijailovich Liapunov (1857-1918) aunque por motivos diferentes[18].
1892 es un **annus mirabalis** en la formalización de métodos generales para la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales y la mecánica no lineal. Liapunov y Poincaré[19], convirtieron la nolinealidad en su objeto de estudio y aportaron métodos y conceptos fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Más aún, cuando sus resultados son combinados con las nuevas técnicas matemáticas desarrolladas durante esta centuria[20]. Más estricto, algunos aspectos de estos trabajos han mostrado su conexión con la Teoría del Caos, el nuevo paradigma de las Matemáticas y la Física, por ejemplo, los resultados de Poincaré sobre movimientos cercanos a órbitas homoclínicas y heteroclínicas y el concepto de Liapunov de números característicos, hoy llamados exponentes de Liapunov. Después de una centuria de **totalitarismo**, se ha descubierto que las

Matemáticas pueden ser en ocasiones el estudio de estructuras y que la Física puede ser la Física Cuántica. Y el común denominador de esta liberalización es la nolinealidad.

Como se ha repetido tantas veces, para Galileo el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático y para explicar un fenómeno es necesario leer sus caracteres: puntos, líneas, ... Esto significa que más que atribuir el movimiento de los objetos "graves" -los que se dirigen al centro de la Tierra- a una **causa**, lo que se debe hacer es descubrir la **regla** que lo regula. Por ello Galileo, al enunciar su solución al problema de la caída libre, lo hace diciendo que cualquier cuerpo, grande o pequeño, ligero o pesado, al caer libremente lo hace con una aceleración constante.

Con Newton el problema se resuelve suponiendo la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocida la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, la trayectoria se puede calcular y, para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que dado un estado del sistema los estados futuros quedan unívocamente determinados: este es el sentido del determinismo que Laplace creyó la Mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, mostraba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería.

Y sin embargo, en la práctica, había ciertos problemas que rehusaban someterse a este esquema, ya sea porque la ecuación diferencial no tenía solución en cuadraturas y había que conformarse con soluciones aproximadas, o porque la gran cantidad de ecuaciones involucradas hacía imposible el conocimiento de la solución del sistema. Esto apuntaba a que posiblemente el conocimiento de la solución del sistema. Esto apuntaba a que posiblemente nuestro conocimiento y predicción de los fenómenos podían estar vedados en ciertas situaciones que no correspondieran a simplificaciones de la realidad, lo cual es la mayoría de los modelos estudiados.

Así ocurrió con la Astronomía y su intento de predecir con toda exactitud eclipses y movimientos de planetas (sirva como un buen ejemplo, el Problema de los N cuerpos, ver Capítulo 7). Afortunadamente Poincaré apuntó, como ya dijimos, la dirección en que muchos de estos problemas debían ser tratados: la Teoría Cualitativa, o más general, el estudio de los Sistemas Dinámicos, como se le ha venido a llamar en las últimas décadas (ver Capítulo 8).

Puntualizaremos que la historia toma, en ocasiones, el camino opuesto al indicado. Tal es el caso de la ecuación del péndulo libre, en la cual, el estudio cuantitativo precedió al cualitativo.

El primer estudio sistemático, utilizando técnicas cualitativas, para probar la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial, fue llevado a cabo por Poincaré, dando un método que lleva su nombre y que consiste en buscar puntos fijos para un cierto funcional, definido sobre un subconjunto de $\mathbf{R}^n$.

Posteriormente y usando técnicas del Análisis Funcional, se aborda el mismo problema, consistiendo la esencia del método, en determinar puntos fijos para un funcional definido en el espacio:

$$C=\{x: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n / \text{ x continua y T-periódica}\}.$$

Más recientemente, se trata el problema arriba aludido, con técnicas de **Teoría de Bifurcación**, la cual surge al analizar la dinámica de sistemas físicos regidos por ecuaciones no lineales, dependientes de un parámetro.

Por otra parte, el estudio de la existencia de soluciones se reduce, en ocasiones, a la búsqueda de los ceros de un determinado operador, definido sobre un apropiado espacio de Banach. Este método tiene sus orígenes en los trabajos de Liapunov sobre la existencia y comportamiento de los estados de equilibrio de un fluido en rotación, en los de Poincaré sobre Mecánica Celeste y en los de E. Schmidt[21] sobre el estudio de la existencia de ecuaciones integrales no lineales.

Hemos visto como las etapas anteriores del desarrollo de las EDO desembocan, hacia el último cuarto del siglo XIX, en el trabajo de Poincaré, con el desarrollo de la Teoría Cualitativa. Es a este eminente matemático, a quien le corresponde hacer una profunda reflexión del pasado, hacer algunos cambios radicales y proponer nuevas alternativas. En su comunicación al Congreso Internacional de 1908 Poincaré dijo: *"...En el pasado una ecuación sólo era considerada soluble cuando se puede expresar la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto es posible en una de cada cien. Lo que podemos siempre, o casi siempre, es resolver el problema cualitativo, de obtener la forma general de la curva representando la función desconocida..."*[22].

En el trabajo de Poincaré de 1881, encontramos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$x'=P(x,y),\ y'=Q(x,y);$$

en lugar de la tradicional ecuación diferencial $dy/dx=Q/P$; la totalidad de las curvas definidas por esta ecuación constituye el llamado "retrato de fases" de las soluciones, el método de Poincaré permite obtener las características generales de todas las curvas, las cuales él demostró que existen solamente dos tipos: las trayectorias **cerradas** o **ciclos límites** y las trayectorias que tienden a un ciclo límite, o a un punto crítico en el que $P=Q\equiv 0$.

En el acercamiento de Poincaré encontramos dos puntos de vista centrales en la forma de concebir la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Por un lado, el que una solución esté descrita por una curva y no sólo por una expresión algebraica, y por otro, que una ecuación diferencial es un proceso determinístico, no considera la solución sólo como una función de la variable independiente, sino como una función de las condiciones iniciales (Hadamard).

Estas ideas geométricas de Poincaré, así como los métodos numéricos de Runge y Kutta de principios de siglo, se comienzan a incorporar a los libros de texto después de la segunda mitad de este siglo, básicamente en los dedicados a los ingenieros. Asimismo, los métodos operacionales que se originan con Heaviside a fines del siglo pasado, los encontramos en muchos de los textos escritos en este siglo (en forma del operador D), como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales, más adelante en muchos libros es sustituido por el método de la transformada de Laplace, la cual es usada fundamentalmente para resolver ecuaciones diferenciales lineales, aunque se ha observado en estos años su utilización en diversas investigaciones puras.

Capítulo 6. **El mundo de las Oscilaciones.**

"La verdad no es sólo lo que se demuestra es a veces también aquello que simplifica".

Antoine de Saint-Euxpery

En los últimos 50 años hemos presenciado, un notable desarrollo de un campo de la Física-Matemática, designado con el nombre de Mecánica No Lineal. Este término, probablemente, no es del todo correcto, los cambios no han ocurrido en la propia Mecánica, sino mayormente, en las técnicas de resolución de sus problemas, sobre todo los tratados con ayuda de las ecuaciones diferenciales lineales, que ahora se sirven de ecuaciones diferenciales no lineales.

Esta no es una idea nueva en la Mecánica. En efecto, estos problemas no lineales son conocidos desde los estudios de Euler, Poinsot, Lagrange y otros geómetras de esa época, suficientes para ilustrar este período no lineal de más de un siglo. La principal dificultad de estos estudios, denominados clásicos, radica en la ausencia de un método general para tratar estos problemas, los cuales eran tratados sobre todo, por artificios especiales para obtener su solución.

A causa de esta dificultad la atención se concentró (como ya vimos) en las ecuaciones lineales, hasta encontrar algoritmos suficientemente simples y generales, que permitieran establecer los contactos con la física, a veces mediante algunas idealizaciones. Entre estos el más conocido es, posiblemente, el método de *oscilaciones pequeñas* el que, como su nombre lo indica, ofrece resultados satisfactorios, mientras las oscilaciones sean pequeñas, de donde resultan algunas simplificaciones bien conocidas, es suficiente mencionar, como ejemplo, la ecuación del péndulo. Sin embargo, los progresos en la física proporcionaron algunos problemas que no podían ser incluidos en la clase de pequeñas oscilaciones. Así, por ejemplo, el descubrimiento de las oscilaciones *autoentretenues* (al abordar el estudio de los arcos eléctricos y más tarde para lámparas con tres electrodos), oscilaciones periódicas cuya amplitud y período no dependen, dentro de ciertos límites, de las condiciones iniciales sino de los parámetros del sistema, no pudieron ser estudiadas por estos métodos lineales y por esta razón no pueden ser consideradas como pequeñas; estas dificultades en el estudio de tales problemas, bien utilizados desde el punto de vista práctico, duraron una veintena de años de este siglo. Dichas oscilaciones fueron llamadas por Alexander Alexandrovich Andronov (1901-1952) autooscilaciones, mientras que los sistemas en que son posibles tales procesos se denominan autooscilantes.

Hace dos decenios, Lorenz se esforzaba por entender los fenómenos atmosféricos, Henón estudiaba los movimientos de las estrellas y May el equilibrio de comunidades naturales. Mandelbrot trabajaba, desconocido para el mundo, con figuras monstruosas; Feigenbaum aún no llegaba a los Alamos y Farmer sólo era un joven más que crecía en Nuevo México. La Teoría de la Relatividad había dejado los templos sagrados de los académicos para convertirse en una frase más de todas las lenguas. La Teoría Cualitativa en general, y la Teoría de las Oscilaciones en particular es, posiblemente, el único lugar en que convergen tan disímiles disciplinas. Muchas de estas relaciones serán abordadas aquí, otras serán abordadas en trabajos posteriores. Ocurre en la práctica, que numerosos problemas pueden ser matematizados por medio de ecuaciones diferenciales periódicas (o bien autónomas) -pensar por ejemplo en oscilaciones de electrones, latidos de corazón, satélites artificiales, pulsaciones de objetos estelares,...- para los cuales se desea producir o impedir la aparición de fenómenos periódicos.

El estudio de la existencia de soluciones periódicas, incluso en el caso lineal, esta lejos de ser trivial y se encuentra íntimamente ligado a numerosos problemas interesantes de la Matemática y que sobrepasan con creces los límites de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Estas consideraciones justifican la gran cantidad de trabajos dedicados, por parte de muchos matemáticos, al estudio del problema antes planteado. Queremos apuntar aquí, la célebre frase de Poincaré: *"Lo que hace que estas soluciones periódicas sean tan apreciadas es que son, por así decirlo, la única brecha por donde podemos intentar penetrar en un lugar considerado hasta aquí inabordable"*. Como dijimos, el inicio de la Teoría Cualitativa en general y de la Teoría de Oscilaciones en particular, se sitúa a fines del siglo pasado, con los trabajos de Poincaré y Liapunov, aunque motivados ambos por diferentes razones.
Sobre todo en los trabajos de Poincaré, publicados en esta época (1882-1892) se sientan las bases de la denominada Mecánica No Lineal. En estos trabajos él estableció las nociones topológicas que caracterizan las curvas definidas por una ecuación diferencial y se ocupó de las soluciones dadas por series del pequeño parámetro, los primeros trabajos no tuvieron una aplicación práctica inmediata y tuvieron que esperar casi medio siglo para su aplicación, los segundos permitieron la solución de los antiguos problemas astronómicos por nuevas vías.
Como dijimos anteriormente, fue Andronov (**"Teoría de Oscilaciones"**, Moscú, 1929 escrita en colaboració n con A. A. Witt y E. E. Chaikin) quien sugirió que las oscilaciones autoentretenues se experimentan en términos de los ciclos límites (soluciones periódicas aisladas) de la teoría de Poincaré, marcando una nueva época en estos estudios. Más aún, en 1937, él y L.S. Pontriaguin (1908-1983) definen la noción de sistema rudo (estructuralmente estable), teniendo en cuenta que una de las características del sistema autooscilante, puede ser la presencia de la llamada reacción o retroalimentación que controla el consumo de energía de la fuente no periódica, se desprende directamente de todo lo anterior, que el modelo matemático de un sistema de este tipo, debe ser rudo y notoriamente no lineal.
Intuitivamente, un sistema dinámico es estructuralmente estable, si pequeñas `perturbaciones' del sistema, no cambian el estado de fases, más adelante, con el desarrollo de la teoría cualitativa, se ha mostrado que la estabilidad estructural es una noción importante en dicha teoría y por lo tanto, fue en los últimos años, el tema de muchas investigaciones, en particular de la escuela de S. Smale. Nosotros distinguimos implícitamente 4 etapas en el desarrollo de la Teoría de Oscilaciones, a saber, una primera etapa que comienza con los trabajos de Poincaré y termina en 1929; una segunda (desarrollada casi exclusivamente en la ex-URSS con los trabajos de Andronov y su escuela) que comprende el período de 1929-1940; la tercera etapa, a partir de 1945 y que concluye a mediados de los años 60, y marcada por el rápido desarrollo de la Teoría del Control Automático, de suerte que en esta etapa una serie de nuevos problemas aparecieron y la última etapa, desde la década de los años 70 hasta nuestros días y que transcurre muy influida por el desarrollo de los medios electrónicos de cómputo, con todas las ventajas que esto trae aparejado en la simulación y solución numérica de los problemas.
Sobre todo a partir de la última etapa, hay un rasgo que queremos destacar y es la ampliación de la `geografía' de las escuelas, que se dedican a esta teoría, sobre todo hacia América y Asia. Por otra parte, debemos distinguir en este desarrollo, dos grandes campos, por un lado el refinamiento de los métodos cualitativos `clásicos' a los que hemos hecho alusión y por el otro, el establecimiento de métodos cuantitativos cada vez más efectivos desde el punto de vista práctico.

Capítulo 7. **La Mecánica como teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.**

"Los métodos que yo analizo no requirieron construcciones ni consideraciones

geométricas o mecánicas, sino únicamente operaciones algebraicas sometidas a un proceso regular y uniforme. Todos los que amen el Análisis verán con placer que la mecánica se convierte en una nueva rama suya y me agradecerán que yo haya extendido su dominio de este modo"

Lagrange

Leonard Euler fue el primero en formular de modo analítico- en su obra **"Mechanica, sive motus scientia analiticao exposita"** (Petropoli, 1736)- la mecánica de Newton, en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Empleó la descomposición de fuerzas en los componentes normal y tangencial. Los componentes cartesianos de la fuerza y la respectiva representación de las ecuaciones del movimiento mecánico, fueron realizados por Collin Maclaurin (1742).

Muchos métodos de integración de ecuaciones diferenciales los elaboraron por primera vez, para las ecuaciones de la mecánica.

Euler y los hermanos Bernoulli (Joham y su hermano mayor Jakob) resolvieron en las postrimerías del siglo XVII, la ecuación diferencial designada con el nombre de Jakob Bernoulli:

$$y'+p(x)y=q(x)y^{2n} .$$

Joham Bernoulli utilizó a principios del siglo XVIII el procedimiento del factor integrante. Euler trabajaba especialmente con una teoría de solución coherente de la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden; en 1743 él dio a conocer el principio de solución $y=e^{kx}$, halló después formas de tratamiento para la ecuación no homogénea; el método de variación de las constantes, usual actualmente, fue publicado por Lagrange en 1777, aún cuando el mismo fue utilizado ocasionalmente por Euler, este trabajó también en la ecuación diferencial designada posteriormente con el nombre de Bessel.

Euler y Clairut estudiaron las condiciones de integrabilidad y "chocaron", con el método de integración de las diferenciales totales. D'Alembert y otros, avanzaron mucho en el tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

En el campo de la mecánica celeste también se crearon los primeros métodos para resolver ecuaciones no lineales, en particular, los métodos de aproximación: el "método de Euler", el del parámetro pequeño, el empleo de las series trigonométricas,...

Lagrange, Hamilton y C. Jacobi señalaron reiteradamente y con toda claridad que la mecánica clásica de los sistemas, desde el punto de vista matemático, no es otra cosa que la teoría de los sistemas de ecuaciones ordinarias de segundo orden:

$$m_i\, a''=\frac{\partial U}{\partial a};\;\; m_i\, b''=\frac{\partial U}{\partial b};\;\; m_i\, c''=\frac{\partial U}{\partial c};$$

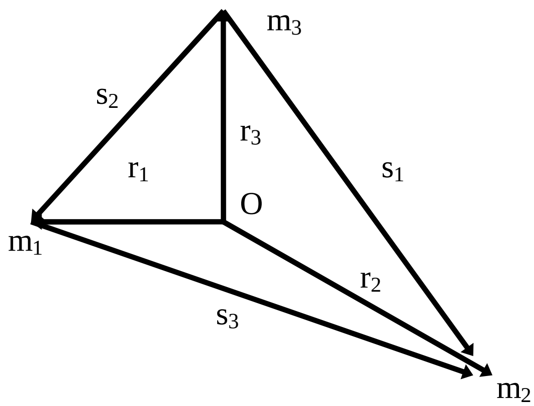
con $a=x_i$, $b=y_i$ y $c=z_i$, donde m es la masa del i-ésimo punto material con coordenadas (x_i ,y_i , z_i) y U(x,y,z), función de la fuerza. En 1835, W. Hamilton escribió que la integración de dichas ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema constituían el problema principal y, probablemente único, de la dinámica matemática (**"Second essay on a**

general method in dynamics", Phil. Trans. Roy. Soc., part 1, 1835, pp.95-144; reprint: **"W. R. Hamilton. Mathematical Papers"**, Cambridge, 1940, t.2, pp.162-212).
Es evidente la relación entre el determinismo de Laplace y los teoremas de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Más tarde los métodos de solución con ayuda de series fueron interpretados según la teoría de grupos. Uno de los campos principales de aplicación de los métodos de la mecánica analítica en el siglo XIX, fue el de los problemas de la mecánica celeste; muchos de estos problemas, ante todo, el de los tres cuerpos, no se lograban integrar. Esto estimuló, en primer término en las obras de Poincaré, la elaboración de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, que fue también uno de los más importantes puntos de partida, en la creación de la Topología Homotópica (1880-1886), expuestos principalmente en su **"Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste"**.
Las grandes contribuciones de Lagrange, Laplace, Jacobí, Poincaré, Sundman y G. D. Birkhoff no fueron suficientes para encontrar una solución general del Problema de los 3 cuerpos. Según la Enciclopedia Británica, se han publicado más de mil artículos o memorias sobre este bicentenario problema. En años recientes, el Problema de los 3 Cuerpos, ganó nuevo impulso debido a los problemas de los vuelos espaciales. Particularmente importantes en esta época son las contribuciones de V. Szebehely y C. Stromgren. Revistas especializadas continúan publicando trabajos sobre el Problema General de N Cuerpos.
Las primeras soluciones a este problema se deben a Euler (1765) y Lagrange (1873). Estas son las soluciones de equilibrio en el sistema sinódico (rotatorio) y corresponden a soluciones periódicas en el sistema sideral (fijo), o sea, soluciones circulares de los 3 cuerpos alrededor del centro de masa, donde la partícula de masa cero se mantiene alineada respecto de los primarios o forma una configuración equilátera respecto a ellos. Motivado en parte por la búsqueda de órbitas periódicas, Poincaré desarrolló el *Analisis Situs* y la Teoría de los Sistemas Dinámicos. Especialmente importante es su contribución referente a la existencia de órbitas que se obtienen por continuación analítica de órbitas Keplerianas (las de primera y segunda especie).
Presentaremos ahora, por su importancia metodológica, la definición del Problema de los 3 Cuerpos y la solución colineal dada por Euler a este.

Problema de los 3 cuerpos.

En un sistema de tres partículas, cada partícula está sujeta a una atracción gravitacional Newtoniana de las otras partículas y no está sujeta a otras fuerzas. Si el estado (posición y velocidad) inicial del sistema es dado, cómo se moverán las partículas?.

Aplicando la 2da Ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal a cada una de las masas m_1, m_2 y m_3, se tienen las ecuaciones del movimiento:



$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{d^2r_1}{dt^2} &= \frac{Gm_1m_2}{|r_2-r_1|^3}(r_2-r_1)+\frac{Gm_1m_3}{|r_3-r_1|^3}(r_3-r_1),\\
m_2\frac{d^2r_2}{dt^2} &= \frac{Gm_2m_3}{|r_3-r_2|^3}(r_3-r_2)+\frac{Gm_1m_2}{|r_2-r_1|^3}(r_1-r_2),\\
m_3\frac{d^2r_3}{dt^2} &= \frac{Gm_1m_3}{|r_3-r_1|^3}(r_1-r_3)+\frac{Gm_2m_3}{|r_3-r_2|^3}(r_2-r_3),
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Vamos a probar (siguiendo la idea de Euler) que existe una solución de las ecuaciones (7) donde las partículas se mantienen alineadas, a lo largo el tiempo. El origen es escogido como centro de masa $\Re=\dfrac{m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3}{m_1+m_2+m_3}$ del sistema. Por tanto:

$$m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3=O. \tag{8}$$

Haciendo $s_1=r_3-r_2$, $s_2=r_1-r_3$ y $s_3=r_2-r_1$ se tiene:

$$s_1+s_2+s_3=O. \tag{9}$$

Multiplicando s_i por $\pm m_j$, sumando y teniendo en cuenta (8) se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
mr_1 &= m_3s_2-m_2s_3,\\
mr_2 &= m_1s_3-m_3s_1,\\
mr_3 &= m_2s_1-m_1s_2,\\
m &= m_1+m_2+m_3
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Sustituyendo s_i (i=1,2,3) en (7) y absorviendo G en la unidad de masa tenemos:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}=\frac{m_2s_3}{|s_3|^3}-\frac{m_3s_2}{|s_2|^3}, \tag{11.1}$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{m_3 s_1}{|s_1|^3} - \frac{m_1 s_3}{|s_3|^3}, \qquad (11.2)$$

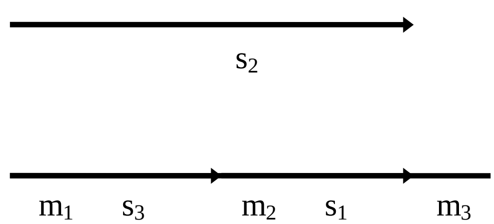
$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} = \frac{m_1 s_2}{|s_2|^3} - \frac{m_2 s_1}{|s_1|^3}, \qquad (11.3)$$

Restando (11.2)-(11.1), (11.1)-(11.3) y (11.3)-(11.2) se obtienen las ecuaciones en forma simétrica:

$$\left.\begin{aligned} s_1'' &= \frac{m s_1}{|s_1|^3} + m_1 G, \\ s_2'' &= \frac{m s_2}{|s_2|^3} + m_2 G, \\ s_3'' &= \frac{m s_3}{|s_3|^3} + m_3 G, \\ G &= \frac{s_1}{|s_1|^3} + \frac{s_2}{|s_2|^3} + \frac{s_3}{|s_3|^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Las posibilidades de alineamiento de los tres cuerpos son:

consideremos:



Para que esto ocurra, debemos encontrar $\lambda>0$ tal que:

$s_1=\lambda s_3$ y $s_2=-(1+\lambda)s_3$. (13)

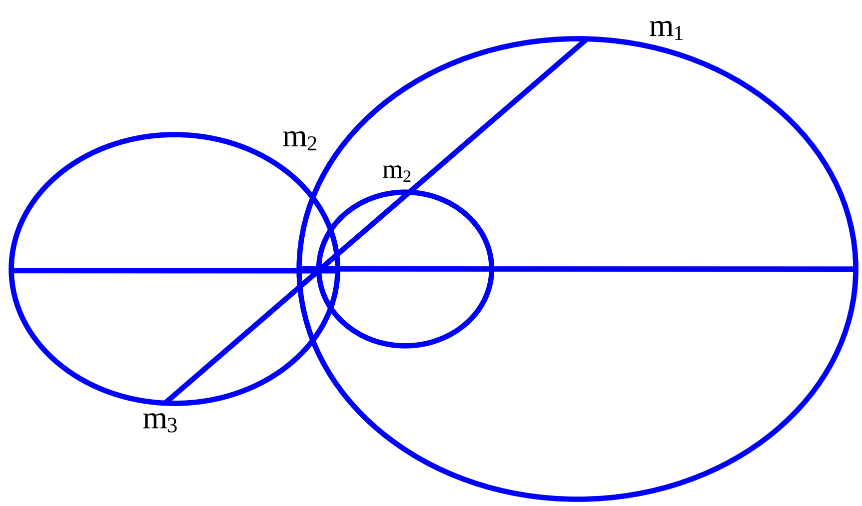
La segunda igualdad en (13) es obtenida de $s_1=\lambda s_3$ y (9). Una solución colineal de los tres cuerpos está garantizada en el momento que garantizemos la existencia de $\lambda>0$ que satisfaga (13) y s_1, s_2 y s_3 que satisfagan (12).
De la definición de G, de (12) y (13) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}(m_1 - m_3\lambda)s_3'' &= -(m_1 - m_3\lambda^{-2})\frac{ms_3}{|s_3|^3},\\ (m_2 - m_3(1+\lambda))s_3'' &= -(m_2 - m_3(1+\lambda)^{-2})\frac{ms_3}{|s_3|^3},\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

De la igualdad de vectores tenemos que:

$$p(\lambda) = (m_1 + m_2)\lambda^5 + (2m_2 + 3m_1)\lambda^4 + (3m_1 + m_2)\lambda^3 - (m_2 + 3m_3)\lambda^2 - (2m_2 + 3m_3)\lambda - (m_2 + m_3) = 0.$$

La Regla de los senos de Descartes garantiza que $p(\lambda)$ posea una raíz positiva λ_0 (dependiente de m_1, m_2 y m_3). Con este valor puede resolverse (14) y obtenerse s_3 y consecutivamente de (9), s_1, s_2. Por (10) se obtienen r_1, r_2 y r_3 en función del tiempo y esta es la solución colineal buscada[23] (ver figura siguiente):



Estas investigaciones del Problema de los 3 cuerpos han tenido incidencia en el desarrollo de la propia Teoría Cualitativa, baste citar como ejemplo el hecho que las estimaciones de Nekhoroshev de la magnitud de las perturbaciones que garanticen la existencia de toros invariantes han conducido a la noción de *Estabilidad Efectiva*: órbitas con datos iniciales en una vecindad del punto de equilibrio están confinadas en una vecindad un poco más grande durante un intervalo de tiempo muy largo. A pesar de sus insuficiencias, estas estimaciones han permitido dar resultados realistas en el sistema Tierra-Luna[24].

Capítulo 8. **Sistemas Dinámicos.**

"Los más importantes descubrimientos de las leyes, métodos y progresos de la Naturaleza han surgido siempre del examen de los objetos más pequeños"

J. B. Lamarck

Representemos a los puntos del plano euclidiano, mediante pares de números reales, **x**=(y,z), convirtiéndose en el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$. Un campo de vectores **F** en el plano define un sistema dinámico mediante la relación:

$$d\mathbf{x}/dt= \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ x\in R. \qquad (15)$$

Una solución de (1) es un punto **x**(t) que recorre determinada región, parametrizado por un intervalo de los números reales t (casi siempre considerado el tiempo), de tal forma que en todo instante de tiempo su velocidad es **F**(**x**(t)); es decir, se satisface para todo t:

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \qquad (16)$$

El problema clásico, tal y como lo hemos expresado es, dada una expresión en coordenadas del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})=(F_1(y,z),F_2(y,z))$ en términos de funciones conocidas, dar la expresión analítica de la solución en términos de dichas funciones conocidas.
Esto como sabemos, no es siempre posible.
Poincaré aportó una nueva idea para atacar el problema de la solución de las ecuaciones diferenciales. El comprendió que el problema como lo acabamos de plantear, no siempre es soluble, sin embargo, sí es posible dar una descripción geométrica-cualitativa del conjunto de todas las soluciones y de que en la mayoría de los problemas, esta descripción es más satisfactoria que una expresión en términos de funciones conocidas o en serie.
Es conocido que un sistema dinámico es utilizado para denotar todo proceso de evolución temporal, en el que el pasado nos brinda "datos" para determinar el futuro, así, pudiéramos pensar que esta noción se refiere a procesos perfectamente determinados, donde el caos y el desorden no pueden existir. Sin embargo, nada más lejos de la realidad. Un sistema dinámico consta de dos conceptos esenciales: el de estado y el de dinámica. Una manera práctica de ilustrar la evolución de un estado es (como ya sabemos) por medio del espacio de fases, en el cual las coordenadas corresponden a las variables que describen el sistema. Por supuesto, la dimensión de este espacio, es el número de variables que se consideran necesarias y suficientes para describir la evolución del sistema.
Utilicemos el movimiento del péndulo para ilustrar estas y otras ideas. El estado quedará perfectamente determinado por los valores que toman la posición (el ángulo con respecto a la vertical) y la velocidad angular. De los datos iniciales (velocidad y posición inicial), y mientras el péndulo oscila, se obtiene una órbita o trayectoria que puede trazarse en el espacio de fases.
El caso más sencillo es el del péndulo sin fricción o simple -una varilla o hilo inextensible, fijado en un punto y del cual pende un peso- el cual presenta una órbita cerrada, dado que el movimiento se repite una y otra vez, siguiendo el mismo camino.
Si hay fricción, lo que provocaría a la larga el cese del movimiento del péndulo, la trayectoria sería en este caso una espiral que se aproxima al origen. Bajo estas condiciones, el sistema permanece en dicho régimen, y por ello el origen se denomina en este caso Asintóticamente Estable. Utilizando otro lenguaje y por el hecho que las trayectorias cercanas al origen tienden a él, se dice que es un **atractor** (usado primeramente por S. Smale y no por R. Thom como muchos señalan).

En los espacios de fases de una y dos dimensiones, los únicos atractores son las posiciones de equilibrio Asintóticamente Estable y los ciclos límites. Si el fenómeno requiere para su modelación, de un espacio de fases de dimensión mayor, puede aparecer otro tipo de atractor: **el toro**. Esto ocurre en la situación en la cual el péndulo libre, tiene dos movimientos independientes: oscila y gira alrededor de su punto de apoyo. Es interesante analizar el caso cuando este mismo péndulo, está sometido a fricción.
Es claro además, que estando en presencia de un ciclo límite, el sistema físico descrito, por ejemplo el péndulo, recibe energía externa suficiente para compensar los rozamientos y el amortiguamiento consiguiente. Las órbitas cercanas a un ciclo límite estable, se acercan indefinidamente a este, lo que equivale, en el sistema físico, a que el movimiento del péndulo se acerca a un cierto régimen de "trabajo".
Hemos hecho alusión al oscilador armónico simple, pues este ha jugado un importante papel en la Teoría de las Oscilaciones y puede compararse al que juega el ciclo límite en las Oscilaciones No Lineales y el de solitón en los sistemas ondulatorios no lineales. Además, es claro que fue el punto de partida, en muchos aspectos, de la Teoría Cualitativa en general y de la Teoría de las Oscilaciones, en particular.
La observación simple, muestra que algunas posiciones de equilibrio, de sistemas sometidos a perturbaciones pequeñas son estables; pero otras posibilidades de posición de equilibrio son, en principio, imposibles de realizar desde el punto de vista práctico. Así, en el ejemplo del péndulo, se tienen dos posiciones de equilibrio, si un péndulo ocupa su posición inferior, una perturbación puede provocar, solamente, su oscilación alrededor del punto de equilibrio.
Si después de aumentar la perturbación se logra, en algún momento, detener el péndulo en la posición superior, entonces hasta un pequeño golpe provoca su caída. En este ejemplo, el estudio sobre la estabilidad, o mejor aún, sobre las oscilaciones, se resuelve de manera elemental pero, y siempre lo hay, la realidad no tiene por qué acomodarse a nuestros intereses: si en el péndulo que además de rotar, oscila, se le adapta un resorte que lo una a motor que trasmite impulsos, el movimiento que se engendra produce en el espacio de fases -ahora de tres dimensiones- una curva localizada en una región finita del espacio, pero que no la invade completamente. Esto es, sería una curva de longitud infinita, encerrada en una región finita y que nunca se corta a sí misma. Seguir la trayectoria produce la sensación de estar contemplando un movimiento aleatorio, un movimiento que parece no seguir ningún patrón y que, claramente, difiere de las formas habituales. Por esto y por quedar confinado a una región finita del espacio, se dice que la órbita da lugar a un **atractor extraño**[25].
Los atractores extraños se generan como producto de la convivencia de dos situaciones, aparentemente incompatibles: órbitas muy cercanas entre sí, se separan rápidamente o, lo que es lo mismo, el comportamiento del sistema depende, con extrema fineza, de las condiciones iniciales. Por otra parte, como el sistema es amortiguado, un conjunto de condiciones iniciales, que ocupan un cierto volumen del espacio de fases, se contrae. Contracción y Separación, lógicas antagónicas y sin embargo, coexistentes. Como el conjunto atractor tiene un cierto tamaño, las órbitas no se pueden separar más allá de cierta distancia y deben, por lo tanto, doblarse una y otra vez y sin cruzarse, ir formando láminas, que se entrelazan de la manera más complicada que se pueda imaginar. Característica esencial que ya fue destacada: ante observaciones cada vez más detalladas, siempre se obtiene la complejidad del conjunto, casi llenan una región y sin embargo, siempre hay huecos, revelando así su estructura **fractal**. Esto será tratado con más amplitud en el Capítulo 16.
Pasaremos ahora a detallar estos aspectos, tomando como base, el péndulo matemático libre (en resumidas cuentas, una ecuación de segundo orden, hablando en “términos” matemáticos), el

estudio del péndulo constituye, desde hace un buen número de años, un capítulo clásico de todo libro de texto de Mecánica Analítica. Mgr. Lemaitre, lo "adelantó" en sus conferencias en la Universidad de Louvain (Bélgica). Sus notas de conferencia son tituladas: **"Lecciones de Mecánica. El Péndulo"**, y podemos leer en su introducción: *"Una actitud intermedia que nosotros seguiremos, consiste en retener de la historia de la ciencia, la preeminencia dada a un problema particular, el movimiento del péndulo, y por tanto presentar los conceptos fundamentales en el marco de este problema particular...Este problema del péndulo es uno de aquellos donde la ciencia de la mecánica fue surtida de una de sus mayores contribuciones a la edificación de las matemáticas modernas, porque él puede ser ampliamente identificado, con el estudio de las funciones elípticas alrededor de las cuales, fue construida la teoría de funciones de una variable compleja..."*. Mucho más reciente, en la **"Encyclopediae Universalis"** francesa, en un artículo titulado **"Systemes dynamiques differentiables"**, A. Chenchiner usa de nuevo el péndulo como un tema central, para iniciar al lector a la teoría moderna de sistemas dinámicos: el primer capítulo describe en detalle ejemplos conectados al péndulo e introduce más y más comportamientos asintóticos complejos cuyos análisis van a requerir los conceptos más abstractos de la última parte. En el capítulo nueve de este artículo, encontramos: el péndulo sin fricción; un sistema Hamiltoniano, el péndulo con fricción lineal: un sistema estructuralmente estable, perturbaciones periódicas de un péndulo friccionado y difeomorfismo que preservan el área en el plano.

Capítulo 9. **El Péndulo Simple.**

“En cuestiones científicas, la autoridad de un millar no es mérito frente al humilde razonamiento de un solo individuo”

G. Galilei

A pesar de sus precursores, Galileo es el primer científico asociado al estudio experimental y teórico del péndulo. Es conocida la historia -verdadera o falsa- de su descubrimiento en 1583 o 1584, del isocronismo de las oscilaciones del péndulo, observando una lámpara suspendida en la catedral de Pisa.

El primer documento escrito de Galileo sobre el isocronismo del péndulo es una carta de 1602 a Guidobaldo del Monte: *"Ud debe perdonar mi insistencia en mi deseo de convencerlo de la verdad de la proposición que los movimientos en el mismo cuadrante de un círculo son hechos a igual tiempo"*. En su famoso **"Diálogo"**, él escribió: *"El mismo péndulo hace sus oscilaciones con la misma frecuencia, o con poca diferencia, casi imperceptible, cuando estas son hechas por una circunferencia mayor o sobre una muy pequeña"*. Esto es, por supuesto, un planteamiento erróneo o, en un camino positivo, podemos considerar que es una manifestación muy primitiva de lo que es, posiblemente, la primera herramienta básica en la ciencia nolineal: la linealización. Conocemos que el isocronismo no es una propiedad de las soluciones de la ecuación diferencial del péndulo con longitud l:

$$u''+(g/l)\text{sen } u=0, \qquad (17)$$

pero de su forma linealizada sí:

$$u''+(g/l)u=0. \qquad (18)$$

La expresión precisa $T=2(g/l)^{1/2}$ para el período de las soluciones de (18), será lo primero dado por Newton en su **"Principia"**, en 1687.
Note que algunas aplicaciones del péndulo fueron ya presentidas por Galileo, en particular a la medición de un **"Pulsilogium"** para chequear el pulso de un paciente, a la navegación en la determinación de la longitud y a la horología con la regulación de los relojes mecánicos.
Una prueba de la "independencia" del desarrollo matemático con respecto a las exigencias de la práctica social, está en el hecho de que este problema del isocronismo, todavía es objeto de estudio por parte de diversos matemáticos en el mundo.
Si Guidobaldo del Monte expresó en 1602 un buen grado de escepticismo al llamado Isocronismo de Galileo, fue un astrónomo belga, Wendelin, quien primero mostró experimentalmente que el período de las oscilaciones crece con las amplitudes de las oscilaciones y da tablas justas en su **"Luminacarni Eclipses Lunares"** de 1644. Este hecho fue entonces deducido matemáticamente por Huggens en su famoso **"Horologium"** de 1673, y el mismo Huggens también observó los fenómenos nolineales de "Sincronización" en dos péndulos fijados sobre una misma cuerda delgada. Doscientos Quince años después, Van der Pool y Appleton descubrieron un fenómeno análogo en circuitos eléctricos y la teoría iniciada por Galileo.
La relación matemática entre el período T y la amplitud A es expresada por Euler en 1736 en su **"Mechanica"** por la serie:

$$T = 2\pi\,(l/g)^{1/2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\right)^{2}\operatorname{sen}^{2k}\left(\frac{A}{2}\right)\right], \qquad (19)$$

y Poisson en su **"Traite de Mecanique"** de 1811, analizó la ecuación del período, usando un método de desarrollo en "series de potencia de un parámetro pequeño". La relación (19) fue formulada por Legendre en 1825 (**"Traite des fonctions elliptiques"**) y por Jacobí en 1829 (**"Fundamenta nova theoriae functionem ellipticarum"**) para integrales y funciones elípticas, llamando:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\operatorname{sen}^{-1}(1,k),$$

donde:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(1-k^2\operatorname{sen}^2 x\right)^{1/2}},$$

es la integral elíptica completa de primer tipo, $\operatorname{sen}^{-1}x$ es la función inversa amplitud-seno y $k^2=\operatorname{sen}^2(A/2)$. La importancia de las funciones elípticas, trasciende en mucho, lo aquí apuntado. Baste citar algunos de los matemáticos más destacados que han trabajado en esta línea: John Landen, Legendre, Lagrange, Gauss, Schumacher, Schering, ...
Por otra parte, en el creciente desenvolvimiento de la Física de sistemas no lineales, se torna cada vez más presente entre los físicos la utilización de funciones e integrales elípticas[26]. Sin embargo,

no es mucho lo que se conoce sobre el surgimiento y desarrollo de este tema, a partir del surgimiento del CALCULUS y las EDO. Jacobí caracteriza el 23/12/1751 como la fecha de nacimiento de las funciones elípticas. Fue ese el día que Euler inició la revisión de la colección de trabajos presentada por el matemático autodidacta italiano Giulio Carlo, Conde Fagnano y Marquéz de Toschi (1682-1766), lo cual era un prerequisito para su entrada a la Academia de Berlín. Dentro de los numerosos artículos de Fagnano, el titulado **"Método para Medir la Lemniscata"**, publicado en 1718, y que toma como base los hallazgos de Jackob Bernoulli de 1694, despertó el entusiasmo de Euler. El vislumbró allí el nacimiento de la teoría de las funciones elípticas que vendría, según él, a extender considerablemente los límites del CALCULUS.
De manera sucinta, sea F(x,u) una función racional de u, y x, siendo u^2 una función polinomial cúbica o cuártica de x sin factor repetido, o sea, $u^2=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$. En este caso $\int F(x,u)dx$ es denominada integral elíptica. Un ejemplo conocido de esta clase de integrales es dado por:

$$a\int_0^{\sigma} dx(1-k^2x^2)\left[\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)\right]^{-1/2},$$

la cual es igual a la longitud del arco de una elipse de excentricidad k y eje mayor 2a. Desde un punto de vista histórico, todo parece indicar que esta es la razón por la cual, estas integrales reciben el nombre de elípticas[27]. Legendre, que por más de 40 años estudió estas integrales, introdujo las tres formas canónicas para las mismas. Dentro de estas tenemos la ya mencionada K(k).

Capítulo 10. **Análisis del Plano de Fases (Teoría Cualitativa).**

"El hecho esencial es que todos los cuadros que la ciencia obtiene de la Naturaleza y que por sí sola parece capaz de conciliar con los hechos provenientes de observación son cuadros matemáticos"

Sir James Jeans

La teoría cuantitativa del péndulo libre fue completada por la expresión de las soluciones de la ecuación (17) en términos de funciones elípticas. Debemos a Poincaré en 1881 el primer estudio *cualitativo* de las soluciones de ecuaciones diferenciales nolineales, particularmente, en el caso de la ecuación (17), la descripción topológica de las órbitas (u(t),u'(t)) de las soluciones de (17), en el plano de fases (u,u'). El retrato correspondiente, con el equilibrio estable (2kπ,0), centros, el equilibrio inestable ((2k+1)π,0), puntos de sillas, las soluciones periódicas no constantes (órbitas cerradas), las soluciones rotatorias y las separatrices conectadas con el equilibrio inestable (órbitas heteroclínicas u órbitas homoclínicas, si identificamos, módulo 2π, el equilibrio inestable, i.e. si trabajamos sobre la variedad natural cilíndrica de fases). Como tantas veces, la historia tomó el camino opuesto con respecto a la metodología de Poincaré en el "ataque" de las ecuaciones diferenciales nolineales: el estudio cuantitativo del péndulo libre había precedido al cualitativo.
El acercamiento cualitativo es particularmente útil a la discusión de la ecuación del péndulo libre amortiguado:

$$u'' + cu' + (g/l) \operatorname{sen} u = 0,$$

cuyas soluciones no pueden ser expresadas en términos de funciones conocidas, el cual es también el caso para la ecuación:

$$u'' + cu' + a \operatorname{sen} u = b,$$

la que aparece en el estudio de motores sincrónicos (Edgerton, Fourmarier, Tricomi).
En el caso de una ecuación diferencial de la forma:

$$x'' + Ax' + Bx = F, \qquad (20)$$

donde A, B y F no son necesariamente constante, el retrato de fases de esta, son curvas en el plano xx'. Este puede ser obtenido tanto, cuando la ecuación (20) sea lineal o no lineal; con el plano de fases obtenidas, el próximo paso es, normalmente el análisis del comportamiento del sistema físico, donde la palabra "análisis" significará un número de diferentes hechos dependientes de la circunstancias. Algunos de los aspectos del análisis puede incluir uno o más de los siguientes pasos:

1. Cálculo de la respuesta exacta transitoria, para un conjunto de condiciones iniciales.

2. Predicción del tipo de respuesta transitoria (oscilatoria o monótona) para un cierto rango de condiciones iniciales.

3. Estimado del "exceso" en la respuesta a la entrada de un paso de magnitud dada.

4. Predicción de la estabilidad del sistema.

5. Predicción de la existencia y la amplitud de ciclos límites (oscilación no lineal de amplitud constante).

6. Predicción de la existencia de varios modos de operación.

7. Estudio del efecto de un tipo dado de no linealidad sobre el comportamiento del sistema, comparado con el sistema lineal, con un sistema no lineal, con un tipo diferente de nolinealidad, o con un sistema, el cual es no lineal en el mismo sentido, pero con un grado diferente.

8. Ensayar la respuesta a preguntas como:

¿Esta no linealidad mejora el comportamiento?.
¿Qué cambios se pueden hacer para suprimir el ciclo límite?.
¿Cómo podemos ajustar este sistema y hacer que satisfaga a las especificaciones?

9. ¿La nolinealidad es continua o discontinua?.

En el primer caso, el plano de fases puede constar de dos, tres o más hojas, y en el segundo, las líneas de conmutación originan una quiebra en las trayectorias de fases.

10. Análisis de la influencia de los parámetros y de la existencia de bifurcación en las soluciones periódicas de (20) en casos de existir estas.

Por tanto, es realmente claro, que el retrato de fases debe ser obtenido como condición si no indispensable, por lo menos muy importante, en el análisis del sistema.

Capítulo 11. **El Análisis de la Estabilidad (Segundo Método de Liapunov).**

"Los grandes matemáticos han actuado sobre el principio de "Divinez avant de démoontrer" y no cabe duda que casi todos,los descubrimientos importantes se hacen de esta forma"

Edward Kasner

El trabajo fundamental de A. M. Liapunov sobre la estabilidad del movimiento, del que ya hemos hablado (publicado primeramente en ruso en 1892 y en una traducción francesa en 1907[28]), originalmente recibió sólo poca atención y por un largo tiempo fue prácticamente olvidado. Justamente 25 años después, estas investigaciones fueron retomadas por algunos matemáticos soviéticos, al notar que el método de Liapunov era aplicable a problemas concretos en física e ingeniería.
Por tanto, cada vez fue mayor, el número de matemáticos que se "dedicaron" a la teoría de la Estabilidad fundada por Liapunov. Los conceptos "estabilidad" e "inestabilidad" se originaron en Mecánica, como caracterizaciones del equilibrio de un cuerpo rígido. El equilibrio se dice estable si el cuerpo permanece en su posición original después de perturbaciones suficientemente pequeñas. Similarmente, un movimiento es llamado estable si es insensible a pequeñas perturbaciones y los cambios en los valores iniciales y los parámetros. Aquí, en el caso más simple, movimiento significa la variación de un punto con respecto al tiempo, de forma más general, entendemos por movimiento, las cantidades que determinan el estado de un sistema físico como una función del tiempo (tales como las coordenadas de Lagrange).
Liapunov explica el propósito que lo animaba en la Introducción: *"El problema que yo me he propuesto al comenzar el presente estudio, puede ser formulado como sigue: indicar los casos donde la primera aproximación resuelve realmente el problema de la estabilidad y dar métodos los cuales permitan resolver, al menos en algunos casos, cuando la primera aproximación no es suficiente... Todos los procedimientos pueden ser divididos en dos categorías. En la primera de ellas, incluimos aquellas que se reducen al estudio inmediato del movimiento perturbado, y el cual, consecuentemente depende de la obtención de la solución general o particular de la ecuación considerada... El conjunto de todos estos métodos de estudio serán llamados el primer método. En la otra categoría, incluiremos todos los tipos de procedimientos que son independientes de la búsqueda de las soluciones de la ecuación diferencial del movimiento perturbado. Este es el caso, por ejemplo, para el bien conocido método de estudiar la estabilidad del equilibrio en el caso de la existencia de un potencial... El conjunto de todos los procedimientos en esta categoría se llamarán el segundo método"*. Todo el mundo conoce hoy lo que significan estos métodos en la teoría de la estabilidad, pero Liapunov introdujo también en su memoria

muchos e importantes conceptos y resultados en la teoría de ecuaciones lineales y no lineales, por ejemplo, la definición precisa de estabilidad y estabilidad condicional, los conceptos de números característicos o exponentes de Liapunov de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, los conceptos relacionados de sistemas normales y reducibles, el concepto de funciones de Liapunov, etc.
En este trabajo Liapunov dejo bien explícito que su segundo método estaba inspirado por la demostración de Lejeune Dirichlet del teorema de Lagrange sobre el estudio del equilibrio, dada la importancia de este trabajo de Liapunov, queremos presentar aquí el índice general de esta obra:

El también llamado "Método Directo", no sólo se usa actualmente para probar teoremas de estabilidad y de mecánica teórica. Actualmente, este método es aplicado a problemas prácticos de la mecánica y de las oscilaciones eléctricas, particularmente, en el control ingenieril. La teoría del método directo, ha recibido un considerable avance en los últimos años y se aproxima a un cierto estado de completamiento. Han aparecido algunos trabajos en las últimas décadas, relacionados con el estudio del comportamiento de las trayectorias de ecuaciones diferenciales no lineales, que representan generalizaciones paulatinas de la ecuación del péndulo.
En estos trabajos, se intentan hacer planteamientos sobre la estabilidad del equilibrio, sin usar la forma explícita del movimiento perturbado, estos planteamientos se hacen usando (en adición a la ecuación diferencial o sistema) determinada función o funciones definidas en el Plano de Fases. Estas funciones usualmente se denominan Funciones de Liapunov. En general el signo de la función de Liapunov y el de su derivada son considerados y a veces se incluyen ciertas relaciones con otras funciones que cumplen determinadas propiedades.
El método admite una interpretación geométrica muy sencilla, la cual es muy probable sea debida a G. N. Chetaev (1902-1959) y la que es particularmente útil en las aplicaciones.

Capítulo 12. **Métodos Cualitativos.**

"Es imposible atrapar la Física Moderna en la predicción de algo con perfecto determinismo porque desde el principio trata con probabilidades"

Sir Arthur Stanley Eddington

Aquí no nos referiremos a las investigaciones del Plano de Fases vinculadas a la Teoría de la Estabilidad, a excepción de las necesarias para la correcta comprensión de la exposición. Para mayor claridad, hemos dividido la presentación, en diversos epígrafes.

Naturalmente, los apuntes presentados no pasan de ser un inventario provisional y abierto por diversos motivos. Sin embargo, no dejan de ser, creo, un tanto elocuente. Es un tema que, desde luego, no nos dirá gran cosa de las múltiples direcciones de la Teoría Cualitativa, pero si reviste cierta importancia para la historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por su valor de síntoma. Por otro lado, la consideración de esta suerte de indicios indirectos y sintomáticos tiene hoy el interés añadido de servir como una aplicación o puesta a prueba de una perspectiva historiográfica, la llamada **teoría de la recepción**, recientemente invocada para renovar la Historia de las Matemáticas[29]. En suma, el desarrollo de la teoría de ciclos límites (aún incompleta) pueden ilustrar las posibilidades y limitaciones de la **teoría de la recepción**, al tiempo que nos da una información (al menos indirecta y complementaria) sobre la suerte de la Teoría Cualitativa en los tiempos modernos.

2.1. Ciclos Límites.

Es reconocido que uno de los descubrimientos fundamentales de Poincaré, es el establecimiento de la existencia de **ciclos límites**, o sea de trayectorias cerradas aisladas en el Plano de Fases, estos ciclos límites pueden ser clasificados en Estables (E), Inestables (I) y Semiestables (S). Estos ciclos límites, son estructuras **críticas** a las cuales están vinculadas casi todas las nociones que indicaremos.

Estas nociones serán más completas si las consideramos estructuras **topológicas**. Así tenemos que en el interior de un ciclo límite E existe un punto singular I, análogamente, en el interior de un ciclo límite I, existe un punto singular E. De esta forma, la \`historia' de un fenómeno oscilatorio puede brindarse completa. En el caso de un ciclo límite E, la trayectoria se \`desarrolla' a partir del punto singular I y se \`enrolla' sobre el ciclo límite por el interior. Para los ciclos límites I, tenemos el caso contrario. Estas observaciones son válidas para las trayectorias exteriores.

Es común designar el primer caso por el símbolo IE y el segundo por EI, la primera letra se refiere a la estabilidad del punto singular y la segunda a la estabilidad del ciclo límite.

La mayor parte de los fenómenos que nos encontramos en las aplicaciones son caracterizados por la configuración IE, baste como ejemplo la ecuación de Van der Pol:

$$x''+\mu(x^2-1)x'+x=0,$$

que se encuentra en la teoría de las oscilaciones **autoentretenues**.

Otras configuraciones simples que nos podemos encontrar, son las así llamadas **policíclicas** que designaremos por el símbolo IEIE... o bien EIEI... la primera letra se refiere a la estabilidad

del punto singular, centro de la configuración, y las otras a la estabilidad de los ciclos sucesivos hasta el exterior. Una configuración del género EIE será llamada una **excitación dura**.
Estas generalizaciones son debidas a Poincaré, quien estudió también, cuando existen varios puntos singulares en el interior de un ciclo. En este caso, cada punto es caracterizado por su índice. Llamaremos índice de la curva asociada al campo de vectores, al número entero de veces (generalmente 1) que el vector regresa con relación a su posición; este número **j** es positivo si el vector regresa en el mismo sentido que el punto C_0 de contacto del campo con la curva, en caso contrario, **j** es tomado con signo menos.
Exactamente él demostró el siguiente resultado:

Para que una curva cerrada, conteniendo un número de singularidades con índices +1 y -1, sea un ciclo debe suceder que

$$\sum_{i=1}^{n} j = +1.$$

El mostró que los nodos, los focos y los centros tienen el número j=+1, mientras que el punto de silla posee j=-1.
La determinación directa de un ciclo límite a partir de una Ecuación Diferencial es una tarea muy difícil, la dificultad radica en que para determinar la existencia de un ciclo, el conocimiento de la Ecuación Diferencial (o sea de sus parámetros) no es suficiente, es necesario conocer la **naturaleza de la solución** (generalmente desconocida) de suerte que estamos en un círculo vicioso.
Sin embargo, algunas tentativas han tenido éxito, así el criterio de H. Bendixon (1861-1935) (**"Sur les courbes définies par des équations différentielles"**, Acta Math., T.24, 1-88, 1900) permite decidir sobre la ausencia de ciclos límites. Existe también un criterio **positivo**, el debido a Poincaré y Bendixon. Este criterio, permite usar una analogía hidrodinámica que identifica los elementos singulares (puntos singulares, ciclos) como flujos positivos y los elementos estables (puntos singulares, ciclos) como flujos negativos. Esta analogía es muy útil, en las cuestiones del análisis de la estructura topológica del plano de fases.
Para sistemas dinámicos sobre el plano o sobre la esfera, estos resultados han sido generalizados por A. Denjoy (1884-1974) para el caso del toro y por L. Schwartz (n.1915) para cualquier variedad de dimensión 2.
En el caso de la ecuación:

$$u''+h(u)u'+g(u)=0,$$

que cuando g(u)=u es llamada **Ecuación de Liénard**, se puede demostrar, bajo ciertas condiciones, la existencia de una única solución periódica. Problemas de este tipo se remontan a B. Van der Pol (1889-1959) (**"On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom"**, Philos. Mag. (6)43 (1922), 700-719) y Liénard (**"Etude des oscillations entretenues"**, Revue Générale de l'Electricite 23 (1928), 901-912, 946-954), resultados análogos, concernientes a la ecuación:

$$u''+h(u,u')u'+g(u)=e(t),$$

fueron dados por Levinson, Langenhop y Opial más adelante y aún hoy son motivo de continuos refinamientos[30].
Estas dificultades en el estudio directo de los ciclos límites, se eliminan cuando se utiliza la primera aproximación (métodos asintóticos).

2.2. Teoría de la Bifurcación.

En los trabajos concernientes a los problemas cosmogónicos, (Acta Math., t.7, 18854; **"Figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation"**, París 1905) Poincaré estudió la influencia de un parámetro l de la Ecuación Diferencial sobre la naturaleza de las soluciones. El introdujo la definición siguiente (es claro que la solución depende de este parámetro):

1. Si para pequeñas variaciones del parámetro, digamos $l=l_0$, la solución de la ecuación diferencial, varía solamente de forma cuantitativa, este valor l_0 se denomina `valor ordinario' del parámetro l.

2. Si, por el contrario, para un cierto valor $l=l_0$, esta variación entraña un cambio cualitativo de la solución, este valor l_0 se llamará un `valor crítico' o de `bifurcación'.

En este artículo de 1885, Poincaré estudia, entre otras, la cuestión de cuáles son las formas posibles de equilibrio de una masa de fluido homogéneo (sujeto a la gravedad) cuando gira alrededor de un eje fijo con un momento angular constante w, llegando a la conclusión de que para ciertos valores w_0 y w_1 existe una `bifurcación' en las formas de equilibrio. Años más tarde (1892-1899) el mismo Poincaré en su **"Les méthodes..."** plantea un problema de bifurcación para estudiar, como ya dijimos, un sistema dinámico dependiente de un parámetro.
Cabe destacar también a Liapunov, el cual desarrolló en la primera década del presente siglo, una serie de trabajos, publicados en 1908, relativos al fenómeno de la bifurcación y que siguen teniendo mucha influencia aún hoy día.
Con posterioridad, son de gran interés los estudios de V. Karman (1910), L. Landau (1944) y de E. Hopf quien en 1942 hizo un trabajo completo sobre la bifurcación de soluciones periódicas a partir de una posición de equilibrio. Por último recordemos a Crandall y Rabinowitz cuyos trabajos en los últimos años, aportan una serie de resultados de gran importancia en los problemas de bifurcación. De la propia definición de valor de bifurcación, y siguiendo a Andronov y Pontriaguin, se deduce que para $l=l_0$ el sistema es no rudo.
Para simplificar, consideremos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden, dependiente de un parámetro l:

$$x'=P(x,y,l),\ y'=Q(x,y,l);$$

donde P y Q son funciones analíticas de sus argumentos. Como el cuadro cualitativo de las trayectorias, en el plano de fases, se determina por elementos singulares, los valores de bifurcación del parámetro l, provocan la aparición de elementos singulares que tienen naturaleza no ruda. Cuando con el valor de bifurcación, aparece en el plano de fases, sólo un elemento singular, se suele decir, que el sistema anterior posee **primer grado de dureza**. En semejantes sistemas, los elementos no rudos pueden ser de uno de los siguientes tipos:

1. Estado complicado de equilibrio, que se obtiene durante la unión de dos puntos singulares sencillos (por ejemplo, nodo y ensilladura).

2. Foco o centro degenerado.

3. Ciclo límite doble, por ejemplo uno estable y el otro inestable.

4. Separatriz que va de una ensilladura a otra, o bien a ella misma.

Poincaré menciona que las posiciones de equilibrio aparecen (o desaparecen) por pares "en la forma de las raíces de ecuaciones algebraicas". Estas ideas fueron generalizadas por Andronov en el caso de la bifurcación del ciclo a partir de un punto singular.
Supongamos que tenemos la configuración topológica IE y que, gracias a un parámetro variable apropiado, podemos modificar la configuración de manera que el ciclo estable E disminuya indefinidamente hasta que se confunda en el límite $l=l_0$ sobre el punto singular. Andronov afirma que

$$\mathrm{IE} \leftrightarrow (\mathrm{IE})_0 \leftrightarrow \mathrm{E}, \text{ igualmente } \mathrm{EI} \leftrightarrow (\mathrm{EI})_0 \leftrightarrow \mathrm{I}.$$

Llamaremos a este género de bifurcación, **bifurcación de primera especie**. Significa que si el ciclo límite disminuye indefinidamente, como resultado de la variación del parámetro, cuando el ciclo se confunda con el punto singular (lo que es indicado entre paréntesis) los dos desaparecen y dan nacimiento a un punto singular de estabilidad opuesta al que existía anteriormente.
Existe también la **bifurcación de segunda especie** que definiremos en el sentido de Poincaré

$$\mathrm{IEI} \leftrightarrow (\mathrm{EI}) \leftrightarrow \mathrm{I}, \text{ igualmente } \mathrm{EIE} \leftrightarrow (\mathrm{EI})\mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{E},$$

en esta bifurcación dos soluciones periódicas (una estable y la otra inestable) se confunden en el límite $l=l_0$ para desaparecer después. Las flechas dobles en estas relaciones, indican que estos fenómenos de bifurcación son reversibles cuando se cambia el sentido de variación del parámetro l.
Conociendo la estructura de partición del espacio de fases, para algún punto del plano de los parámetros (que puede ser una recta, un plano propiamente dicho o un espacio de determinada dimensión, en dependencia del número de parámetros que aparezcan) se puede, desplazándonos continuamente por este plano, hallar la estructura del espacio de fases para cualquier otro punto del plano de dichos parámetros. Con ello, es necesario conocer sólo el carácter de la bifurcación que tiene lugar en el espacio de fases, al pasar por una u otra frontera de bifurcación. En esto consiste el **valor heurístico** de la teoría de bifurcación.
Ahora bien, la Teoría de la Bifurcación en sistemas dinámicos (y semi-dinámicos) constituye uno de los campos más trabajados en los últimos tiempos en el área de las E.D. En

ella se pueden distinguir dos tendencias: una de carácter formal que se basa en métodos del Análisis Funcional, la otra de tipo dinámico-geométrico, con énfasis en las propiedades cualitativas (como la estabilidad) de los sistemas considerados. Con respecto a la segunda, podemos decir que sólo ahora es que se están dando pasos en la creación de una teoría unificadora, que permita desarrollar, de manera sistemática, los métodos de análisis apropiados.
En particular, han faltado criterios generales para la existencia de una bifurcación de un punto de equilibrio (o de un conjunto invariante) en dependencia de un parámetro.
La metodología requerida es precisamente la teoría general de los sistemas dinámicos y sus extensiones en espacios de dimensión tanto finita como infinita. Un primer paso en la dirección de una tal teoría unificadora fue dada en 1976[31], cuando los autores probaron de nuevo y aplicaron al problema de existencia de bifurcaciones, "un principio de persistencia" (o de "robustez") para la estabilidad asintótica bajo pequeños cambios del parámetro.
Este principio fue formulado, originalmente en la primera mitad de los años 60, independientemente, por P. Seibert y T. Yoshizawa[32] que dice que cuando un sistema que contiene un atractor estable (conjunto asintóticamente estable) es sometido a una pequeña perturbación, en el sistema resultante aparece un atractor estable cerca del atractor original.
En el trabajo de 1976, se extendió al resultado principal del artículo de Hopf de 1942 (**"Abzeweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differentialsystems"**, Ber. Math. Phys. Sachsische Akad. d. Wiss., Leipzig, 94 (1942), 1-22) que dió origen al término "bifurcación de Hopf" que fue descrito más arriba y que, en su esencia, en el caso de un sistema plano, dice que si al pasar un parámetro a un determinado "valor crítico", los autovalores complejos conjugados de la parte lineal del sistema cambian del signo negativo al positivo, el origen se convierte de foco estable en uno inestable y se separa de él una órbita periódica estable. La extensión mencionada consiste en reemplazar la condición que se refiere a la parte lineal por otra, más general, que pide simplemente el cambio de la estabilidad asintótica del origen (o de un conjunto invariante) a la inestabilidad completa (o, como se dice también, a la calidad del "repulsor"). Este resultado es importante en casos donde la parte lineal del sistema no da información necesaria. También es aplicable a sistemas más generales que los definidos por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Actualmente, algunos trabajos sobre el tema[33] utilizan la "bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf generalizada" que no es más que el tipo de fenómeno caracterizado por la conversión de un atractor estable en un repulsor al sobrepasar el parámetro a un valor crítico, y que según el resultado citado, es necesariamente acompañado por la escisión del atractor en dos o más conjuntos invariantes, "pasando la estabilidad" a uno o más de ellos.

2.3 Método de las tranformaciones puntuales.

Muchos de los aspectos de la conducta de las trayectorias de fases de un sistema dinámico y, en una serie de casos, el retrato completo del espacio de fases, pueden ser aclarados mediante la investigación de la conducta de los puntos de intersección de las trayectorias con el llamado segmento sin contacto (en el caso de un espacio de fases bidimensional) o bien con la superficie secante (en el caso tridimensional).
La secuencia de los puntos de intersección forma cierta transformación puntual T, al estudio de la cual se reduce el problema acerca de la investigación de la conducta de las trayectorias de fase. Con ello, resulta que la estructura del sistema dinámico que consideramos se determina, biunívocamente, por la estructura de la transformación puntual T. En particular, las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales, o sea, las trayectorias cerradas de

fase, se ponen en correspondencia con los puntos fijos de la correspondiente transformación puntual T. A un movimiento periódico, estable o inestable, le corresponde un punto fijo estable o inestable.
Tracemos en el plano de fases, por los puntos no singulares un segmento que corte a la trayectoria γ en cierto punto M (interior al segmento), y en un cierto instante de tiempo que puede considerarse inicial. Si en posteriores instantes de tiempo, la curva corta repetidas veces el segmento AB, se dirá que el punto M tiene **sucesores o posteriores**. Entonces, sobre la base del teorema sobre la dependencia de la solución respecto a los valores iniciales, todos los puntos en el segmento AB, suficientemente próximos al punto M, también tienen sucesores. Sean s y s' las coordenadas del punto M y de su sucesor sobre el segmento AB, de acuerdo con lo anterior, existirá la dependencia funcional:

$$s'=f(s),$$

que lleva el nombre de función **secuencial**. Ella expresa la ley de cierta transformación puntual del segmento AB (o parte de él) en si mismo, estableciendo la correspondencia biunívoca, entre los puntos de dicho segmento y sus sucesores. Los puntos fijos de la transformación T, se hallan partiendo de la intersección de la gráfica de la función secuencial y la bisectriz s'=s. Esta construcción geométrica lleva el nombre de **diagrama de Lamerais**.
En muchos de los problemas, es imposible obtener la función secuencial en forma explícita, en tal caso se debe hacer uso de la forma paramétrica de dicha función, en la que interviene de forma implícita, por lo menos dos soluciones de la ecuación o sistema. Esto facilita no sólo el hallazgo de la función secuencial, sino también su investigación.
El método expuesto, cuya aparición está ligada a los nombres de Poincaré y George David Birkhoff (1884-1944), fue introducido en la teoría de las oscilaciones no lineales por Andronov. Habiendo establecido la relación entre las autooscilaciones y los ciclos límites de Poincaré y apoyándose en el aparato matemático de la teoría cualitativa, Andronov amplió notoriamente las posibilidades del método de `traspaso' y enunció los principios que constituyeron la base del método de las transformaciones puntuales y que permitieron emplear con eficacia dicho método durante las investigaciones de sistemas concretos de control automático y de radiotecnia. La representación paramétrica de las funciones secuenciales, introducidas por él, permitió resolver un gran número de problemas que, por largo tiempo, estaban sin resolver.
El objetivo primordial de estas investigaciones relacionadas con los ciclos límites viene a ser, por regla general, el de facilitar una base matemática necesaria para atender ciertas demandas insoslayables de capacitación técnica, olvidémonos de la división **Matemática Pura/Matemática Aplicada**. Es decir, nuestros autores se mueven sobre todo por intereses de orden teórico o práctico, con contribuciones que persiguen unos efectos relativamente inmediatos.
Estos trabajos sugieren, en fin, la existencia de dos vías principales de **ilustración** de las Ecuaciones Diferenciales como bien fue apuntado al inicio del trabajo. Sobre la vía específicamente teórica, dependía más de empeños personales (sobre todo a inicios de siglo) que de un plan o ideario general; en el caso de la vía práctica, esta representó una forma de **acumulación** de hechos que se resistían a ser clasificados de alguna forma y de relación directa con las aplicaciones.
Como colofón, queremos apuntar dos observaciones finales sobre las limitaciones del material y del enfoque que se ha empleado, en particular si se adoptan como un elemento de juicio

acerca de la índole de los motivos matemáticos o acerca de la calidad del conocimiento matemático en las Ecuaciones Diferenciales de esta época.
En primer lugar, no estaría de más tomar en consideración otros tópicos de interés para esta época. Por ejemplo, la Ecuación de Liénard o la Teoría de la Estabilidad.
En segundo lugar, conviene contrastar o compensar estos resultados, sugeridos por el enfoque de la **Teoría de la Recepción**, con la información que se haya obtenido o se pueda obtener a la luz de otras perspectivas historiográficas y, por referencia a otras formas diversas de contribución al desarrollo de la Teoría Cualitativa en este siglo.

Capítulo 13. **El Problema del Indice de Deficiencia.**

"Los matemáticos son como los franceses: se les diga lo que se les diga, ellos lo traducen a su lengua, y desde ese momento se trata de algo diferente".

Benjamín Peirce

13.1. Una presentación.

El problema del índice de deficiencia, en la forma que conocemos ahora, se remonta a Hermann Weyl[34], este trabajo y otros subsiguientes, indicaron la relación que existe entre el problema del índice de deficiencia y el problema de describir el espectro, al menos cualitativamente, de la extensión autoadjunta del operador minimal asociado con un operador diferencial ordinario autoadjunto formal. En algunos casos, inclusive, esto implica que un conocimiento sobre el índice de deficiencia, arroja información sobre el espectro de la extensión autoadjunta y recíprocamente. En otras ocasiones esta conexión es menos explícita, aunque el método usado para investigar un problema puede también usarse, para investigar el otro. A continuación, hablaremos con más detalle sobre esto. Consideremos un operador diferencial ordinario:

$$l(y) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_{n-k} y^{(k)} \right)^{(k)}, \qquad (20)$$

definido sobre cierto intervalo (a,b) del eje real. Supongamos que los coeficientes p_k son reales, $p_0>0$, y de clase $C^\infty(a,b)$. El operador formal (20) es autoadjunto en el sentido que para dos funciones prueba, $u,v \in C^\infty(a,b)$:

$$\int_a^b l(u)\bar{v} = \int_a^b u\,\overline{lv}. \qquad (21)$$

Por tanto, si nos restringimos a las funciones prueba, l es un operador simétrico densamente definido L_0' en el espacio de Hilbert $L^2(a,b)$ y por tanto, posee una extensión simétrica cerrada designada por L_0 y llamada el operador minimal asociado con l. El operador $L = L_0^*$ es llamado el operador maximal asociado con l y es un operador cerrado, restricción de l a

$u \in L^2(a,b)$ cuyas derivadas hasta el orden (2n-1) existen, $u^{(2n-1)}$ es localmente absolutamente continua, y $l(u) \in L^2(a,b)$.
En la teoría de von Neumann de la extensión de operadores simétricos, dos números cardinales juegan un papel vital.
Para el caso del operador minimal L_0, definido antes, estos son los números:

$$k = \dim\left\{\left(L_0 - \bar{z}I\right)D(L_0)\right\}^{\perp}, \quad m = \dim\left\{\left(L_0 - zI\right)D(L_0)\right\}^{\perp}, \operatorname{Im} z > 0,$$

cada cardinal es llamado un número de deficiencia y el par (k,m) es llamado el índice de deficiencia de L_0. Como es bien conocido, L_0 es autoadjunto si y sólo si k=m=0; por otra parte L_0 posee extensión autoadjunta si y sólo si k=m, y existen un número infinito de tales extensiones si $m \neq 0$.
Ahora estamos en condiciones de definir nuestro problema.

Problema del Indice de Deficiencia. Encontrar la dimensión del espacio lineal de las soluciones cuadrado integrables de la ecuación:

$$l(y)=zy, \operatorname{Im} z\ 0. \tag{22}$$

Pasemos a exponer algunos de los métodos utilizados en la resolución del problema.
Desde 1910, cuando el trabajo de Weyl apareció, hasta mediados de los años 40 sólo un pequeño número de trabajos, por demás aislados, se dedicaron a la teoría de los problemas con valores en la frontera autoadjuntos. En los últimos tiempos ha crecido la atención sobre el tema, principalmente, en Inglaterra, la ex-URSS y los EE.UU. En Inglaterra y los E.E.U.U., el problema fue estudiado sólo para operadores de segundo orden, mientras que en la ex-URSS desde el comienzo, se desarrollaba una teoría para operadores de orden superior. Los trabajos de los EE.UU. establecieron un gran número de criterios para calcular el índice de deficiencia de operadores de segundo orden. Un listado bastante completo de tales resultados, puede ser encontrado en N. Dunford y J. Schwartz-**"Linear operators. II:Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space"**, Interscience, New York, 1963 (cap.13), donde se brinda un esbozo del desarrollo del tema. Muchos de los teoremas desarrollados para los operadores de segundo orden dan condiciones suficientes para que el operador sea del tipo punto límite, o sea, que su índice de deficiencia sea (1,1). Como un operador de segundo orden, regular en un punto frontera, puede tener índice de deficiencia (1,1) o (2,2), para mostrar que el operador es del tipo punto límite, es suficiente mostrar que existe una solución de (22) que no es cuadrado integrable. Extender esta idea a operadores de orden superior, usualmente presenta serias dificultades que deben ser sorteadas.
Con la excepción de segundo orden y algunos casos de cuarto orden, el único método conocido que permite identificar el índice de deficiencia de un operador diferencial singular, es el método asintótico. Es decir, podemos obtener estimaciones asintóticas a la razón de crecimiento de un conjunto completo de soluciones l.i. de la ecuación (22). Conociendo esta razón, podemos usualmente, encontrar la dimensión del espacio de soluciones cuadrado integrables de esta ecuación.
La escuela soviética, usó el método asintótico desde los años 50, para obtener teoremas de índice de deficiencia para operadores de orden superior. En 1953 S.A. Orlov[35] usando una

clase muy especial de coeficientes pudo confirmar el resultado de Glazman que el número de deficiencia (para operadores con un punto extremo regular) puede tomar cualquier valor entre n y 2n. Naimark[36] analizó el problema para operadores arbitrarios de orden 2n, y para un número de clases generales diferentes de coeficientes. El pudo obtener una clase general de coeficientes para los cuales el número de deficiencia de cada operador correspondiente es n+1. Para las otras clases de coeficientes investigadas por él, obtuvo que el número de deficiencia del operador correspondiente es n.
Los métodos asintóticos, en el problema del índice de deficiencia, pueden ser considerados en una cierta etapa de generalidad usando un teorema asintótico de N. Levinson[37] y ciertas extensiones de él[38]. La ventaja de este teorema radica, que en lugar de aplicarlo directamente al operador diferencial dado, se hacen ciertas transformaciones de las variables dependientes e independientes. Esto es, por supuesto, una vieja idea en la teoría de las ecuaciones diferenciales (ver la sección siguiente). De esta manera, el teorema no se plantea en una manera corta y sucinta, pero la idea es muy simple[39].
Describiremos, someramente, operadores más generales que un operador diferencial ordinario. Son los operadores cuasi-diferenciales. Ellos poseen la ventaja que la teoría puede ser desarrollada sin hacer consideraciones de diferenciabilidad sobre los coeficientes. De aquí que en muchos aspectos, la teoría es simple. Sea $\{p_k: 0\leq k\leq n\}$ un conjunto de funciones medibles Borel, definidas sobre un intervalo (a,b). Las cuasi-derivadas de una función definida sobre este intervalo, con respecto a las funciones de la clase $\{p_k\}$ son, siempre que existan, dadas por:

$$y^{[k]}=y^{(k)},\ 1\leq k\leq n-1,$$

$$y^{[n]}=y^{(n)},$$

$$y^{[n+k]}=p_k y^{(n-k)} - (d/dt)y^{[n+k-1]},\ 1\leq k\leq n.$$

Por estas expresiones vemos que $y^{[k]}$ es localmente absolutamente continua para $0\leq k\leq n-1$ y $p_k\, y^{(n-k)}$ así como $y^{[n+k]}$, son localmente absolutamente continua para $0\leq k\leq n-1$.
El operador cuasi-diferencial l(y) es tomado como $y^{[2n]}$. No es difícil mostrar, que el conjunto de funciones cuyas cuasiderivadas existen y se hacen cero fuera de un subintervalo compacto de (a,b) es denso en $L^2(a,b)$ y por tanto, un operador minimal L_0 y un operador maximal L, pueden ser definidos. El resto de la teoría de problemas con valores en la frontera, permanece en la misma forma que en el caso de operadores diferenciales ordinarios[40].
Estimados asintóticos de operadores autoadjuntos cuasi-diferenciales son también muy usados en la obtención de información cualitativa sobre el espectro de extensiones autoadjuntas del operador minimal. Esto fue planteado por I.M. Rapaport[41] y desarrollado, posteriormente, por M.A. Naimark en la obra ya citada. La idea general reside en que estimados del crecimiento de las soluciones, dan estimados sobre el crecimiento de la función de Green.
Desafortunadamente, es muy fácil dar ejemplos de operadores cuasi-diferenciales para los cuales el método asintótico no es aplicable. Generalmente, cuando los coeficientes poseen `grandes' oscilaciones, no es posible reducir el problema a uno que sea una pequeña perturbación de un operador diferencial con coeficientes constantes. Aun cuando tal transformación es posible, la matriz constante de la transformación, puede tener múltiples autovalores. El problema de obtener estimados asintóticos en este caso no es muy

fácil, sólo en los últimos años se han comenzado a tener algunos resultados en trabajos de Devinatz y P.W. Walker entre otros.

13.2. Otros métodos.

Puesto que la clase de operadores cuasi-diferenciales representa tal diversidad de coeficientes, la mejor táctica es limitar la investigación a operadores de orden bajo. Por otra parte, los resultados para operadores de segundo orden, pueden servir de guía útil a las cuestiones que pueden surgir en el caso de cuarto orden y en los últimos años un gran número de trabajos han aparecido, que generalizan los resultados de orden dos.
El resultado original de Weyl (pág. 238) es que si $p\geq 0$ sobre $(0, \infty)$ (o más generalmente, acotado inferiormente), entonces el operador diferencial:

$$-y^{(2)} + py, \qquad (23)$$

posee índice de deficiencia (1,1). En 1949, Hartman y Winter y Titchmarsh, trabajando independientemente, mostraron que si K es una constante positiva y $p(t)\geq -Kt^2$ entonces el índice del operador (22) es (1,1). El exponente 2 es el mejor posible en el sentido que si lo reeplazamos por $2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, el resultado puede no ser cierto.
En 1968-1969, W. N. Everitt obtuvo resultados análogos para una clase de operadores diferenciales de 4to orden:

$$y^{(4)} - (p_1 y^{(1)})^{(1)} + p_2 y. \qquad (24)$$

El probó que el número de deficiencia es la mitad del orden del operador, i.e. el índice es (2,2), bajo algunas de las siguientes condiciones:

i) $p_2 \geq 0$ y $0\leq p_1 \leq Kt^2 (1+p_2)^{1/2}$, $K>0$;

ii) $p_2 \geq -Kt^{4/3}$ y $|p_1(t)| \leq Kt^{2/3}$, $K>0$.

El estableció que en ii) el exponente 4/3 es el mejor para la cota inferior de p_2, más tarde fue establecido por Eastham[42], que 2/3 es el mejor exponente en la cota para p_1. Sumarizando, podemos decir, que existen dos métodos generales, con los cuales se ha investigado el Problema del Indice: aquel que utiliza métodos asintóticos, del cual ya hemos hablado y el resultado de Hinton[43], para operadores de orden arbitrario 2n. Su resultado lo plantea en una forma, que permite compararlo directamente con los resultados de Hartman-Wintner, Titchmarsh y Everitt:

El Indice de Deficiencia de $y^{[2n]}$ es (n,n) si $p_0\equiv 1$ y $p_k(t)=O(t^{4k/(4n-2)})$, $1\leq k\leq n-1$, $p_n(t)\geq -Kt^{4n/(4n-2)}$, $K>0$.

Existen algunas evidencias preliminares que prueban que los exponentes son, probablemente, los mejores posibles. Otra cuestión interesante, es el hecho que este resultado, está muy relacionado con un trabajo general de Levinson[44] para operadores de segundo orden de la forma -(py')'+qy. El resultado de Levinson plantea que si M es una función diferenciable positiva tal que $M'=O(M^{3/2}/p^{1/2})$, $q\geq M$ y $\int_a^\infty (pM)^{-1/2}=\infty$, entonces $y^{[2]}$ posee índice (1,1). El resultado de Hinton requiere la condición adicional $p'=O([pM]^{1/2})$. No está claro cuando esta condición puede ser sustituida o no, para operadores de segundo orden. La demostración de Hinton es basada, en parte, en una idea usada por Everitt y Levinson, aunque estos autores no indicaron, como extender sus resultados a operadores de orden superior.

El resultado de Hinton da una amplia clase de coeficientes, para los cuales el número de deficiencia del correspondiente operador es la mitad del orden del operador. Resultados anteriores sobre operadores de cuarto y algunos resultados conocidos sobre operadores de orden superior, muestran evidencias que este puede ser el mejor resultado posible en el sentido, que si condiciones más liberales sobre los coeficientes son impuestas, el número de deficiencia puede no mantenerse, como la mitad del orden del operador.

El trabajo de Evans sobre operadores de cuarto orden[45] y trabajos de Atkinson, Brinck, Eastham y Hartman, sobre operadores de segundo orden, indican que es quizás suficiente dar condiciones sobre intervalos no acotados y se mantiene el resultado. Esto para coeficientes débilmente oscilantes. Un resultado general de este tipo no es conocido.

La cuestión general, de como perturbar un operador diferencial autoadjunto o un operador cuasidiferencial y que su índice se mantenga, permanece insoluble. Finalmente, el problema de obtener condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de un operador diferencial o cuasidiferencial, no ha sido resuelto. Para mostrar lo delicado y el grado de dificultad de este problema, mencionamos el resultado de Eastham y Thompson, relacionado con operadores de segundo orden $-y''+py$. Ellos muestran que para cualquier $\varepsilon>0$, existen dos funciones p_1 y p_2 de clase $C^\infty(0,\infty)$, que difieren sólo sobre una sucesión de intervalos de longitud total ε, tal que $-y''+py$ posee el índice (1,1) y $-y''+py$ posee el índice (2,2)[46].

13.3. Otra presentación del Problema.

Sea l un operador diferencial:

$$l(y)=\sum_{i=0}^{N} p_i y^{(i)},\ a\leq x<b, \qquad (25)$$

con singularidad en b. Por comodidad asumimos que las p_i son funciones de variable compleja, continuamente diferenciable. Asumamos además, que l es formalmente simétrica, i.e., $l=l^+$ donde:

$$l^+(y)=\sum_{i=0}^{N}(-i)^i[\overline{p_i}y]^{(i)}. \qquad (26)$$

Para una función continua positiva w sobre [a,b), el operador l determina dos operadores que actúan en el H-espacio $L^2_w(a,b)$ de todas las funciones f medibles (L), que satisfacen $\int_a^b w|f|<\infty$. Estos operadores son definidos como sigue. Sea D(L) el conjunto de

todas las $f \in L^2_w(a,b)$ tal que, f, f', ..., $f^{(N-1)}$ son localmente absolutamente continuas y $w^{-1}l(f) \in L^2_w(a,b)$. El operador maximal es definido por $L:D(L) \to (a,b)$, $L(y)= w^{-1}\, l(y)$.
Sea D'_0 el conjunto de todas las $f \in D(L)$ con soporte compacto interior a (a,b), y sea L'_0 la restricción de L a D'_0. Entonces L'_0 es un operador simétrico, densamente definido; por tanto, L'_0 posee una clausura L_0. Se sigue que $L^*_0=L$. Definamos el número $n(\lambda)$, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, por:

$$n(\lambda)=\dim\{f \in D(L):Lf=\lambda f\}.$$

Es conocido que $n(\lambda)$ es constante en el semiplano superior e inferior. Podemos definir el PID ahora por:

Calcular n(i), n(-i).

La importancia de estos números, es que ellos determinan el número de condiciones de frontera que deben ser aplicadas a las funciones de D(L) para determinar un operador autoadjunto A. Tal operador existirá ssí n(i)=n(-i) y A satisface $L_0 \subset A \subset L$. En términos de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales, esto significa qué condición de frontera, asociada con $\frac{\partial \xi}{dt} = L(\xi)$ convierte al problema en correctamente planteado?.
En estos términos si n(i)+n(-i)=N, decimos que l es del tipo punto-límite, cuando n(i)+n(-i)=2N, decimos que l es del tipo ciclo-límite. Esta terminología, surge del método geométrico de la demostración de Weyl, al mostrar que para la ecuación $l(y)=-(py')'+qy$, el par (n(i),n(-i)) es siempre (1,1) ó (2,2). Durante los últimos años, estos problemas han sido muy estudiados y algunas ramificaciones importantes han surgido.
Sea el operador l de la forma:

$$l(y) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (q_i y^{(i)})^{(i)}, \tag{27}$$

donde las q_i son reales, con $q_m>0$.
El operador (27) se dice que satisface la condición de Dirichlet (D) si:

$$|q_i|^{1/2} |y| \in L^2(a,\infty),\ i = 0,\dots,m\ (y \in D(L)).$$

Un concepto muy relacionado con este es el Punto Límite Fuerte (PLF), condición definida por:

$$\lim_{x \to b} D(y,z)(x) = 0,\ y,z \in D(L),$$

donde D(y,z) es dado por[47]:

$$D(y,z) = \sum_{i=0}^{m-1} y^{(i)} z^{[2m-i-1]}.$$

Esta propiedad fue introducida por Everitt, Giertz y Weidman[48]. Es claro que (PLF) implica (PL), aunque los conceptos (PLF), (PL) y (D) están muy relacionados, son independientes, ver

por ejemplo los diferentes trabajos de Everitt, Kalf y Kwong de la década del 70. Criterios para PLF y D pueden encontrarse en resultados de Atkinson, Brown, Evans, Everitt, Hinton y Kalf.
Consideremos ahora (27) en $L^2_w(a,b)$ con cada $q_i \geq 0$. Definamos el índice de Dirichlet Di(L) por:

$$\mathrm{Di}(L) = \dim\left\{ y \in D(L): L(y)wy = 0, \sum_{i=0}^{m}\int_a^b q_i \left|y^{(i)}\right|^2 < \infty \right\},$$

este concepto ha probado ser muy útil en el análisis de la convergencia en norma de energía, del desarrollo en autofunciones dada por:

$$\|y\|_E^2 = \int_a^b \left[w|y|^2 + \sum_{i=0}^{m}\int_a^b q_i \left|y^{(i)}\right|^2 \right] dx.$$

Otros tópicos recientes son el problema de la separación, i.e., cuando $f \in D(L)$ en (25), con $w \equiv 1$, implica $P^{(j)}_i f^{(i-j)} \in L^2(a,b)$ para todo $0 \leq j \leq i \leq m$ y el problema de las potencias, definido como el estudio de las relaciones del índice de deficiencia de potencias de l, con l. El primer problema fue introducido por Everitt y Giertz en **"Some properties of the domains of certain differential operators"**, Proc. London Math. Soc.(3), 23(1971), 301-324, el segundo es el principal contenido de R.M. Kauffman, T.T. Read and A. Zettl-**"The deficiency index problem for powers of ordinary differential expressions"**, Lectures Notes in Mathematics, SpringerVerlag, Berlín, 621(1977).
Posteriores refinamientos y vínculos con expresiones diferenciales, J-simetría, desigualdades integrales, funciones m(λ) de Titchmarsh-Weyl, etc., aún continuan.

Capítulo 14. **Teoría Global.**

"Mediante el estudio de la matemática, pues, y sólo mediante él, es posible hacerse una idea adecuada y profunda de lo que es la ciencia".

Comte

Las investigaciones de las ecuaciones diferenciales lineales desde el punto de sus transformaciones, formas canónicas e invariantes comenzaron en el último siglo. En la primera mitad del siglo pasado, E. E. Kummer[49], estudió las transformaciones de las ecuaciones de segundo orden consistentes en un cambio de la variable independiente y la multiplicación de la variable dependiente. Hasta el final del siglo pasado, algunos matemáticos trabajaron las ecuaciones de orden superior. Mencionaremos entre muchos otros a E. Laguerre, A.R. Forsyth, F. Brioschi y G.H. Halphen. Tal vez el resultado más conocido de este período es la así llamada forma canónica de Laguerre-Forsyth de las ecuaciones diferenciales lineales, que se caracteriza por la nulidad de los coeficientes de las derivadas de orden (n-1) y (n-2).
Sin embargo, no fue hasta 1892 que P. Stackel (y un año después S. Lie) probaron que la forma de transformación considerada por Kummer (así como todos sus sucesores) es la

transformación puntual más general que convierte las soluciones de cualquier ecuación diferencial lineal homogénea de grado mayor que uno, en soluciones de una ecuación de la misma `clase'. En realidad, sólo este resultado justificaba los atrasos de todas las investigaciones previas.

Alrededor de 1910, G.D. Birkhoff[50] hizo notar que las investigaciones consideradas en el campo real, eran de carácter local. El presentó un ejemplo, de una ecuación diferencial lineal de tercer orden, que no puede ser transformada en una ecuación en la forma canónica de Laguerre-Forsyth, en todo su intervalo de definición.

La naturaleza local de los métodos y resultados, no era apropiada para tratar problemas de carácter global como el acotamiento, periodicidad, el comportamiento asintótico u oscilatorio y otras propiedades, que necesariamente envuelven las investigaciones, en todo el intervalo de definición.

Sólo para demostrar, que aún a mediados de este siglo había apenas resultados aislados de una teoría de carácter global y no sistemáticos, mencionaremos el ejemplo de G. Sansone de una ecuación diferencial lineal de 3er orden con todas sus soluciones oscilatorias. Este resultado apareció en 1948, a pesar de que la cuestión acerca de la existencia o no de una tal ecuación, era tan vieja como el problema de la factorización de los operadores diferenciales lineales.

Hace ya unos 40 años que O. Boruvka comenzó el estudio sistemático de las propiedades globales de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. El desarrolló profundamente su teoría y resumió sus métodos y resultados originales en las monografías (**"Linear differential transformationen 2. Ordnung"**, VEB Berlín 1967; (**"Linear Differential Transformations of the second order"**, The English Univ. Press, London, 1971), aparecidas en 1967 en Berlín y una versión más extensa en 1971 en Londres que completa la anterior con trabajos como **"Sur quelques propiétés de structure du groupe des phases des équations différentielles linéaires du deuxiéme ordre"** (Rev. Roum. Math. Pures et Appl., T.XV, No.9, 1970, 1345-1356).

Para las ecuaciones diferenciales de orden mayor o igual que dos, han aparecido resultados de carácter global en obras de variados matemáticos, generalmente europeos y en particular de la escuela checa creada por Boruvka. Sin embargo, no había todavía una teoría unificada ni sistemática de las propiedades globales de las ecuaciones diferenciales lineales de orden arbitrario, desconociéndose, qué puede y qué no puede suceder en el comportamiento global de las soluciones.

En los últimos 20 años se han descubierto (sobre todo por F. Neuman, de la escuela checa) métodos aproximados bastante generales, introduciendo novedosas notaciones y obteniendo resultados, que daban respuesta a cuestiones sustanciales de los problemas básicos en el campo de las propiedades globales de las ecuaciones diferenciales lineales de orden arbitrario, partiendo de los métodos y resultados de Boruvka. Las herramientas del Algebra, la Topología, el Análisis y la Geometría unidas con los métodos de la teoría de los sistemas dinámicos y ecuaciones funcionales, permiten tratar problemas concernientes a las propiedades globales de las soluciones. La Teoría de Categorías, los grupoides de Brandt y Ehresmann, entre otros métodos de la Geometría Diferencial, son algunas de las técnicas empleadas.

La teoría en cuestión, incluye también, métodos efectivos para solucionar problemas especiales como por ejemplo el concerniente a la equivalencia global de dos ecuaciones dadas o sobre la distribución de ceros de soluciones, disconjugancia, comportamiento oscilatorio,...

14.1. Transformaciones Globales.

Para $n>2$, denotemos por $P_n(y,x;I)$ a una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de orden n en la incógnita y, de la variable independiente x definida sobre un intervalo abierto I de R.
Decimos que $P_n(y,x;I)$ es globalmente transformable en $Q_n(z,t;J)$ si existe una función $f\in C^n(J)$, $f(t)\neq 0$ en J y un C^n-difeomorfismo h de J en I tal que:

$$z(t)=f(t)y(h(t)),\ t\in J;$$

es una solución de $Q_n(z,t;J)$ siempre que "y" es una solución de $P_n(y,x;t)$.
Esta definición concuerda con la forma más general de la transformación puntual obtenida por Stackel. La biyectividad de h garantiza la transformación de las soluciones en todos sus intervalos de definición, o sea, la globabilidad de la transformación, estos resultados de Stackel se han obtenido también, sin hacer uso de la diferenciabilidad[51].
Sea $y=(y_1,...y_n)^T$ el vector columna cuyas componentes y_i son soluciones l.i. de la ecuación $P_n(y,x;I)$, para $i=1,2,...n$, llamaremos a esta y, solución fundamental y la consideraremos como una curva en el espacio vectorial n-dimensional V_n, la variable independiente x recorre el intervalo I y t es el parámetro de la curva.
La relación de transformabilidad global es una relación de equivalencia. Luego el conjunto A de todas las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden mayor o igual que dos, se divide en clases de ecuaciones globalmente equivalentes.
Con respecto a otra de las herramientas utilizadas, debemos decir que, en cada área de la Matemática, donde se manifiesta una estructura de un `grupoide de Ehresmann', los siguientes problemas básicos deben ser resueltos, a fin de describir la estructura de los conjuntos de objetos y transformaciones en esta área y de esta manera, dar una fundamentación de la teoría correspondiente:

1. Encontrar condiciones necesarias y/o suficientes (cuanto más efectivas mejor) bajo las cuales dos objetos dados, dos ecuaciones, son equivalentes, es decir, criterios de equivalencia global.
2. Caracterizar todos los posibles grupos estacionarios de acuerdo con las clases de equivalencia.
3. Encontrar (construir objetos canónicos) ecuaciones en cada clase de ecuaciones equivalentes.

Por otra parte, podemos concluir diciendo que cada solución fundamental o curva z de una ecuación Q globalmente equivalente a la ecuación P, es una sección de un cono en el espacio vectorial n-dimensional, obtenido como una imagen centroafín de un cono fijo determinado por una curva fija "y".
Trataremos de responder a estas cuestiones para ecuaciones diferenciales lineales de orden arbitrario.

14.2. Equivalencia Global.

Una condición necesaria y suficiente para la equivalencia global de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, fue encontrada por O. Boruvka en la década del 60.

El número máximo de ceros de las soluciones no triviales de una ecuación de segundo orden P_2, indica el tipo de la ecuación: bien finito, un entero m o infinito. Además, la ecuación P_2 siendo de tipo finito m se llama de especie general, si admite dos soluciones l.i. con m-1 ceros, todos ellos considerados en todo el intervalo de definición. En caso contrario, siendo P_2 de tipo finito m se llama de especie especial. Si la ecuación P_2 es de tipo infinito, entonces es o bien oscilatoria en un extremo u oscilatoria en ambos extremos.
Ahora el criterio de Boruvka se lee como sigue:

"Dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden son globalmente equivalentes si y sólo si, ellas son del mismo tipo y al mismo tiempo de la misma clase".

14.3. Grupos Estacionarios.

Los grupos estacionarios para ecuaciones de segundo orden, llamados grupos de dispersión, fueron estudiados y completamente descritos por Boruvka en los años 60. Algunos resultados sobre grupos estacionarios de ecuaciones diferenciales lineales de orden arbitrario, fueron obtenidos en 1977 utilizando, fundamentalmente, la teoría de ecuaciones funcionales[52].
En 1979, J. Posluszny y L. A. Rubel caracterizaron (en cuanto a la <u>conjugancia</u>) esas transformaciones llamadas <u>movimientos</u>, de una ecuación diferencial lineal en sí misma, que consisten en un cambio de la variable independiente solamente.
En 1984 sobre la base del criterio de equivalencia global de Neuman, este obtuvo una caracterización completa de todos los posibles grupos estacionarios, teniendo en cuenta la conjugancia. Estos grupos varían desde uno maximal hasta un grupo trivial, pasando por uno cíclico. Es interesante notar, que el grupo maximal había ya aparecido como el grupo fundamental en las investigaciones de Boruvka de las ecuaciones de segundo orden.

14.4. Formas Canónicas.

Tales formas fueron estudiadas, como ya dijimos, desde el mismo comienzo de las investigaciones a mediados del siglo pasado.
Hemos indicado que ya en 1910 Birkhoff indicó que la así llamada forma canónica de Laguerre-Forsyth no es global. Puede demostrarse, Neuman lo hizo en 1983, que también la otra forma canónica que ha aparecido en la literatura, la forma canónica de Halphen, tampoco es global.
Para la construcción de formas canónicas globales, podemos proceder de dos maneras, bien podemos usar una cierta aproximación geométrica, o podemos aplicar el criterio de equivalencia global.
Estas formas canónicas globales son:

n=2, $y''+y=0$ sobre (diferente) $I\subset R$;
n=3, $y'''-(p'(x)/p(x))y''+(1+p^2(x))y'-(p'(x)/p(x))y=0$,
sobre $I\subset R$, y $p\in C^1(I)$, $p(x)\neq 0$ sobre I;

y otras.
Para n=2 las ecuaciones canónicas coinciden con las formas canónicas estudiadas por O. Boruvka.

Siguiendo el trabajo de Neuman citado antes, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$y^{(n)}+0.y^{(n-1)}+y^{(n-2)}+p_{n-3}(x)y^{(n-3)}+...+p_0(x)y=0,\ I\subset R,$$

que son las formas canónicas para ecuaciones con coeficientes suficientemente suaves. Ellas son caracterizadas por sus primeros tres coeficientes:

$$1,\ 0,\ 1$$

comparando con la forma canónica de Laguerre-Forsyth, que posee la siguiente sucesión 1, 0, 0 podemos concluir que si Laguerre y Forsyth hubieran tomado 1 en lugar de 0 como el coeficiente de la derivada de orden (n-2), ellos habrían obtenido formas globales en lugar de locales.

14.5. Invariantes.

Los invariantes de las ecuaciones diferenciales lineales con respecto a las transformaciones, provienen de mediados del siglo pasado ya sea directamente o bien pasando por las formas canónicas de Halphen. Estos invariantes son locales.
Un invariante global de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden es su tipo: finito o infinito y su especie, introducidos en los años 60.
Debido a los criterios de equivalencia global tenemos ahora invariantes globales para ecuaciones de un orden arbitrario. Por ejemplo, para estas ecuaciones el grado de suavidad de sus coeficientes es de algún modo una propiedad invariante.

14.6. Ecuaciones con soluciones de propiedades determinadas.

La idea fundamental de como construir ecuaciones diferenciales lineales con soluciones con propiedades determinadas se basa en la siguiente aproximación coordinada.
Teniendo las formas canónicas globales (la globabilidad es esencial), cada ecuación diferencial lineal P de orden arbitrario puede ser coordinada por el par $\{S,\alpha\}$ consistente en su forma canónica global S y su transformación global α que convierte S en P, por ejemplo $P=S\alpha$.
Si reformulamos una propiedad dada de las soluciones de P en términos de las propiedades de S y α, podemos construir todas las ecuaciones requeridas. Igualmente, problemas concernientes a las relaciones entre ciertas propiedades son entonces convertidas en problemas de la teoría de funciones (a veces simples, o hasta casi resueltos).
Utilizando esta técnica, fueron construidas ecuaciones diferenciales lineales que tienen importantes aplicaciones en las geometrías diferencial e integral, por ejemplo, fue posible generalizar los teoremas isoperimétricos de Blaschke y Santaló, para curvas planas en geometrías unimodulares, afínes o centroafínes y que recordaremos para mejor comprensión del tema.
Sea $L_a(u)$ la longitud unimodular centroafín de una curva plana cerrada, convexa $\underline{u}$ que contiene el origen[53]. Por $F(\underline{u})$ denotaremos el área acotada por $\underline{u}$, Santaló probó[54]:

"Para toda curva convexa cerrada centroafín $\underline{u}$ con su centro en el origen se tiene:

$$F(\underline{u}).L_a(\underline{u}) \leq \pi^2,$$

donde la igualdad se cumple sólo para las elipses con centro en el origen".

Por otra parte, sea $C^n_I(n\geq 0)$ el conjunto de todas las funciones sobre I que poseen sobre I, derivadas continuas hasta el orden n inclusive.
Para curvas planas $\underline{u}$ las cuales pueden ser descritas por dos funciones coordenadas u_1, u_2, $u_i \in C^2[t_0,t_1]$, i=1,2, Blaschke definió la longitud afín unimodular de un arco de $\underline{u}$, con puntos extremos correspondientes a los valores t_0 y t_1 del parámetro, como:

$$S[\underline{u}]_{t_0}^{t_1} = \left| \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} u_1' & u_1'' \\ u_2' & u_2'' \end{vmatrix}^{1/2} d\sigma \right|,$$

él probó:

"La longitud S($\underline{u}$) de una curva convexa cerrada $\underline{u}$ que acota el área F satisface:

$$[S(\underline{u})]^3 \leq 8\pi^2 F$$

y la igualdad se cumple sólo para elipses".

Las conexiones entre el acotamiento de las soluciones y sus L^2-propiedades, fueron fácilmente explicadas por este método mientras que las relaciones entre las distribuciones de ceros y el comportamiento asintótico fueron profundamente estudiadas. Existe otra vía, geométrica, de cómo construir ecuaciones con una determinada distribución de ceros de sus soluciones.

14.7. Ceros de las soluciones.

Esta otra vía, se basa en la representación de una solución fundamental "y" de una ecuación $P_n(y,x;I)$ como una curva en el espacio vectorial n-dimensional o también en el espacio euclideano Vn mencionado anteriormente.
Sea la curva v la proyección central de la curva y sobre la esfera unidad S_{n-1} en el espacio V_n sin cambiar el parámetro x. Cada solución "y" de $P_n(y,x;I)$ puede ser escrita como un producto escalar c.y donde c es un vector constante no nulo en V_n. Denotemos por H(y) el hiperplano:

$$H(y):=\{d\in V_n / \ c.d=0\},$$

que pasa por el origen y corresponde al vector c. Evidentemente:

$$0=y(x_0)=c.y(x_0)=c.V(x_0)|y(x_0)| \Leftrightarrow c.V(x_0)=0,$$

con $|y(x_0)|\neq 0$. De este modo se tiene:

"a cada solución "y" de la ecuación P_n le corresponde un hiperplano H(y) en V_n que pasa por el origen tal que:

1-los ceros de la solución "y" aparecen como parámetros de las intersecciones del hiperplano particular H(y) con la curva "v" y viceversa, -la multiplicidad de los ceros no es más que el orden de los contactos".

Recordemos que esto sucede en la esfera unidad, un espacio compacto, con fuertes herramientas topológicas. Veamos el ejemplo de Sansone, referido al comienzo de este punto.

Para este propósito, es suficiente tener una curva "u", suficientemente suave (de clase C^3) en la esfera unidad S_2, sin puntos de inflexión (es decir, el wronskiano de "u" es no nulo) tal que cada plano que pasa por el origen intersecta a "u" para infinitos valores del parámetro. La gráfica de un "cicloide prolongado" cerrado que circunda infinitas veces el ecuador, mientras el parámetro varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$, puede servir como ejemplo de una curva con la propiedad requerida.

14.8. Dispersión central y carácter oscilatorio.

Expondremos, brevemente, las ideas principales de este tópico, ya "tocado" en puntos anteriores.

Sea q(t) C(a,b), donde es inmaterial el carácter del intervalo (a,b), es decir, abierto, cerrado, infinito, etc. Dada la ecuación:

$$y''=q(t)y, \qquad (q)$$

denotaremos por (Q), el conjunto de todas sus soluciones sobre (a,b), a las no triviales las llamaremos integrales.

Con ayuda de la dispersión central (ver el tratado clásico de Borouvka ya mencionado) puede clasificarse el carácter oscilatorio de ecuaciones diferenciales del tipo (q), así tenemos:

La ecuación diferencial (q) se dice del tipo no-oscilatorio en (a,b), si todas las integrales de tal ecuación, poseen como máximo una raíz en (a,b), excepto en el caso de un conjunto l.i. de soluciones, que pueden tener dos raíces. En los restantes casos, (q) es de tipo oscilatorio en (a,b).

Más detalladamente, la ecuación (q) se dice del tipo cuasi-oscilatorio en (a,b), si todas las integrales de (q) poseen un número finito de raíces en (a,b) y si todas las integrales de (q), tienen en (a,b) al menos dos raíces; del tipo parcialmente oscilatorio a la derecha (izquierda) en (a,b), si todas las integrales de (q) poseen en (a,b) un número finito de raíces a la izquierda (derecha) y un número infinito de raíces a la derecha (izquierda) de cualquier punto $t\in(a,b)$; de tipo totalmente oscilatorio en (a,b), si todas las integrales en (a,b) tienen un número infinito de raíces a la derecha y a la izquierda de cualquier punto $t\in(a,b)$.

Para un número entero n cualquiera se define la dispersión central $v_n(t)$, sin embargo, de suma importancia es la dispersión central fundamental $v_1(t)$. Conocer esta, equivale a conocer, por completo, la distribución de todas las raíces de cualquier solución de la

ecuación (q). Por esto, la dispersión v_1 de la ecuación (q) se llama también el carácter oscilatorio de (q).
Si v_1 existe, entonces el Dom $v_1 = (\alpha, ß)$, Im $v_1 = (a,b)$, donde $a<\alpha$, $ß<b$.
El tipo oscilatorio de (q) está determinado por v_1 de la siguiente forma, es cuasi-oscilatoria en (a,b) si y sólo sí $a<\alpha$, $ß<b$; es parcialmente oscilatoria a la derecha (izquierda) en (a,b) si y sólo sí $a<\alpha$, $ß=b$ ($a=\alpha$, $ß<b$); es totalmente oscilatoria en (a,b) si y sólo sí $a=\alpha$, $ß=b$.

14.9. Aplicaciones.

Veremos brevemente algunas aplicaciones de esta teoría.
El método anterior ha sido aplicado exitosamente a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, por ejemplo, la construcción de ciertos sistemas de segundo orden con solamente soluciones periódicas[55], juega un importante papel en la geometría múltiple, en la que todas las geodésicas son cerradas[56]. Ecuaciones funcionales-diferenciales han sido estudiados con respecto a transformaciones. Condiciones fueron derivadas bajo las cuales una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales con varios retardos o desviaciones, puede ser transformado a un equivalente con desviaciones constantes.
Extensiones de estos métodos a sistemas Hamiltonianos han sido encontrados. Dosly[57], además de esto, estudió puntos conjugados, obteniendo resultados que unificaron y generalizaron investigaciones previas.
Cadek, puntualiza que:

"toda transformación global puntual de sistemas de 1er orden en sistemas del mismo tipo, surgen sólo como una composición de cuatro tipos especiales de transformaciones explícitamente descritas".

El también derivó todas las transformaciones de sistemas de 1er orden en ecuaciones difernciales lineales homogéneas escalares de 1er orden.
El primer paso de la aplicación de esta teoría a las ecuaciones diferenciales lineales generalizadas (con cuasi-derivadas) fueron dadas en el trabajo de W.N. Everitt y F. Neuman-**"A concept of adjointness and symmetriq of differential expressions"**, Czechoslovak Math. J. 32 (1982), 275-306.

Capítulo 15. **Algunas consideraciones a las investigaciones de la Mecánica-Matemática.**

"Hace tiempo que es un axioma mío que las pequeñas cosas son infinitamente las más importantes"

*Sherlock Holmes (***"Un caso de identidad"***)*

De esta manera, hemos apuntado algunos detalles que permitirán comprender la importancia que ha tenido, en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la Teoría Cualitativa y diversas ramas de la propia Matemática relacionada con esta y como, tomando un tópico particular de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el desarrollo de una y otra se han ido entrelazando y han contribuido, como peldaños mutuos, al desarrollo simultáneo de ambas. Un punto que nos permite abundar en el marco anterior, lo constituye el hecho de que, la proliferación de los dispositivos del control automático en la técnica moderna, confiere a la teoría de la Regulación Automática un papel extraordinariamente importante. Uno de los principales problemas que se les plantea a los constructores de reguladores automáticos es el de la Estabilidad del Funcionamiento del sistema máquina-regulador, o sea, la determinación de un régimen de trabajo estable, en cierta forma lo más “parecido” posible a un ciclo límite estable, al cual todos los demás “modos” de funcionamiento convergen.

En muchos casos, este problema puede resolverse con ayuda del Método Directo de Liapunov. El sistema de regulación automática más antiguo, es el formado por la máquina de vapor y el regulador centrífugo de Watt. Este regulador centrífugo, ideado por Watt a finales del siglo XIX, cumplió perfectamente sus funciones hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando hubo que modificar su estructura y, con ello, su funcionamiento resultó menos seguro.

Numerosos ingenieros y científicos trataron de dar solución a este problema, que fue resuelto de manera especialmente elegante y sencilla por el ingeniero ruso Vichnegradski, fundador de la teoría de la regulación automática. La memoria de Vichnegradski **"Sobre los Reguladores de Acción Directa"** (1876, en ruso) constituyó el punto de partida de la teoría de la regulación de las máquinas, para hacer frente a las exigencias de la práctica industrial. En este siglo se han ido desarrollando nuevos métodos a partir de los trabajos de Poincaré, Andronov, Jaiquin, Witt, Bulgakov,... los que han contribuido al desarrollo de esta dirección, y sus resultados son considerados como clásicos.

En los últimos 15 ó 20 años, se modificó fuertemente el aspecto de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Uno de los progresos más importantes, consistió en el descubrimiento de regiones límites de nuevo tipo, que recibieron el nombre de **atractores**.

Resultó que, paralelamente a los regímenes límites estacionarios y periódicos, son también posibles regímenes límites de una naturaleza completamente distinta, en las cuales cada trayectoria por separada es inestable, mientras que el mismo fenómeno de la salida al régimen límite en cuestión es estructuralmente estable. El descubrimiento y el estudio detallado de tales regímenes (atractores) para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, requirió de la participación de los recursos de la geometría diferencial y la topología, del análisis funcional y la teoría de las probabilidades. En la actualidad tiene lugar una penetración intensiva de estos conceptos matemáticos en las aplicaciones. Así, por ejemplo, los fenómenos que tienen lugar durante el paso de una corriente laminar a una turbulenta, con el aumento de los números de Reynolds, se describen mediante un atractor.

Durante la utilización de cualquier modelo matemático surge el problema de la validez de la aplicación de los resultados matemáticos a la realidad objetiva. Si el resultado es fuertemente sensible a una pequeña modificación del modelo, entonces, variaciones tan pequeñas como se quiera del mismo, conducirán a un modelo con propiedades distintas. No se pueden extender tales resultados al proceso real investigado, debido a que en la construcción del modelo se realiza siempre una cierta idealización y los parámetros se determinan solamente de manera aproximada.

Esto llevó a Andronov y L.S. Pontriaguin (en 1937) al concepto de sistemas **gruesos** o **de estabilidad estructural**. Este concepto resultó muy fructífero, en el caso de los espacios de fases de dimensiones pequeñas (1 ó 2) y en este caso, los problemas de la estabilidad estructural, fueron detalladamente estudiados. De esta manera, la teoría de las ecuaciones diferenciales en el presente, constituye una rama de la matemática, excepcionalmente rica por su contenido, que se desarrolla rápidamente, en estrecha relación con otros dominios de la matemática y sus aplicaciones. Sin embargo, no se puede negar la significación que para las matemáticas, han tenido algunos problemas particulares (algunos han sido presentados aquí). El cauce fundamental de la matemática; como el de un gran río, es alimentado, en primer lugar, por los arroyuelos. Los grandes descubrimientos, con mucha frecuencia, se garantizan y preparan mediante el trabajo meticuloso de muchos investigadores. Todo lo dicho no sólo se refiere a la matemática, sino también, a una de sus líneas más ricas, la teoría de las Ecuaciones Diferenciales, rama que en la actualidad constituye un conjunto difícilmente abarcable de hechos, ideas y métodos muy útiles para las aplicaciones y capaces de estimular las investigaciones teóricas en otras ramas de las matemáticas y fuera de esta.

Capítulo 16. **La teoría de las catástrofes.**

"Un conocimiento profundo de las cosas, no lo obtendremos ni ahora ni nunca, en tanto que no las contemplemos en crecer desde el principio"

*Aristóteles (***"Política"***)*

Volvamos a algunos de los puntos tratados anteriormente. No es casual que la propiedad fractal, resulte ser una medida de la complejidad de la órbita. Lo interesante radica en que dicha complejidad, aunque asociada a un sistema completamente determinado por una regla matemática, hace que sea, prácticamente imposible, predecir el comportamiento del sistema a largo plazo. Recordemos, que en 1955 el matemático americano Hassler Whitney (n.1907) publicó el artículo **"Mappings of the plane into the plane"**, donde expuso las bases de una nueva teoría matemática- La teoría de Singularidades de Aplicaciones Suaves. A mediados de los años 60, comienza a hablarse del libro de René Thom **"Stabilité Structulle et Morphogénèse"**, que apareció en forma acabada en 1972 y que rápidamente despertó la atención e interés de todos por una teoría conocida ahora como Teoría de las Catástrofes. Thom propuso utilizar la teoría topológica de los sistemas dinámicos, para la modelación de diversos fenómenos de crecimiento y desarrollo en diversas ramas, principalmente la biología. El señaló que bajo algunas condiciones exigidas, se deduce que el estudio de diversos sistemas se puede describir, localmente, mediante algunas formas elementales estándar llamadas, catástrofes elementales.

Desde los años setenta este discurso de Rene Thom que apuntaba a una nueva ciencia, a la que él llamó Semiofísica, la física de las formas significantes, cobró gran impulso sobre todo porque buscó dotar de sentido al observador que contempla la evolución de las formas que ocurren en la Naturaleza: seres estables -o formas emergentes- y entidades no visibles, las llamadas pregnancias, especies de semillas de donde surge la forma. Esta metodología hace una crítica a la ruptura galileana, acusándola de haber abandonado algunas intuiciones fundamentales que formaban parte importante del discurso científico de los antiguos[58].

Algunos consideran que la Teoría de las Catástrofes, es una parte de la Teoría de las Singularidades, mientras otros afirman lo contrario. Es una disputa bizantina. Aplicaremos el término teórico de las catástrofes (siguiendo a Arnold), a cualquiera que trabaje sobre la **Teoría de las Catástrofes**, concebida como uno de los términos singularidades, bifurcación o catástrofe.

De acuerdo con Thom el término Teoría de las Catástrofes, es debido a su discípulo E. C. Zeeman[59]. Desde un punto de vista de trabajo, podemos decir que la Teoría de las Catástrofes no es más que la Teoría de la Bifurcación desde un punto de vista topológico, o sea, es el estudio,

desde un punto de vista cualitativo de las formas en que las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden variar. La primera información sobre esta apareció, por primera vez, en la prensa occidental, hace alrededor de 20 años. En el **"Newsweek"** reportaron una revolución en las matemáticas, comparable quizás, al descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral. Ellos afirmaron que la nueva ciencia, la Teoría de las Catástrofes, era mucho más importante que el Análisis Matemático: mientras este sólo considera procesos suaves, continuos, la otra provee un método universal para el estudio de todas las transiciones de salto, discontinuidades y cambios cualitativos súbitos. Aparecieron cientos de científicos y publicaciones sobre el tema y sus aplicaciones a variados campos que van, desde el estudio del corazón al estudio de la teoría de partículas elementales, pasando por el estudio de los desórdenes mentales y la censura policial a la literatura erótica.
Esbozaremos algunos de los capítulos fundamentales en la historia de la teoría de las catástrofes.

Antigüedad. En los años 610-546 a.n.e., Anaximandro de Mileto se establece como el principal expositor del orden. Considera que el principio de las cosas está en el apeirón, lo indeterminado; de él surge el mundo, al que por primera vez llama cosmos, orden, término que hasta entonces había tenido sentido social referido exclusivamente a la organización en tribus o como en Homero, a la formación de humanidades. Esta noción de orden aparecía después que varias generaciones habían contemplado el carácter cíclico de los movimientos celestes: los cambios en la fase de la Luna y su periodicidad, y la bóveda que, tachonada de estrellas, noche a noche maravillaba a quienes la observaban en su imperturbable curso. Todo esto despertó en la conciencia del hombre antiguo la inquietud por entender el contraste entre la certeza de los acontecimientos en los cielos y la incertidumbre propia de la vida sobre la Tierra. La búsqueda del orden es encontrar un lenguaje que lo describa y de principios que lo expliquen.
Según Anaxímenes (588-525 a.n.e.), las cosas surgen de la condensación y refracción del aire y señala que el cambio cuantitativo da lugar a la diversidad de la realidad. Por el contrario, en Jenófanes, encontramos que es en la tierra en donde se origina y sobre todo en la que todo perece, y es la que aporta el principio material del mundo. Estas visiones configuran una búsqueda centrada en los problemas de cambios y, por ende, la búsqueda de aquello que permanece inmanente.
Heráclito (544-483 a.n.e.), escribe su obra "**Sobre la Naturaleza**" que llegó a nosotros en fragmentos, famosa por su profundidad de pensamiento y el carácter enigmático de la exposición (de ahí el apodo de Heráclito: "oscuro"), según él la sustancia primaria es el fuego, elemento más capaz para el cambio y movible. La vida de la Naturaleza es un proceso ininterrumpido de movimiento. En él, toda cosa y toda propiedad se transforma en su contrario: lo frío se convierte en caliente; lo caliente en frío...
La universalidad del cambio y la transformación de cada propiedad en su contrario hacen relativas todas las cualidades.
Leucipo (500-400 a.n.e.), pone tres conceptos nuevos: 1) vacío absoluto, 2) átomos que se mueven en este vacío y 3) necesidad mecánica. Fue el primero en establecer la causalidad como ley de la razón. "*Ni una sola cosa surge sin causa, todo surge sobre alguna base y en virtud de la necesidad*".
Demócrito de Abdera (470-370 a.n.e.), reconocía dos principios primarios: los átomos en el vacío. Los átomos, es decir, las partículas indivisibles de la materia, son inmutables y eternos, se encuentran en constante movimiento y se diferencian unos de otros tan sólo por la forma, magnitud, situación y orden. El otro planteamiento es que una multitud incontrolable de átomos

se mueven eternamente en el vacío infinito, pero se desplazan en diversas direcciones, sin chocar nunca entre sí y forman torbellinos...

Aristóteles (384-322 a.n.e.) fundador de la lógica en el 335 a.n.e., creó en Atenas su propia escuela (Liceo). Él distinguía: 1) la parte teórica: doctrina del ser, sus partes, causas y principios; 2) la parte práctica: sobre la actividad humana y 3) la parte poética: sobre la creatividad. Reconocía cuatro causas: 1) la materia, o la posibilidad pasiva del devenir; 2) la forma (esencia del ser), realidad de lo que está dado en la materia sólo como posibilidad; 3) comienzo del movimiento y 4) la finalidad. Concibe toda la Naturaleza como transiciones consecuentes de la "materia" a la "forma" y viceversa. El fin último de la ciencia consiste en determinar el objeto, y la condición para ello es la unión de la deducción y la inducción... Sostiene que la forma es la causa de la flotación de un cuerpo sobre un líquido. Es apasionado por la observación de los fenómenos naturales, enfatizó la importancia de coleccionar y clasificar datos, y su manera de pensar, que consideraba como propiedades inherentes de las cosas lo que posteriormente fue identificado como causa y efecto, ha pasado la prueba del tiempo satisfactoriamente. Considera el movimiento en un medio continuo como el aire o el agua, y por ende, está considerando una dinámica de fluidos.

Con Epicuro (341-270 a.n.e.), se introducen cambios originales en el atomismo del Leucipo y Demócrito: para explicar la posibilidad de choque de los átomos que se desplazan en el espacio vacío con igual velocidad, introduce el concepto de desviación espontánea (condicionada internamente) del átomo en línea recta.

Lucrecio Caro (99-55 a.n.e.), en su texto "**Sobre la naturaleza de las cosas**"[60], enfrenta orden y desorden, ananque y caos, necesidad versus libertad. La primera cosmovisión que integró en forma coherente el origen, las causas y el devenir de las cosas de este mundo, surgió del pensamiento atomista y tuvo su expresión más acabada y poética en la obra de Lucrecio, seguidor convencido de Epicuro. El universo lucreciano se inicia en el caos, un estado donde impera el desorden en la materia y en la energía, un paisaje donde sólo existen elementos sólidos que se desplazan en un medio fluido. Dos modelos coexisten: la catarata de átomos que caen libremente en el vacío, fluyendo a lo largo de trayectorias paralelas y la nube caótica, masa desordenada fluctuante, de similitudes y oposiciones, de intervalos sin eventos, de colisiones que ocurren al azar. ¿Cómo escapar de este mundo sin orden, sin vida, sin ley?.

La experiencia enseña que rara vez flujos paralelos, también llamados laminares, mantienen dicha condición, siempre se alcanza un estado de mayor o menor turbulencia siguiendo líneas que se enredan, generando formas que giran una y otra vez, plasmando imágenes de vórtices o remolinos. Desde Epicuro hasta Lucrecio, el movimiento turbulento constituye el instrumento primitivo de construcción, y la cuestión esencial del atomismo es revelar cómo surge la rotación, cómo se forman los vórtices.

El modelo lucreciano de turbulencias habla no sólo del espacio y la materia, sino también del tiempo. Aquí y allá, aleatoriamente, surge el vórtice en tanto deja de ser. Pareciera que la física atomista entreviera los dos principios de la Termodinámica Moderna: por una parte la entropía o degradación irreversible de la energía; por otra, la invariancia de fuerzas o energías.

El vórtice conduce al aumento de la entropía, revela la irreversibilidad del tiempo y, sin embargo, en el Universo hay una permanencia: a la degradación de una cosa corresponde el nacimiento de otra, una declinación anuncia el surgir de una turbulencia. La Física de Lucrecio es nueva, en ella lo global tiene en cuenta lo local, lo previsible asume lo imprevisible; es un discurso que habla de cierto equilibrio general en el universo estocástico.

La espiral es posiblemente el más polifacético de los patrones de la Naturaleza. Surge cuando algo crece o se dispersa desde un centro, o gira hacia él. Además de llenar el espacio de manera eficiente, la espiral es una ruta de expansión y exploración, es la imagen de los movimientos circulares que dan lugar a la turbulencia, ese paradigma del movimiento desordenado, caótico. De esos vórtices, turbulencias y caprichos del movimiento que irrumpen en el mismo sitio, surgen imágenes desenfrenadas de las aguas y las estructuras producidas en túneles de viento.

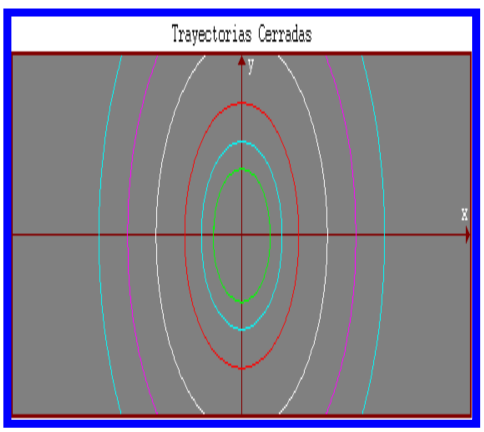
Edad Media y Renacimiento. En los inicios del siglo XVI, los concepciones galileanas iniciaban la ruta victoriosa que culminaría en Newton, sin embargo de manera tajante, Galileo anulaba la cuestión de la estabilidad de una barca y que hoy sabemos depende de manera crítica de la forma, en abierto enfrentamiento con la posición aristotélica, afirma que la fuerza de Arquímedes es la única causa de los fenómenos de flotación.

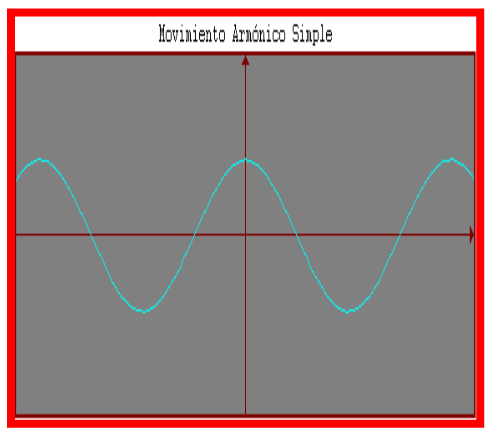
En particular, muchas de las cuestiones que apelaban a criterios cualitativos, o a argumentos relacionados con el esclarecimiento de las causas aristotélicas, fueron sustituidas por la filosofía mecanicista. Explicarían la constitución del mundo y sus fenómenos en términos de partículas y las colisiones entre ellas. Lo único que existía eran átomos y el vacío, y lo que ocurría derivaba única y exclusivamente de los movimientos de los átomos en el vacío. Este enfoque tuvo su triunfo.

Galileo no considera que el movimiento posee la facultad de provocar calor según prevalecía en el Medioevo, su mecánica de sólidos solo tenía en cuenta el desplazamiento en el vacío.

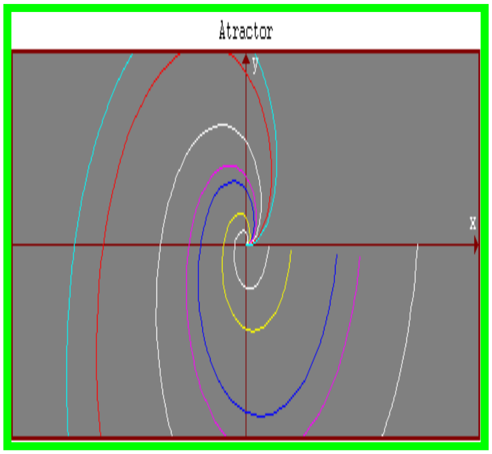
De Heráclito es rescatable un fragmento célebre donde señala que *"el conflicto es el padre de todas las cosas"*. De aquí se puede entrever la idea de que en ocasiones no existe una única causa de los fenómenos, visión que no es compartida por Galileo y sus sucesores, lo que procede es buscar una única razón.

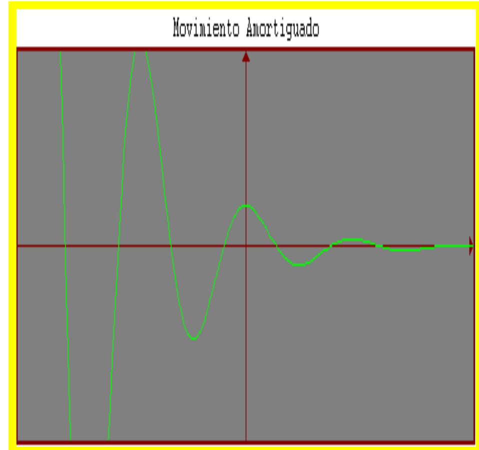
Por ejemplo, el péndulo con fricción, que oscila con una amplitud cada vez menor alrededor del punto de equilibrio estable, se aproxima en el esquema aristotélico a su lugar natural. En la representación gráfica de este comportamiento, i.e., en las curvas que aparecen en el espacio de fase, lo relevante es la trayectoria y que ésta termina en un punto, es decir, lo que importa destacar es la forma cualitativa del comportamiento. Más incomprendido aún que los anteriores pensadores, Lucrecio en su "**De Rerum-Natura**" ya citada, presenta una fenomenología del acontecer natural que lo pone fuera de toda comparación o conmensurabilidad, como dirían algunos metodólogos modernos[61] con la propuesta galilea y la newtoniana.





Si se considera un péndulo sin fricción y en el régimen de oscilaciones pequeñas, su retrato de fases muestra una imagen del comportamiento dinámico en forma de circunferencias concéntricas en el origen, (si se escogen adecuadamente las unidades, el péndulo simple con oscilaciones pequeñas es equivalente al oscilador armónico). El sistema de ecuaciones diferenciales que lo describen es $x' = y$ e $y' = -x$. Si se agrega un término de fricción, por pequeño que sea, la calidad de la dinámica se altera drásticamente, reflejándose en la





topología de las curvas que conforman el espacio fase. Con la nueva dinámica, $x' = y$ e $y' = -x - ky$ ($k \neq 0$ suficientemente pequeño), el comportamiento cualitativo queda descrito por espirales, que ilustran el hecho de que en casos como éste, el destino final del péndulo es alcanzar inexorablemente el origen por lo que a dicho punto se le llama *atractor*, estado que corresponde al reposo en la posición de desplazamiento nulo (sería un oscilador amortiguado). Obviamente, ambos casos corresponden a comportamientos completamente distintos, y el segundo manifiesta una cualidad que el primero no tenía, *la estabilidad estructural*. Este término califica la propiedad de que ante una perturbación el nuevo sistema se comporta de manera equivalente al no perturbado, lo cual es una manifestación de que la "forma" de las soluciones es la misma, en términos más precisos se dice que las soluciones son *topológicamente equivalentes*.

Volviendo a un punto ya tratado, la Física de Lucrecio es una Física de lo acuoso y del equilibrio - y del alejamiento o caída hacia él - y en la que con algo de imaginación y buen oficio podríamos retomar a los átomos lucrecianos como los vórtices en el agua, y al clinamen, la supuesta desviación fortuita e infinitesimal de la línea recta, como la derivada; y sin embargo, para los propósitos de Lucrecio esto no resulta necesario, su enfoque explicativo se remite a las formas y su generación y desaparición, y el peso de su discurso está del lado de lo cualitativo.

Los fenómenos que se ocupa Lucrecio son el trueno, el relámpago, las nubes, el arco iris, los terremotos, las aguas de los ríos y mares, las fuentes de las calamidades. Hoy, al referirse a estos fenómenos se les remitiría a la meteorología o la geofísica, ramas consideradas sin glamour hasta hace sólo un par de décadas. La razón es obvia, aquellos eran los fenómenos que poblaban el reino de lo desconocido, de lo impredecible, de lo casual, de la forma no significante. Lucrecio distingue entre la caída en el agua y en el aire, que es más rápida en la medida que el cuerpo sea más pesado, y la que tiene lugar en el vacío, donde todos los cuerpos caen con la misma velocidad (Lucrecio-Ob. Cit., II, 230-239). Más no reduce la primera a la segunda suponiéndola ley universal.

"Es verdad que en el aire o en el agua
aceleran los cuerpos su caída
según su pesadez, porque las aguas
y el fluido del aire a todo cuerpo
no pueden resistir del mismo modo;
ceden más fácilmente a los más graves,
más no sucede así con el vacío;
ninguna resistencia opone al cuerpo;
a todos igualmente les da paso,

por lo que los principios, desiguales
en sus masas, moverse en el vacío
deberán todos con igual presteza. "

Esta concepción del mundo le parecería absurda a los galileanos y a cualquier científico que haya surgido en el paradigma del mecanicismo, o en la del positivismo y sus derivados, no así a quienes en nuestros días han caído presa de la fascinación de las ciencias de la complejidad. El clinamen estaría emparentado con lo que hoy se llama *sensibilidad a las condiciones iniciales*, propiedad característica de los sistemas con fricción y ubicuíta en los problemas planteados en el contexto de la mecánica de fluidos.

En Leonardo, encontramos la ventaja que le confería su genio artístico el cual le permitió unir saber acumulado de técnicos, ingenieros y naturalistas con los resultados de su propia experiencia. De tal fusión resultó una obra que, además de colmar los reclamos estéticos de los siglos venideros, ha gozado de un valor incalculable por los detalles que nadie antes que él captó, al plasmar las formas de los fenómenos. Era una búsqueda del entendimiento de los procesos naturales, basada en la captación de la forma que asumían los elementos participantes. Al igual que Lucrecio, lo que Leonardo observa y estudia ocurre en los fluidos - el desvío de ríos, el vuelo de pájaros - en las estructuras - puentes, fortalezas, los músculos y la osamenta del hombre - y en las maravillas de la naturaleza viviente, sea en el reino vegetal o en productos del intelecto, desde una planta o arbusto hasta las figuras geométricas diseñadas por Paccioli. Siempre dominan la forma, la geometría y no la aritmética, la armonía reflejada en las figuras y no las proposiciones numéricas de las que Galileo se ocupaba. Es el discurso de lo cualitativo que rinde sus frutos.

En un manuscrito de Leonardo que se conserva en la biblioteca del Institut de France (Leonardo (1492) (1979)-**"Codice A"**, Citado en los Frammenenti Letterari de Leonardo Giunti Barbera, Florencia, folio 60) se lee: *"Universalmente todas las cosas desean mantener su propia naturaleza, de donde el curso del agua busca mantener su curso según la potencia de su causa y, si enfrenta oposición, da fin al susodicho curso en un movimiento circular y retorcido"*. En el lenguaje de los sistemas dinámicos se diría que, ante la perturbación, el sistema evoluciona hacia el atractor. Si pensamos a la inversa, es decir, si sometemos la terminología moderna a las imágenes leonardinas, encontramos que la disciplina que se ocupa de los atractores es una física del agua y que la primera ley correcta que se planteó de los vórtices se debe a Leonardo: *"la velocidad con que se mueve un punto en el vórtice es inversamente proporcional a la distancia al centro del vórtice"* (en los años 1504-06).

Al igual que la de Lucrecio, la visión de Leonardo recurre a lo que se observa a lo genérico, a lo estructuralmente estable - matemáticamente hablando - y no hace distinción alguna entre el mundo material mecánico y el mundo natural orgánico o mundo del hombre. Y aquí resulta el papel de la analogía en el pensamiento renacentista: *"el vuelo del hombre deberá imitar al del pájaro, el sonido se trasmite en el aire como una perturbación en el agua al caer una piedra, el vuelo de un pájaro es como el de una barca sobre las olas"* (Koenisberg, D. (1979)-**"Renaissane Man and Creative Thinking, A History of Concepts of Harmony 1400-1700"**, Harvester, Great Britain).

La información visual que surge de ilustrar los movimientos de la onda sugiere que formas similares corresponden a comportamientos análogos, de ahí que el estudio de ciertas formas de comportamiento caótico se generaban sin ninguna referencia a los mecanismos específicos que los provocaban, es decir, algunos movimientos caóticos seguían trayectorias similares independientemente a procesos descritos por la ecuación de la mecánica cuántica, de la cinética

molecular, del electromagnetismo o de la morfogénesis.
Descartes, en 1629, escribió "**El Mundo o Tratado de la luz**", sin embargo la condena de Galileo le decidió a guardar el manuscrito, que no se hizo público sino hasta 1677. Esta no se reduce a una propuesta cosmológica del Mundo, es además, una propuesta de génesis y organización del universo: La teoría de los Vórtices, ver O. Hamelin (1949)-**"El sistema de Descartes"**, Buenos Aires, Editorial Losada, 345-346 y A. Kenny (1968)- **"Descartes. A history of his philosophy"**, New York, Radom House, 1968.
La teoría de los torbellinos como primer ejemplo de una explicación matemática universal de los fenómenos es de valor incalculable; y aunque fuera enteramente errónea su valor sería el mismo. Lo que más llama la atención es sin dudas la propuesta cosmológica cartesiana. En la que intenta dar cuenta de la génesis del Universo en tanto cosmos o naturaleza regulada.
De alguna manera, el origen del mundo puede entenderse en Descartes como el paso del "caos" al cosmos y señala:

"Pues Dios ha establecido tan maravillosamente estas leyes, que aunque supongamos que El no cree nada más de lo que he dicho, e incluso que no ponga en esto ningún orden ni proporción, sino que componga con ello un caos, el más confuso y embrollado que los poetas puedan describir; ellas [las leyes] son suficientes para hacer que las partes de este caos se desembrollen por sí mismas y se dispongan en buen orden que tendrán la forma de un mundo muy perfecto, en el cual podremos ver no solamente la luz sino también todas las otras cosas tanto generales como particulares que aparecen en este verdadero mundo".

Siglos XVII-XIX: el Cálculo Infinitesimal. Isaac Newton (1643-1727), cambia la concepción que se tenía del Universo. Encuentra leyes que muestran las regularidades que tienen lugar en la Naturaleza, que estas pueden ser analizadas y procederse de hecho. La ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaban que quedaba poco por descubrir.
Se establecen ecuaciones para modelar fenómenos físicos, aún cuando no hubo grandes éxitos al tratar de resolverlos. Euler dijo: *"Si no nos está permitido alcanzar un entendimiento completo del movimiento de un fluido o de la mecánica o los principios conocidos del movimiento, no es a ellos a los que debemos echarles la culpa. Es el análisis que nos muestra su debilidad en este respecto".* Por otra parte, los notables avances en la solución de ecuaciones diferenciales hacían pensar que los problemas no resueltos, tales como el movimiento de los tres cuerpos bajo la influencia de la gravedad, eran excepciones.
En 1750, Lagrange tomó las ideas de Euler y produjo una reformulación de la dinámica. Dos ideas importantes se desprenden de su trabajo: la primera fue *el principio de conservación de la energía* y la segunda, el *introducir coordenadas generalizadas* en el formalismo de la mecánica. Un sistema de coordenadas permite convertir la geometría en álgebra, asociando a cada punto un conjunto de números y demostró que no dependen del sistema de coordenadas que se utilice. Más tarde, Willian R. Hamilton reformuló la dinámica de un sistema, logrando una mayor generalidad.
Dado un estado natural del sistema de un tiempo determinado y las leyes que lo gobiernan, se consideraba que en principio se podía determinar su estado futuro con toda la precisión necesaria, pero estas consideraciones generales pronto mostraron su debilidad al intentar reducir las divergencias entre la teoría y la observación. El caso más sonado se remonta a los problemas que originalmente constituyeron el triunfo más espectacular de la ciencia inaugurada por ese genio singular que fue Newton. Las órbitas de los planetas debían ser

elipses perfectas e inevitables, si cada planeta en su traslación sólo se viera afectado por el Sol; si por el contrario resulta perturbado por los demás, esto no sería así. Si la posición de un planeta se produce a partir de las observaciones hechas durante cierto movimiento, suponiendo que recorre una elipse perfecta y sin tomar en cuenta pequeñas perturbaciones, es evidente que cuando se haga una confrontación con las observaciones en tiempos posteriores se encontrará una discrepancia entre lo predicho y los observado, tanto mayor cuanto más largo sea el tiempo transcurrido entre las dos observaciones..., así se estudia uno de los problemas más difíciles de la física y las matemáticas, es el llamado problema de los N cuerpos (el Sol y los planetas que interactúan gravitacionalmente).

En 1896 como resultado de la segunda ley de la termodinámica aparece la paradoja de Loschmidt y el demonio de Maxwell. Por ejemplo, si tenemos un gas dentro de una caja y suponemos que todas las moléculas se mueven en la misma dirección con la misma velocidad y perpendiculares a una de las paredes de la caja con la que van a incidir- no convergían con el paso del tiempo a la distribución de Maxwell. Este tipo de consideración, Boltzman la calificaba de excepcional, sin embargo su colega y profesor J. Loschmidt le hizo ver que la segunda ley podía ser violada, si habiendo observado el movimiento libre de las partículas procedemos a tomar la velocidad contraria para cada una de las partículas encerradas en la caja, lo cual ante nuestros ojos significaría que el tiempo fluye hacia el pasado. Esto resulta así en tanto que todo se movería como si invertir el sentido en que se proyecta una película del movimiento original. Boltzman de inmediato reconoció que estaba frente a una paradoja: el problema de reconciliar el flujo del calor, que depende de la dirección del tiempo, con las leyes de la mecánica, las cuales no dependen del sentido en que fluye el tiempo. Esta paradoja se conoce como la "paradoja de la inversibilidad o de Loschmidt".

Formular una respuesta satisfactoria a este rompecabezas intelectual le tomó aproximadamente un decenio.

En 1898, Boltzman reformuló lo que se conoce como el teorema H: no importa cual sea la distribución inicial de la energía cinética, para intervalos de tiempo ésta siempre se aproxima a la distribución de Maxwell.

Finales del siglo XIX y principios del siglo XX. H. Poincaré (1854-1912), identifica la problemática que daría lugar a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales: estudia las propiedades de las trayectorias sin apelar a la solución analítica, la cual en las ecuaciones no lineales es difícil de obtener, si no imposible. Usa para ello el espacio de fases que es el conjunto de puntos que representa los estados posibles del sistema. Una solución del sistema se puede contemplar como una curva en dicho espacio que, al ser recorrida, marca la evolución del estado de un sistema.

Esta presentación de los problemas permitía una clasificación de los comportamientos que a la vista resultaba muy atractiva: curvas abiertas, trayectorias cerradas (que representaban movimientos periódicos), trayectorias que asintóticamente convergen una a las otras, etc. En este contexto resultó que los obstáculos y complicaciones que surgen en el estudio de sistemas compuestos por varias partículas son de la misma clase que los enfrentados por Poincaré.

Fue precisamente el problema de los tres cuerpos lo que lo llevó a pensar en la complejidad de un sistema, consulte J. Delgado y L. Vela (1992)-**"El problema restringido plano y circular de tres cuerpos"**, Memorias XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Xalapa (Veracruz), Volumen II, 15-62. En 1887, H. Poincaré demostró que dicho problema no tenía solución en el sentido que había sido planteado, es decir, el problema estaba planteado de modo incorrecto. Sus dudas lo llevarían a estudiar una idealización del problema de los tres cuerpos, llamado modelo reducido de Hill, que se ocupa del caso en que uno de los tres cuerpos tiene una masa tan pequeña que no afecta a los otros dos, aunque éste si se ve afectado por ellos. De hecho, Poincaré encontró que el comportamiento es tan complicado y poco intuitivo que en sus "**Nuevos Métodos de la Mecánica Celeste**" escribió: *"Cuando uno trata de dibujar la figura que forman estos dos cuerpos y la infinidad de intersecciones, cada una de las cuales corresponde a una doble solución asintótica, dichas intersecciones forman una especie de tejido o red; ninguna de las dos curvas puede cruzarse consigo misma, pero debe doblarse sobre sí de una forma tan complicada..."*. Más adelante insiste sobre este punto: *"que nada nos puede dar mejor idea de la complejidad del problema de los tres cuerpos"*.

El resultado de Poincaré no invalidaba los cálculos aproximados hechos por Laplace y Leverrier en el campo de la astronomía, pero imponía restricciones a la predicibilidad, en tanto que mostraba que errores arbitrariamente pequeños en las soluciones no permanecerían necesariamente como tales por intervalos arbitrariamente largos. Más importante aún, aunque poco apreciable en su momento, fue su demostración de las órbitas llamadas inestables, en los problemas que trataban tres o más cuerpos. La inestabilidad de las órbitas se traducía en que para un cambio minúsculo en las condiciones iniciales, se producían notables cambios claramente desproporcionados en las órbitas.

Señala: *"Hoy, las ideas han cambiado mucho; y, a menudo, aquellos que no creen que las leyes naturales deben ser simples, están frecuentemente obligados a ser como si lo creyeran. No podrán sustraerse enteramente a esta necesidad sin tornar imposible toda generalización y, por consiguiente, toda ciencia"* [62].

Está claro que un hecho cualquiera puede generalizarse de muchas maneras y si se trata de elegir, la elección debe ser guiada por cuestiones de simplicidad. Tomemos el caso más trivial, el de la interpolación. Hacemos pasar un trazo continuo, lo más regular posible, entre los puntos dados por la observación. ¿Por qué evitamos los puntos angulosos, las inflexiones bruscas?. ¿Por qué no hacemos describir a nuestra curva, zigzags más caprichosos?. Es porque sabemos de antemano, o creemos saber, que la ley a obtenerse no puede ser tan complicado como ello.

Así, Kepler señala que las posiciones observadas por Tycho, están sobre una misma elipse. No ha pensado que por un juego singular del azar, Tycho ha mirado solamente al cielo en el momento en que la trayectoria verdadera del planeta cortaba esta elipse...(otros datos de interés, pueden encontrarse en R. Martínez (1992)-**"Sistemas dinámicos y pensamiento antiguo"**, XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. II, Memorias, Xalapa, Veracruz, 133-146 y R. Martínez y R. Bulajich (1993)-**"Caos. Memoria antigua, realidad moderna"**, Ciencia y Desarrollo, Vol XVIII, Núm. 105, 12 -27).

En los años 50 y 60 comienzan a aparecer todo tipo de comportamientos extraños y desordenados en las computadoras, comportamientos que poco a poco fueron cediendo a ser clasificado de alguna manera, gracias en gran medida a los trabajos de Kolmogorov, Arnold y Smale[63].

Smale retomó el trabajo de Poincaré y lo enjuició aportando mayor claridad a lo que sucedía durante el seguimiento de dos trayectorias localizadas en la región del espacio de fases considerada caótica. Si ambas trayectorias sólo difieren por establecer una escala a partir de la sexta cifra decimal, y se sigue la sucesión de estados que ambos van recorriendo, resulta que después de unos centenares de puntos de las sucesiones, aparentemente se han mezclado de una forma caótica, aleatoria, en ocasiones estando cercanas una de otra y, después de unos cuantos pasos en su evolución, se vuelven a separar. Uno podría pensar que este resultado es producto de la inexactitud con que se consideran las condiciones iniciales. En realidad, como lo muestra

el teorema de Smale, aun cuando se hayan agregado otras cifras decimales más - digamos otras seis - a las condiciones iniciales, el tiempo en que se puede hablar de predicibilidad aumenta sólo en un factor de dos. La única conclusión es que en la práctica el comportamiento de este tipo de sistema no es predecible (S. Smale (1970)-**"Differentiable Dynamical Systems"**, Bull Amer. Math Soc. Vol. 73, 747-817).
Retomando los inicios de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales tenemos que Poincaré y Bendixon demostraron que para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en dos dimensiones, el comportamiento de las soluciones se puede clasificar topológicamente en cuatro casos relativamente sencillos en cuanto a su representación en el espacio de fases. En nuestros días y gracias al uso de las computadoras, al intentar clasificar y entender las representaciones gráficas de la dinámica de un sistema que se mueve en tres dimensiones, han aparecido ante nosotros una fuente de formas exóticas: los fractales.
Algunas de las propiedades fractales surgen del intento de clasificar las representaciones gráficas de comportamientos tan complicados (algunos ejemplos se presentan en I. Stewart (1989)-**"Does God Play Dice?"**, The New Mathematics of Chaos, Penguin, Londres, I. Stewart and M. Golubitsky (1991)-**"Fearful Symmetry. Is God a Geometer?"**, Blackwell, Oxfort y R. Stoop (1991)-**"Scaling behavior in dissipative dynamical systems"**, Universitat Zurich), que hacían que resultaran inútiles las formas tradicionales que enfrentan este tipo de problema. Uno de los primeros usos de las nociones de fractalidad se dio en uno de los problemas que por tradición ha sido considerado arquetipo de lo aleatorio: la turbulencia.
En 1930, A. N. Kolmogorov dio una descripción matemática que ayuda a entender parcialmente como se mueven los vórtices; sin embargo, ante esta presentación surgen algunas preguntas: si se tiene un flujo que se mueve suavemente, todas sus partículas siguiendo líneas paralelas. ¿Cómo es que se torna turbulento? y antes de que la turbulencia se desarrolle ¿qué estados intermedios existen?. Esta problemática la planteó L. D. Landau, científico ruso cuyo texto en la dinámica de fluidos sigue siendo fundamental. A mediados del decenio de los 40, Landau propuso una recta hacia el estado turbulento que a medida en que variaban los parámetros del sistema se producían bifurcaciones. Este tipo de concepto matemático permite describir el paso al estado caótico del movimiento suave de un líquido o de una columna de humo, al aumentar su velocidad, da lugar a giros violentos, superposiciones y entrecruzamientos, unidos y zigzagueos de líneas de flujo. Tales imágenes nos llevan al formalismo que habla de la superposición de varios movimientos oscilatorios que provocan pérdida aparente del orden en el sistema.
Sin embargo, aún no se ha probado experimentalmente la validez de la teoría de Landau en la transición a la turbulencia, y de hecho en la actualidad nadie espera que este sea el camino que sigue la Naturaleza.
Hace un poco más de veinte años, D. Ruelle concluyó: *"No hay una teoría de la turbulencia"*, ver D. Ruelle (1991)-**"Hasard et chaos"**, Ed. Odile Jacob, Paris, es decir, la turbulencia se resistía al análisis. Sus estudios están en el marco alternativo de Landau, ayudados por los estudios de Smale que dieron lugar a la "herradura de Smale", y que describe una forma general de complejidad. Junto con F. Takens, a principios del decenio de los años 70, estudian qué clase de comportamiento, en el espacio de fases, se le podría asociar a un fluido turbulento, buscando ofrecer un sustituto a la forma tradicional de ver la transición a la turbulencia. Esto equivaldría a preguntarse qué tipo de atractor - una región en el espacio de fases a la cual tienden las trayectorias después de un lapso grande de tiempo - definía la turbulencia. No podría ser un punto fijo, pues equivaldría a que el flujo tendería hacia el estado de reposo; tampoco podría ser un ciclo límite - una trayectoria cerrada, el único otro tipo de atractor que

se pensaba existía - ya que esto equivaldría a alcanzar a la larga un estado de movimiento regular, es decir, periódico y por tanto predecible.
Ruelle y Takens se preguntaban si podría existir otro tipo de atractor que tuviera las cualidades deseadas: i) estabilidad, ya que representaría el estado final de un sistema inmerso en un universo con "ruido" de fondo, ii) dimensión baja, es decir, una órbita que se moviera en una región acotada del espacio de fase con pocos grados de libertad, iii) falta de periodicidad ó, lo que es lo mismo, que nunca cayera en un ritmo iterativo. Geométricamente estos requerimientos representaban que en un área finita nunca se repetiría ni se cruzará consigo misma, lo cual equivaldría a pedirle que fuera una línea de longitud infinita contenida en un espacio finito. Dadas las características tan fuera de lo común, a un atractor de este tipo - que corresponde a un estado de turbulencia, se le calificó de atractor extraño. Resulta interesante señalar que ya existían ejemplos que cumplían estos requerimientos, pero estaban perdidos en la literatura matemática al considerárseles casos patológicos y sin ningún uso inmediato. De hecho, en 1950, Birkhoff de hecho afirmaba que debía reconocerse la posibilidad de que causas arbitrariamente pequeñas produzcan efectos finitos, a lo que denominó *paradoja asintótica*, ver G. Birkhoff (1950)-**"Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude"**, Pricenton University Press.
El punto "filosófico" es que el conjunto de los puntos catástrofes K son los que contienen el comportamiento significativo del proceso, es decir, donde se trabaja es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del sistema. El es el esqueleto, del cual el resto de la morfología depende.
Consideremos un sistema dinámico gradiente:

$$dx/dt= -\text{grad}_x F(x,a), \qquad (29)$$

donde x y a son vectores de números reales (posiblemente, unidimensional) y F es infinitamente diferenciable, o suave. Llamemos a x variable de **estado** y a la variable de **control**.
Busquemos los puntos de equilibrio, así tenemos:

$$\text{grad}_x F(x,a) = 0.$$

El problema matemático es cómo varían las soluciones x de (29) con a, para F general. Si al resolver esto desde un punto de vista topológico, diferentes funciones F tienen el mismo comportamiento (local), se dicen que son equivalentes. Una clase de equivalencia de tales funciones F es llamada una **catástrofe elemental**.

Para una familia de funciones f:$\mathbf{R}^n \mathbf{x} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es decir, con n variables, denominadas <u>variables de estado</u>, y con k parámetros, denominados <u>de control</u>, si $n \leq 2$ y $k \leq 5$ Thom estableció la existencia de formas canónicas, a las que hacíamos referencia antes. A ellas son reducibles las funciones en estudio, si cumplen con la restricción antes citada y otra que se comentará más abajo.
En las catástrofes elementales, que listamos a continuación, las componentes x_1, x_2, ... de x han sido reemplazadas por x, y, ... y a_1, a_2, ...por a, b, ...

Nombre	*F(x,a)*	
Pliegue	$x^3/3 + ax$	A_2

Cúspide	$\pm x^4/4 + ax^2/2 + bx$	A
Cola de milano	$x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$	A_4
Mariposa	$\pm x^6/6 + ax^4/4 + bx^3/3 + cx^2/2 + dx$	$A_{\pm 5}$
	$x^7 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$	A_6
Ombligo Elíptico	$x^2y - y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_{-4}
Ombligo Hiperbólico	$x^2y + y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_4
Ombligo Parabólico	$x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$	D_5
	$x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_6
	$x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_{-6}
	$x^3 \pm y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + dx + ey$	$\Sigma_{\pm 5}$

Estos nombres son escogidos por una gran variedad de razones y deben ser tratados meramente como mnemotécnicos, las siglas de la última columna son las denominaciones de cada una de estas catástrofes elementales[64].

Estas catástrofes elementales, poseen una propiedad de estabilidad muy fuerte: la **estabilidad estructural**. Esta noción, como sabemos, se remonta al trabajo de Andronov y Pontriaguin de 1937[65], concepto desarrollado posteriormente, en conexión con la topología dinámica por Smale[66]. Esta es una propiedad muy deseada y Thom (junto a nombres como Lefschetz y Arnold) trata esto como un requerimiento esencial.

Es importante destacar, que la estabilidad estructural debe considerarse en un **contexto determinado**. El contexto comprende: a) una clase de sistemas matemáticos C , b) una clase de perturbaciones P, c) una relación de equivalencia R. En este contexto, un sistema es estructuralmente estable si demostramos que toda perturbación en P, lleva a un sistema en C que es equivalente, con respecto a R, al original.

Un péndulo simple, por ejemplo, considerado como un oscilador no forzado, es un sistema estructuralmente inestable (en el modelo usual) si la clase de perturbaciones incluye la posibilidad de términos de amortiguamiento. Restringiendo las perturbaciones al caso no disipativo solamente, es posible restaurar la estabilidad estructural.

Si consideramos la existencia de simetría, debemos restringir las clases P y C consecuentemente y así sucesivamente.

Sea f:$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, el carácter de los puntos críticos de esta función puede establecerse mediante el determinante de la matriz Hessiana H_f, también conocida como matriz de estabilidad por razones que se harán claras más adelante. Si el determinante de esta matriz es no nulo:

$$\det H_f \neq 0,$$

en los puntos críticos r, entonces estos son no degenerados. Se tratará de máximos, mínimos o puntos de sillas. Por el Lema de Morse[67], se puede reducir a una forma cuadrática en la vecindad del punto crítico:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 .$$

Entre otras razones, los puntos críticos de una función son importantes debido a que definen su forma cualitativa y, por tanto, el comportamiento en general del fenómeno real que representan. Cuando la matriz de estabilidad es singular para algún punto crítico ß, se tiene un punto crítico degenerado. En estas condiciones poco se podría decir respecto a las características de los puntos críticos si no se utilizara la Teoría de las Catástrofes. El lema de Morse no es aplicable y en principio no se cuenta con una forma canónica a la que fuera reducible la función.
Una propiedad de gran interés, que depende del tipo del punto crítico (sea degenerado o no), es la de estabilidad estructural a la que volveremos a continuación. Se dice que una función f:$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es estructuralmente estable si, para toda perturbación suficientemente pequeña p: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, la función perturbada f+p es equivalente a la función f, es decir, si existe un difeomorfismo que aplique f en f+p.
Topológicamente, lo anterior equivale a decir que la función f+p conserva el mismo número y tipo de puntos críticos que la función original f; o sea, que es cualitativamente la misma.
Las funciones con puntos críticos no degenerados, o Morse, son estructuralmente estables, por el contrario, las que tienen puntos críticos degenerados son estructuralmente inestables.
Físicamente, el concepto de inestabilidad estructural implica que la función, el fenómeno real mismo, puede modificarse significativamente con una pequeña perturbación.
Este tipo de comportamiento fue identificado por Birkhoff[68], quien entonces establecía que debe reconocerse la posibilidad, en Mecánica de los Fluídos, de que "causas arbitrariamente pequeñas puedan producir efectos finitos".
La condición de equilibrio:

$$\nabla f(x_i,c_j)=0,$$

define la superficie de equilibrio, o de estado, de cada función de catástrofe. Estas superficies son de especial importancia, debido a que en ellas se puede establecer y modelar el comportamiento de histéresis y discontinuidad. La proyección de la superficie de equilibrio sobre el plano formado por los parámetros de control (que se conoce como plano de control) permite identificar al conjunto bifurcación, es decir, la región donde la solución de la ecuación de equilibrio se bifurca.
Para concluir, digamos como Ascher y Poston que *"all mathematics is something like a chisel. When it is used as a hammer, the results are ussually remarkable and occasionally fatal"*.

Capítulo 17. **Realidad Moderna.**

"Los métodos son los hábitos del espíritu y la economía de la memoria"

Rivarol

La descripción matemática del mundo depende, sobretodo, de una delicada interrelación entre la continuidad y discontinuidad, `fenómenos discretos'. Singularidades, Bifurcación y Catástrofe son términos diferentes para la descripción del surgimiento de estructuras discretas a partir de otras suaves, continuas.
La teoría de las singularidades es una generalización del estudio de funciones en sus puntos de máximo y de mínimo. En la teoría de Whitney las funciones son reemplazadas por aplicaciones, i.e. colección de varias funciones de varias variables.
Whitney observó que, genéricamente, sólo dos tipos de singularidades pueden aparecer. Todas las demás, se transforman en una de estas, bajo pequeñas perturbaciones del cuerpo o de la dirección de proyección, mientras que estos dos tipos, **pliegue** y **cúspide**, como él los llamó, son estables y persisten después de pequeñas deformaciones de la aplicación.
En los últimos 30 años esta teoría ha adquirido un sofisticado nivel, principalmente debido a los trabajos del propio Whitney, de Thom (1959) y J. Mather (1965). Se ha convertido en una poderosa herramienta con un amplio rango de aplicaciones, principalmente vinculada con la **"Teoría de la Bifurcación"**.
El término bifurcación como entendemos ahora, significa rompimiento y es usado en un sentido amplio para designar toda suerte de reorganización cualitativa o metamorfosis de varias entidades que resultan de un cambio de los parámetros sobre las cuales ellas dependen.
Catástrofes, son cambios bruscos que surgen como una respuesta súbita del sistema a un cambio suave en las condiciones externas.
Como una ilustración de esta teoría, presentaremos la **"Pérdida de la Estabilidad del Equilibrio y del modo Auto-oscilante de comportamiento"**. La pérdida de estabilidad de un estado de equilibrio por cambio de los parámetros, no tiene por qué estar asociada, obligatoriamente, con la bifurcación del estado de equilibrio: se puede perder la estabilidad no sólo por colindar con otro estado, sino también, por el mismo.
Analicemos las siguientes reorganizaciones del retrato de fases de un sistema plano:

a) Por un cambio del parámetro el estado de equilibrio da nacimiento a un ciclo límite (de radio $\sqrt{\varepsilon}$, donde el parámetro difiere del valor de bifurcación por ε). La estabilidad del equilibrio es transferida al ciclo y el punto de equilibrio es inestable.

b) Un ciclo límite colapsa en el estado de equilibrio: el dominio de atracción del estado de equilibrio desaparece con el ciclo y cuando este desaparece, transfiere su inestabilidad al estado de equilibrio.

Si nuestro estado de equilibrio, es el comportamiento establecido en un sistema real, entonces bajo cambios de los parámetros, los siguientes fenómenos son observados en los casos a) y b).

I. Después de la pérdida de estabilidad del equilibrio un comportamiento oscilatorio periódico queda establecido, la amplitud de las oscilaciones es proporcional a la raíz cuadrada de la "criticalidad" (la diferencia entre el parámetro y el valor crítico, en el cual el equilibrio pierde la estabilidad).
Esta forma de pérdida de estabilidad es llamada "suave", puesto que el comportamiento oscilante, para un valor de la criticalidad pequeña, difiere poco del estado de equilibrio.

II. Antes de establecer el estado de pérdida de la estabilidad, el dominio de atracción del estado, tiende a ser muy pequeño y al presentarse perturbaciones, el dominio de atracción desaparece completamente.
Esta forma es llamada "dura". Aquí el sistema deja su estado estacionario con un salto a un estado diferente de movimiento. Este estado puede ser otro estado estacionario estable o cierto movimiento más complicado.

Las condiciones de movimiento establecidas han sido llamadas "atractores" puesto que `atraen' las condiciones vecinas (transitorias). La existencia de atractores con curvas de fases exponencialmente divergentes sobre ellos y la estabilidad de tal tipo de fenómenos, fue establecida a comienzos de los años 60 por Smale, D.V. Anosov y Ya.G. Sinaj sobre la estabilidad estructural de sistemas dinámicos. Independientemente de estos trabajos teóricos, el meteorólogo E. Lorenz en 1963, describió un atractor en un espacio de fases tridimensional, el cual había observado en experimentos numéricos sobre la modelación de convecciones, con curvas de fases que se alejan de él en varias direcciones y puntualizó la conexión de este fenómeno y la turbulencia.
En los trabajos de Anosov y Sinaj la divergencia exponencial, fue establecida en particular, para el movimiento de un punto material sobre una superficie de curvatura negativa. La primera aplicación de la teoría de la divergencia exponencial al estudio de la estabilidad hidrodinámica, fue publicada en 1966.
La teoría de Poincaré-Andronov, de la que ya hemos hablado, sobre la pérdida de estabilidad del estado de equilibrio, posee muchas aplicaciones en todos los campos de la teoría de oscilaciones (tanto para sistemas con un número finito de grados de libertad, como para medios continuos) que es imposible enunciar aquí: sistemas en mecánica, física, química, biología y economía, pierden estabilidad todo el tiempo.
En artículos sobre Teoría de las Catástrofes, la pérdida suave de estabilidad de estados de equilibrio, es llamada usualmente, Bifurcación de Hopf.
En la Teoría de Bifurcación como teoría de las singularidades, los resultados fundamentales y aplicaciones fueron obtenidos sin la ayuda de la Teoría de las Catástrofes. La contribución de esta, fue la introducción del término atractor y el conocimiento sobre la bifurcación de atractores. Una variedad de atractores ha sido descubierta ahora en todas las áreas de la Teoría de Oscilaciones; por ejemplo, ha sido sugerido que los variados fenómenos del lenguaje, son diferentes atractores de un sistema dinámico "productor de sonidos".
Hasta hace alrededor de dos décadas, todo experimento que encontraba complicadas oscilaciones aperiódicas, digamos en reacciones químicas, era abandonado, citando impurezas en el experimento, efecto de cambios externos y cosas por el estilo. Ahora es claro que muchas de estas oscilaciones complejas, están conectadas con la esencia misma de la materia, con la presencia del caos y atractores extraños, quizás determinado por las ecuaciones fundamentales del problema y no por los variados efectos externos; ellas pueden

ser estudiadas a un nivel superior de los modos estacionarios clásicos y los modos periódicos de comportamiento de los procesos.
Estas oscilaciones caóticas y la presencia de atractores en diferentes fenómenos de variados campos, ilustran bien a las claras, hasta donde ha penetrado hoy la Teoría de las Oscilaciones, que no se detiene, por supuesto, en lo que hemos señalado en este trabajo.
Por otra parte, la característica común de las trayectorias en un régimen caótico es el tener una estructura geométrica altamente irregular y que ante cierto tipo de enfoque -estudiar la sección de Poincaré, por ejemplo- da lugar a ciertos conjuntos fractales. Algo extraordinario es que los fractales resultaron ser ubícuitos en la Naturaleza, tanto a nivel de las formas de algunos elementos naturales -hojas, costas marinas, copo de nieve, etc.- como en las formas geométricas generadas siguiendo reglas relativamente sencillas, rompiendo así con el viejo adagio de que **natura non facit saltus**.
A manera de conclusión, notemos que en estos apuntes no hemos hecho alusión a la aparición de los ordenadores, estos, presentes en grado sumo en todas las investigaciones relacionadas con las Catástrofes, el Caos y las Bifurcaciones, no han sido presentados en todo su papel. Las máquinas, que por si solas no podían resolver toda la tarea, obligaron a los matemáticos a formularse un nuevo conjunto de interrogantes, relacionadas, no sólo con los problemas concretos, sino con la naturaleza de su trabajo y con el modo que se resolvían los problemas o se intentaban resolver.
Es más, en tareas relacionadas con problemas prácticos, no es suficiente, por ejemplo, el conocimiento de la existencia de la solución. El no-matemático poco puede hacer con un teorema abstracto de existencia. El matemático, buscando una salida a esta situación, brinda procedimientos para "construir" la solución y como no siempre se logra dar en cuadraturas, tiende a presentar procedimientos que envuelven una colección infinita de operaciones. Así, si por un lado, siguiendo los impulsos de la lógica interna del desarrollo de la matemática, crecen en cantidad y variedad los resultados puramente teóricos sobre solubilidad de ecuaciones, por otro lado tenemos lo siguiente:

¿Qué significa para el físico experimental una solución exacta?.
¿Cómo interpretar esta noción, si se sabe que los datos iniciales son inexactos?.

Sobre lo anterior es necesario entonces, formular la estrategia de trabajo, donde en adición a las tareas planteadas en el Capítulo 13, es necesario considerar, por ejemplo, aspectos como los siguientes:

1. Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones.

2. Elaboración de Algoritmos (sistemas de reglas prefijadas en función del carácter del proceso).

3. Análisis de la dependencia continua de la solución con respecto a los datos iniciales.

4. Estimado de los errores del algoritmo y los errores de cálculo.

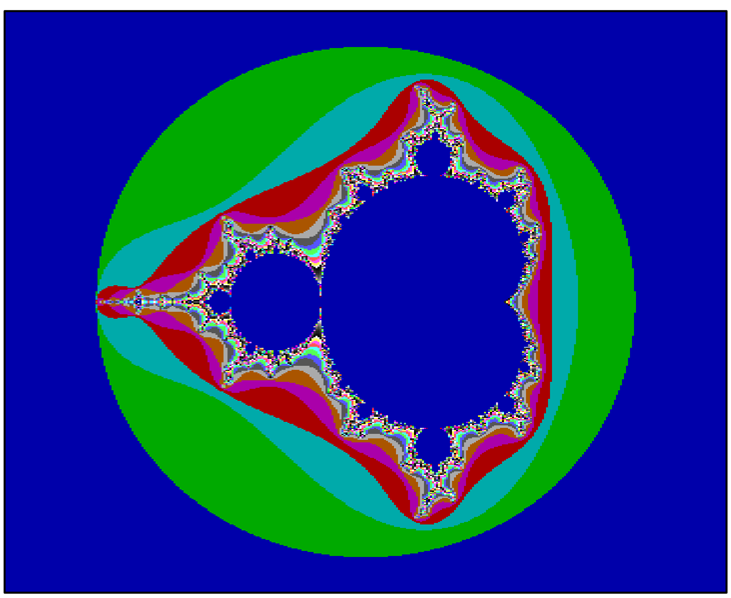
Sin embargo, en este caso surgen nuevos problemas, a los que ya hicimos alusión y que no reiteraremos aquí, sólo decir, que la resolución de un problema práctico por parte de un matemático para un no-matemático, envuelve conclusiones en que tienen que intervenir, obligatoriamente, el matemático y el especialista que con él trabaja. Además de todo lo expuesto, pensamos que este trabajo puede servir de guía y referencia a otros más completos y que tiene ciertas ventajas metodológicas a saber:

-que en otros campos no considerados, se pueden obtener conclusiones como las aquí brindadas,

-permite hacer conjeturas sobre los casos generales y en ciertos casos en que se haga una conjetura falsa, comprobar dicha falsedad,

-acostumbra a considerar, ante determinados problemas, casos más simples, la génesis de la problemática, que tanto pueden ayudar a la resolución de problemas más complejos.

Al margen de todo lo anterior, y apuntando algo sobre lo que debemos recalcar, es que fue Poincaré el primero en vislumbrar los conceptos que hoy en día intervienen en una teoría matemática llamada, genéricamente, y sin definición unánime, **caos**. Fue precisamente el problema de los tres cuerpos, que él demostró que no tenía solución en la forma planteada (ganando con ello, en 1887, el premio del Rey de Suecia por la resolución del problema) lo que lo llevó a pensar en la complejidad de un sistema.
Los aportes de Poincaré no recibieron atención suficiente al principio, como señalábamos antes, por parte de los astrónomos, se tuvo que esperar a la aparición de los ordenadores, para que el enfoque de Poincaré resultara prometedor. Comportamientos extraños y desordenados aparecen en las pantallas, comportamientos que, poco a poco, fueron cediendo a ser clasificados de alguna forma gracias, en gran medida, a los trabajos de Kolmogorov, Arnold y Smale en los años 50 y 60.



Guiados por el más puro espíritu clásico, la clasificación topológica de las singularidades, en el Plano de Fases de un sistema de tres dimensiones, nos lleva a la aparición de las nuevas formas ya aludidas: **los fractales**. Denominación que a partir de los trabajos de Mandelbrot, ha llegado a ser una de las denominaciones matemáticas más populares en los últimos años.
Intentaremos presentar, concisamente, una definición comprensible de lo que llamamos **fractales** llevada al caso de la recta real.
Después de la famosa tesis de Frechét de 1906, las investigaciones sobre métricas y espacios métricos crecieron exponencialmente, uno de los principales investigadores del tema fue el destacado matemático alemán Hausdorff (1868-1942), una de cuyas direcciones de trabajo, relaciona los conceptos de medida y dimensión[69]. Sea p un número real no negativo arbitrario, $0\leq p<+\infty$ y dado $\alpha>0$ consideremos:

$$\mu_p^\alpha(X) = \underset{d(X_i)<\alpha}{\text{ext inf}} \sum_{k=1}^{\infty}\left[d(X_k)\right]^p,$$

donde $X=\cup X_k$ es una descomposición finita o infinita numerable cualquiera de X, en subconjuntos X_k de diámetro $d(X_k)$ menores que α.

Cuando $\alpha\to 0$, el número μ_p^α tiende en forma monótona creciente a un determinado límite (finito o infinito) $\mu_p(X)$. Esta medida puede servir para definir la dimensión de un conjunto, debido a que un conjunto puede tener medida p-dimensional finita y no nula, a lo sumo para un sólo valor p.

El Conjunto C de Cantor

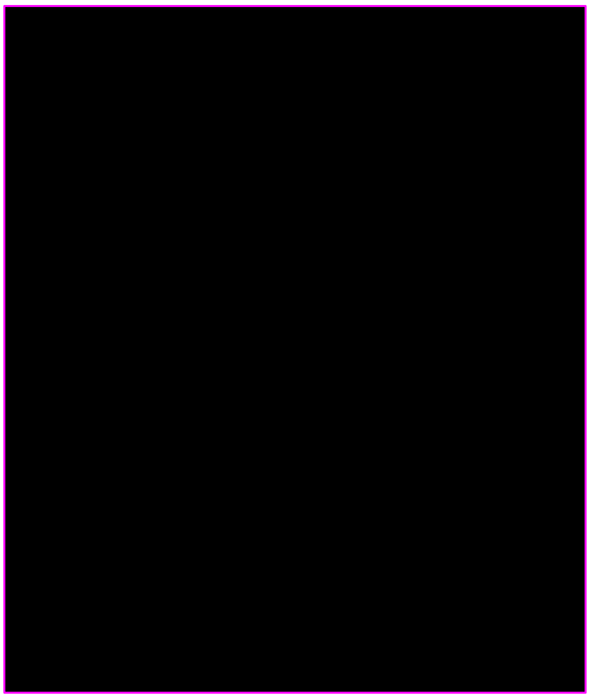
Observemos que la dimensión de Hausdorff de un conjunto no es necesariamente un entero, por ejemplo, la dimensión del conjunto ternario de Cantor (ver §50-2, nota 3 del texto citado en la nota anterior) es ln2/ln3 = 0,63093, como se demuestra en la memoria original de Hausdorff[70].
Esta no es la única definición de fractal usada, puede utilizarse también la de Minkowskii, aunque desde el punto de vista técnico es más engorrosa (no obstante, ha mostrado su utilidad en diversos estudios actuales, cuando se le pensaba "olvidada"[71]). La dimensión de Hausdorff-Besicovich describe cómo el "volumen d-dimensional" de un objeto, se comporta bajo cambios de escala, la dimensión de Minkowski, en contraste, describe el comportamiento de los puntos cerca del objeto en sí; esta posee algunas aplicaciones en problemas de vibración, como las partes de un tambor que vibran cerca de la corona y no la corona misma[72].
En el desarrollo de la Matemática figuran varios desengaños sucesivos, cuyo desenlace puede citarse en la **pérdida de la certidumbre** -como reza el título del libro de Kline ya aludido. Parafraseándolo, las Matemáticas han pasado desde mediados del siglo XIX por estos trances (entre otros)[73]:

1º. La pérdida de arraigadas evidencias y certezas físico-matemáticas, sobre todo a partir del desarrollo de las geometrías no-euclideanas. Con ello se fue diluyendo la fe del pensamiento moderno de los siglos XVII-XVIII en una suerte de armonía preestablecida entre la geometría euclideana y bien la configuración real del espacio físico, o bien la confirmación mental de nuestra percepción del espacio, tan es así, que la asimilación de los conjuntos fractales aún hoy en día, no es ni siquiera satisfactoria.

2º. La quiebra de las aspiraciones a cimentar la solidez lógico y/o teórico del edificio deductivo de la matemática clásica. Se pensó, por ejemplo, que las investigaciones en el campo de la existencia y la unicidad de las soluciones, para ecuaciones diferenciales definidas sobre espacios infinito-dimensionales, podían seguir el mismo esquema que en el caso de espacios de dimensión finita, el ejemplo típico de que tal camino es incorrecto es el debido a Dieudonné[74]. Un señalamiento similar puede hacerse a las primeras extensiones a B-espacios de la Teoría de la Estabilidad.

Después de estos y otros descalabros, es claro que la integración de teorías, a veces disímiles, permitirían obtener las nociones, los resultados y los métodos matemáticos por diferentes vías prácticas e intuitivas, antes de saltar al plano de la abstracción teórica y de la demostración sistemática en que se mueven los matemáticos **puros**.

El estudio de los conjuntos fractales, ha seguido las líneas sugeridas por otras muchas disciplinas, que se encuentran intrínsecamente ligadas con estos problemas y llevó a los investigadores del caos, en un programa de desarrollo que seguiría los pasos siguientes:



1. **La búsqueda de atractores extraños, en presencia de fenómenos aleatorios.**
Pongamos de ejemplo, el estudio de la existencia y la estabilidad de solitones en sistemas generales con rozamiento no lineal, en los que pueden aparecer atractores espacio-temporales.

2. **Clasificar estos atractores por su dimensión fractal.**
Inclusive llevado al análisis de la naturaleza fractal del Universo, el cálculo de la dimensión fractal en imágenes binarias, la multifractalidad en turbulencia tridimensional y muchos otros problemas actuales.

3. **La aplicación de la teoría del grupo de renormalización.**
Utilizada inclusive en los Autómatas Celulares y en el desarrollo de una teoría de la información para sistemas multiatractores.

Así vemos como la Mecánica Clásica y la Matemática asociada, han aportado nuevas facetas y abierto caminos del conocimiento, sobre los que ni siquiera se pensaban a comienzos de siglo. Lejos de ser excepción, el caos permea la Naturaleza y este nuevo hecho nos asegura que el Universo contiene secretos y misterios de la dinámica, que por ahora permanecen lejos de la curiosidad humana.
Así hemos visto, como el afán griego de reducir el cosmos a la geometría, Ptolomeo con sus Epiciclos y Kepler con sus Elipses, nos ha llevado a un modelo del Universo que se nos escurre "entre los dedos", al intentar conocer y controlar todas y cada una de sus partes.
La creación de la mecánica analítica y su percepción como intermediario entre la mecánica y la matemática, estuvieron íntimamente vinculadas con notables procesos de disciplinas científicas a fines del siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX: cambios en los métodos de educación, traslado de la poca actividad científicas de las academias a los centros de enseñanzas superiores, formación de nuevas disciplinas científicas,...
Si en Francia la necesidad de desarrollar la mecánica analítica, estaba vinculada, en muchos aspectos, con la formación de una base teórica y matemática única con la variedad de disciplinas mecánicas aplicadas que se dictaban en la Escuela Politécnica de París, en Alemania,

las premisas para un desarrollo intenso de la mecánica analítica, se crearon en el proceso formativo de la concepción de la matemática pura, proceso en que fueron protagonistas Jacobí y la Universidad Konisberg. La división de la matemática en pura y aplicada, permitió interpretar los formalismos de la mecánica analítica como cosas particulares de las respectivas teorías matemáticas. Las peculiaridades del aporte que Hamilton hizo en la mecánica analítica, se relacionaban con su carrera de astrónomo y se expresaron en el afán por hallar la base matemática única, para la óptica geométrica (teoría de instrumentos astronómicos) y la mecánica celeste (teoría del movimiento de los cuerpos celestes). El material expuesto, nos introduce en el círculo de importantes problemas metodológicos de las ciencias naturales exactas, en problemas como el de las ideas equivalentes de la teoría científica, la *"eficacia increíble de la matemática en las ciencias naturales"* (E. Wigher), que es análogo a la eficacia invencible de la mecánica analítica en la física, problemas de los mecanismos con que las teorías de las ciencias naturales influye en la matemática,...
Hemos visto que la eficacia matemática de la mecánica analítica, se vinculó en la existencia de gran cantidad de formalismos matemáticos equivalentes a esta teoría. Este último aspecto, según R. Feynmann, es índice indiscutible de una "buena" y profunda teoría científica. Con eso se explica también el criterio "matemático" de la eficacia de los programas de investigación de I. Lakatos (como regla general, son fructíferos, los programas que ofrecen potentes estímulos para el desarrollo de la matemática). Si bien es cierto que el formalismo apuntado, facilita la modelación de ciertos problemas de la mecánica analítica, no debemos exagerarlo, pues se observa, cada vez con mayor nitidez, un proceso de disminución del formalismo clásico de la matemática, con el fin de lograr una participación más efectiva en el proceso. Por otro lado, las teorías físicas "buenas" (por ejemplo, la mecánica clásica) destacan, digamos, estructuras matemáticas "polivalentes", o sea, estructuras matemáticas ricas en diversas relaciones.
El subsiguiente "juego matemático" en ellos en el plano de la generalización y el desarrollo lleva, por lo común, a una matemática "buena" y de profundo contenido que, posteriormente, es muy eficaz cuando se elaboran nuevas teorías físicas. A pesar de las profundas conmociones que hubo en la física de los siglos XIX y XX, las estructuras de la mecánica analítica, surgidas en teoremas físicos tan pobres a primera vista, como es la mecánica de los puntos materiales, siguen desempeñando, hasta la fecha, importantísimo papel, en la estructura de las teorías físicas fundamentales. La identificación de las estructuras de la mecánica con las de la matemática que se operaba en el campo de la mecánica analítica significa, como hemos visto, el mecanismo fundamental de la influencia de la mecánica de los sistemas discretos en el desarrollo de la matemática en general. Esta identificación también fue importante para el progreso de la mecánica, puesto que, agregaba al arsenal de sus métodos, los poderosos recursos de la matemática, hecho que triplicaba las capacidades de cálculo de la mecánica, imponía claridad y rigidez en su esquema teórico, abriendo nuevos caminos hacia las generalizaciones pues:

"...los conocimientos de la mecánica suponen los conocimientos de las matemáticas..." (Steklov).

Como tal, el modelo matemático nunca es idéntico al objeto que se considera, la precisión y fiabilidad de los resultados es uno de los problemas más delicados de la aplicación de la matemática. En este punto deben distinguirse dos casos: cuando las leyes que determinan "la conducta" del ente son bien conocidas y cuando nuestros conocimientos sobre dicho ente son insuficientes. En el primer caso es posible, a priori, brindar "cotas" sobre la exactitud de los resultados, basta como ejemplo, el lanzamiento de la estación automática Luna-1 (2 de Enero de 1959) que abrió la era de los vuelos interplanetarios, cuya trayectoria fue obtenida mediante un modelo matemático donde intervinieron las conocidas leyes de la mecánica, la universalidad de estas leyes, fue la garantía de aplicación del modelo al aparato cósmico creado por el hombre; en el segundo caso, al construir el modelo matemático, es necesario hacer suposiciones adicionales que tienen el carácter de hipótesis. Las deducciones obtenidas como resultado de la investigación de semejante "modelo hipotético" tienen carácter convencional con relación al ente físico que se estudia. Aquí, es necesario tener en cuenta, las tareas presentadas en los Capítulos 13 y al comienzo de este.

Estos apuntes no pretenden abarcar todos los cambios e interrelaciones entre la Mecánica y las E.D.O., de la que es parte fundamental la escuela de mecánicos analíticos de Rusia, que tuvo eminentes representantes de talento, entre ellos hay que mencionar en primer lugar al Profesor y Académico M.V.Ostrogradski (1801-1861), fundador de la Mecánica Analítica en Rusia. A él le pertenecen resultados de superior calidad, obtenidos por los métodos de integración de las ecuaciones de la mecánica analítica y elaboración de los principios generalizados de la estática y la dinámica. Discípulos y seguidores de Ostrogradski fueron: los profesores de la Universidad de Moscú: N.D. Brashman, F.A. Sludski y A.Yu. Davídov; por otra parte, nada se ha dicho, por ejemplo, sobre los cambios en la enseñanza de estas disciplinas y los propios apuntes sobre las MEC son bien limitados. Se han destacado algunos tópicos que, a nuestro entender, han tenido una mayor incidencia en el desarrollo de la matemática y de la propia Mecánica. El análisis detallado de las particularidades de estos cambios, creemos que sean necesarios y útiles, no sólo para el trabajo de los matemáticos, sino además, para los propios físicos, que trabajan en conjunto con los matemáticos.

Naturalmente, a estas contribuciones básicas pueden sumarse otros muchos valores añadidos, sea bajo la forma particular de ciertos resultados parciales o ciertas estrategias metodológicas, sea bajo la forma de orientaciones o ideas de alcance más general sobre los usos críticos y heurísticos de los temas tratados, o sobre sus servicios como vía de educación racional en un sentido preciso: en el sentido de desarrollar la capacidad de juzgar sobre el papel atribuido a uno u otro método. Pero no nos demoraremos ahora en el vano intento de perseguir todos estos -u otros anteriores- cabos sueltos. El desarrollo actual de la Matemática es un arte largo y lo que uno pudiera decir aquí de ella tendría que ser breve.

---

[1]Puede que un "rigorista" alegara que Arquímedes trata más bien con la estática matemática y puede que si se tomara "mecánica" en un sentido genérico, serían anteriores algunas ideas de Aristóteles y quizás un escrito de la escuela aristotélica sobre "**Problemas -o cuestiones- físicos -o mecánicos"**-, nuestra afirmación se basa en que Arquímedes es el principal sistematizador de estos estudios en la antigüedad y la aplicación de estos a problemas geométricos y estáticos (**¡mecánicos!**); puede consultar al respecto Arquímedes-"**El Método"**, Alianza Editorial 1151, Madrid, 1986 (introducción y notas de Luis Vega). Por otra

parte, no soy yo el único en proclamar la existencia de un mecánico en los tiempos griegos, en J. R. Pastor y J. Babini-**"Historia de la Matemática"**, Vol.I, Editorial Gedisa, Barcelona, pág. 62 se afirma: *"…Arquitas de Taras (Tarento), estadista y científico que se ocupó de Mecánica Teórica y práctica (autómatas), de aritmética (progresiones y proporciones) y de geometría…"*; si faltaran otras razones para clasificar a Arquímedes como el primer mecánico, puede consultar J.R. Pastor y J. Babini- Ob. Cit., pp.89-97.

[2]Sir Arthur Eddington observaba que uno de los grandes misterios del Universo consiste en que todo en él rota. En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años, cierto es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico (que se remonta a Aristarco de Samos en el siglo III a.n.e.) resolvió estas y otras dificultades y la publicación de la obra de Copérnico "**De revolutionibus orbium coelestium"** (1543), abrió el camino de la verdad celeste por la que transitarían más adelante Kepler, Galileo, Newton, Poincaré y muchos más.

[3]Ver Margaret E. Baron-"**The origins of the infinitesimal calculus"**, Pergamon-Press, Oxford-Edinburgh-New York, 1969.

[4]Thomas Hawkins-"**Lebesgue's theory of integration. Its origins and development"**, The University of Wisconsin Press, Madison, Wis.-London, 1970.

[5]Una excelente traducción del trabajo de Leibniz de 1684 aparece en D. E. Smith-**"A Source Book in Mathematics"**, New York, 1929, pp.619-626. Sobre la trascendencia y repercusiones del surgimiento del Calculus en la Matemática y la Física, principalmente, trata L. Motz and J. Hane W.-**"Conquering Mathematics; From Arithmetic to Calculus"**, Plenum, New York and London, 1991 y **"Mathématiques et Mathématiciens"**, Magnard, París, 1959 de P. Dedron et J. Itard.

[6]Sir Isaac Newton-**"Opera quae exstant omnia"** (ed. por Samuel Horsley, 5 vols, Londres, 1779-1785). Consultar **"The mathematical papers of Isaac Newton"**, Cambridge University Press, ed. D. T. Whiteside, 4 vols, London-New York, 1967-1970.

[7]Jean Bernoulli-**"Die Differentialrechnung aus dem Jahre 1691/92"**, Clásicos de Ostwald, No.211, Leipzig, 1924.

[8]Ver E. Ince-**"Ordinary Differential Equations"** (1926), Dover, New York, 1956, pág. 3; no obstante, existen historiadores que afirman la imposibilidad de ser precisos, por ejemplo M. Kline-**"Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"**, Oxford University Press, 1972 llegando incluso a contraponerse ambos en sus afirmaciones, pues mientras Ince afirma que fue Leibniz quien primero habló explícitamente de ecuaciones diferenciales, Kline por el contrario dice que fue Huygens en el **Acta Eruditorium** de 1693, e incluso con una fecha distinta a la dada por Kline.

[9]Ver Leibniz-Newton-**"El Cálculo Infinitesimal origen-polémica"**, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1977, pág. 29.

[10]Ver N.M. Matveev-**"Métodos de integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias",** Escuela Superior, 1963 (en ruso).

[11]E. Ince, ob.cit., pág. 93.

[12]Ver nota 2.

[13]A pesar que hay historiadores que piensan que la anomalía del perihelio de Mercurio sólo alcanzó a tener cierta significación crucial a la luz de la Teoría de la Relatividad, i.e., como confirmación predictiva empírica de esta teoría frente a la mecánica celeste clásica, sin tener en cuenta que éste fue uno de los tantos hechos acumulados que reflejaban el "indeterminismo" de la mecánica determinística en boga.

[14]V.I.Arnold-**"Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"**, Editorial Nauka, Moscú, 1979 (pág. 7, en ruso).

[15]La definición inicial de Cauchy es la siguiente: *On nomme équations différentielles, cells qui établissent des relation entre une variable indépendente x, des fonctions y, z ... de cette variable, et les différentielles de ces fonctions ou leurs dérivées des divers orders. L'ordre de la plus haute dérivée qui se trouve comprise dans une équation différentielle, sert fixer ce qu'on appelle l'ordre de cette meme équation. Cela posé, une équation différentielle du premier ordre entre la variable x et les fonctions y, z ... renfermera seulement avec x, y, z ... les dérivées du premier ordre y', z',...Si les fonctions y,z,... se réduisent a une seule y, l'equation différentielle du premier ordre ne contiendra plus que les trois quantités x, y et y'=dy/dx.*

[16]Ver W. J. Knight-**"Solutions of differential equations in Banach spaces"**, Duke Math. J., 41 (2) (1974) y **"A counter example to a theorem on differential equations in Hilbert spaces",** Proc. Amer. Math. Soc., 51 (2) (1975), 378-380.

[17]J. Dieudonné-**"Deux exemples singuliers d'équations differentielles"**, Acta Sci. Math. 12B (1950), 38-403. Una versión de este es el Problema 5, pág. 290 de su **"Foundations of Modern Analysis"**, Academic Press, New York and London, 1969.

[18]El primero, debido al estudio de figuras de equilibrio y de la estabilidad del movimiento **"Probléme géneral de la stabilité du mouvement"**, traducción francesa (1907) del original en ruso (1892) y **"Sur les figures d'equilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne dovée d' un mouvement de rotation"** (1906) y el otro, debido a sus investigaciones en Mecánica Celeste, **"Sur les courbes définie par une équations differentielle"** (1880), **"Memoire sur les courbes définie par une équation differentielle"** (1881-1886) y **"Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste"** (1892-1899).

[19]Para mayores detalles biográficos de Poincaré y Liapunov puede consultar, por ejemplo, G. Darboux-"**Eloge historique d'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913"**, Gauthier-Villars, París, 1913; A. T. Grigorian-"**Lyapunov, Alexandr Mijailovich"**, Dictionary of Scientific Biography 8, 559-563 y V. I. Smirnov-"**Biography of**

A. M. Lyapunov", Intern. J. Control 55 (1992), no.3, 775-784 el que contiene una traducción inglesa de su memoria de 1892.

[20]Para una mayor información técnica, consulte por ejemplo J. Mawhin-"**The centennial legacy of Poincaré and Lyapunov in Ordinary Differential Equations"**, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, N.34 (1994), 9-46 y J. E. Nápoles y C. Negrón-"**De la Mecánica Analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"**, Revista LLULL (España), Vol.17 (No.32) 1994, 190-206; un resumen de este trabajo fue publicado en el Bol. Soc. Cub. Mat. Comp., No.15, 1993, 1-9.

[21]**"Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integral-gleichung und der Verzweigung ihrer Losungen"** (1908).

[22]Ver M.W. Hirsch-**"The dynamical systems approach to differential equations"**, Bull. Amer. Math. Soc. vol.11, No.1, 1984, pág. 19.

[23] Consultar también Enciclopedia Británica, Vol.5 (136-137) y Vol.23 (822-823), 15th Ed.; Encyclopaedia of Math. Sciences, Vol.3, V.I.Arnold (Ed.), Dynamical Systems III, Springer Verlag, Berlín (1988); los trabajos de C. Simó, E.A.Lacomba y Luis A. Aguilar (Rev. Mexicana de Física, Vol.38, No.5, 10/92); Donald Saari frecuentemente publicados en J. of Differential Equations donde encontrará buenas referencias y magníficas ideas.

[24] Ver A. Celleti y A. Gorgilli-**"On the stability of the Lagrangian points in the spatial restricted problem of three bodies"**, Cel. Mech. and Dyn. Astr. 50, 31-38, 1991 y A. Gorgilli y otros-**"Efective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equlibrium point, with application to the restricted three body problem"**, J. Diff. Eqs., 77, 167198, 1989.

[25] Vid. R. Martínez y R. Bulajich-**"Caos. Memoria antigua, realidad moderna"**, Ciencia, vol.XVIII, no.105, 1990, 12-31.

[26] Sobre el surgimiento y primeras aplicaciones de estas, puede consultar J.E. Nápoles y C. Negrón-**"De la Mecánica Analítica a las EDO. Algunos apuntes históricos"**, Revista LLULL, Vol.17(No.32) (1994), 190-206; J. Rey Pastor y J. Babini-**"Historia de la Matemática"**, Vol.2, Gedisa, Barcelona, 1985 y A. Ribeiro y D. Soares-**"Reminiscências e Cálculo de Algunas Funçoes e Integrais Elípticas"**, Matemática Universitaria, No.15, 1993, 20-32.

[27] G. Mittag-Leffler-**"An Introduction to the theory of Elliptic Functions"**, Ann. of Math. 24(1923), 271-351.

[28] **"Problème général de la stabilité du mouvement"**, Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, 203-474. Traducción del artículo original publicado en Comm. Soc. Math. Kharkow y reimpreso como el vol.17 en Ann. Math. Studies, Princeton, 1949.

[29] Consulte el manifiesto de J. McCleary-**"A Theory of Reception for the History of Mathematics"**, en **The history of Modern Mathematics** (eds D. Rowe y J. McCleary), New York, 1989, vol.1: **Ideas and their Reception**.

---

[30] Consulte la tesis doctoral del autor **"Comportamiento Cualitativo de las Trayectorias de Sistemas No Autónomos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"** (Universidad de Oriente-Santiago de Cuba, 1994), donde se presenta un desarrollo histórico bastante completo de la Teoría Cualitativa de Sistemas Bidimensionales.

[31] Marchetti,F.;P.Negrini,L.Salvadori and M.Scalia-**"Liapunov direct method in approaching bifurcation problems"**, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 108 (1976), 211-226.

[32] **"Stability under perturbations in generalized dynamical systems"**, Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Acad. Press, New York, 1963, 463-473 y **"Stability Theory by Liapunov's Second Method"**, Jap. Math. Soc., Tokyo, 1966; respectivamente.

[33] Ver P. Seibert and J. S. Florio-**"On the Foundations of Bifurcation Theory"**, Reporte de Investigación, UAM-Iztapalapa, 1993 y las referencias citadas allí.

[34] **"Uber gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehorigen Entwicklungen willkurlicher Funktionen"**, Math. Ann. 68(1910), 220-269.

[35] Ver F.A. Neimark-**"Sobre el índice de deficiencia de operadores diferenciales"**, Uspehi Mat. Nauk 17(1962), no.4(106), 157-163 (en ruso) y S.A. Orlov-**"Sobre el índice de deficiencia de operadores diferenciales"**, DAN URSS 92(1953), 483-486 (en ruso).

[36] **"Operadores Diferenciales Lineales"**, GITTL, Moscú, 1954 (en ruso).

[37] **"The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations"**, Duke Math. J. 15(1948), 111-126 y E. Coddington and N. Levinson-**"Theory of ordinary differential equations"**, McGraw-Hill, New York, 1955, p.92.

[38] Ver A. Devinatz-**"An asymptotic theorem for systems of linear differential equations"**, Trans. Amer. Math. Soc. 160(1971), 353-363; y N.V. Fedorjuk-**"Metodos asintóticos en la teoría de operadores diferenciales singulares unidimensionales"**, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 15(1966), 296-345 (en ruso).

[39] Ver los artículos de A. Devinatz-**"The dediciency index of ordinary self-adjoint differential operators"**, Pacific J. Math. 16(1966), 243-257 y **"The deficiency index of a certain class of ordinary self-adjoint differential operators"**, Advances in Math. 8(1972), 434-4733.

[40] Para un excelente desarrollo de las ideas básicas, puede consultarse I.M. Glazman-**"Sobre la teoría de operadores diferenciales singulares"**, Uspehi Mat. Nauk 5(1950), no.6(40), 102-135 (en ruso) o el libro de Naimark ya citado.

[41] **"Sobre el comportamiento asintótico de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales"**, DAN URSS 78(1951), 1097-1100 (en ruso).

[42] **"On the L2 classification of fourth-order differential equations"**, J. London Math. Soc. (2)3 (1971), 297-300.

[43] **"Limit point criteria for differential equations"**, Canad. J. Math. 24(1972), 293-305; II, Canad. J. Math. 26(1974), 340-341.

[44] **"Criteria for the limit-point case for 2nd order linear differential operators"**, Casopis Pest. Mat. Fys. 74(1949), 1720).

[45] **"On non-integrable square solutions of a fourth-order differential equations and the limit-2 classification"**, J. London Math. Soc. (2) 10(1973).

[46] **"On the limit-point, limit-circle classification of second-order ordinary differential equations"**, Quart. J. Math. 24(1973), 531-35.

[47] Ver D.B. Hinton-**"Strong limit-point and Dirichlet criteria for ordinary differential expressions of order 2n"**, Proc. Royal Soc. Edinburgh 76A(1977), 301-310, para una amplia exposición de las cuasi-derivadas z[2m-i-1].

[48] Ver **"On the strong limit-point condition of second-order differential expressions"**, Proc. of the International Conference on Differential Equations, Los Angeles, 1974, 287-307.

[49] **"De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis"**, Prog. Evang. Konigl. & Stadtgymnasiums Liegnitz, 1834.

[50] **"On the solutions of ordinary differential equations of the third order"**, Annals of Math. 12 1(1910/1911), 103-124.

[51] Ver M. Cadek-**"A form of general pointwise transformations of linear differential equations"**, Czechoslovak Math. J.

[52] Ver F. Neuman-**"On solutions of the vector functional equation y(ε(x))=f(x).A.y(x)"**, Aequationes Math. 16 1(1977), 245-257.

[53] Ver F. Neuman-**"Stationary groups of linear differential equations"**, Czechoslovak Math. J. 34 1(109) (1984), 654-663.

[54] **"Un Invariante Afin para los Cuerpos Convexos del Espacio de n Dimensiones"**, Portug. Math. 8 (1949), 155-161.

[55] F. Neuman-**"On two problems about oscillation of linear differential equations of the third order"**, J. Diff. Equations 15 1(1974), 689-596.

[56] A.L. Besse-**"Manifolds all of whose Geodesics are closed"**, Ergenisse, Vol.93, Springer, Berlín & New York, 1978.

[57] **"Phase matrix of linear differential systems"**, Casopis Pest. Math. 110 (1985), 183-192.

[58] Vale la pena reproducir las palabras de Thom en la Introducción (pág. 26): *"...De hecho, todas las intuiciones fundamentales sobre morfogénesis eran conocidas ya por Heráclito; mi único aporte es el haberlas puesto dentro de un marco geométrico y dinámico, que algún día las hará más accesibles a un análisis cuantitativo...".*

[59] **"The geometry of catastrophe"**, Times Lit. Supp. 1556-1557, 1971, ver nota 11.

[60] Consulte K. Lucrecio-**"Sobre la naturaleza de las cosas"**, Trad. de José Marchena, Ed. Nueva Ciencia, Madrid, 1968.

[61] Ver A. Drago-**"Una definizion precisa de inconmensurabilitá"**, en F. Bevilacqua (ed): Atti VII Congr. di Fisica, Padaun, 1986.

[62] H. Poincaré (1906)-**"La Science et l'Hypothéses"**, Flammarion, Paris.

[63] Para consultar los artículos originales de Arnold, Kolmogórov y Smale, ver R. Abraham (1967)-**"Foundations of Mechanics"**, Benjamin, New York-Amsderdam.

[64] Puede consultarse V.I. Arnold-**"Catastrophe Theory"**, Springer-Verlag, 1986 e I. Stewart-**"Elementary catastrophe theory"**, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. cas.30, no.8, 1983, 578-586.

[65] **"Sistémes grossiers"** (DAN, vol.14, pp.247-251).

[66] **"Differentiable dynamical systems"**, Bull. Amer. Math. Soc. vol.73, pp.747-817, 1967.

[67] M. Morse-**"The critical points of a functions of n variables"**, Trans. American Math. Soc.; 33, 1931, 72-91.

[68] G. Birkhoff-**"Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude"**; Princeton University Press, 1950.

[69] Ver P.R. Halmos-**"Measure Theory"**, Van Nostrand Cía, Inc. 1961.

[70] **"Dimension und Asseres Mars"** (Math. Ann. 79, 1919, 157-179).

[71] Ver M. Lapidus y J. Fleckinger-Pellé-**"Tambour fractal: vers une résolution de la conjecture de Weyl-Berry pour les valeurs propes du laplacien"**, C.R. Acad. Sci. París, 306, série I, 1988, 171-175, donde se prueba una importante conjetura sobre las frecuencias de vibración de objetos que tienen fronteras fractales, utilizando la menos familiar dimensión de Minkowski.

[72] Es lectura obligada **"The Fractal Geometry of Nature"**, Freeman, San Francisco, 1982 de Benoit Mandelbrot, consulte también nota 2.

[73] Cf. también L. Vega-**"¿Está en crisis la idea clásica de demostración matemática?"**, Actas COMPUMAT'96, Universidad de Holguín, Septiembre de 1996.

[74] Recordemos los comentarios y ejemplos citados en el Capítulo 4.