Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

ELEMENTOS

PARA UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

GRIEGAS

Juan Eduardo Nápoles Valdés

Facultad Regional Resistencia
Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N.
Argentina

Corrientes - 2009

INDICE

Prólogo	1
Capítulo I. Consideraciones Culturales, Metodológicas y Epistemológicas.	4
1. Sobre la herencia "cultural" griega.	4
2. Sobre los textos y la historia.	15
3. Historicismo y presentismo.	17
4. Externalistas contra internalistas.	19
5. El Eurocentrismo.	23
Capítulo II. Cuestiones Preliminares.	32
1. Periodización.	32
2. Los textos matemáticos.	35
3. Los filósofos y las Matemáticas.	36
4. Sistemas de numeración griega.	38
Capítulo III. Período Jónico.	42
1. Tales de Mileto.	42
2. Leukippo de Mileto y Demócrito de Abdera.	46
3. Hipócrates de Quíos.	47
4. La escuela pitagórica.	49
5. Zenón de Elea.	62
6. Los números irracionales y las Paradojas de Zenón.	66
7. Primeras teorías matemáticas en la Grecia Antigua.	68
8. Los Tres Problemas Clásicos.	79
9. Génesis de las discusiones sobre los Fundamentos de la Matemática.	94
Capítulo IV. Período Ateniense.	99
1. Teodoro de Cirene.	100
2. La ideología platónica y su influencia sobre el desarrollo de la matemática.	101
3. Eudoxo de Cnido.	104
4. Aristóteles de Estagira y el Liceo.	107
5. Menecmo.	111
6. Otros seguidores de Aristóteles.	113
Capítulo V. Período Helenístico.	116
1. Alejandría. El Museo.	116
2. Euclides.	117
3. Los **"Elementos"**.	119
4. Arquímedes de Siracusa.	136
5. **"El Método"** de Arquímedes.	144
6. Aristarco de Samos	153
7. Apolonio de Pérgamo.	155
8. Otros matemáticos de la escuela alejandrina.	157
9. Los métodos infinitesimales en la Antigua Grecia.	157
Capítulo VI. Período greco-romano o de la decandencia.	160
1. Herón de Alejandría.	161
2. Pappo de Alejandria.	162
3. Diofanto de Alejandría.	165
4. El surgimiento de la trigonometría y Ptolomeo.	168
5. La matemática al final de la antiguedad.	179
6. Hypatía.	179
7. Los últimos Comentaristas.	183
Epílogo.	185
Anexos	

Prólogo

A lo largo del pasado siglo XX se han publicado numerosas obras dedicadas a cuestiones históricas, filosóficas y de divulgación de las Matemáticas, así que creo que la cuestión más importante que debe quedar claro en este comienzo es la pregunta ¿Por qué este libro? Como dijimos, con tantas Historias de las Matemáticas al alcance de la mano, ¿para qué comprometerse a escribir otras? Montmort[1], el primer matemático moderno en pensar en un proyecto de esta naturaleza (aunque nunca lo lograra completamente por escrito) tenía un objetivo claro *"mostrar el progreso del espíritu humano acelerado por sus descubrimientos"*. Esta idea, considerar que la historia es el registro sucesivo del progreso, desde años menos cultos hasta el presente más culto, es usualmente llamada *Historia Liberal* en los países anglosajones, y no creo que sea la correcta. Sin embargo, en el siglo dieciocho, las ciencias ilustraron este camino y esta noción *progresista* sobrevivió y se perpetúo por el llamado *Siglo de las Luces*, más que en cualquier otra etapa de la historia del hombre.

En el siglo siguiente a Montmort, Montucla[2] tenía como destinatario un pequeño auditorio de eruditos, y él consideraba que primero tenían que entender las Matemáticas, cosa que no muchos hicieron, sin embargo, su libro que influyó con tanta fuerza y tanto tiempo fue admirado justamente; al respecto dice Vogel[3] que es *"…la primera tentativa de una historia de las ideas matemáticas y los problemas. [Sobretodo, trabajos más antiguos] listas de nombres, títulos y fechas…"*. El período cubierto puede haber sido largo, pero tenía una excusa: para simplificar las dificultades que encontramos con el trabajo de los griegos, estas habían sido aliviadas por el genio feliz de Descartes, y él consideraba que esta era la razón por la cuál el progreso era más rápido en el siglo XVIII. Los autores posteriores fueron más cautelosos si no menos ambiciosos, basta como ejemplo el trabajo en cuatro volúmenes de Moritz Cantor[4]. A partir de Montucla, el auditorio ha cambiado de un modo importante.

---

[1] Pierre Raymond de Montmort, matemático francés quien nació en Paris el 27 de octubre de 1678, y murió allí mismo el 7 de octubre de 1719. Su nombre original era Pierre Rémond o Raymond, pero por desavenencias con su padre y ser desheredado, pues quería que estudiara derecho, cambió a Montmort. Conocido sobretodo por su libro **"Essay d'analyse sur les jeux de hazard"** editado en 1708.

[2] Jean Étienne Montucla, francés, nacido el 5 de septiembre de 1725 en Lyon, y fallecido el 18 de diciembre de 1799 en Versailles. Su primer trabajo fue **"Histoire des recherches sur la cuadratura du cercle"** que fue publicado por Jombert en París en 1754, y el gran respeto que le valió este trabajo puede ser juzgado por el hecho que en virtud del mismo, fue admitido como miembro correspondiente de la Academia de Berlín. En 1758 él publicó su trabajo en dos volúmenes, otra vez con Jombert como su editor, **"Histoire des mathématiques"**, el primer volumen cubrió la historia de las matemáticas desde la antigüedad hasta 1700, mientras que el segundo volumen fue completamente dedicado a matemáticas del siglo XVII.

[3] Ver K. Vogel-**"L'historiographie mathématique avant Montucla"**, in **"Actes du Onzième Congrès International d'Histoire des Sciences"**, Varsovie-Cracovie, 1965, Sect. III: "Histoire des Sciences Exactes", Wroclaw, 1968, 179-184.

[4] Moritz Benedikt Cantor. Nació el 23 de agosto de 1829 en Mannheim, Baden (ahora Alemania) y murió el 9 de abril de 1920 en Heidelberg, Alemania. A partir de 1860, Cantor dicta las conferencias sobre historia de las matemáticas y se convirtió en uno de los principales historiadores alemanes de fines del siglo XIX. Su primer trabajo significativo fue **"Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker"** de 1863 ("Contribuciones matemáticas a la vida cultural del pueblo"). Cantor ocupa un lugar destacado en la Historia de la Matemática por el mencionado trabajo en cuatro volúmenes **"Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"** el cual traza la historia hasta el 1799, el primer volumen apareció en 1880 y el último en 1908, fungiendo en éste como "Organizador" de un equipo

Un documento clave en este cambio es una carta de Simone Weil (hermana del destacado matemático André) escrita en 1932, siendo una inexperta profesora de filosofía, con simpatías de extrema-izquierda, que influyeron en forma significativa en sus clases, en dicha carta abogaba por trasladar esta visión de la historia a sus estudiantes, es decir, que sus estudiantes de ciencia ganaban al ver su estudio no en términos de recetas de libro de texto, sino en un contexto histórico. Lamentablemente, su experimento fue un fracaso; la mayor parte de sus alumnos fallaron su bachillerato y ella fue despedida. Por supuesto que hoy, su punto de vista ha sido liberado de sus asociaciones marxistas y se ha hecho común desde el punto de vista académico. Aunque Weil no aceptaría de buen grado esto, el consenso general es que la adición de un componente histórico al curso, producirá en los estudiantes de ciencias una percepción menos limitada (y quizás también más *comerciable*) que su percepción original.

Tal acuerdo ha llevado a la proliferación de cursos universitarios en Historia de la Ciencia, y de Historia de las Matemáticas en particular. Su auditorio raramente son estudiantes de historia; aunque no estén encajonados en batallas y sitios, los orígenes del cálculo todavía son demasiado difíciles para los estudiantes de ciencias sociales. Los estudiantes de Matemáticas, por el contrario, pueden encontrar que algo de historia les servirá como un alivio de los rigores del álgebra y del análisis. Pueden ganar créditos suplementarios al mostrar tales inclinaciones humanistas, o pueden incluso insistir para que se haga así, sin descontar que puede ser un recurso adicional en la comprensión de un problema de investigación dado. Una búsqueda rápida en Internet, mostrará un número considerable de tales cursos, a menudo enseñados por investigadores activos en el campo matemático. Mientras uno todavía escribe idealmente para el lector general (*hola ¿sigues ahí?*), es en primer lugar para estudiantes que se encuentran en tales cursos, ya sea por opción o por necesidad, que este libro está dirigido.

Volvamos a la pregunta inicial ¿por qué este libro? Ante la invitación de Mabel Rodríguez de la Universidad Nacional de General San Martín, de dictar, junto al colega Juan Pablo Pinasco, la materia **Historia de la Matemática**, decidí actualizar una obra anterior **"De las Cavernas a los fractales. Conferencias de Historia de la Matemática"** y empezar por la Civilización Griega que no estaba bien sistematizada en dicho texto. Así que tomando como base las Conferencias 3 y 4 y la revisión de distintas obras que, en el lejano 1996, no estaban a mi alcance en Cuba, es que presento este texto como un compendio preliminar de Historia de las Matemáticas Griegas. Al mismo tiempo, las conferencias impartidas por mí en la asignatura **Historia de la Matemática** (o similar) en el programa de maestría **"Didáctica de la Matemática"**, del departamento de Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica "José de la Luz y Caballero" de Holguín, Cuba; en la carrera del Profesorado en Matemática y Cosmografía del IFD "Dr. Juan Pujol" de Corrientes; de la Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad de Concepción del Uruguay (en la sede Paraná), de la Maestría en Didáctica de la Matemática de la UNNE (en la FAI de Saenz Peña, hot UNCAus) y de múltiples conferencias en congresos y reuniones de todo tipo, de Cuba, Argentina y Brasil y las investigaciones que he desarrollado sobre estas temáticas en vinculación con la Educación Matemática por un lado y la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, por el otro, han hecho posible un texto que pueda ser

---

de 9 colaboradores. Una extensa reseña de este trabajo, realizada por David Eugene Smith está disponible en **http://projecteuclid.org/handle/euclid.bams/1183420212**

utilizado, indistintamente, en diferentes tipos de cursos, dada la magnitud de la temática abordada.

Una simple ojeada al Indice, le permitirá percatarse al lector, que aquí no se pretende ofrecer una imagen completa de la Historia de las Matemáticas Griegas, sino más bien, una visión de conjunto sobre ésta, en la que también están tratados, someramente, las irradiaciones sobre las ciencias conexas, consecuencias metodológicas e implicaciones filosóficas de doce siglos de quehacer matemático.

Es universalmente reconocido que el desconocimiento de la experiencia del desarrollo de la ciencia, la incapacidad para analizarla hace al investigador impotente ante los problemas del futuro. Estas consideraciones determinan el objetivo del presente libro: ayudar a los estudiantes de los cursos arriba citados, así como a amplios círculos de amantes de la matemática, profesionales o no, a asimilar la experiencia histórica de la ciencia en cuestión, las fuerzas motrices y vías de su desarrollo.

Capítulo I
Consideraciones Culturales, Metodológicas y Epistemológicas

1. Sobre la herencia "cultural" griega.

En el borde sudoriental de Europa, adentrándose en el Mar Mediterráneo, hay una pequeña península a la que llamamos Grecia. Es montañosa y árida, con una línea costera dentada y pequeñas corrientes.

A lo largo de toda su historia, Grecia siempre ha estado rodeada de Estados más grandes, más ricos y más poderosos. Sí sólo se consulta el mapa, en comparación con sus vecinos, siempre parece una tierra pequeña y sin importancia.

Sin embargo, no hay tierra más famosa que Grecia; ningún pueblo ha dejado en la historia una huella más profunda que los griegos.

Los griegos que vivieron hace veinticinco siglos (los "antiguos griegos") escribieron fascinantes relatos sobre sus dioses y héroes y aún más fascinantes relatos sobre sí mismos. Construyeron hermosos templos, esculpieron maravillosas estatuas y escribieron magníficas obras de teatro. Dieron algunos de los más grandes pensadores que ha tenido el mundo.

Nuestras ideas modernas sobre política, medicina, arte, drama, historia y ciencia se remontan a esos antiguos griegos. Aún leemos sus escritos, estudiamos sus matemáticas, meditamos sobre su filosofía y contemplamos asombrados hasta las ruinas y fragmentos de sus bellos edificios y estatuas.

En cualquier estudio minucioso de las vidas de los antiguos griegos y de las épocas que éstos vivieron, hay dos cuestiones que quedan muy claras. La primera es que, en muchos aspectos fundamentales, eran como nosotros. La segunda es precisamente lo contrario: que, en muchos aspectos fundamentales, eran *distintos* de nosotros. Este trabajo que aquí presentamos, es un intento de abarcar con la misma firmeza ambos lados de la ecuación.

Como primera muestra, vamos a examinar los términos que en nuestro lenguaje, hacen referencia a la política. La propia palabra "lenguaje" la hemos tomado de los romanos, en un reconocimiento silencioso al enorme impacto y al amplísimo alcance del imperio romano, un auténtico imperio milenario. Además, el alfabeto que utilizamos para escribir dicho lenguaje es de origen griego, como la propia palabra "alfabeto" *(alphabet).* El hecho de que nos fuera transmitido por los romanos es una de las más acertadas evidencias que ponen de manifiesto el papel clave que éstos desempeñaron como mediadores en la herencia helénica que recibimos de la antigua Grecia. Por lo que respecta al ámbito global de la política, hay pocos ejemplos más claro de nuestra profunda deuda con esa herencia. No es sólo que la propia palabra "política" sea de origen griego, sino que conlleva términos políticos de uso habitual como "democracia" (literalmente, poder del pueblo) y, en el extremo opuesto, "monarquía" (gobierno de un solo individuo) y "tiranía" (gobierno ejercido por un déspota sin legitimación ni justificación).

Sin embargo, nuestras ideas occidentales y modernas sobre la democracia y la monarquía son en realidad bastante diferentes de las que pudieron tener los antiguos griegos. Lo que nosotros denominamos democracia, un sistema en el cual otorgamos la dirección de los asuntos públicos a unos pocos representantes que rara vez están sometidos a nuestro control inmediato, los antiguos griegos lo considerarían una oligarquía, otra palabra política derivada del griego y que significa el gobierno de unos pocos. Lo que nosotros llamamos monarquía, ellos no lo hubieran reconocido de ningún modo como una forma de gobierno político legítima y significativa. Las coincidencias de identidad en el vocabulario pueden indicar una

herencia cultural compartida y, al mismo tiempo, disfrazar un profundo abismo cultural.

En esto se basa uno de los aspectos siempre fascinantes del estudio de los antiguos griegos, y especialmente del estudio de su política dentro del contexto más amplio de su cultura y su sociedad. Mientras nosotros tenemos en general la impresión de que la política actual se desarrolla en un lugar específico más bien remoto, Parlamento o Congreso, los griegos percibían la política en todas partes y consideraban que todo tenía una dimensión política. Fue la política lo que dio forma, estructura y significado a todos los aspectos de su vida cotidiana. Incluso se identificaban a sí mismos como *"animales políticos"* según la famosa frase de Aristóteles en el primer tomo de la **"Política"** (escrita alrededor del 330 a.C.).

La palabra griega de la cual se derivan en origen todos los usos antiguos y modernos del término "político", es *polis,* que se traduce habitualmente por "ciudad-estado" o sencillamente "ciudad". En total existieron bastante más de un millar de estas ciudades-estado, llegando quizás hasta la cifra de mil quinientas, diseminadas desde el extremo oriental del mar Negro (en lo que es actualmente Georgia) hasta las costas meridionales y orientales de España en el extremo occidental del Mediterráneo. En cuanto a sus dimensiones territoriales, variaban desde la extensión de Esparta (ocho mil km^2) , situada en el Peloponeso, en la Grecia continental, pasando por la extensión de Siracusa (cuatro mil km^2), en Sicilia, o la extensión de Atenas (dos mil quinientos km^2), hasta la de Corinto (noventa km^2) o la de otros estados aún más pequeños. En general, contaban con una población de sólo unos pocos miles de habitantes, aunque es posible que la de Atenas alcanzara como máximo un cuarto de millón a finales del siglo V a.C. Estos estados se dotaron a sí mismos de una amplia variedad de formas de gobierno, pero, aunque no se puede decir en absoluto que todos ellos fueran siempre, o alguna vez, democráticos, lo importante es que se gobernaban por sí mismos.

Los criterios esenciales para que una comunidad fuera considerada como una auténtica *polis* eran que no estuviera gobernada directamente por una potencia extranjera, ni siquiera por otra potencia griega, y que eligiera su propio modelo de autogobierno. Sin embargo, sobre todo con fines militares, los principios de independencia y autonomía no eran incompatibles en la práctica con la pertenencia a una alianza de varios estados, como fue la Liga del Peloponeso, liderada por Esparta, o incluso la integración en un "supraestado" federal como Beocia (liderada por Tebas). A veces, estos principios se ponían de manifiesto más por ser infringidos, que por ser cumplidos. Como ejemplo llamativo podemos mencionar que el imperio de los atenienses en el siglo V a.C., constituyó una notable infracción de la autonomía de la *polis,* a pesar de que todas sus virtudes positivas supusieran una contrapartida.

De ningún modo se puede afirmar que en las ciudades griegas todos los griegos fueran considerados como iguales, es decir, que tuvieran el mismo derecho al pleno disfrute de los privilegios políticos que otorgaba la ciudad. Aparte de los menores de edad, los extranjeros y, por supuesto, los esclavos, que estaban desprovistos por definición de prácticamente todos los derechos como ciudadanos, también las mujeres adultas estaban excluidas, por razón de sexo, de muchos de estos derechos. En gran medida, la ciudad griega era una especie de club exclusivo para hombres, aunque el alto muro levantado en teoría entre los varones y sus madres, hermanas, viudas e hijas pudiera en ocasiones ser escalado o incluso minado de un modo bastante radical.

A pesar de la diversidad obvia del panorama político y cultural, la mayoría de los

habitantes de la antigua Grecia compartía un vínculo cultural común. Esta cultura helénica común tuvo su expresión más vital a través de la religión. Cuando se reunían unos con otros, o competían entre sí, en alguno de los grandes festivales religiosos panhelénicos, tales como los Juegos Olímpicos, hacían al menos tres cosas: competir por la gloria personal (o presenciar las competiciones), rendir culto a sus dioses y, además, celebrar su identidad griega común. En Delfos, considerado el ombligo del mundo griego antiguo, el oráculo de Apolo, hablando por boca de sus sacerdotisas, constituía un núcleo alternativo de esta herencia compartida. Heródoto, el gran historiador del siglo V a.C., lo resumió en una frase, como sólo podía hacerla un conocedor y defensor de la identidad panhelénica: una lengua común (aunque con distintos dialectos), costumbres y tradiciones comunes (sobre todo religiosas) y la misma "sangre" (antepasados compartidos, tanto en la realidad histórica, como en los mitos comúnmente aceptados sobre sus orígenes). Estos tres componentes hicieron surgir "el hecho de ser griego".

Esta helenidad o condición de griegos en ningún caso era suficiente motivo para que los griegos se uniesen automáticamente para defender causas comunes, ni siquiera en tiempos de crisis; de hecho, rara vez les impulsó a hacerla, debido al fuerte apego de los griegos a su identidad política esencial de miembros de una *polis.* Pero la helenidad estuvo siempre presente, constituyendo un marco que les ayudó de manera crucial a definir su identidad étnica. La mitad de las veces esto se hizo por diferenciación o por oposición rotunda con respecto a todos los que no eran griegos. A éstos los etiquetaron colectivamente, y a menudo despectivamente, como "bárbaros", denominación que procede en origen del hecho de que los no griegos hablaban idiomas ininteligibles que sonaban como "bar-bar".

Esta contraposición entre griegos y bárbaros está presente en Homero, en la primera obra literaria importante de los griegos y del mundo occidental, pero no tiene ahí un relieve especial, ni resulta tampoco del todo negativa. Sin embargo, dos o tres siglos más tarde, en la época de Heródoto, dicha contraposición quedó firmemente establecida, afianzada culturalmente, y llegó a predominar su carácter peyorativo. Dos hechos históricos fueron los principales responsables de este cambio radical en la autoconciencia "nacional".

En primer lugar, se produjo el traslado y establecimiento de los griegos fuera de su núcleo original del Egeo, para ocupar la mayor parte de las zonas costeras del Mediterráneo y del Mar Negro, aproximadamente entre los años 750 y 500 a.C. Este desplazamiento se suele denominar la "colonización", aunque en realidad los nuevos asentamientos griegos fueron desde un principio ciudades independientes, y no colonias en el sentido que se le da actualmente a este término. Lo que atrajo o condujo a estos pobladores a fundar ciudades tales como Siracusa en Sicilia y Olbia en la costa norte del Mar Negro fue una combinación de motivos y circunstancias: pobreza, codicia, aventura y un sentimiento religioso de predestinación.

En algunas zonas, los pobladores griegos tuvieron que competir con pobladores de otras nacionalidades, como, por ejemplo, con los fenicios (procedentes de lo que hoy en día es Líbano) en Sicilia y Chipre. A veces, las relaciones con las poblaciones indígenas fueron buenas desde el principio, como en Megara-Hiblea al este de Sicilia, y en Massalia (la actual Marsella); en general, estas relaciones fueron malas al principio, pero luego mejoraron. En ocasiones, desgraciadamente, fueron malas desde el principio al final, como en Taras (Tarento, en el empeine de la península Itálica). En todos los casos, estas relaciones contribuyeron a definir por oposición lo que significaba ser griego, y pronto se vio a los griegos de las colonias desempeñando un papel importante en las fiestas panhelénicas que se celebraban

en su territorio de origen.
El segundo factor importante para la definición de la identidad griega por oposición negativa a los bárbaros vino dado por el intento de un gran número de bárbaros, los persas y los distintos y variados súbditos de su imperio, de conquistar la Grecia continental durante las dos primeras décadas del siglo V. De hecho, en la década de 540 a.C., parte de los griegos que vivían en el continente asiático o en Chipre ya habían sido conquistados por el imperio persa e incorporados a dicho imperio. La mayoría de ellos se había sublevado en una revuelta que se produjo en el 499 a.C., pero estas revueltas fueron aplastadas media docena de años después. Fue principalmente la implicación de Atenas en estos levantamientos lo que condujo a la primera de las dos importantes invasiones persas de la Grecia continental. Esta expedición marítima, concebida principalmente como expedición de castigo y ordenada por el rey Darío en el 490 a.C., finalizó en la extraordinaria victoria lograda por los atenienses en Maratón. La segunda invasión fue una expedición mucho más amplia, realizada tanto con ánimo de venganza como de conquista, dirigida en persona por Jerjes, el hijo de Darío, en el 480 a.C. y que incluyo la archifamosa derrota de los persas en Las Termópilas (Puertas Calientes) en dicho año. El impacto que esto produjo en la identidad griega fue complejo y decisivo. Como consecuencia, el estereotipo negativo de los bárbaros, que poco después se haría visible en la tragedia de Esquilo **"Los persas"** (472 a.C.) y posteriormente, de un modo más sutil, en las **"Historias"** de Heródoto, dominó siempre en la conciencia griega.
Esto aportó también el andamiaje psicológico y espiritual para la siguiente oleada de emigración griega estable, que se produjo a continuación y por impulso de las asombrosas conquistas de Alejandro Magno (que reinó desde el año 336 hasta el 323 a.C.). Como resultado de esto, los griegos y la cultura griega penetraron en todo el Oriente Próximo y extendieron su dominio hasta zonas tan lejanas como Asia central por el nordeste, y Pakistán y la India en el sudeste. Aún hoy en día son visibles y palpables las consecuencias (por ejemplo, en la beatificación de Alejandro Magno dentro de la Iglesia cristiana capta de Egipto y la presencia de este emperador como personaje en la literatura de unas setenta naciones).
El imperio de Alejandro y, desde luego, otros en menor medida, constituyeron en la Antigüedad el principal puente cultural entre Oriente y Occidente. Así se originó el llamado período helenístico (hacia los años 323-30 a.C.), durante el cual el mundo griego se amplió considerablemente, marcando su final la derrota de Marco Antonio y Cleopatra, en el 31 a.C., en Actium, al noroeste de Grecia, por Augusto, el primer emperador romano.
En cierto sentido, el antiguo helenismo sobrevivió a través del Imperio de Bizancio, fundado por el emperador cristiano Constantino en el siglo IV de nuestra era, hasta que la conquista de Constantinopla por los turcos otomanos en 1453 puso fin también a dicho imperio. Los sabios y eruditos que huyeron de la caída de Bizancio realizaron una contribución fundamental al esplendor del Renacimiento italiano, a través del cual se canalizó la herencia del helenismo, llegando ésta así hasta nuestros días.
Esta pugna entre uniformidad y diferencia que impresiona a cualquiera que analice la vida política de los antiguos griegos es aún más evidente en su cultura, su sociedad y su economía.
El poeta inglés Philip Larkin decía irónicamente que las relaciones sexuales se habían inventado en 1963. Los griegos, que nos aportaron la "pornografía" (que significa, literalmente, "el hecho de escribir sobre las prostitutas o de representarlas

pictóricamente"), no habrían dudado en discutir esta afirmación. Sus modos de practicar el sexo constituyen, desde luego, un elemento definitorio de una parte de su identidad cultural, al igual que sucede con otros pueblos. Pero, en un aspecto concreto, la homosexualidad, sus costumbres y prácticas sexuales han atraído más nuestra atención y les han dado una fama especial. Aunque la homosexualidad (masculina) de los griegos pueda ser rebatida en gran medida y se preste a profundas controversias, constituye, sin embargo, la fuente y el origen últimos de una importante práctica e identidad dentro de la sociedad moderna.

No ha pasado tanto tiempo desde que la expresión "amor griego" era un eufemismo para referirse a lo que actualmente se conoce como sexualidad *gay,* mientras que el término "lesbiana" paga un silencioso tributo a la poesía y la vida de Safo de Lesbos, sustituyendo al antiguo eufemismo "sáfica". No obstante, vale la pena recordar que la palabra homosexualidad data de hace sólo poco más de un siglo. Un *gay* actual no es exactamente lo que era un homosexual hace cien años, y en la Antigua Grecia no existían *gays* ni homosexuales en el sentido que hoy les daríamos a estos términos. Citemos sólo tres de nuestros más destacados griegos antiguos: de hecho, Safo era probablemente lo que llamaríamos "bisexual", aunque podría haber pasado de un estilo de vida predominantemente homoerótico a otro que fuera principalmente heterosexual (de persona casada). También Sócrates se casó y, en realidad, es posible que estuviera casado simultáneamente con dos mujeres, pero no hizo nada por reprimir sus fuertes tendencias homosexuales, aunque parece ser que no se dedicó a satisfacerlas físicamente. Por último, se dice que Alejandro Magno estuvo casado, también con dos mujeres, pero sólo por razones de descendencia dinástica; según los indicios, era preferentemente homosexual. Por consiguiente, he aquí de nuevo un caso de similitud y diferencia.

Si la homosexualidad de los antiguos griegos se puede considerar, al menos en ciertos aspectos, como un antecedente cultural, esta misma apreciación no es fácil de justificar en el caso de las religiones precristianas o paganas practicadas por los griegos. Éstos no poseían una única palabra que se correspondiera con nuestra palabra "religión" (que procede del latín). En vez de este término, utilizan varias paráfrasis; la mayoría de las veces una expresión que significa literalmente "las cosas de los dioses". El plural, dioses, era y es fundamental. Para los griegos, el mundo en su totalidad estaba lleno de una multiplicidad de poderes sobrenaturales y superiores a los poderes humanos, siendo estos poderes a la vez masculinos y femeninos, o neutros, y a veces, cuando los imaginaban con forma humana, los llamaban dioses o diosas, pero en otras ocasiones, cuando los consideraban abstractos, los denominaban "demonios" *(daimonia).*

El Nuevo Testamento menciona algunos demonios famosos, especialmente los que fueron expulsados mediante los milagros realizados por Jesucristo. Sin embargo, a pesar de estar escrito en griego (helenístico), el Nuevo Testamento da testimonio de una religión radicalmente diferente del paganismo griego. Se trata de un libro, o un conjunto de libros, escrito por y para judíos helenizados que hablaban griego y vivían en la mitad oriental del Imperio Romano. Su propósito era principalmente transmitir el nuevo evangelio de San Pablo sobre el Cristo resucitado (la palabra griega "Cristo" es la traducción del hebreo "Messiah", que significa "el Ungido"). Un escéptico podría querer ver algo más que la huella de un politeísmo precristiano que subsistiera en la posterior doctrina de la Trinidad, por no hablar del culto a una pluralidad de santos. Pero, en principio, el cristianismo (como su pariente, el judaísmo posterior al cautiverio) era un riguroso monoteísmo, en el que se creía no sólo que existía un único Dios verdadero, sino también que Dios había creado, sin

ayuda ajena a Él mismo, el Universo y todo lo que en él se movía.
Los griegos paganos, es decir, lo que se entiende por “helenos” en el Nuevo Testamento, creían precisamente lo contrario: que, en vez de un solo Dios, existían muchos dioses y diosas, y el Universo era anterior a ellos y los había hecho nacer, y no al revés. El disperso y heterogéneo acervo griego de mitos relativos a la creación se formó con ausencia de dogmas, carencia de textos sagrados y la inexistencia de una clase sacerdotal vocacional y privilegiada que fuera la única autorizada para dar a los laicos (del griego *laos,* "gente”) una interpretación de esos mitos. En general, las prácticas rituales y el culto, lo que se hacía, tenían para los griegos precristianos más importancia que la fe, es decir, lo que se creía y pensaba. Resumiendo, aunque Bizancio desempeñó un papel crucial en la preservación y transmisión de la literatura pagana griega, el legado de los antiguos griegos no alcanza al ámbito de la religión, al menos, no de un modo directo e inmediato. Dos de nuestros activos culturales fundamentales, el teatro y los deportes atléticos de competición, se derivan en última instancia de contextos religiosos de la Antigüedad Griega. Aún suponiendo que las peculiaridades y esencias de los originales antiguos, puedan adaptarse actualmente con toda fidelidad, se ha de poner énfasis sobre todo en las diferencias espirituales y culturales, más que en lo que puedan tener en común el teatro y los deportes de la Antigüedad con los de hoy en día. Una manera de expresar este énfasis es analizar los principales sacrificios rituales que tenían lugar durante los Juegos Olímpicos y las Grandes Dionisíacas, un festival dramático que se celebraba anualmente en Atenas.
Se rendía culto a Zeus y Dioniso de la forma más espectacular mediante el sacrificio ritual de grandes cantidades de animales, y la carne de éstos, una vez cocinada, se distribuía entre los competidores, peregrinos, espectadores y otros participantes; los dioses sólo recibían el olor de las ofrendas que se quemaban en los altares. El sacrificio sangriento de los animales simbolizaba de esta manera, al mismo tiempo, la indisoluble conexión y la distancia insalvable entre los mortales y los inmortales.
No todos los antiguos griegos practicaban estos sacrificios. Los órficos y los pitagóricos se situaban aparte como sectas religiosas diferenciadas precisamente porque se negaban a hacerlos. Otros griegos adoptaron una actitud naturalista o incluso escéptica con respecto a la naturaleza y la existencia misma de los dioses. Es famosa la afirmación de Jenófanes de Colofón (en Asia Menor; su época de mayor productividad intelectual se sitúa alrededor del 550 a.C.) según la cual, si los caballos y el ganado vacuno tuvieran manos y pudieran dibujar, dibujarían sus dioses en forma de caballos y ganado vacuno, y además observó que los tracios no griegos representaban a sus dioses con el cabello rojo y los ojos azules, exactamente iguales a ellos. Por lo tanto, las representaciones antropomórficas de la divinidad realizadas por los griegos no estaban menos ligadas a su cultura. Un siglo después de Jenófanes, el famoso maestro Protágoras, natural de Abdera, al norte de Grecia, negaba que se pudiera saber con certeza si los dioses existían, o la forma que tenían, ya que el tema era oscuro y la vida humana corta. A partir de estas especulaciones teológicas críticas nació la filosofía griega.
La actividad consistente en filosofar, tal como se realizaba en la Antigua Grecia, es fácilmente reconocible como un antecedente de lo que los filósofos hacen hoy en día; en todo caso, muchos de los antiguos filósofos manejaron los mismos tipos de temas utilizando los mismos tipos de modos verbales que se han utilizado posteriormente. Puede que el matemático A. N. Whitehead exagerara un poco cuando decía hace algunos años que la filosofía occidental es poco más que una serie de notas a pie de página en los textos de Platón. Sin embargo, un destacado filósofo y clasicista contemporáneo, Sir Bernard Williams, señaló concisamente en el

mismo sentido, que el legado de la filosofía griega a la filosofía occidental *es* la propia filosofía occidental[5]. Al considerar así la filosofía de la Antigua Grecia, lo que se está haciendo es insistir una vez más en aquello que tenemos en común con los griegos, poniendo como centro y destacando la dimensión racional.

De hecho, los logros griegos en el campo de la filosofía se pueden expresar, dentro de esta perspectiva, como la aplicación de la racionalidad humanista y profana a las cuestiones (de la moralidad, de la existencia) que otras culturas y tradiciones han interpretado predominantemente o en su totalidad a través de categorías religiosas de pensamiento. Sin embargo, paralelamente a todo esto existen otras tendencias de la filosofía griega antigua más o menos racionales, o incluso antirracionalistas, como por ejemplo la escuela de los filósofos cínicos.

Además, lo que según los estándares de la Antigua Grecia se consideraba como una explicación racional o científica de los fenómenos en muchas ocasiones no sería aceptado como tal entre nosotros. En la filosofía, al igual que en la ciencia, los griegos abrieron nuevos caminos (no los únicos por supuesto) y fueron a veces unos originales y asombrosos pioneros, aunque actualmente serían unos colegas más bien extraños en el aula y en la biblioteca, o en la mesa de laboratorio.

El surgimiento de la filosofía en la Grecia de los siglos Vl y V a.C. constituyó sólo una parte de un movimiento más amplio al que a veces se denomina la Ilustración Griega. Esto parte de la suposición de que era en cierto modo comparable a la Ilustración europea y americana del siglo XVIII. Ciertamente, esta analogía resulta útil, hasta cierto punto. La filosofía, la historia, la educación superior, la retórica y varias ramas de la ciencia, especialmente la medicina y la matemática, adquirieron entonces sus identidades profesionales propias y sus códigos disciplinarios. Llevaron a cabo lo que de buena gana reconoceríamos como importantes avances intelectuales. Sin embargo, coexistieron con ciertos modos de reflexión sobre el pasado, de instrucción de las siguientes generaciones, de curación de enfermos y, más en general, de creación de representaciones del mundo de naturaleza animada e inanimada que tuvieron una fuerte tradición.

Además, los antiguos griegos tuvieron una actitud muy diferente de la nuestra con respecto a la innovación como tal. Para la mayoría de los griegos, lo que era nuevo resultaba chocante en un sentido totalmente negativo. Por ejemplo, los términos griegos utilizados para designar la revolución política eran el equivalente de nuestros términos “innovacionismo” y “asuntos demasiado nuevos”. No tenían ninguna equivalencia con nuestra palabra “progreso” y tampoco mucho parecido con nuestras ideas modernas sobre dicho progreso. Sólo en la esfera de las artes gráficas y escénicas se esperaba y se aceptaba la innovación, aunque la conexión inseparable de estas artes con el culto a los dioses se manifestaba más en el camino de la continuidad evolutiva que en un cambio realmente radical.

Existía una razón perfectamente válida para todo este conservadurismo básico de los griegos. Nosotros, a través de la aplicación de la ciencia y la tecnología, hemos llegado a dominar y también, en muchas ocasiones, a destruir una buena parte de nuestro entorno natural, o lo hemos modificado para lograr nuestros fines, y alcanzado unos niveles de productividad humana mediante máquinas y ordenadores que ninguna cultura precientífica o preindustrial podría ni tan siquiera haber soñado. En cambio, los antiguos griegos estaban en gran medida a merced de las fuerzas de la Naturaleza. La mayoría de ellos vivía en los márgenes de la mera subsistencia, o cerca de ellos, totalmente expuestos a ser aplastados e incluso aniquilados por un

[5] Cuidado¡¡¡¡¡ Ver más adelante el Epígrafe sobre el Eurocentrismo.

desastre inoportuno en las cosechas o porque les sobreviniera una enfermedad, por no hablar de la amenaza constante de destrucción por efecto de las guerras entre los hombres.

En resumen, los griegos estaban dominados por lo que llamamos las fuerzas económicas, en vez de ser ellos los que las dominaban. No sorprende que la economía, tal como nosotros la entendemos, no fuera ninguna de las ramas del pensamiento o de la técnica que ellos desarrollaron de forma significativa. Cuando hablaban de *oikonomia,* se referían a la gestión prudente de una casa o propiedad individual privada, más que a la administración de una economía nacional. Ni siquiera los griegos ricos podían confiar en que algún día transmitirían intacta a sus herederos la propiedad inmobiliaria que ellos habían heredado. Para los griegos pobres, la misma idea de transmitir una propiedad inmobiliaria pertenecía a la esfera de la fantasía.

Son estas duras condiciones materiales básicas las que explican el conservadurismo de los griegos. También explican por qué la idea de cambio secular que predominaba entre ellos era una idea de decadencia, no de progreso. Ellos creían que en un tiempo lejano, en una edad dorada, la tierra producía espontáneamente el grano, el aceite de oliva y el vino, el equivalente de la leche y la miel para los griegos. Sin embargo, en la Edad del Hierro, las cosas fueron mucho peores y no había ninguna esperanza realista, ni siquiera expectativas, de que les pudiera ir mucho mejor en un futuro a corto plazo.

Los griegos intentaron explotar y superar esa idea muy general de decadencia irreversible contraponiéndole la nueva idea de utopía (la noción pseudogriega acuñada por Tomás Moro significa “sin lugar” o también “lugar donde las cosas van bien”). La más famosa de estas utopías imaginarias de los antiguos griegos es la **“República”** de Platón, un dominio ideal gobernado sabiamente por reyes filósofos con un lugar reservado para cada persona y donde cada persona está en el lugar que se le ha asignado, es decir, un mundo perfectamente justo, aunque con una justicia bastante restringida. Pero está claro que incluso el mismo Platón consideraba que este ejercicio académico era en última instancia insatisfactorio. Los reyes filósofos no eran precisamente lo que abundaba en la Grecia del siglo IV. Por ello, Platón pasó los últimos años de su larga vida construyendo una nueva Jerusalén mucho más firmemente estructurada, que concibió como una nueva y flamante ciudad griega que habría de ser fundada en la isla de Creta. Tampoco esto llegó a convencer, en absoluto, al más brillante discípulo de Platón: Aristóteles. Éste retornó a los principios básicos y finalizó su **“Política”** esbozando una utopía “rebajada”, o realista, pensada para los mortales y no para que vivieran en ella unos semidioses.

Con esto hemos dado la vuelta completa al círculo, volviendo a nuestro punto de partida, la *polis* observante de las leyes a las que se vincula. Éste fue verdaderamente uno de los mayores logros colectivos de los griegos, y constituyó el marco indispensable dentro del cual construyeron el legado del que somos aún, o deberíamos ser, unos herederos agradecidos.

Cualquier historia del pasado es historia del presente, en el sentido de que las preocupaciones del presente afectan, en cierta medida, al modo de estudiar y escribir la historia. La historia tiene también rasgos personales, ya que es imposible evitar la influencia de las propias opiniones y de los prejuicios del historiador, tanto en la selección del material histórico como en el énfasis que se pone en algunos aspectos. Por lo tanto, pueden ser necesarias algunas explicaciones y justificaciones

para lo que vamos a exponer a continuación, en una secuencia más bien cronológica, sobre el surgimiento de sus Matemáticas que ellos nos legaron.
Está claro que no era posible incluir en este pequeño espacio a todos los grandes (o más importantes) griegos y hechos históricos de la Antigüedad Griega. Puede que algunos lectores lamenten, por ejemplo, la ausencia de capítulos sobre aportes culturales. Una razón para omitirlos ha sido mi deseo de no desplazar el centro de atención, al menos en cierta medida, del hilo central del libro, *las Matemáticas Griegas*. Pero está en preparación una obra más general, en la que el surgimiento de la Civilización Griega, su Filosofía, su Cultura y las condiciones socio-económicas, sirven de marco general, para la presentación más acabada de las Matemáticas Griegas, como fenómeno socio-cultural.
Espero que el tratamiento que hago de estos tópicos, refleje adecuadamente la actividad de investigación y controversia que se está realizando en la actualidad en un campo, el estudio del mundo clásico, que sigue estando muy vivo, a pesar de que su atención se dirige a algo que lleva mucho tiempo, cronológicamente hablando, superado.
En un marco general sobre las perspectivas actuales en Filosofía e Historia de las Matemáticas sobre el conocimiento matemático, se deben destacar los ensayos de Morris Kline-"**Matemática. La pérdida de la certidumbre"**, Madrid: Siglo XXI, 1985 y de R. Hersh-"**Experiencia matemática"**, Barcelona: Labor, 1988; así como los trabajos de Mark Steiner-"**Mathematical Knowledge"**, Ithaca: Cornell University Press, 1975 por su agudeza crítica; Raymond L. Wilder-"**Mathematics as a Cultural System"**, New York/Oxford: Pergamon Press, 1981 una visión próxima (aunque un tanto superficial) a un sentir hoy común sobre los aspectos culturales, sociales e históricos del desarrollo de las Matemáticas; Philip Kitcher-"**The Nature of Mathematical Knowledge"**, New York/Oxford: Oxford University Press, 1983 como perspectiva general del campo temático con singular atención a algunos puntos (e.g. la discusión del presunto estatuto **a priori** del conocimiento matemático, el cambio histórico en Matemáticas, la rigorización) y Mary Tiles-"**Mathematics and the Image of Reason"**, London/ New York: Routledge, 1991 una síntesis histórica-filosófica apropiada.
El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la Matemática. Se puede barruntar la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio. Ahí es donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se hace desaparecer en los textos secundarios. Como dice muy acertadamente Toeplitz[6] *"Con respecto a todos los temas básicos del cálculo infinitesimal... teorema del valor medio, serie de Taylor,...nunca se suscita la cuestión ¿Por qué así precisamente? o ¿Cómo se llegó a ello? Y sin embargo todas estas cuestiones han tenido que ser en algún tiempo objetivos de una intensa búsqueda, respuestas a preguntas candentes...Si volviéramos a los orígenes de estas ideas, perderían esa apariencia de muerte y de hechos disecados y volverían a tomar una vida fresca y pujante"*.
Conocer esta visión dinámica que señala Toeplitz, nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo:

---

[6] Otto Toeplitz (1881-1940). Matemático alemán de origen judío, brillante discípulo de Hilbert, se dedicó al estudio de la geometría algebraica, ecuaciones integrales, y teoría espectral. Nació en Breslau el 1º de agosto y murió exiliado en Jerusalén el 15 de febrero. La frase es del renombrado **"The Enjoyment of Mathematics"** escrito en colaboración con Hans Rademacher, libro que ha sido reimpreso muchas veces en todo el mundo desde su aparición en 1957 por la Pricenton University Press; hay traducción española **"Números y figuras"**, Alianza Editorial, Madrid, 1970.

- posibilidad de extrapolación hacia el futuro.
- inmersión creativa en las dificultades del pasado.
- comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusión inicial, a media luz, esculpiendo torsos inconclusos...

Por otra parte el conocimiento de la Historia de las Matemáticas y de la biografía de sus creadores más importantes, nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento,... así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto este último del que los mismos matemáticos, enfrascados en su quehacer técnico no suelen ser muy conscientes, por la forma misma en que la matemática suele ser presentada, como si fuera inmune a los avatares de la historia.

Desafortunadamente, tanto para el estudiante que desea sumergirse en la investigación matemática como para el que quiere dedicarse a sus aplicaciones o a la enseñanza, la Historia de las Matemáticas suele estar totalmente ausente de la formación universitaria en nuestro país. A mi parecer sería extraordinariamente conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica, como he dicho arriba, y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara siquiera un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida. Mientras llega una situación razonable yo me atrevería a aconsejar:

- la lectura atenta de algunos de los numerosos y excelentes tratados de historia que van apareciendo en castellano (Boyer, Kline, Colette, Grattan-Guinness...).
- acudir, para los temas del interés particular de cada uno, a las fuentes originales, especialmente de los clásicos.
- leer las biografías de los grandes matemáticos, al menos en la forma sucinta en que aparecen en el Dictionary of Scientific Biography o en el archivo de St. Andrews University, disponible online en http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en Matemáticas.
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,...
- señalar los problemas abiertos.

Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas y no caer en los errores en que caen los matemáticos, profesores o no, que adolecen de una formación histórica, entre otros:

Visión lineal y acumulativa del desarrollo de la Matemática, que ignora las crisis y remodelaciones profundas de las teorías y conceptos.

Visión aproblemática y ahistórica, que transmite conocimientos ya elaborados como hechos asumidos sin mostrar los problemas que generaron su construcción.

Visión individualista, el conocimiento matemático aparece como obra de genios aislados, ignorando el papel del trabajo colectivo de generaciones y de grupos de matemáticos.

Visión elitista, que esconde la significación de los conocimientos tras el aparato matemático y presenta el trabajo científico como un dominio reservado a minorías especialmente dotadas.

Visión descontextualizada socialmente neutra, alejada de los problemas del mundo e ignorando sus complejas interacciones con las otras ciencias, la técnica y la sociedad. Se proporciona una imagen de los matemáticos encerrados en recintos y ajenos a la necesaria toma de decisión.

En estos momentos, han tomado fuerzas posiciones de historiadores de la matemática que defienden entre otros, las dos siguientes tesis[7]:

"1.- En la mayor parte de las historias de las matemáticas conocidas podemos comprobar que se oculta o no se fundamenta en absoluto la concepción epistemológica que se tiene de dicha disciplina. ¿Qué se entiende por matemáticas?, ¿qué se entiende por ciencia o ciencias?, ¿y por abstracción? Estas preguntas, desgraciadamente, no se suelen responder con el más mínimo rigor en los libros publicados al respecto, por lo que muchas de las afirmaciones que contienen se deben asumir como dogmas de fé, sin posibilidad de discusión y, en su caso, de refutación.

2.- Los textos de historia de las matemáticas se han escrito con un marcado sesgo eurocéntrico, ignorando, devaluando y distorsionando la actividad matemática realizada al margen del continente europeo. Parece ser que únicamente los habitantes del mismo han sido capaces de aportar algo a la "reina de las ciencias", al espíritu humano creador capaz de construirla y desarrollarla con racionalidad y rigor".

Quizás en el segundo tema, la obra más sólida es la que presenta el sirio-indio-etíope-inglés Georges Gheverghese Joseph, autor de una obra que bajo el sugerente título de **"La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas"**[8] plantea una crítica demoledora, crítica que abunda en defensa de la segunda tesis. Como afirma dicho autor *"Las matemáticas han desarrollado un lenguaje universal con una clase particular de estructura lógica. Contienen un cuerpo de conocimientos relacionado con el número y el espacio, y prescriben un conjunto de métodos para alcanzar ciertas conclusiones acerca del mundo físico -y para la resolución de infinidad de problemas, diríamos nosotros-. Y es una actividad intelectual que exige intuición e imaginación para deducir demostraciones y alcanzar conclusiones. Con frecuencia recompensa a las mentes creativas con un fuerte sentido de satisfacción estética"*[9].

Más aún, el mundo se estremeció con la noticia que la Escuela de Kerala, en la antigua India, se adelantó 250 años en la identificación de las *series infinitas* (uno de los componentes básicos del cálculo) en el siglo XIV, usualmente atribuido a Isaac Newton y Gottfried Leibnitz, a finales del siglo XVII[10].

En esta dirección, cabe quizás añadir lo siguiente, como meta a transmitir con el conocimiento y utilización de recursos históricos en distintos ámbitos, la concepción dinámica de la Matemática, acuñada en la célebre frase de Philip E. Jourdain[11], en la introducción a su comentado **"La Naturaleza de la Matemática",** cuando al declarar el objetivo central de dicho libro apuntaba *"Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo"*[12].

---

7 Arrieta, J. M. (1997)-**"La Matemática, su historia y su enseñanza"**, preprint.

8 Editorial Pirámide, Madrid, 1996.

9 pág. 26 de la obra de Joseph.

10 Más información en http://www.electronicafacil.net

11 Philip Edward Bertrand Jourdain, matemático ingles, nacido el 16 de octubre de 1879 en Ashbourne, Derbyshire y fallecido el 1º de octubre de 1919 en Crookham, Hampshire. Muy conocido por sus trabajos en lógica y en números transfinitos.

12 Reeditado por Dover Publications en el 2007.

2. Sobre los textos y la historia.

Probablemente, la primera historia diseñada para el uso en la enseñanza, y desde muchos puntos de vista la mejor, es el texto admirablemente corto de Dirk Struik[13]; no es casual que este texto de Struik, el pionero, fuera una versión en la que dominaba la política de extrema izquierda de Simone Weil. Una síntesis de sus investigaciones fue su **"Concise History of Mathematics"**, de la cual se han hecho muchas ediciones en por lo menos 17 idiomas; recientemente ha salido una nueva edición con un nuevo capítulo sobre las Matemáticas en el siglo XX[14]. Esta obra es uno de los más importantes enfoques sobre la influencia del desarrollo social sobre el pensamiento y la producción conceptual de las Matemáticas. En relación con ello comentó *"hasta ese momento las matemáticas eran un trabajo puramente intelectual, cuyos desarrollos se entendían mejor analizando las ideas y las teoría independientemente del mundo social que las produjo"*, por lo que *"hasta esa época se hacía Matemáticas en un delicioso vacío social, no alterado por ninguna presión extraña salvo el medio académico y social inmediato"*. Siempre ha sostenido, en contra de la concepción idealista subjetiva de la matemática, que la enorme aplicabilidad de esta ciencia no es fruto de la coincidencia *"la aplicabilidad de la Matemática es demasiado general, demasiado universal, para tomar en cuenta semejante alegato"*[15], por lo que se dedicó a la búsqueda de su explicación racional y sus obras son una aportación importante en esa dirección. En sus trabajos se opuso siempre al logicismo imperante en las llamadas *filosofías de la matemática*, pues su concepción consiste en que *"la Matemática, como aspecto del mundo real, participa de su dialéctica. La dialéctica implica creación incesante. Por su misma naturaleza, la matemática es, pues, creadora, trascendiendo constantemente las tautologías que pueden surgir en su estructura. Podemos expresar esto diciendo que la matemática se basa en algo más que la lógica formal. La lógica de la matemática, y especialmente de la matemática en su desarrollo, es una lógica dialéctica"*[16]. En 1969, publicó como editor **"A Source Book in Mathematics, 1200 1800"**, en Harvard University Press, Massachusetts.

El siguiente texto que quiero señalar es el de John Fauvel y Jeremy Gray[17], producido junto con una serie de textos cortos de la Open University. Este trabajo, realizó la función de fungir, según el British National Curriculum para la historia, como material primario y permitir a los estudiantes ver, por si mismos, cuán *diferente* podrían aparecer las matemáticas en otros textos[18]. Desde entonces, los libros de texto se han hecho más largos, más pesados, y más caros. No obstante, se venden bien, han sido escritos por historiadores profesionales de las Matemáticas, y son exhaustivos en su cobertura[19] ¿Qué carencia tienen entonces? Para explicar esto se requiere precisar lo que es la Historia, y lo que nos gustaría aprender de ella.

---

[13] Dirk Jan Struik nació en Rotterdam, Holanda, el 30 de septiembre de 1894 y murió en Belmont, Massachussets, EEUU, el 21 de octubre de 2000. Estudió en la Hogere Burger School de 1906 a 1911, para luego entrar a la Universidad de Leyden, uno de los centros más importantes en el mundo de la Física y las Matemáticas con Lorentz, Ehrenfest y Kamerlingh, el primero y el último, premios Nobel. Ahí llegaron Madame Curie, Rutherford y Einstein.

[14] En español existe una obrita resumen bajo el nombre **"Las matemáticas, sus orígenes y su desarrollo"**, publicada por Siglo 20, Buenos Aires, en 1960.

[15] Ver p. 71, de **"Las Matemáticas …"**.

[16] p.50 de la misma obra indicada arriba.

[17] "**The History of Mathematics"**, Palgrave Macmillan, 1987.

[18] Hay varios otros libros de textos, por ejemplo, el ya citado de Struik (1969), pero Fauvel y Gray es el más usado.

[19] El trabajo reciente de Ivor Grattan-Guinness (1997), escapa a la susodicha clasificación siendo relativamente ligero, barato, y muy centrado en el descuidado siglo diecinueve. Pareciendo ser una

E. H. Carr[20] dedicó un pequeño clásico, que es muy recomendado como algo más que un prolegómeno a la historia de las matemáticas[21]. En este, él comienza haciendo una crítica mesurada, pero decisiva, a la idea que la historia es simplemente el amontonamiento de algo llamado "hechos" en un orden apropiado.
Si aceptamos por el momento la dicotomía de Carr, entre los historiadores que se hacen preguntas y aquellos que consideran que la acumulación de hechos es suficiente, entonces mi opinión sería que la mayor parte de los especialistas o las historias de las matemáticas *locales* realmente hacen preguntas; y que los textos largos, generales y abarcadores le hacen ver al estudiante los hechos, con mayor probabilidad que las preguntas. Los trabajos de Fowler y Knorr sobre los griegos, de Youschkevitch, Rashed, y Berggren sobre el Islam, las colecciones de ensayos por Jens Høyrup y Henk Bos y muchos otros en formas diferentes, están referidos a las preguntas que surgen y a argumentar casos[22]. El caso de los griegos es particularmente interesante, ya que hay pocos hechos *difíciles* para continuar. Por consiguiente, varias especulaciones prácticas han adquirido el estado de hechos; y esto en sí mismo es un aviso. Por ejemplo, se declara por lo general que Eudoxo de Cnido inventó la teoría de proporciones en el libro V de Euclides, si bien hay pruebas para afirmar esto, las mismas son bastante escasas.
Sobre lo anterior Fowler es suspicaz, y aunque Knorr está más predispuesto, como especialistas, necesariamente discuten sobre su estado. En todas las historias generales, lo anterior ha adquirido el estado de un hecho, porque (en los términos de Carr) si la historia es sobre hechos, se debe tener una línea clara que los separe de los no-hechos, y las especulaciones, reconstrucciones, y los argumentos, interrumpen la suavidad de la narrativa.
Por consiguiente, diría yo, al estudiante no le es ofrecida la historia en el sentido de Carr; los distinguidos autores de estos textos de 750 páginas escriben (ya sea por elección o por las demandas del mercado) en un modo muy distinto, aun cuando en sus propias investigaciones, su acercamiento sea completamente diferente. En efecto, en este milenio, ya no pueden escribir como Montucla de un progreso ininterrumpido desde los orígenes hasta la perfección actual, y son conscientes de la necesidad de ser justos con otras civilizaciones. Sin embargo, el precio de estos buenos modales académicos es la pérdida de cualquier argumento en lo absoluto. Recuerden el punto de Nietzsche que es necesario, para la acción, olvidar (en este caso, olvidar un poco el detalle). Y existen dos razones para intentar un acercamiento diferente, que me han llevado a escribir este libro:

---

historia de todo, está más próximo a un estudio de especialista.

[20] Edward Hallett Carr, nació en Londres, el 28 de junio de 1892 y murió en la misma ciudad el 3 de noviembre de 1982. Historiador británico, periodista y teórico de las relaciones internacionales, y oponente a la consideración del empirismo dentro de la historiografía. Fue un pragmático y definió a la historia como un proceso continuo de interacción entre el historiador y sus hechos, un diálogo sin fin entre el presente y el pasado.

[21] **"What is history?"**, Basingstoke, Palgrave, 2001. Existe traducción al español **"¿Qué es la historia?"**, Barcelona, Ariel, 2003.

[22] Fowler, David-**"The Mathematics of Plato's Academy"**, 2nd edn. Oxford, Oxford University Press, 1999; Knorr, Wilbur-**"The Origin of Euclid's Elements"**, Dordrecht, Reidel, 1975; Youschkevitch, A. P.-**"Les Mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)"**, Paris, Vrin, 1976; Rashed, Roshdi-**"The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra"**, Dordrecht, Kluwer, 1994; Berggren, J. L.-**"Episodes in the Mathematics of Medieval Islam"**, New York, Springer-Verlag, 1986; Høyrup, Jens-**"In Measure, Number, and Weight: Studies in Mathematics and Culture"**, Albany, NY, State University of New York Press, 1994; y Bos, Henk-**"Lectures on the History of Mathematics"**, Providence, RI, AMS and LMS, 1991.

1. La supuesta *humanización* de los estudios matemáticos por la inclusión de la historia, falla en su objetivo si la enseñanza carece de los elementos críticos que deberían ir con el estudio de historia.
2. Como los anteriores ejemplos, el campo vivo de la duda y el debate, que es la investigación en la Historia de las Matemáticas, se encuentra traducido en un paisaje muerto de certezas. El aspecto más interesante, quizás, de la Historia de las Matemáticas que es su *práctica*, se omite.

En este momento, nos pudiéramos preguntar, razonablemente, cuál es la mejor respuesta que este pequeño libro puede ofrecer. El ejemplo de Eudoxo se supone para adelantar (en parte) la respuesta a tal pregunta por vía de la ilustración.
En consecuencia, el énfasis se hace a veces en la historia misma, a veces en la historiografía: el estudio de lo que los historiadores hacen y a veces en la propia matemática.
Note que no ofrecemos una alternativa a aquellos trabajos que recomendamos. A diferencia de los textos antes citados este libro no intenta argumentar casos. La intención es enviarle en busca de aquellos que han presentado los argumentos. A menudo la carencia del tiempo o las limitaciones de bibliotecas universitarias harán esto difícil, si no imposible (como es el caso del libro de Youschkevitch, en francés y hace mucho tiempo agotado); en cualquier caso la referencia y, con esperanza, un resumen justo del argumento lo encontrará aquí.
Este acercamiento es reflejado en la estructura del trabajo. Una sección inicial pone la escena socio-económica y destaca las cuestiones principales que parecen ser importantes, para la parte histórica propiamente dicha. Considerando la pobreza de muchas bibliotecas, estaría bien recomendar Internet. Sin embargo, usted encontrará raramente algo sustancial, aparte de los **"Elementos"** de Euclides (que seguramente vale la pena tener) y, como siempre ocurre con fuentes de Internet, tendrá que *caminar sobre el agua* por la gran masa de aseveraciones no apoyadas antes de llegar a la información confiable. El archivo de St. Andrews ya mencionado, realmente tiene casi todas las biografías necesarias, con referencias adicionales y muchos temas complementarios y en la página http://almez.pntic.mec.es/agos0000/Enlaces.html existen varios enlaces con publicaciones y sitios dedicados a la Historia de las Matemáticas. Si su universidad tiene dinero para invertir, anímela a invertir en los principales libros y revistas; por supuesto, si puede hacer esto, este libro sería redundante. Después de los dos capítulos iniciales, nos centramos en el desarrollo del pensamiento matemático griego, hasta su decadencia, salpicado aquí y allá con notas y reflexiones filosóficas.

3. Historicismo y presentismo.

A continuación, discutimo algunos problemas generales y controversias que conciernen a aquellos que escriben sobre la Historia de la Ciencia, en general, y sobre Historia de las Matemáticas, en particular. De lo presentado en el epígrafe anterior, es natural considerar dos acercamientos al *modo de hacer historia*; el *historicismo* y el que es llamado *presentismo*. Estas categorías, no son exactamente contraposiciones; un vistazo, por ejemplo, en Isis a las revisiones, mostrarán que mientras el historicismo se considera bien a veces, el presentismo, como *la Historia Liberal*, casi siempre es "malo". Es difícil ser preciso en la definición, ya que ambos términos son extensamente aplicados; brevemente, el historicismo afirma que los trabajos del pasado sólo pueden ser interpretados en el contexto de una cultura pasada, mientras que el presentismo trata de relacionarlo con nuestro propio contexto. Vemos que el presentismo en la creencia de Hardy y Littlewood que los

griegos antiguos eran hombres de Cambridge en el fondo (aunque Hardy le negó tal status a los orientales).
Por el contrario, Spengler[23], hoy un profundo pensador pasado de moda, muestra un historicismo radical al afirmar que culturas diferentes (en las que él estaba excepcionalmente bien informado) tienen conceptos diferentes de número. Es injusto, que para usarlo como representativo, nadie haga afirmaciones tan arrolladoras como él hizo; así, en el centro de su doctrina se encuentra la idea de la pluralidad cultural de la humanidad. La civilización, en singular, no existe. La Historia, como manifestación que es de la vida, se nos ofrece con los requisitos de toda realidad viviente, esto es, articulada e interrelacionada como están las partes activas de un organismo. La Historia es lo mismo que un proceso biológico, y, como tal, pasa por etapas necesarias de gestación, nacimiento, desarrollo y consumación. De lo cual se sigue que una determinada concreción histórica, es decir, una cultura, ha tenido unos antecedentes, nace, se manifiesta en un desarrollo propio y se extingue al final de ese proceso natural (son lo que Spengler llama *las cuatro edades de la cultura*).
Afirmar que un texto debe ser estudiado con relación a su tiempo y cultura no necesariamente debe decir que su 'alma' es completamente diferente de nuestra propia alma. En efecto, si fuera así, es difícil ver como podríamos entender el pasado. Schleiermacher a principios del siglo diecinueve dispone el proyecto en términos ambiciosos *"El vocabulario y la historia de la era de un autor juntos forman un todo del cual sus escrituras deben ser entendidas como una parte"*[24]
Y encontraremos tales tentativas de entender la parte de un todo, por ejemplo, en el estudio de Netz (los capítulos 2 y 3) de la práctica matemática griega[25], o la tentativa de Martzloff (el capítulo 4) para entender los textos chinos antiguos[26]. El problema particular para las Matemáticas, es su pérdida del sentido de tiempo aparente, la posibilidad de traducir cualquier escritura del pasado en nuestros propios términos. Esto hace legítimo, por lo visto, ser desvergonzadamente presentista y considerar la escritura pasada sin la referencia a su contexto, como si haya sido escrita por un contemporáneo; un procedimiento que realmente "no siempre trabaja" en nuestra área.
Quisiéramos, por último, señalar que esta dicotomía, está mucho más presente en la utilización de la Historia de las Matemáticas como herramienta didáctica que, en casi cualquier otra área, debemos dejar claro que la objetividad histórica, no debe ceder ante las necesidades pedagógicas, ejemplo de esto son los muy conocidos E.T. Bell-**"Men of Mathematics"**, New York, Simon and Schuster, 1937 y L. Infield-**"Whom the gods love"**, New York, Whittlesey House, 1948, mal concebidos como tratados históricos en virtud de un determinado interés motivacional[27].

---

[23] Oswald Spengler nació en Blankenburg-am-Harz en 1880 y murió en Munich en 1936. Filósofo e historiador alemán, estudió matemáticas, ciencias naturales y economía. Su obra principal, **"La decadencia de Occidente"** (dos vols., 1918 y 1922), tuvo muy pronto un enorme éxito entre el público. Durante algún tiempo el nazismo le mereció un juicio positivo (**"Los años decisivos"**, 1933), aunque más tarde ironizaría ferozmente contra Hitler, los nazis y su escasa inteligencia. En 1931 publicó **"El hombre y la técnica. Contribución a una filosofía de la vida"**.

[24] Schleiermacher, Friedrich D. E.-**"Hermeneutics: The Handwritten Manuscripts"**, (ed. Heinz Kimmerle and trans. James Duke and Jack Forstman), Oxford, Oxford University Press, 1978, pág. 113.

[25] Netz, Reviel-**"The Shaping of Deduction in Greek Mathematics"**, Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

[26] Martzloff, Jean-Claude-**"A History of Chinese Mathematics"** (tr. Stephen L. Wilson), Berlin, Springer-Verlag, 1995.

[27] Ver al respecto, Garciadiego, A.-**"Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innnata?"**,

En esta última dirección, creemos útil añadir además, que la Historia de las Matemáticas ha devenido en múltiples ocasiones, en situaciones que han hecho más daño que beneficio, tal y como ilustramos en el siguiente cuadro.

Abusos tradicionales	***Usos racionales***
Hacer "hagiografía" matemática, estableciendo correspondencias entre semidioses y milagros matemáticos.	Humanizar el proceso de aprendizaje, dándole contexto (social, cultural, personal, etc) a la fría osamenta de las estructuras y teorías contemporáneas.
Confección de "protocolos notariales" con nombres, lugares y fechas que "sirvan" para ubicar objetivamente la materia formalizada.	Determinar los problemas ejes o generadores, a partir de los cuales, en dinámica grupal, se realice un programa de actividades como investigación.
Motivar al alumno con un conjunto de chistes y anécdotas, en aras de lograr efectismos.	Estimular la apreciación del arte de la creación matemática y la lucha de ideas dentro del proceso de investigación.
Búsqueda de economía del esfuerzo que el profesor debe hacer para dominar los contenidos, las técnicas de y métodos de enseñanza-aprendizaje.	Facilitar al profesor la formación de las bases motivadora y orientadora de la acción, así como permitirle el ajuste dentro de parámetros más objetivos y manejables racionalmente.
Concentrar el ámbito estrecho de una teoría, concepto o método específico.	Mostrar la interdependencia de las diferentes partes de la Matemática, su unidad indisoluble desde su génesis.
Dar pinceladas culturales que hagan más agradable la exposición.	Favorecer de manera natural, el flujo inevitable entre Cultura, Ciencia y Humanidad.
Aplicación mal digerida de la epistemología genética de Piaget o la reconstrucción racional de Lakatos, dejando fuera, la consideración del contexto social.	Restablecer el cuadro cultural de la génesis de diferentes teorías y metodologías, en la consideración de "lo interno" y "lo externo" en una síntesis dinámica dentro de su proceso de formación.
Investigación arqueológica en un mundo platónico de ideas, sombras de ninguna cosa material o humana.	Búsqueda crítica de regularidades evolutivas, como refuerzo de la comprensión de la necesidad, las consecuencias y las aplicaciones del conocimiento.
Remendar el plan de estudios con un parche ostentoso en un momento concreto de la carrera, tratando de darle fundamento tardío a un conocimiento introducido de manera artificial y prematuramente abstracta.	Incorporarla como componente sistémico del currículo, al servicio del cumplimiento de sus objetivos generales desde los primeros años, progresando sucesivamente en el hallazgo de interacciones entre pensamiento y realidad, abstracción y concreción, teoría y práctica.

4. Externalistas contra internalistas.

Tradicionalmente se han distinguido dos maneras de abordar el trabajo histórico, una internalista y otra externalista. Desde la corriente internalista, se considera que el objeto de la Historia de las Ciencias, es la ciencia misma. Es así como se trata de hacer una historia de los conceptos, atendiendo básicamente a la estructura lógica de su producción. Desde la externalista, se considera que las explicaciones sobre acontecimientos científicos se pueden obtener primordialmente desde el ámbito social; postura que se acerca más a una sociología de las ciencias.

Los trabajos en *las fuentes sociales de las Matemáticas* (Etnomatemáticas, Constructivimo Social, etc.) se relacionan con el análisis de los diferentes procesos

en "El velo y la trenza", F. Zalamea (ed.), EUN (Colombia), 1997.

de elaboración, apropiación y transformación de teorías y saberes matemáticos en contextos socioculturales propios. En este tipo de investigaciones, además del análisis epistemológico del concepto o la teoría, se requiere de un complejo estudio de las diferentes condiciones sociales y culturales del país o la comunidad, para comprender, en una dimensión más amplia, las dificultades de difusión, recepción y apropiación de tal concepto o teoría. Esto conlleva a la observación de instituciones de diversas índoles, al análisis de textos, a la revisión de currículos y directrices político-educativas y, en general, al estudio de todas aquellas dinámicas académicas y educativas, que inmersas en un contexto social particular, obstaculizaron o hicieron posible la incorporación y apropiación de ciertos conceptos. Al final, se pretende identificar y caracterizar los diversos aspectos que han contribuido a la formación de una cultura matemática en una comunidad específica.

Hasta hace aproximadamente 30 años, el Marxismo y varios derivados eran los defensores principales del punto de vista externo, y Dirk Struik, que escribió en los años 1930, se convirtió en un fuerte defensor de éste. Struik era un historiador demasiado bueno para no ser matizado por las relaciones entre la lucha de clase y la renovación matemática *"En la interacción entre teoría y práctica, entre la necesidad social para conseguir resultados y el amor de la ciencia para el bien de la ciencia, entre trabajo en el papel y trabajo de barcos y en campos, vemos un ejemplo de la dialéctica de realidad, una ilustración simple de la unidad de contraposiciones, y la interpenetración de formas polares... La historia y la estructura de matemáticas proporcionan el ejemplo después del ejemplo para el estudio de la dialéctica de materialista"*[28].

La desaprobación extrema bajo la cual cayó el Marxismo desde los años 90 del pasado siglo, ha conducido a aquellos que creen en un poco de influencia de la sociedad, a abandonar las clases y usar conceptos más aceptables, como entornos, grupos, y actores; y Dieudonné ha muerto sin admitir que alguien había ganado su medalla de chocolate (*"Celui qui m'expliquera pourquoi le milieu social des Petites cour allemandes du XVIII siecle ou vivait Gauss devait inevitablement le conduire a s'occuper de la construction du polygone regulier a 17 cotes, eh bien, je lui donnerai une medaille ou chocolat"*)[29]. El error de Dieudonné, es considerar que solo el *mileaux* social influye, bajo este término debemos entender un todo, "social" es sinónimo de político, religioso, económico, e ideológico, más que social es una construcción social.

Aún, en cierto modo, la lucha se ha acentuado bajo la influencia de lo que ha sido llamado *la Escuela de Edinburgh* o *el programa fuerte en la sociología de conocimiento* (SPSK), expuesto al principio de los años 1980 por Barry Barnes y David Bloor, y al hecho que los Marxistas creyeron que el conocimiento científico (incluso el propio Marxismo) era objetivo, y de ahí las clases sociales serían inspiradas de un modo cada véz mayor a investigar hechos verdaderos (como lo ilustran los ejemplos de Struik de logaritmos y de la geometría cartesiana); y que tiene como colofón cuando Mao dijo estupendamente *"¿De dónde realmente vienen las ideas corregidas? ¿Se caen ellos del cielo? No. ¿Son innatas ellas en la mente? No. Ellos vienen de la práctica social, y de ella solamente. Ellos vienen de tres*

---

[28] **"A concise …"**, pág. 84.

[29] Se refiere a la afirmación de Dieudonné en Nordon, D.-**"Les mathematiques pure n'existent pas!"**, Le Paradou, Editions Actes Sud. París, 1981: *"A quien me explique por qué el medio social de las pequeñas cortes alemanas del siglo XVIII, donde vivía Gauss debía inevitablemente conducirlo a ocuparse de la construcción del polígono regular de diecisiete lados, bien, yo le daría una medalla de chocolate"*

clases de práctica social, la lucha por la producción, la lucha de clases y el experimento científico"[30].

Note que Mao también tiene en cuenta *factores internos*; el uso del experimento científico para llegar a las ideas correctas. La Escuela de Edinburgh ha mostrado el camino de un escepticismo aumentado, hasta relativismo en la cuestión de la verdad científica, y al final, toma todo el conocimiento como socialmente determinado.

Como los integrantes de esta escuela son más bien sociólogos que historiadores, tienden a no tener una teoría subyacente del cambio histórico; de ahí que sean más fuertes en la diferencia que se identifica a través de culturas o períodos que en la identificación de la base en la cual el cambio ocurre. Aún bajo la influencia de Kuhn, y viendo alguna clase de crisis en el consenso como la motivación, sienten que los actores y sus normas sociales deben tener algo que ver con ello. Sin embargo, la sociedad en la crisis puede ser simplemente la comunidad de investigación matemática, en cuyo caso todavía estamos en un modelo *interno* modificado, similar a aquel de Kuhn[31]; o puede ser bajo la influencia de la comunidad más amplia, como en el caso del estudio de Joan Richard de la relación entre la Geometría Euclidiana y el período Victoriano. Como Forman ha indicado recientemente, responsable de uno de los mejores estudios de la interacción de ciencia y sociedad[32], parece que la acusación del relativismo ha conducido a muchos abogados del programa fuerte en una marcha atrás, parcial al menos, de una posición que nunca fue muy explícita históricamente[33].

Y aún, la posición internalista de línea dura, todavía es considerada inadecuada por muchos historiadores, aun si ellos no están seguros que mezcla de determinantes deberían poner en su lugar. A menudo en los dos siglos pasados, los determinantes internos parecían supremos[34], aunque en investigación operativa, cálculo y hasta en la teoría del caos, podemos ver fuerzas exteriores en el trabajo. En la historia más antigua, cuando tenemos pruebas (y a menudo cuando no las tenemos) frecuentemente parece que sucede al revés. En su comentario sobre "las Series Rectangulares" (matrices) una sección de los Nueve Capítulos, Liu Hui analiza un problema de arroz, en diferentes grados. Él dice, *"es difícil entender en meras palabras, entonces simplemente usamos el arroz para clarificar"*. ¿Supone él que los autores del texto clásico primero tuvieron la idea de usar el álgebra matricial y luego lo aplicaron a problemas de arroz para la facilidad de la exposición? No tenemos ninguna prueba, pero parece más fácil creer que el descubrimiento fue al revés, de problemas sobre el arroz (o algo) a matrices.

En estos estudios *histórico-epistemológicos* juega un papel esencial, el análisis del proceso de construcción teórica de un concepto. Sin embargo, éste se realiza teniendo siempre en cuenta el contexto particular de producción teórica. Aunque los estudios se realizan fundamentalmente al interior de la teoría, ellos se elaboran bajo la consideración de que el discurso matemático es una actividad de razonamiento que se desarrolla en un medio sociocultural específico.

---

[30] Mao Zedong-**"Where do Correct Ideas Come From?"** Beijing, Foreign Languages Press, 1963, pág. 1.

[31] Cf. las disputas sobre el axioma de elección citadas en Barnes, Barry; David Bloor and John Henry-**"Scientific knowledge: a sociological análisis"**, London, Athlone, 1996, pp. 191-192.

[32] Forman, Paul-**"Weimar Culture, Causality and Quantum Theory 1918–1927"**, Historical Studies in the Physical Sciences 3 (1971), 1–115.

[33] Forman, Paul-**"Truth and Objectivity"**, in Science, vol 269 (1995), pp.565–568.

[34] Uno podría indicar, por ejemplo, que la teoría de nudos, primeramente desarrollada en los años 1870 por un ingeniero electrotécnico (Tait) para tratar un problema físico, ha seguido su propio desarrollo desde entonces, según una lógica interna aparente.

Esta clase de estudios ofrece significativos aportes, pues tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han incidido en la construcción de una teoría, permite formarse una idea más completa del discurso matemático, en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, los cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada y netamente formal. Por ejemplo, el *continuo* y el *infinito* navegan de manera intuitiva en los primeros años de la universidad; la referencia a ellos en los textos es especialmente técnica y operatoria, lo cual esconde las discusiones y riquezas conceptuales que los rodean. En los cursos de cálculo se trabaja con límites, funciones continuas, sumas infinitas, convergencia de sucesiones y series en **R**; sin embargo, una conceptualización que vaya más allá del uso técnico, es difícil de encontrar. Para un acercamiento más integral a conceptos tan complejos como continuo e infinito es necesario estudiar algunos de los momentos claves en el proceso de su constitución teórica.

Un estudio histórico-epistemológico acerca de la génesis y consolidación de estos conceptos da cuenta de la complejidad que los rodea y de los múltiples aspectos que incidieron en su construcción teórica. Además, en un estudio de esta naturaleza, tal como lo presentan Salanskis y Sinaceur[35], el concepto de continuo se muestra como el resultado de intensas discusiones de carácter matemático, físico, filosófico y teológico. Una mirada a la concepción aristotélica del infinito y el continuo, por ejemplo, ofrece explicaciones de carácter filosófico acerca de la manera de ser y de la forma de existencia de estos conceptos en sus orígenes, aspectos claves para comprender la naturaleza de los mismos. Los trabajos de Cantor, por su parte, revelan la instauración del infinito en acto, hecho que condujo a un derrumbamiento del infinito como concepto único, pues se abrió la puerta a la construcción de infinitos. Además, al igual que Dedekind, Cantor aborda el continuo a través de un tratamiento puramente aritmético, en contraposición al geométrico que tenía desde la antigüedad griega.

Estas nociones matemáticas de alto nivel de abstracción, fundamentales en el desarrollo de las Matemáticas y de difícil aprendizaje, desbordan toda intuición sensible y, por tanto, un estudio que dé cuenta de las condiciones lógicas que intervienen en el proceso de constitución en objeto matemático, contribuye a una mejor comprensión de los mismos.

Sin embargo, existe un tercer camino que trata de reconciliar estas dos posturas filosóficas y metodológicas. Es posible pensar en un trabajo en Historia de las Matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural, donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas, teológicas y políticas educativas, entre otras. Aquí se parte de la premisa que las Matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural. Esto significa que las Matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a su historia; una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, sobre la base de que tal desarrollo tiene lugar en medio de complejas dinámicas sociales. Es así como los estudios históricos, desde una perspectiva cultural, exigen tener en cuenta nuevas y ricas variables al analizar los procesos de construcción teórica.

---

[35] Salanskis, J-M et Sinaceur, H. (Eds).-**"Le Labyrinthe du continu"**, Colloque de Cerisy, Paris, Springer-Verlag, 1992. Este libro recoge variados artículos de reconocidos investigadores europeos, quienes abordan la génesis y desarrollo conceptual del continuo desde aspectos históricos, filosóficos, ontológicos, matemáticos y físicos.

El problema consiste en que con el eclipse del Marxismo y con dudas de la importancia de Kuhn en las Matemáticas, no hay ninguna versión muy bien organizada disponible para el historiador. No obstante, intentaremos seguir el enfoque del párrafo anterior en este trabajo.

5. El Eurocentrismo.

"Propongo mostrar... que el tratamiento estándar de la historia de las matemáticas no europeas expone una tendencia de los historiadores profundamente arraigada en la selección y la interpretación de hechos, y que la consecuencia de la actividad matemática fuera de Europa ha sido ignorado, devaluado o deformado".[36]

¿Qué es el eurocentrismo? (para aquellos que no lo han oído aún) En términos generales, es privilegiar el discurso europeo/americano (blanco) sobre otros, más a menudo africano o asiático; en la historia, esto podría significar privilegiar la historia europea de las Cruzadas, o de las Guerras del Opio, o cualquier episodio occidental (blanco, recuerden) sobre *los de otro lado*. Para ver lo que esto podría significar en Matemáticas, deberíamos volver a Joseph que, comenzó su proyecto (en los años 1980), con un punto fuerte, apasionado, e indiscutible. Si contamos como la tradición *europea* a, únicamente, los griegos antiguos y los europeos modernos, un vistazo por muchos textos principales en la Historia de las Matemáticas muestra tal ignorancia o subvaloración de los logros de aquellos que están "afuera" de esta tradición.

En este orden de cosas, queríamos destacar las dos corrientes, la clásica y la modificada. En primer lugar, *la trayectoria Eurocéntrica clásica* afirma que las Matemáticas pasaron directamente de los griegos antiguos a los europeos del Renacimiento; en segundo lugar, *la trayectoria Eurocéntrica modificada*, afirma que Grecia usó, hasta cierto punto, las Matemáticas de Egipto y Babilonia; mientras que después de su decadencia, tal aprendizaje griego fue conservado en el mundo Islámico para ser introducido de nuevo en el Renacimiento. Junto a estas corrientes, está la propia *trayectoria alternativa de Joseph*. Este en el diagrama de transmisión del conocimiento matemático, sitúa en el papel central en la Edad Media, al Mundo Islámico con muchísimas relaciones y tensiones, como un centro cultural, con el aprendizaje de la India, China, y Europa y lo toma tanto como transmisor, que como receptor del conocimiento. Mientras el tono de Joseph puede ser polémico y algunos de sus puntos detallados han sido puestos en duda, sus argumentos son raramente exagerados. Aprendemos tanto de las Matemáticas de la India, China, e Islam, como de los precursores de los griegos, y los estudiantes mejoran cuando son capaces de leer sus textos y entender su modo de pensar las Matemáticas.

Las razones específicas del Eurocentrismo en la Historia de las Matemáticas (aparte del racismo tradicional y otros prejuicios) han sido dobles. El primero es el valor muy alto concedido al trabajo de los griegos antiguos, el segundo el énfasis en los descubrimientos y demostración de los resultados. Recordemos que la mayor parte del trabajo griego fue organizado en la forma de resultado+demostración. A pesar de todo, hay un punto importante para señalar; a saber, después de los griegos fueron los árabes los que siguieron la tradición, con proposiciones y pruebas en el *modo Euclidiano* (el trabajo geométrico de Khayyam de las ecuaciones cúbicas es un modelo de esto). Si contrastamos las matemáticas islámicas de aproximadamente el 1200 de nuestra era, con las contemporáneas de Europa Occidental, sin duda tendríamos que los antiguos son, en nuestros términos los Occidentales, y éstos

[36] Joseph, Op. Cit., pág. 3.

forasteros primitivos, más dedicados al pillaje y el salvajismo que a otra cuestión. Más aún, fuera de los Monasterios, la sabiduría de la Europa Medieval, estaba muerta; los caballeros feudales se centraban en la protección de sus propiedades (nada equivocado) si no fuera por el hecho que esta protección "pasaba" por la destrucción de sus vecinos. Sin embargo, esto no ha ayudado, hasta hace poco, a la integración de los grandes matemáticos islámicos en la tradición occidental; y si esto se hiciera, todavía dejaría afuera a los indios y los chinos, con prácticas muy diferentes entre sí.

En efecto, el problema del Eurocentrismo podría ser visto en términos Kuhnianos como un paradigma. El paradigma griego, o una versión de él, es el que ha persistido en alguna forma en las matemáticas occidentales modernas y las historias tradicionales.

No quisiera cerrar esta sección, sin analizar criticamente, un amplio conjunto de textos de Historia de las Matemáticas, elaborados tanto en las países del entonces llamado segundo mundo, o países del Este, hasta la caída del muro de Berlín, como en los países desarrollados del primer mundo, ahora llamados, de manera algo menos irritante, países del Norte. Comenzaremos, criticando a los que mayor influencia han tenido en mi formación, en concreto las de los historiadores de (en aquel entonces) Alemania del Este, Hofmann y Wussing y el libro de texto, obra del ruso Ribnikov, para continuar con algunos clásicos editados en los países occidentales, en concreto me referiré a las obras de Rouse Ball, de principios de siglo, y a las más recientes de Morris Kline y, cómo no, las de Jean Dieudonné, bourbakista de la primera fecha.

Al poco de iniciar la lectura del libro del alemán Hofmann[37], se topa uno con la siguiente afirmación *"La matemática como ciencia empieza, en realidad, con Anaxágoras de Klazomene (500?-428 a.C.), quien sentó que, en lo inferior a lo pequeño, no hay un mínimo, sino solamente algo más pequeño, e igualmente en lo grande"* (pág. 20). Y por mucho que uno indague hacia delante o hacia atrás en el libro, no encuentra en él ningún motivo ni para afirmar ni para negar tal afirmación. Como no define lo que entiende por matemática, la tesis de que empieza con ese autor griego puede aplicarse a cualquiera de los citados en el libro, griegos o no, antiguos o contemporáneos.

Por otra parte, la estructuración de su libro refleja claramente la asunción de lo que denominaremos, con Joseph, *la trayectoria eurocéntrica clásica*, consistente en afirmar que las Matemáticas nacieron en Grecia, languidecieron durante mil años en la edad oscura o edad media, y volvieron a florecer con el renacer del pensamiento griego en la Italia Renacentista, tesis tan extendida y difundida como errónea.

Por otro lado, Wussing es, a no dudarlo, uno de los principales exponentes del externalismo, sino ¿cómo entender que la formación socio-económica imperante, determine la periodización que usa para estudiar la historia de la matemática?[38]

Por su parte, el historiador de las matemáticas soviético Ríbnikov, presenta en muy pocas páginas, en las comprendidas entre la 9 y la 19 de su texto[39], un compendio de tópicos, basados en la concepción materialista histórica del marxismo, que utiliza posteriormente con profusión para pretender justificar y fundamentar la evolución histórica de las matemáticas; lo que ocurre es que, a nuestro entender, las

[37] Hofmann, J. E.-**"Historia de La matemática"**, La Habana, Editorial Revolucionaria, 1968.

[38] H. Wussing-"Conferencias de historia de la matemática", Siglo XXI, España Editores, Madrid, 1998, aunque yo usé la de Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

[39] Ver K. Ríbnikov-**"Historia de las Matemáticas"**, Editorial Mir, Moscú, 1991.

determinaciones prácticas de las que habla, de tanto determinarlo todo, acaban por no determinar nada. Pero no nos adelantemos.

Comienza recurriendo a Engels para definir las matemáticas como la ciencia cuyo objeto lo constituyen las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real. Pudiéramos pensar que seguir citando a dicho autor más de cien años después, es demasiado osado, pero reto al lector a que encuentre una definición del objeto de la Matemática más coherente y concreta. Ahora bien, se equivoca cuando asume con Engels la idea eurocéntrica de *"que las ciencias naturales teóricas, si quieren seguir la historia del surgimiento y desarrollo de sus tesis generales actuales, están obligadas a dirigirse a los griegos"*[40]. Al mismo tiempo debemos señalar que la periodización de la Historia de las Matemáticas, debida a Kolmogorov, de sesgo también netamente euro-céntrico: tras su nacimiento en Grecia durante los siglos VI y V a.C., se desarrolla el período de las matemáticas elementales, hasta el siglo XVI, en el Renacimiento, para continuar con el período de las matemáticas de las magnitudes variables, hasta mediados del siglo XIX y finalizar con el período actual de las matemáticas contemporáneas. No obstante, creo que esto es lo más rescatable de su sesgo eurocéntrico (de hecho la considero adecuada), pues es sumamente difícil, por no decir imposible, encontrar rasgos comunes en la actividad matemática mundial, ni siquiera en estos momentos.

Pero es más, defiende, en flagrante contradicción con sus presupuestos marxistas, tesis tan poco materialistas como las que asume cuando afirma que *"las teorías matemáticas preceden al método matemático",* invirtiendo la relación existente entre teoría y praxis, o cuando habla de *la llegada de la Edad Media*, como si esta Edad llegase del cielo, o como cuando defiende que *lo nuevo irresistiblemente vence*, bastando con entender por lo nuevo lo que acabará venciendo, o, por último, cuando teoriza sobre *la lucha encarnizada de lo nuevo contra lo viejo,* al referirse al desarrollo histórico de los conceptos matemáticos. Por otra parte, sigue insistiendo en la existencia de *leyes objetivas del desarrollo de las matemáticas,* sin mostrar cuáles son dichas leyes y cómo funcionan para predecir, por ejemplo, el devenir de la matemática rusa contemporánea, además de referirse al *heroísmo de los científicos*, especialmente, cómo no, al de los *científicos nacionales* (los soviéticos, se sobreentiende, no los demás).

Veamos cómo utiliza el Materialismo Histórico para explicar el desarrollo de diferentes matemáticas en distintas culturas y civilizaciones. Afirma, por ejemplo, que *"las causas de que la matemática de China (y como veremos más adelante también de la India) adquiera tales particularidades, radica en las condiciones socio-económicas de la vida en sociedad. Las condiciones fueron tales que estos Estados, en calidad de una de sus funciones fundamentales, estuvieron obligados a tomar para sí la organización de los trabajos sociales en las ramas de la irrigación, transporte y obras defensivas. Las preocupaciones constantes sobre el calendario y sobre la comunidad y el rigor de las instituciones religiosas acrecentaron esta orientación de los trabajos científicos. La opresión feudal y la presión de la religión determinaron el carácter lento y estancado del desarrollo de todas las ciencias, entre ellas de las matemáticas"*[41]. Nos podemos preguntar que si esto es cierto, por qué no lo es también para el caso de Babilonia o de Egipto, o si esas determinaciones explican la emergencia de los números negativos en la civilización china. Otro tanto ocurre cuando argumenta que *"en la India, hacia el comienzo de nuestra era, ya estaba constituido un sistema feudal desarrollado de organización de la sociedad. La*

[40] F. Engels-**"Antiduhring"**, Moscú, Política, pp. 340-341.
[41] Ríbnikov, Op. Cit. pág. 38.

prolongada separación en castas de los grupos sociales de la población que determinó, a pesar del, a veces violento, curso de los acontecimientos politicos, el ritmo tan lento del desarrollo de la producción y la ciencia. Los colonizadores ingleses, franceses y portugueses en el transcurso de los siglos frenaron forzadamente el natural desarrollo de la producción, la ciencia y la cultura hindú. Sólo en nuestro tiempo transcurre un proceso de liberación nacional y elevación de las fuerzas productivas de la India"[42], sólo que en esta ocasión le puso la tapa al pomo, como decimos en Cuba, puesto que si el desarrollo tenía previamente un ritmo tan lento, ¿cómo pudieron los colonizadores frenarlo forzadamente aún más?

Claro está que todo se puede entender si se asume la postura reduccionista y economicista del autor. Si como él dice*, "la historia enseña que el desarrollo de todas las formas de actividad de la sociedad humana transcurre bajo la influencia de los únicos motivos del desarrollo económico"*[43], no es de extrañar que tenga que hacer malabarismos para explicar que en distintos Estados feudales se desarrollase una matemática inferior a la realizada en las ciudades-estados esclavistas que caracterizaron el mundo griego. Ahí radica, a mi juicio, la endeblez de toda su argumentación, pues está claro que no existe una correlación positiva perfecta entre el desarrollo económico y el desarrollo matemático de una cultura o de un pueblo.

Por último, su aceptación de la trayectoria eurocéntrica clásica se pone de manifiesto nuevamente en citas como las dos que siguen a continuación *"sobre los cambios que ocurrieron en las matemáticas en este período de tiempo* -se refiere a la época posterior a Euclides, Arquímedes y Apolonio-, *podemos juzgar por las obras que han llegado hasta nosotros. Estas últimas muestran, ante todo, que bruscamente disminuyó y después se suspendió totalmente el proceso de formación de teorías matemáticas"*[44]; *"las contradicciones internas del desarrollo de la matemática en el período de su reforzamiento coincidieron con las condiciones sociopolíticas desfavorables de la época de desintegración de la estructura esclavista, producida en virtud de los cambios de la forma de producción. Así, los factores económicos de finales de la formación económica esclavista resultaron en última instancia la causa determinante de la supresión temporal del desarrollo teórico y práctico de las matemáticas. Para un nuevo ascenso de la ciencia matemática fue necesario un nuevo ascenso de las fuerzas productivas de la sociedad humana. En Europa y en la región de la cuenca del Mediterráneo este nuevo en principio ascenso apareció solo muchos siglos después, comenzando con la época del llamado Renacimiento, época de finales del feudalismo y comienzo del desarrollo del modo de producción capitalista. Además, una de las fuentes más importantes de nuevas ideas matemáticas fue la asimilación de la herencia clásica de los matemáticos de la Grecia Antigua, Euclides, Arquímedes y otros"*[45]. De nuevo nos topamos con la trayectoria eurocéntrica clásica, la cual hace ahora caso omiso de las aportaciones de las matemáticas chinas, indias, babilónicas, egipcias o arábigas, por citar sólo estos casos.

A nuestro juicio, este autor, junto con muchos otros, confunde el hecho cierto de que históricamente hablando, las técnicas son los gérmenes inmediatos de las ciencias, son, por decirlo de otra manera, los precedentes genealógicos de las mismas que sólo acotan y sistematizan un campo de conocimientos previamente roturado por la actividad artesanal, puesto que la geometría viene detrás de la agrimensura, la

---

42 idem, pág. 44.
43 idem, pág. 50.
44 idem, pág. 99.
45 idem, pág. 106.

aritmética detrás del comercio y la administración bancaria de los sumerios, etc., con el hecho de que las Matemáticas estén determinadas unívocamente por las condiciones materiales de los diferentes pueblos, algo que la historia no pone ni mucho menos de manifiesto. Una cosa es que la tesis marxista de que toda ciencia halla su inspiración en alguna práctica artesanal anterior y ha sido generada por las necesidades materiales de la sociedad siga pareciendo básicamente correcta, y otra es, como decíamos anteriormente, pretender determinarlo todo en base a las motivaciones económicas, consiguiendo, de tanto determinar todo, acabar por no determinar nada.

Vayamos ahora, a autores del "otro mundo", el occidental. Comencemos con la obra de un historiador de comienzos de siglo, Rouse Ball[46]. Según este autor, *"la historia de las matematicas no puede remontarse con certeza a ninguna escuela o período anterior a los griegos jónicos"*[47]. Afirmación que constituye un resumen razonable de lo que se conocía popularmente y se aceptaba como los orígenes de las matemáticas en esa época, si exceptuamos el olvido de las matemáticas indias contenidos en los **"Subalsutras"** ("Las reglas de las cuerdas") pertenecientes al período 800-500 a.C., lo que los convierte en los libros de matemáticas al menos tan antiguos, por no decir más, como los primeros que conocemos de los griegos, y que habían sido traducidos con anterioridad, en 1875, por Thibaut. Las aportaciones babilónicas, egipcias, chinas, precolombinas, indias posteriores y del mundo árabe, fueron apareciendo posteriormente, por lo que no es de extrañar que no las considerase. Pero sí se conocían ya textos como el de Vedanga Jyotisa (500 a.C.) que cito a continuación y aporta contenido al título del libro ya citado de Joseph *"Como la cresta del pavo real, como una gema en la cabeza de una serpiente, así son las matemáticas: la cúspide de todos los conocimientos".*

Lo que sí nos llama la atención es que más recientemente, en la década de los 50, destacados historiadores, como Morris Kline, continuasen afirmasen cosas como las siguientes[48] *"[Los matemáticos] finalmente se aseguraron un nuevo dominio sobre la vida en el terreno altamente favorable de Grecia y crecieron con fuerza durante un corto período… Con el declive de la civilización griega la planta permaneció en estado de latencia durante 1000 años… hasta que la planta fue transportada a Europa propiamente y una vez más implantada en suelo fértil"*[49]. Desde luego, no puede haber mejor resumen, expresado metafóricamente y con categorías biológicas (nacimiento, crecimiento, declive, fertilidad,...), de lo que denominamos trayectoria eurocéntrica clásica. En su posterior obra, ya en los 60, dedica sólo 3 de las 700 páginas de su obra **"Mathematics, a Cultural Approach"**[50] a las matemáticas egipcias y babilónicas e insiste en devaluar sus aportaciones. Véase sino la comparación que establece *"las matemáticas de los egipcios y babilonios son garabatos de niños que están aprendiendo frente a las grandes obras literarias"*[51].

Estas tesis nos parecen totalmente inaceptables, al menos por los siguientes cinco razones:

- En primer lugar, por el reconocimiento pleno, expresado por los mismos griegos, de su deuda intelectual con los egipcios. No sólo historiadores como

[46] Rouse Ball, W. W.-**"A Short Account of the History of Mathematics"**, 4th ed. New Cork, Dover, 1960 (edición original 1908).
[47] Ball, Op. Cit., pág. 1
[48] Kline, M.-**"Mathematics in Western culture"**, New York, Oxford University Press, 1953.
[49] Kline, Op. Cit. pp.9-10.
[50] Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1962.
[51] pág. 14, pág. 179.

Herodoto (450 a.C.) o Proclo (400 a.C.) reconocieron dicha deuda, sino que incluso tanto Platón como Aristóteles así lo hicieron. El primero nos cuenta en el diálogo el **"Fedro"** lo siguiente *"Pues bien, oí que había por Náucratis, en Egipto, uno de los antiguos dioses del lugar al que, por cierto, está consagrado el pájaro que llaman Ibis. El nombre de aquella divinidad era el de Theuth. Fue éste quien, primero, descubrió el número y el cálculo, y también la geometría y la astronomía, y además el juego de damas y el de dados y, sobre todo, la escritura"*[52]. Por su parte, Aristóteles, en el capítulo 1 del libro I de la **"Metafísica"**, nos dice que las ciencias o artes matemáticas (*mathematikai technai*) fueron creadas por los egipcios, explicando además el motivo: disponían de una clase sacerdotal ociosa que disponía del suficiente tiempo libre como para poder dedicarse a tales investigaciones. Al margen del carácter mítico de las explicaciones de Platón o de la ingenuidad del planteamiento de Aristóteles con su teoría de la clase ociosa, no cabe ninguna duda del hecho de que los griegos mismos reconocían ser herederos intelectuales de los egipcios, al menos en el ámbito de las Matemáticas.

- En segundo lugar, el esfuerzo conjunto de arqueólogos y traductores ha puesto de manifiesto, a lo largo de los últimos 150 años, el alto nivel de las matemáticas practicadas en las tablillas mesopotámicas y en los papiros egipcios, como cualquier persona que las estudie detenidamente puede apreciar.
- En tercer lugar, el olvido de la contribución árabe al desarrollo intelectual de Europa, en general, y de las Matemáticas, en particular, es otro grave error de la visión "clásica". Debemos a los árabes (y excluido a los monasterios, nada a los europeos), la difusión de las aportaciones griegas y las suyas propias en el Renacimiento Europeo; el haber unido la técnica de la medida, desarrollada desde sus raíces egipcias hasta su forma final en manos de los alejandrinos, y el notable instrumento de cálculo, nuestro sistema de numeración que nació en la India, así como el suplementar estas ramas con un lenguaje sistemático y coherente de cálculo al que le aportaron nombre: el álgebra (Al-jabr, equivalente en español a "restauración", término incluido en el título de uno de los libros del gran matemático del siglo IX Al Khwarizmi). Negar su aportación, como veremos más adelante que también hace Dieudonné, supone ponerse la venda eurocéntrica ante los ojos, venda que impide conocer con propiedad y rigor histórico el desarrollo histórico multilateral de las disciplinas matemáticas.
- En cuarto lugar, es necesario reconocer algo que frecuentemente se olvida y se genera confusión cuando se habla de la cultura o la matemática griega. Nos referimos al hecho de que existe un período clásico de dicha civilización (600-300 a.C.) y un período postalejandrino (300-200 a.C.), y que, por lo tanto, no podemos considerar simplemente como griegos a matemáticos como Euclides, Arquímedes o Apolonio. Es cierto que escribían en griego, pero trabajaron (algunos incluso nacieron allí, como Euclides) especialmente en Alejandría, en Egipto, en su famosa biblioteca, y no en las academias de las polis griegas. Convendría al menos modificar la trayectoria eurocéntrica clásica por otra, aunque aún inexacta, más próxima a la realidad, y que empieza a ser asumida en diferentes tratados históricos. No es posible negar

[52] Ver Bochner, S.-**"El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia"**, Madrid, Alianza, pág. 35.

que Egipto pertenece al continente africano, ni que los yorubas de Etiopía tenían sus propias matemáticas, cuestiones que se suelen obviar, quizás por prejuicios de tipo colonialista y/o racistas.

- En quinto lugar, aunque no por ello menos importante, es el hecho que los "americanos precolombinos" desarrollaron sus propias Matemáticas, que los mismos europeos se encargaron de suprimir, evidenciada en logros técnicos y arquitectónicas de primera magnitud, como lo son, entre otros, el Calendario Azteca y las colosales ruinas de las ciudades mayas e incas. Si bien es cierto que la aportación maya al sistema de numeración ha sido exagerado por el uso de "su cero", lo indudable es que en su sistema posicional usaron un símbolo para denotar la ausencia de unidades, cuando en la "culta y renacida Europa", tenían poca o ninguna idea al respecto. Incluso, analizando el sistema de multiplicación maya por medio de cuerdas, vemos la equivalencia con el renombrado método de la Gelosía (Huesos de Neper).

En fin, dejemos al norteamericano Morris Kline con su visión sesgada de la Historia de las Matemáticas y pasemos a ver cómo entiende Jean Dieudonné dicha historia. Para ello voy a basarme en uno de sus últimos trabajos, tiene apenas veinte años de su edición en francés **"En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy"**[53]. En dicho trabajo vuelve a defenderse con fuerza la tesis eurocéntrica clásica, aunque ya no puede evitar citar las aportaciones pregriegas. Por eso afirma que *"los textos que nos han llegado de las primeras civilizaciones orientales, de Egipto o de Babilonia, son demasiado incompletos como para permitirnos seguir la manera en que se constituyeron una aritmética y una geometría* ***rudimentarias****; ya aparecen muy elaboradas a partir del II milenio antes de nuestra era****. Evidentemente, no se trata de especulaciones abstractas,*** *sino de recetas, transmitidas por castas de escribas especializados, y destinadas a solucionar los problemas prácticos que plantea una sociedad agraria muy estructurada: intercambios, censos, litigios, repartos"*[54].

Pues bien, veamos si, como afirma, evidentemente no se trata de especulaciones abstractas, y para ello, nada mejor que recurrir a los ejemplos que él mismo incluye en su libro. En él, un poco más adelante, resume así las aportaciones babilónicas *"Digamos* ***simplemente*** *que, en aritmética, estos ponen de manifiesto un conocimiento de las fracciones, de las progresiones aritméticas, quizás de las progresiones geométricas, así como de la regla de tres. Los babilonios daban incluso la solución a ciertos problemas equivalentes a una ecuación de segundo grado; por ejemplo, una tableta muestra la figura de un cuadrado con el texto siguiente: he añadido el lado de un cuadrado a su superficie y encuentro ¾, ¿cuál es el lado? Se trata de la ecuación que escribimos* $x^2 + x = ¾$ *y que el escriba resuelve del mismo modo que lo hacemos nosotros: suma ¼ a los dos miembros y encuentra que el cuadrado de x + ½ es 1, de lo que deduce que x = ½"*[55].

Además de olvidarse, curiosamente, de la existencia en Mesopotamia de un sistema de numeración sexagesimal, mucho más potente que el sistema alfanumérico griego, desde luego, acaba él mismo contradiciéndose, pues si del ejemplo no se deduce que sí eran capaces de realizar especulaciones abstractas en absoluto dependiente de aplicaciones prácticas, no sé qué otra cosa se puede deducir; ¿qué sentido práctico puede tener añadir el lado de un cuadrado a su área e igualarlo a

---

[53] Alianza Editorial, Madrid, 1989; traducción del original francés **"Pour l'honneur de l'esprit humain: Les mathématiques aujourd'hui",** France, Hachette, 1987.

[54] pág. 52.

[55] pág. 53.

¼? ¿No están refiriéndose a un cuadrado y un lado arbitrario, y por lo tanto, a una abstracción?
Más adelante se plantea el tema de las demostraciones, y cita a Aristóteles para afirmar con él que *"Las investigaciones de los matemáticos se refieren a cosas adquiridas por abstracción, pues las estudian después de haber eliminado todas las cualidades sensibles, tales como el peso, la ligereza, la dureza, etc., y solo conservan la cantidad y la continuidad y esta última puede concebirse de una, de dos o de tres maneras"*[56]. Pues bien, ¿no es esto precisamente lo que hacen los babilonios en problemas como el citado? ¿Acaso no excluyen todas las cualidades sensibles de los cuadrados?
También afirma con posterioridad que los primeros textos históricos que contienen demostraciones son los de Platón y Aristóteles, explicando que el primero, en el diálogo titulado **"Menón"**, cuenta cómo Sócrates quiere hacer descubrir a un joven esclavo inculto el modo de construir un cuadrado cuya área sea doble de la de un cuadrado dado ABCD, texto que, por cierto, se constituye, sin incurrir en esta ocasión en una visión eurocéntrica, en el primer estudio conocido de análisis didáctico de las matemáticas; por su parte, el segundo, Aristóteles, se refiere a una demostración que incorpora la misma figura del triángulo rectángulo isósceles necesaria para demostrar el anterior teorema y constituye también el primer ejemplo conocido, en este caso, de razonamiento por reducción al absurdo, así como de una afirmación de imposibilidad (la conocida irracionalidad, inconmensurabilidad para los griegos, de la raíz cuadrada de 2).
Ahora bien, en ambos casos recurren a figuras geométricas trazadas en la arena, lo que le debería llevar, por coherencia con sus planteamientos epistemológicos, a dudar del verdadero carácter demostrativo de tales reflexiones. Algo que él mismo reconoce al comentar la posterior obra de Euclides de Alejandría. Como el propio Dieudonné explica *"a partir de estas definiciones, propuestas y nociones comunes, Euclides pretende demostrar la sucesión de sus teoremas. No deja de sorprendernos un poco que cada uno vaya acompañado de una figura. Podríamos pensar que se trata simplemente de una ayuda para seguir la demostración mas fácilmente; se ha dicho que el arte de la geometría consiste en razonar bien sobre figuras falsas. Enseguida nos damos cuenta de que algunas de estas figuras desempeñan un papel mucho mas esencial, que recuerda bastante el modo de hacer de los geómetras indios o chinos, quienes se contentan con decir "mira" por toda demostración, después de trazar la figura"*[57].
Pues bien, si los procedimientos demostrativos tanto de Platón, como de Aristóteles, como de Euclides, recuerdan el modo de hacer geométrico de los indios o los chinos, ¿por qué atribuir el método demostrativo en exclusiva a los griegos, sean éstos clásicos o postalejandrinos? De nuevo nos encontramos con la venda eurocéntrica.
Por último, para finalizar con la crítica del texto de Dieudonné pasemos a ver cuál es su concepción de la evolución del álgebra. A pesar de haberle otorgado su propio nombre, como ya dijimos, la aportación arábiga es absolutamente distorsionada, devaluada y casi ignorada por este autor. Y si no fíjense en esta afirmación *"el álgebra tardó unos 13 siglos después de Diofanto en convertirse en lo que ahora conocemos"*[58]. Si Diofanto vivió aproximadamente en el siglo IV de nuestra era, eso quiere decir que hasta el siglo XVI, o sea, hasta la obra de los algebristas italianos

[56] Aristóteles-**"La República"**, citado por Dieudonné, 1989, pág. 58.
[57] idem, pág. 60.
[58] idem, pág. 74.

Luca Pacioli, Bombelli, Cardano o Tartaglia, el álgebra apenas avanzó, tesis absolutamente impresentable en términos históricos por su desprecio total a la aportación de los algebristas árabes.
Creo que los ejemplos presentados son lo suficientemente representativos como para poder reafirmar la validez de las tesis que le mencioné más arriba.
Para cerrar esta sección, quería presentarles una cita de Joseph. Dice así *"Y, sin embargo, si hay un solo objeto universal, uno que trascienda las barreras lingüísticas, nacionales y culturales, y es aceptable para todos y no es negado por ninguno, es nuestro actual conjunto de números. Desde sus remotos comienzos en la India, su difusión gradual en todas las direcciones permanece como el gran episodio romántico en la historia de las matemáticas. Es de esperar que este episodio, junto con otros logros matemáticos no europeos destacados en este libro, ayudará a ampliar nuestros horizontes y a romper la estrechez de miras que subyace bajo la percepción eurocéntrica del desarrollo del conocimiento matemático"*[59].

[59] idem, pág. 467.

Capítulo II
Cuestiones Preliminares

1. Periodización.

No es fácil delimitar el surgimiento y consolidación de la cultura que hoy reconocemos con el nombre de Cultura Griega, ni en cuanto a espacio ni en el tiempo. Normalmente una primera fase, desde tiempos de Babilonia y Egipto hasta la consolidación de la Civilización Cretense, es llamada Edad Minoica; una segunda fase, en la que el centro del "mundo griego" se encontraba en Mecenas, se conoce con el nombre de Edad Micénica y la tercera fase, la propia Civilización Griega se divide en tres etapas: la Arcaica, la Clásica y la Helenística. Nosotros nos centraremos en las dos últimas fases.

Alrededor del 2000 a.C. los primeros pobladores de las tierras del mediterráneo oriental europeo, fueron tribus grecohablantes que habían comenzado a desplazarse hacia el sur de la península Egea, lo que más tarde sería Grecia. En esta instancia, no se había desarrollado el uso del metal, y predominaban las rocas pulidas. Al sur de estas tierras, se encontraba la isla más grande conocida hasta el momento, Creta. Su superficie es de 8336 Km^2, posee un clima mediterráneo, y en su relieve se destacan 3 grandes macizos montañosos con altitud mayor a los 2000 metros (el Monte Ida, en la parte central, alcanza los 2490 ms). Su prosperidad comenzó en el 3000 a.C., ya su pueblo dominaba el uso del cobre y también habían comenzado a construir barcos, lo que la convirtió en la primera potencia marítima de la historia; en Creta se desarrollaron dos sistemas diferentes de scritura que los historiadores han llamado líneal A y líneal B. En 1952 un joven arquitecto inglés llamado Michael Ventis, logró descifrar el lineal B, lo que ha ayudado a entender la historia en esteb periodo de tinieblas.

Durante el período en el que Grecia continental comenzaba a ser habitada, la isla de Creta se había sumergido en una monarquía fuerte. En su principal ciudad, Cnosos, dominó Minos, un poderoso rey que pronto gobernó en toda la isla. Este construyó suntuosos palacios y dio prosperidad a la isla. Su palacio principal, se encontraba en Cnosos, y tenía un área aproximada de 156x145 metros cuadrados, poseía almacenes, un gran número de habitaciones, una sala de trono, laberintos de bodegas, antecámaras, un salón de los pilares, un patio central de unos 90 metros cuadrados y talleres, entre otros. Al legendario rey, se le debe el nombre se este período, la Edad Minoica, que abarca desde el 3000 a.C. hasta el 1450 a.C.

La civilización cretense se expandió por todas las islas de Egeo, pero la parte más meridional de Grecia, la más cerca de Creta (laconia, y numerosas islas: Carpato, Rodas, Cythera, etc.) fue la que más sufrió la influencia civilizadora cretense. Fue la zona que está unida a Grecia por solo 32 Km de largo y 6 Km de ancho, el Peloponeso, la que sufrió esta invasión. Su nombre significa "la isla de Pélops" (legendario rey), y abarca unos 21.379 kilómetros cuadrados. En la península había 3 ciudades importantes: Mycenae (Micenas), Tirinto y Argos. A unos 65 Km al sur se encontraba la para ese entonces desconocida Esparta y a unos 30 Km. Al norte, Corinto. Al pasar el tiempo, las ciudades griegas se fueron haciendo cada vez más poderosas, hasta el punto de revelarse contra Creta, a la cual debían pagarle tributo, el cual, según la mitología, se trataba de enviar 7 muchachos y muchachas, al famoso laberinto de Cnosos construido por Dédalo, donde habitaba el minotauro. Embarcaron la lucha contra Creta, y en especial contra su capital Cnosos. Por el 1450 a.C. comenzó la rebelión, y a finales del 1400 a.C. derrocaron a Cnosos, invadiéndola y destruyendo todo. La rebelión fue ayudada por desastres naturales,

alrededor del 1700 a.C., un terremoto (¿?) destruyó gran parte de Cnosos. En la mitología, este hecho se le atribuye a Teseo, hijo de Etra y del rey Ateniense Egeo, el cual con ayuda de Ariadna, deshizo el tributo, y acabó con Creta. En sí, la guerra tomó mucho tiempo, y no pudo haber sido obra de un solo hombre.
Después de haber derrotado a Creta, la ciudad de Micenas, quedó como la ciudad más poderosa, por lo que el tiempo siguiente se le denomina la Edad Micénica, la cual abarca del 1400 a.C. hasta el 1000 a.C. En el año 1250 a.C., las ciudades aliadas griegas (principalmente las del Peloponeso) obtuvieron el control completo de la isla, terminando con los pequeños condados de los montes Ida y los rebeldes que se ocultaban en las montañas. La Edad Micénica, fue considerada por los griegos posteriores, como un período heroico, donde hijos de sus supuestos dioses, desarrollaron las hazañas más destacadas de la mitología griega; por este entonces, se dice que fue cuando Pelias, rey ilegítimo de Yolco, prometió a Jasón restituirle el reino de su padre, Esón, si le traía el Vellocino de Oro. Como se sabe, Jasón partió con los Argonautas hacia Ea, más allá del Mar Negro, donde recuperó el Vellocino; este hecho es considerado uno de los momentos más hermosos de la historia griega. Cuando los griegos comenzaron a colonizar el Egeo, después de pasar el Helesponto[60], se encontraron que esta zona era controlada por la ciudad de Troya, la cual se enriquecía a costa del cobro de un "peaje" por circular por el estrecho rumbo al Mar Negro. Los griegos encabezados por la ciudad de Micenas, organizaron un ejército que fue a poner fin a la ciudad y a sus aliados, para poder tener el control del Mar Negro. Alrededor del 1200 a.C. (1184 a.C. es la fecha tradicional que dan los griegos) los ejércitos unidos griegos, derrotaron a Troya y a sus aliados, y saquearon la ciudad. Estos hechos fueron descritos más tarde por el poeta Homero en **"La Ilíada"** la cual fue escrita en 820 a.C., aunque en forma lírica, se basa en hechos históricos de la guerra, los cuales eran difundidos en cantos durante muchas generaciones hasta que Homero los unificó en sus poemas. No fue sino hasta el 1870, en que el arqueólogo Heinrich Schliemann[61] demostró la existencia de una ciudad no muy lejos del Dardanelos, la cual era efectivamente, Troya. En su poema, Homero, se refiere de varias formas distintas a los griegos. Una hace referencia a los argivos, la cual se adoptó de Argos. Agamenón gobernaba en las tres ciudades principales, Micenas, Tirinto y Argos. Esta ultima, se convirtió en la más poderosa bajo el dominio de Agamenón, por lo tanto él mismo se nombraba Argivo. Antes de la Guerra de Troya, Agamenón era considerado no como el gobernador de todos los griegos, pero sí como el más grande de todos, los demás reyes adoptaban sus indicaciones y siempre se le concedió el primer lugar, cuando se le declaró la guerra a Troya, fue éste quien reunió los ejércitos, y quien tenía absoluto control sobre ellos, aunque cada rey actuase separadamente. Por ello, a todos los griegos, Homero, les nombró Argivos. Otra forma, los helenos, la cual más adelante se convirtió en la forma que adoptó su cultura. Esta fue adoptada ya que los griegos llamaron a toda su tierra la "Hélade", que a su vez es Grecia en griego. El nombre "Grecia" proviene de la tribu que emigró a Italia en la edad de la colonización y que se hacía llamar "Graikoi", que en latín era "Graeci". Los romanos adoptaron este nombre para referirse a toda la parte sur de Italia y a la tierra en el Peloponeso y el Ática dominada por los griegos.

[60] Actual Dardanelos, estrecho de un kilómetro y medio de ancho.
[61] Millonario prusiano que, tras amasar su fortuna, se dedicó a su gran sueño: la arqueología. Descubrió Troya y realizó otros descubrimientos en Micenas, Tirinto y Orcómeno, demostrando que la **"Ilíada"** describía escenarios históricos. Nació en Neu-Bukow (Mecklemburgo) el 6 de enero de 1822 y murió en Nápoles (Italia) el 26 de diciembre de 1890.

Esta época corresponde al surgimiento de Grecia como civilización (siglo XI al siglo IX a.C.), en el curso del siglo X se produjo un proceso de urbanización en el cual se trataba de agrupar varias aldeas hasta llegar a formar ciudades como Esparta y Atenas. La organización interna socio-política de estas primitivas polis estaba dominada por las tribus Ethnos (junto a los hogares clanes y fraternidades). Estas ciudades estado eran gobernadas por reyes que ejercían la autoridad religiosa, militar y política, excepto Esparta ya que hasta cierto grado la autoridad de los reyes empezó a ser reemplazada por una autoridad aristocrática formada por terratenientes que podían criar mantener y montar sus caballos. Otros dos factores que formaron un papel fundamental en la formación de la civilización griega fueron la institución de los juegos panhelénicos como los juegos olímpicos, comenzados en los años 776 a.C. los cuales subrayan los rasgos comunes de los griegos y las dos epopeyas de Homero probablemente compuesta en el siglo VIII a.C. El siglo VIII a. C. fue un periodo revolucionario para la formación de la civilización griega ya que asistimos a la introducción del alfabeto fenicio y su adaptación a la lengua griega, se mejoraron también la metalurgia del hierro y las técnicas agrícolas; esto produjo como resultado el aumento de la población lo cual generó necesidades como la fundación de colonias. Estas colonias enviaban metales y alimentos a sus metrópolis e importaban a cambio productos ya terminados. Esta prosperidad comercial, entre otros factores, condujo a la rápida fundación de las ciudades estado griegas por la costa del Egeo y sus islas (a finales de ese siglo ya había más de 700 ciudades-estado). Ésta riqueza avivó cada vez más las ansias de independencia política de las colonias respecto a sus metrópolis, no siempre por la vía pacífica, lo que originó la creación de ejércitos y técnicas militares perfeccionadas como la infantería pesada (los hoplitas), que reemplazaron a los anteriores ejércitos de caballería. A modo general puede decirse que en los siglos VIII al VI a.C., las polis griegas experimentaron una transición de un sistema de gobierno monárquico a uno aristocrático. En el curso de las crisis sociales de los siglos VII y VI a.C. pasaron por una serie de gobiernos dictatoriales (los tiranos) hasta llegar finalmente a unos gobiernos democráticos. Esparta siguió un curso distinto porque conservó su doble monarquía, y después de la segunda guerra desarrolló una organización militar que llego a caracterizarlo a futuro.

Desde los siglos VIII y VII a.C., se desarrolló en Grecia una sociedad esclavista en la que los esclavos, catalogados como herramientas parlantes o animales, constituyeron entonces la base de partes esenciales de la producción. En Atenas, de 320 mil habitantes solamente 172 mil eran jurídicamente libres; de estos solo aproximadamente una tercera parte estaba en posesión de la ciudadanía ateniense que le permitiera participar en la vida política.

En los siglos VIII y VII a.C. se formó primeramente en las ciudades-estado jónicas una atmósfera intelectual favorable para el surgimiento del pensamiento científico. Y así lograron los griegos, bajo las nuevas condiciones económicas y políticas, y favorecidos por las circunstancias geográficas y climatológicas, el gran mérito de desarrollar, partiendo de una matemática surgida casi empíricamente, una ciencia matemática sistemática, independiente y expuesta de forma lógico-deductiva, con métodos y objetivos específicos. El sistema geométrico creado por ellos fue, durante dos milenios, el gran ejemplo para la construcción deductiva de una disciplina científica y aún en la Edad Moderna marcó el desarrollo de la matemática en lo que se refiere al estilo y contenido.

Para el estudio de las Matemáticas Griegas se distinguen cuatro períodos bastante definidos en lo que se refiere a métodos, contenidos y alcance.

Un primer período temprano o de preparación se denominó, por su estrecha relación con la filosofía naturalista jónica, **Período Jónico** y se remonta desde las postrimerías del siglo VII a.C. hasta mediados del siglo V a.C. En este período tuvo lugar el desarrollo de la ciencia matemática independiente y se incluyen, además de las jónicas, la actividad desarrollada en dos escuelas: la Pitagórica (siglos VI a.C. en Trotona y V a.C. en Atenas); y la Eleática (siglo V a.C.) en la Magna Grecia.
Un segundo período, que se ubica entre los años 450 hasta 320/300 aproximadamente antes de Cristo, se denomina **Período Ateniense**. El centro de las actividades matemáticas se encontraba en Atenas, la ciudad-estado griega más influyente entonces en lo económico, político y cultural. En este período la matemática antigua recibió una estructura interna totalmente particular, un carácter especial que a veces se le designa como "álgebra geométrica".
Un tercer período, el **Helenístico**, que duró aproximadamente dos siglos y medio, hasta el 30 a.C. en el que la matemática de la antigüedad alcanzó su máximo florecimiento, especialmente alrededor del 150 a.C. Recordemos que en el 146 a.C. La República Romana había derrotado a Cartago y se vislumbraba como una gran potencia. Ocasionalmente se habla del período alejandrino, ya que en este período Alejandría constituía el punto central indiscutible de la vida en el mundo antiguo, aunque también hay desarrollos importantes en la Magna Grecia, Siracusa y Pérgamo.
El último período considerado es el **Período Greco-latino o de la Decadencia** temporalmente entre el 30 a.C. hasta el 640 d.C. La primera fecha señala la absorción de Egipto por Roma, y la segunda, la destrucción por los musulmanes de lo poco que dejó la virilidad romana, la negligencia griega y la primitiva intolerancia cristiana, algunos dicen que nada, de la gran Biblioteca de Alejandría (por si fuera poco, en el 529 el Emperador Justiniano había ordenado clausurar el Museo). Es de señalar que en el año 330, Constantino el Grande funda Constantinopla y fija la capital del Imperio de Occidente a Bizancio en el 336, lo que acentúa la decandencia de “lo griego”. Pero los matemáticos griegos habían perdido la mayor parte de sus facultades creadoras mucho antes de que desapareciera la biblioteca y sólo tres hombres en los seis siglos de la segunda escuela alejandrina hubieran sido considerados como matemáticos por los gigantes de las anteriores.

2. Los textos matemáticos.
Junto a las matemáticas puras, propias de la tradición griega, existe también un corpus de textos matemáticos que denominaremos “calculatorios”, bastantes parecidos a los de las matemáticas egipcias, babilónicas o chinas. Así, un corpus de textos matemáticos bastantes tardíos, atribuidos a Herón de Alejandría, compiló y utilizó la época bizantina probablemente para dar formación matemática a los técnicos. Al igual que en los textos babilónicos o egipcios, los problemas planteados se refieren explícitamente a una situación concreta, incluso si ésta no es muchas veces más que un artificio con fines pedagógicos.
Nada similar existe en los tratados clásicos de Euclides, Arquímedes o Apolunio, quienes no prestan la menor atención a las aplicaciones prácticas. La exposición euclidiana de la teoría de los números no recurre para nada a ejemplos numéricos; las obras que se han conservado parecen obedecer a las exigencias de una clara delimitación entre la investigación abstracta y las aplicaciones prácticas. No obstante, si hay una perfecta separación de los temas, los mismos autores llevan a cabo trabajos tanto de matemáticas puras como aplicadas.

Cuatro son los rasgos fundamentales que caracterizan esta parte de las matemáticas griegas que por convención, y debido a Platón, hemos llamados "puras".

- **La organización deductiva**: los tratados clásicos como **"Los Elementos"** están organizados deductivamente; se llega a los resultados por una demostración, bien partiendo de resultados demostrados previamente, bien de principios expuestos al comienzo; cabe decir que se trata de un procedimiento axiomático parcial, este procedimiento destaca el aspecto lógico y necesario de las Matemáticas. Hay que señalar, sin embargo, que no siempre es fácil disociar el aspecto retórico, que permite conseguir la aquiescencia del lector o del alumno y percibe una eficacia psicológica y pedagógica, del aspecto lógico que se concentra en la arquitectura necesaria y objetiva del razonamiento.

- **La orientación geométrica**: incluso en la teoría de los números, la estática o la astronomía, la orientación de los tratados demostrativos es fundamentalmente geométrica. Las matemáticas antiguas recurrieron a simbolismos varios para anotar los números y las fracciones, y también utilizaron abreviaturas. Pero fue en el empleo de las figuras geométricas donde más lejos llevaron los griegos sus investigaciones sobre las "representaciones simbólicas": la posibilidad de descomponerlas en elementos, de determinar las reglas de construcción autorizadas y el descubrimiento de propiedades que parecen estar ya "presentes" en ellas son aspectos todos ellos que se combinaban ya a la perfección con la exposición deductiva.

- **El ideal de ciencia desinteresada**: las matemáticas deben estudiarse por afición al saber en sí, y no por su "utilidad práctica".

- **Matemáticas y Filosofía**: este desarrollo de las matemáticas puras es contemporáneo del de la filosofía, y está estrechamente relacionado a ésta.

3. Los filósofos y las Matemáticas.

De hecho, al mismo tiempo que van cobrando auge las matemáticas, surge una especulación a la vez metodológica e ideológica sobre las ciencias. La clasificación de Gemino (130-70 a.C.), astrónomo y matemático griego del siglo I a.C., constituye un buen ejemplo de ello. Esta clasificación, supone la existencia de un corpus considerablemente desarrollado y muy diversificado, retoma y hace suya una diferenciación de sus posibles aplicaciones.

Según Aristóteles, las Matemáticas estudian propiedades que pueden ser abstractas de los objetos del mundo físico. Además, las Matemáticas al igual que todas las ciencias demostrativas, se basan en principios, de modo que una ciencia puede presuponer otra o, en palabras de Aristóteles *"estar subordinada a otra"*, a la geometría. Existe, pues, una jerarquía de las ciencias que es de orden lógico. Es preciso distinguirla de una oposición, que por lo general recalcan todos los autores griegos, entre las matemáticas "utilitarias" y las matemáticas "desinteresadas". Sólo estas últimas son dignas, a juicio de Aristóteles, de una educación liberal: "ser libre" significa ser su propia causa.

El conocimiento "de adorno" tiene, pues, la primacía sobre las técnicas necesarias; la ciencia desinteresada, que tiene su propio fin en sí misma, es la actividad suprema. Para Platón, las Matemáticas de los Bárbaros, por muy prestigiosas que

sean sus civilizaciones, no son arte, porque no están libres de las coacciones de la necesidad. Así pues, la filosofía griega entremezcla consideraciones de dos enfoques distintos, el metodológico y el ideológico.

Si los tratados de ópticas y astronomía adoptan la forma de la exposición geométrica, a saber la deducción, que se presta particularmente bien a la eliminación de cuanto pertenece al mundo de lo "sensible" y lo "práctico", no por ello resulta fácil saber cómo los matemáticos integraban esta manera de concebir sus actividades. Por otra parte, no hay que caer en la tentación de superponer la distinción moderna "puras"/"aplicadas" a la distinción antigua "inteligible"/"sensible ", ya que no existe ninguna coincidencia entre ellas.

La referencia al ideal de ciencia "desinteresada" obliga a plantear el problema de la motivación del desarrollo de las Matemáticas. Hay que distinguir los fenómenos que han podido actuar como causas externas y los que se podrían considerar causas internas. Entre los primeros, destaquemos la importante función que han desempeñado la óptica y la astronomía que, para nosotros, forman parte de la Física y que en la antigüedad se clasificaban dentro de las Matemáticas, a éstas debe sumárseles la estática o ciencia de los equilibrios.

¿Qué sabemos de las motivaciones internas? Es posible tratar de descubrirlas en los prefacios con lo que los autores matemáticos, al parecer desde Arquímedes, inician sus tratados; se observa que, lejos de ser producto de características psicológicas propia de la mentalidad griega, la investigación desinteresada presupone la existencia de una comunidad de matemáticos sometidas a ciertas reglas.

Téngase en cuenta, en primer lugar, que esos matemáticos no estiman que tengan que justificar su práctica de la ciencia por sí misma; es algo que no requiere ninguna explicación. A lo sumo precisan por qué se dedican a las Matemáticas y no a la Física o a la Teología; evidentemente porque son seguras y rigurosas, en la medida en que se ocupan de un objeto "estable" (a diferencia de la Física) pero, no obstante, "accesible " (a diferencia de la Teología).

En la época helenística se observa que esos matemáticos constituyen una comunidad "internacional" cuyos miembros están diseminados en el perímetro de la cuenca mediterránea (Grecia, Asia Menor, Egipto, Sicilia…). Con todo, mantienen relaciones personales, bien porque se visiten unos a otros, bien gracias a la circulación de sus obras. Se trata ante todo de plantear problemas a los colegas, de resolver lo que ellos mismos han planteado, de criticar incluso las soluciones imperfectas que otros han propuesto. Así, algunos matemáticos adquieren una autoridad reconocida; las publicaciones se someten a dictámenes y ellos se encargan de darlas a conocer a quienes estiman dignos. Otros son impostores a los que se desenmascarará en su momento planteándoles un problema imposible que pretenderán, empero, resolver. Desde luego, todo ello sucede en el marco de relaciones establecidas entre individuos y no en el de una institución en el sentido moderno de la palabra.

En definitiva el ideal de las Matemáticas "desinteresadas" parece depender de la existencia de un grupo dentro del cual los problemas de rivalidad y competencia recuerdan bastante algunas características de la comunidad científica actual.

Ahora bien, no conviene exagerar demasiado esta comparación, ya que la diferencia de escala entre una y otra comunidad es muy perceptible: el número de eruditos de la época helenística, sobre todo de matemáticos, no era superior a algunos centenares. Tampoco caben dudas acerca de la precariedad de la comunidad que forma, a falta de una auténtica institución: así, a partir de la época romana los

mejores autores (Claudio Ptolomeo y Pappo, entre otros) parecen preocuparse esencialmente por perfeccionar los resultados ya obtenidos; aparentemente, la emulación y la búsqueda de la novedad que caracterizan al período anterior han desaparecido.

4. Sistemas de Numeración Griega[62].

En el primer milenio antes de Cristo, no había un sistema griego de medidas estándar ya que los diversos estados helénicos se enorgullecían de su independencia respecto a los demás. Esto implicaba que cada estado tenía su propia moneda, sus propios pesos y medidas, etc. A su vez, esto llevaba a que hubiera pequeñas diferencias entre los sistemas numéricos ya que una de las principales funciones de un sistema numérico en la antigüedad era ayudar en las transacciones comerciales.

En la aritmética griega las cifras más antiguas que se conocen son simplemente las iniciales de las palabras correspondientes a los números respectivos, se considera que lo tomaron de los egipcios y lo convirtieron a sus símbolos hacia el año 600 a.C. Este sistema de numeración, llamado *ático* o *herodiano*[63] (la de los atenienses), utilizaba trazos verticales para representar los números hasta el 4 y letras para el 5 (Π, pente), 10 (Δ, deka), 100 (H, hekatón), 1.000 (X, Khilioi) y 10.000 (M, myrioi) con lo que convirtieron el sistema de numeración en un sistema acrofónico, es decir, un sistema en el que las letras que representaban los números correspondían con la inicial de la palabra con la que se les denominaba. Así mismo, los símbolos del 50, 500 y 5.000 se obtenían añadiendo el signo 10, 100 y 1.000 al interior del signo del 5; de esta forma construían tales números según el principio multiplicativo, aunque este sistema reposa sobre todo en el principio de adición. Era un sistema que no servía para mucho más que para anotar números cardinales y fue empleado para anotar sumas expresadas en dracmas. Así, los atenienses retomaban las cifras precedentes y las repetían, reemplazando siempre la barra vertical de la unidad por el símbolo que representaba al dracma. Para los múltiplos del talento (6.000 dracmas) utilizaban las cifras usuales, pero incorporando la letra T (de Talanton). En cuanto a los submúltiplos del dracma (óbolo, medio óbolo, cuarto de óbolo y khalkos), los representaban mediante signos gráficos especiales. De esta manera expresaban con bastante facilidad las sumas monetarias de las que se servían con más frecuencia.

Durante la segunda mitad del primer milenio a.C. los ciudadanos de otros estados del mundo griego emplearon sistemas de numeración acrofónicos similares al ático, pero es erróneo pensar en que fueran idénticos al ateniense, ya que cada uno de ellos presentaba particularidades con respecto a los otros. Cada estado griego tenía su propio sistema de pesos, así como su propio sistema monetario; la idea de un "sistema monetario internacional" era imposible en el espíritu helénico.

Debe notarse que este sistema monetario no era decimal aunque el sistema numérico sí tenía al 10 como base y al 5 como base secundaria.

---

[62] Detalles adicionales pueden encontrarse en Ifrah G.-**"A universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer"**, John Wiley & Sons, New York, 2000; Boyer, C. B.-**"Fundamental steps in the development of numeration"**, Isis 35, No. 2(1944), 153-165; Ifrah, G.-**"From One to Zero: A universal history of numbers"**, Trans. by L. Bair of Histoire Universelle des Chiffres. New York: Viking Penguin, 1985 y Menninger, K.-**"Number Words and Number Symbols"**, Translation by Paul Broneer of Zahlwort und Ziffer, Gottingen: Vandenhoeck. Cambridge: MIT Press, 1969. Variada bibliografía sobre números, numeración y notación numérica, así como su desarrollo a lo largo de la historia, puede ser encontrada en http://phrontistery.info/nnsbib.html

[63] Debido a que aparece en un fragmento atribuido a Herodiano, un gramático del siglo II a.C.

Este sistema acrofónico fue usado para otras cuestiones aparte de las financieras. Un sistema muy similar fue empleado para los pesos y medidas lo que no es sorprendente ya que el valor del dinero sin duda debe haber evolucionado de un sistema de pesos. Esto lo confirma el hecho de que dracma es también el nombre de la unidad de peso.

En cualquier caso, al no atribuir una cifra especial más que a la unidad y a cada potencia de su base, los griegos privaron a sus sistemas numéricos de toda posibilidad operatoria, lo que condujo a los contadores griegos a no recurrir más que a las "tablas de contar". Con el paso del tiempo, a comienzos de la época alejandrina, aproximadamente durante el reinado de Ptolomeo Filadelfo, este sistema fue reemplazado por el sistema jónico, que empleaba las letras del alfabeto griego y algunos otros símbolos para representar los números, que comenzaron a tener la apariencia de palabras con las letras que correspondían con valores determinados[64]. Con esta forma de representación numérica también existían grandes limitaciones para realizar operaciones matemáticas y eran muy pocas las personas capaces de profundizar en el conocimiento de los números, por lo que el saber estaba en manos de unos pocos elegidos.

El sistema *jónico* constaba de 27 signos, divididos en tres clases numéricas: la primera (unidades); la segunda, (decenas); y la tercera (centenas) cada una de las cuales incluía nueve letras. Ahora bien, el alfabeto griego clásico contiene solo 24 letras (ver el Anexo 1) y, por lo tanto, se hizo uso de un alfabeto más antiguo que incluía tres letras arcaicas adicionales: la Ϝ (vau, digamma o stigma) para el número 6, la Ϙ (koppa) para el número 90 y la Ϡ (sampi) para el número 900. Para representar los números intermedios se recurría a la adición. Arquímedes, en el **"Arenario"**, observó los defectos del sistema de numeración griego y llegó a sugerir un elaborado esquema de numeración que disponía los números en función de las potencias octavas de 10. Apolonio de Perga mejoró el sistema de numeración dado por Arquímedes considerando como base 10^4, cosa que veremos más adelante.

ια	ιβ	ιγ	ιδ	ιε	ιϛ	ιζ	ιη	ιθ
11	12	13	14	15	16	17	18	19

Números 11 al 19 alfabéticos

A veces cuando estas letras se escriben para representar números, se ponía una barra sobre el símbolo para diferenciarlo de la letra correspondiente. Ahora bien, los números se formaban mediante el principio aditivo. Por ejemplo, 11, 12, ..., 19 se escribían como aparece en la tabla de arriba.

͵Α	͵Β	͵Γ	͵Δ	͵Ε	͵Ϛ	͵Ζ	͵Η	͵Θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Primera forma de escribir 1000, ..., 9000

,Α	,Β	,Γ	,Δ	,Ε	,Ϛ	,Ζ	,Η	,Θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Segunda forma de escribir 1000, ..., 9000

Números más grandes se construían más o menos de la misma manera. Por ejemplo, para escribir 269, utilizaban ΣϜΘ.

Este sistema numérico es

[64] Sistemas alfabéticos similares fueron utilizados en una u otra época por varios pueblos semíticos, incluidos los hebreos, sirios, arameos y árabes, así como por otros no semíticos como los godos, pero estos sistemas parecen haber sido adoptados por la influencia griega.

compacto, pero tiene el gran inconveniente de que no permite expresar número mayores a 999. Símbolos compuestos fueron creados para solucionar este problema. Los números entre 1000 y 9000 estaban formados añadiendo un subíndice o un superíndice *iota* a los símbolos del 1 al 9.
¿Cómo representaban los griegos los números mayores a 9999? Pues basaban los números mayores a este en la miríada, que valía 10000. El símbolo *M* con números pequeños para un número hasta 9999 escrito sobre él significaba que el número en pequeño estaba multiplicado por 10000. Por lo tanto, escribir β sobre la *M* representaba 20000. De forma similar, ρκγ escrito sobre la *M* representaba 1230000. Claro que escribir un número grande sobre la *M* era bastante difícil por lo que muchas veces en estos casos el número pequeño se escribía después de la *M* en vez de sobre ella.
Para casi todos los fines este sistema numérico podía representar todos los números que pueden surgir en el día a día. De hecho, era poco factible que números muy grandes aparecieran frecuentemente. Por otro lado, los matemáticos sí vieron la necesidad de extender el sistema numérico y ahora vemos dos de sus propuestas, la primera de Apolonio y después brevemente una de Arquímedes (aunque históricamente esta última fue hecha unos 50 años antes que la primera).
Aunque no sabemos de primera mano sobre la propuesta de Apolonio, la conocemos a través de un reporte de Papo. El sistema que hemos descrito arriba funciona con productos por una miríada. La idea que usó Apolonio para extender el sistema a números más largos fue trabajar con potencias de la miríada. Una *M* con una α sobre ella representaba 10000, *M* con β sobre ella representaba M^2, es decir, 10000000, etc. El número a ser multiplicado por 10000, 10000000, etc. se escribe después del símbolo *M* y se escribe χαι se escribe entre los pedazos del número; la mejor manera de interpretar este último símbolo es como 'más'.
Como dijimos, Arquímedes diseñó un sistema similar pero en vez de usar $10000=10^4$ como el número básico que era elevado a diversas potencias, usó $100000000=10^8$ elevado a potencias. El primer octeto para Arquímedes consistía de números hasta 10^8 mientras que el siguiente eran los números desde 10^8 hasta 10^{16}. Usando este sistema, Arquímedes calculó que el número de granos de arena que podrían caber en el universo era del orden del octavo octeto, es decir, del orden de 10^{64}.
Siguiendo el pensamiento pitagórico, que centraba toda explicación del universo en los números, realizaron un estudio extenso de los naturales según las propiedades que estos cumplían. Para los griegos, el concepto de número se correspondía con el de número natural. Desde la Antigüedad hasta finales de la época medieval, la numeración griega alfabética representó en Oriente Próximo un papel casi tan importante como el que tuvo el sistema latino en Europa occidental. Joseph afirma[65] que existe la posibilidad, dadas las prósperas relaciones comerciales entre Alejandría y la India, de que el sistema numeral indio hubiese alcanzado las costas egipcias ya en el siglo V. Si fue así, el sistema de numeración hindú habría sido considerado como un dispositivo comercial útil más que como un sistema que pudiera convertirse en algo más ampliamente aceptado. Según Reynolds[66], es extraño que no reconociesen y adoptaran un sistema de numeración más eficiente

[65] Ver Joseph G. G.-**"The Crest of the Peacock:…"**.
[66] Reynolds, B.E.-**"The Algorists vs. the Abacists: An Ancient Controversy on the Use of Calculators"**, The College Mathematics Journal, 24, 1993, pp.218-223.

para el cálculo que el suyo no posicional, pero hay dos teorías que intentan justificar esta reticencia: tal vez era mayor su interés en propiedades de los números más que de los cálculos; o su afán de guardar el conocimiento de los cálculos de las personas comunes (elitismo del cálculo) les llevó a complicar el lenguaje matemático.
En Lydia, en el siglo VII a.C., se fabricaron las primeras monedas que llegaron a Grecia por mediación de Mileto, cercana a la primera. La influencia de este hecho es evidente en cuanto a la aritmética, ya que sin la ayuda de las monedas, los cálculos empresariales habrían sido muy engorrosos y el dinero consistiría en excesivamente pesadas barras de metal. Los griegos de la época clásica llamaban al arte de la calculación *logística*. Los matemáticos clásicos[67] desdeñaban la logística porque era concerniente a los cálculos prácticos necesarios en el mercado y el comercio. De hecho, puede afirmarse que la logística fue tratada como una técnica del comercio por los griegos[68].

[67] Recomendamos Kline, M.-**"El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días"**, Alianza Universidad, Madrid, 1992 y Ríbnikov, K.-**"Historia de las Matemáticas"**, Editorial Mir, Moscú, 1987 y el epígrafe dedicado a Platón más adelante.
[68] Smith, D.E. (1923)-**"History of Mathematics"**, Vol. I. Reimpreso en Smith, D.E. (1958)-**"History of Mathematics"**, Vol. I, Dover, New York.

Capítulo III
Período Jónico

A partir del siglo VII a.C. las ciudades-estado griego-jónicas situadas en la .costa del Asia Menor y las islas cercanas se desarrollaron como importantes centros económicos, políticos y culturales. En Mileto, una de las ciudades comerciales más influyente, actuaban los filósofos naturalistas jónicos más notables, entre ellos Anaximandro, Anaxímenes y Tales.
Sobre la base de una posición materialista-espontánea y dialéctica en la búsqueda de las causas, los filósofos naturalistas jónicos consumaron el tránsito de la clasificación y acumulación de fenómenos naturales hacia el intento de comprensión y explicación de la Naturaleza. A través de su idea de una materia original, se acercaron a la concepción de un concepto de materia como una categoría filosófica para la designación de la realidad objetiva. En el caso de la filosofía naturalista jónica se trataba del comienzo de una nueva época, en la que a la pregunta sobre el origen del mundo se le trata de dar una respuesta sin misticismo, producto del intento de no solo describir el mundo sino también de explicarlo.
Todo esto es válido particularmente para los conocimientos matemáticos, los cuales durante el período jónico estaban totalmente incluidos en la filosofía (en el sentido original de la expresión: amor a la sabiduría). Se introducen demostraciones de teoremas sobre la base de la acumulación y el conocimiento de las relaciones matemáticas. El tesoro de experiencias matemáticas, que en parte se tomó de Mesopotamia y Egipto, adquirió entonces una estructura lógica, y se llegó a la clara diferenciación conceptual de los términos premisa, teorema y demostración. Había nacido la ciencia matemática.

1. Tales de Mileto. Los griegos consideraron siempre a los egipcios como sus maestros, atribuyendo la invención de la geometría egipcia, a la solución del problema de medir los campos después de las famosas inundaciones del Nilo. Actualmente, se reconoce a los escribas como los conocedores egipcios de la geometría y de la restante matemática práctica egipcia. La matemática babilónica y la egipcia fueron elaboradas, aproximadamente, en la misma fecha (Medio Imperio Egipcio), además podemos concluir, que tanto la matemática egipcia como la babilónica, tuvieron su crecimiento, florecimiento y decadencia, por lo menos 1000 años antes que Pitágoras.
La sola mención de Pitágoras nos lleva a la matemática griega, cuyo surgimiento no puede vincularse con el propio Pitágoras, sino mucho antes y cuando las matemáticas egipcias y babilónicas *"ya estaban extintas hacía mucho tiempo"*[69]. Usualmente, el comienzo de la matemática griega es asociado con el nombre de Tales, pues los conocimientos matemáticos elementales eran necesarios para todas las empresas comerciales o expediciones militares (entre ellas la Guerra de Troya) y eran conocidos en épocas anteriores a la de Tales. Con éste, se inicia lo que pudiéramos llamar "la matemática superior griega", con una evolución de apenas 4 siglos (600-200 a.C.).
En el período que estamos analizando, Grecia estaba constituida por un conjunto de ciudades-estados que llevaban a cabo un intenso comercio, entre sí y con otros estados de la cuenca del Mediterráneo. Existen innumerables ejemplos que permiten

[69] O. Spengler-**"Der Untergang des Abendlandes"**, Munchen, 1918-1922.

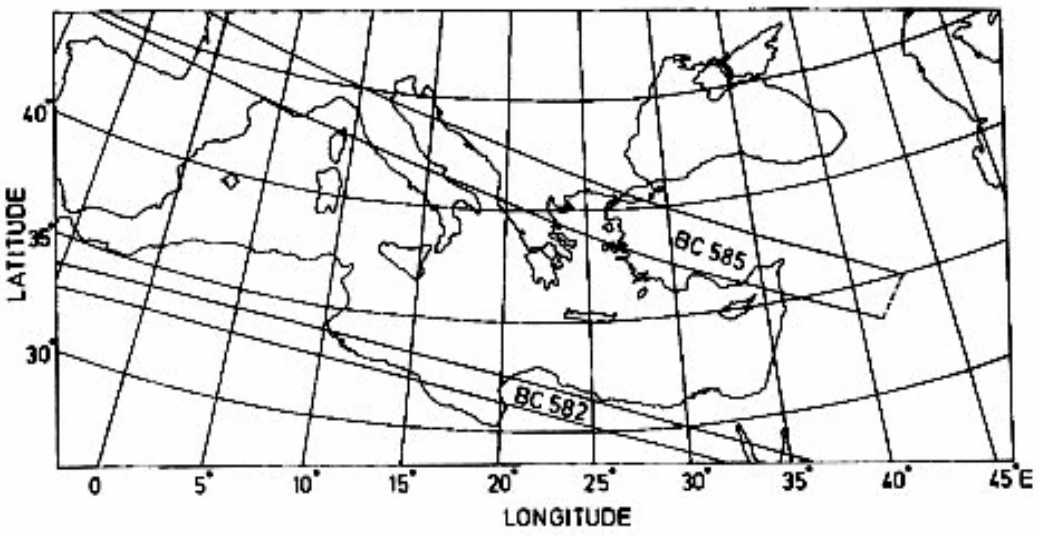
ilustrar el desarrollo alcanzado en esta época, baste citar los magníficos monumentos y sus legados filosóficos.
Un hecho fundamental es que parece que el concepto de ángulo ya era conocido por Tales, más aún *"la elaboración de este concepto parece haber sido una nueva conquista de los griegos"*[70]. Ellos no podían prescindir de tan importante noción, uno de sus dos presupuestos fundamentales.
Lo que es conocido de la vida y obra de Tales, el primero entre los Siete Sabios[71], es muy poco, Proclo, el último gran filósofo griego, escribió de éste en su **"Comentarios sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides"** que *"estuvo primero en Egipto y entonces introdujo este estudio* [de la Geometría] *en Grecia"*. Incluso su origen es incierto, a pesar que la mayoría de los historiadores se inclina por situar su lugar de nacimiento en Mileto, otros dicen que sus padres fueron fenicios.

Tales y el Eclipse Solar
Se dice que logró predecir el eclipse de Sol del 28 de mayo de 585 y que durante un viaje como mercader a Egipto determinó la altura de las pirámides a partir de las longitudes de sus sombras. Al respecto del eclipse, Herodoto escribió *"En el año sexto de la guerra que entre ellos [medos y lidios] se desarrollaba sin ventajas para uno ni para otro, sucedió que, mientras estaban combatiendo, el día se convirtió en noche. Ese cambio del día lo predijo a los jonios el milesio Tales, fijándolo en el año en que ocurrió. Los medas y los lidios, cuando observaron este cambio, cesaron de luchar y ambas partes se mostraron ansiosas por obtener un tratado de paz"* (Her., I –74)[72]
En relación a la filosofía, sin duda, el prestigio de Tales de Mileto se cimenta en la predicción de un eclipse, que según narra Herodoto, detuvo la guerra entre lidios y medos, y sobre cuya fecha posible no existe marcador histórico absoluto.
En 1994, el académico ruso Panchenko ofrece una particular conjetura en una relevante publicación astronómica, el *Journal for the History of Astronomy*[73], en el que sugiere, basándose en un ciclo particular, otras fechas a la tradicional del eclipse de 585 a.C. La propuesta de Panchenko parte de un hecho empírico en verdad contundente: *"La idea más popular, la de asociar el pronóstico con base al ciclo Saros con el eclipse de 28 de Mayo del 585 a.C., es especialmente dudosa. El hecho es que el eclipse solar del 18 de Mayo del 603, el predecesor del alegado "eclipse de Tales" en el ciclo Saros, en sí mismo no tuvo predecesor en el Saros que era observable en el Mediterráneo o el Cercano Oriente. ¿Quien habría predicho un eclipse solar que sucedería 18 años más tarde si no hubo eclipse 18 años antes?"*[74]
Basándose en un ciclo de 54/27 años, propone Panchenko la fecha o bien del 21 de septiembre de 582 a.C. o del 16 de marzo de 581 a.C., decidiéndose por la primera.

---

[70] A. Szabo-**"Anfange der Griechischen Mathematik"**, Munchen y Viena. Oldenbourg, 1969.
[71] Aunque, en realidad, los Siete Sabios eran veintidós: Tales, Pitaco, Bías, Solón, Cleóbulo, Quilón, Periandro, Misón, Aristodemo, Epiménides, Leofanto, Pitágoras, Anacarsis, Epicarmo, Acusilao, Orfeo, Pisístrato, Ferécides, Hermioneo, Laso, Pánfilo y Anaxágoras, todos renombrados por su sabiduría práctica que *consistía en una serie de aforismos y dictámentes memorables*. Merecieron dicho nombre debido a que sus enseñanzas o frases son una guía de la vida de los hombres. Este conjunto incluye tanto a filósofos como a estadistas o legisladores.
[72] http://www.filosofia.org/cur/pre/talesfyt.htm
[73] Panchenko, Dimitri-**"Thale's Prediction of a Solar Eclipse"**, Journal of the History of Astronomy", vol. 25, nº 81, 1994, 275-288, Cambridge. Traducido al castellano en Revista BEROSO, Nº 2, septiembre 2000.
[74] Panchenko, op. cit.

Tres años mas tarde, en la misma publicación, Stephenson y Fatoohi[75] recuperan la fecha tradicional basándose, según nuestra tecnología actual, en que los eclipses propuestos por Panchenko no fueron visibles en el Asia Menor, en la actual Turquía. El primero de septiembre, ocultó una parte de Egipto, y el posterior, ocurrió más lejos aún. Por el contrario, sí tapó una franja del Asia Menor el tradicional de 585 a.C. (ver la figura siguiente).



Mapa del área Mediterránea que muestra los recorridos calculados para el área de totalidad en los eclipses solares del 28 de Mayo de 585 a.C. y del 21 de Septiembre de 582 a.C. (tomado de Stephenson and Fatoohi (1997)).

Está claro que mientras la cultura griega está dando sus primeros pasos en cuanto al saber astronómico, los astrónomos babilónicos, hace ya más de un milenio que observan empíricamente el cielo.

Los **"Diarios Astronómicos"** recopilados por Sachs, constituyen una de las fuentes antiguas de la astronomía babilónica, pero es una recopilación "tardía". Así, en tiempos del rey amorreo Ammisaduqa, se producen las primeras observaciones del planeta Venus[76]. Previamente, en tiempos del famoso rey amorreo Hammurabi, ya existe intercalación de meses en su calendario lunar, para hacerlo mas coincidente con el calendario solar, aunque la intercalación final de 7 meses cada 19 años tuvo que esperar al siglo VI a.C.[77] Importantes documentos astronómicos son las tablas MUL.APIN, origen de asombrosas dataciones[78], las listas de Astrolabios, y otros documentos.

En la época de Tales, existe ya un cierto control en relación a los eclipses lunares. La observación más antigua de un eclipse solar tiene por fecha el 15 de junio de 763

---

[75] Stephenson, F. Richard and Fatoohi, Louay J.-**"Thale's Prediction of a Solar Eclipse"**, in Journal of the History of Astronomy, vol. 28, nº 93, (1997) 279-282, Cambridge. Traducido al castellano en Revista BEROSO, Nº 2, septiembre 2000.

[76] Van der Waerden, B. L.-**"On Babylonian Astronomy. I. The Venus tablets of Ammiþaduqa"**, in "Jaarbericht. Ex Oriente Lux", Vol. 10 (1948), 414-424, Leiden, 1952. Traducido al castellano en Revista BEROSO, Nº 7, marzo 2002.

[77] Pichot, André-**"La naissance de la science. 1. Mésopotamie, Égypte"**, Folio, Gallimard, Paris, 1991, p. 165

[78] Aparecen copias tardías en la biblioteca de Asurbanipal de Nínive (VII a.C.), aunque las dataciones de los textos las llevan al 1100 a.C., y según Tuman (Tuman, Vladimir S.- **"Astronomical dating of MUL.APIN Tablets"**, in "La circulation des biens, des personnes et des idées dans le Proche-Orient Ancien", Actes de la XXXVIII[e] Rencontre Assyriologique Internationale, Editions Recherche sur les Civilisations, 397-414, París, 1992) podrían contener observaciones datables en el 2048 a.C.

a.C.[79]. En el 747 a.C., año de inicio del reinado y Era de Nabonasar (su Era, que usarán caldeos, Hiparco y Ptolomeo, se inicia el 26 de febrero de este año), los astrólogos logran predecir eclipses de Luna, y más tarde, solares.
Semejantes antecedentes no existen en ninguna otra cultura asiática, africana o europea. Sin duda, Tales de Mileto adquirió notables conocimientos en sus visitas probables a Egipto y Babilonia, o en Asia Menor, a enclaves de cruce cultural como Sardes o su propia ciudad.
Este conocimiento, basado en tenaces y constantes observaciones nocturnas, sin duda cimentó el aspecto físico y real de la teoría de Tales de Mileto. Una de sus concepciones básicas, la Tierra descansa sobre el Agua, siendo éste el elemento primordial, alcanza plena coincidencia con el inicio del principal poema sumero-acadio (junto al de Gilgamesh) el "Enuma Elish"[80], en el cual, los dos primeros dioses, Apsu y Tiamat, "mezclan sus aguas". Su afirmación de que todo está compuesto de démones [daimónwn], también coincide que el pluralismo mitológico de los más de 3000 dioses del panteón mesopotámico.
Sin duda, su éxito 'empírico' en la predicción del eclipse, espoleó su concepción física de la naturaleza y propició que comenzaran a tener cabida y prestigio la serie de pensadores posteriores a él que abrieron el camino de la Filosofía.
Ciertamente Tales fue una figura de enorme prestigio[81], y comúnmente, se le asocian las siguientes demostraciones:

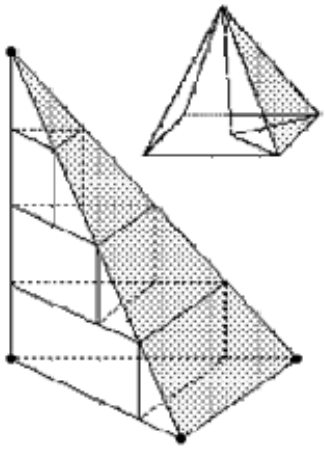
- Un círculo es bisectado por un diámetro.
- Los ángulos bases de un triángulo isósceles son iguales.
- Los ángulos opuestos entre dos rectas intersectadas son iguales.
- Dos triángulos son congruentes, si ellos tienen dos ángulos y un lado iguales.
- Un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

Esto está basado en diferentes fuentes: la afirmación de Proclo sobre los cuatro primeros; el tercero y el cuarto también se mencionan en **"La historia de la geometría"** de Eudemo de Rodas; y el quinto se apoya en una afirmación de Diógenes Laercio en su libro **"Vidas de eminentes filósofos"**, escrito en la segunda centuria de nuestra era.
De ser cierto o no las anteriores afirmaciones, lo que sí es indudable es que Tales es el primer hombre en la Historia de las Matemáticas, a quien se le adjudican descubrimientos específicos y, algo más importante, demostraciones matemáticas.
Ocurre que tradicionalmente se consideraba que toda la matemática griega se había iniciado con los pitagóricos, más que con el propio Pitágoras, ahora se sabe que este no fue nunca un matemático o físico en el siglo IV cuando las demostraciones ya existían en la matemática griega. En verdad, mucha matemática fue elaborada por los no-pitagóricos contemporáneos de los primeros pitagóricos. Entre estos, Hipaso de Metaponte (480-420 a.C.)[82], el primer pitagórico verdaderamente matemático, discípulo directo de Pitágoras. El hecho es que la demostración, en ropaje geométrico, aparece en los **"Elementos"** de Euclides, sin referencia a Pitágoras.

---

[79] http://www.astrored.org/doc/articulos/rafael_ontivero/babilon.html
[80] Aunque el dios principal es el dios babilonio Marduk, existen antecedentes previos incluso sumerios.
[81] Ver T.L. Heath-**"A history of greek mathematics"**, **I**, Oxford, 1921.
[82] Sobre las fechas de nacimiento y muerte consignadas en este texto, debemos entenderlas siempre, como una afirmación consensuada y casi nunca, tomadas como exactas.

2. Leukippo de Mileto (480- 420 a.C.) y **Demócrito de Abdera (460-370 a.C.).**
Filósofos Jónicos, maestro y discípulo, que fundaron la teoría atomística. Según la misma, los objetos están formados por la mezcla de diminutas partículas individuales e imperceptibles que solo difieren en forma y posición, utilizando a modo de ejemplo la conformación de la playa por granos de arena. Tal especulación científica tenía su base en la extrapolación del concepto de átomo geométrico, el cual parte de considerar que un segmento de línea, un área o un volumen está conformado por un número grande, pero finito, de "átomos" indivisibles. El cálculo del volumen era entonces la suma de los volúmenes de todos los átomos que le componían.
Indudablemente antes de Aristóteles, Demócrito fue el filósofo más sabio y multifacético, así como un pensador extraordinariamente agudo. Profundizando en los criterios de su maestro Leukippo, desarrolló una teoría atomista con orientación materialista, la cual repercute aún en nuestra era. Lamentablemente, la obra del filósofo materialista fue relegada por los representantes de la filosofía idealista que predominó con posterioridad, principalmente por Platón y sus seguidores. Platón, según sus propias palabras hubiese tenido mucho gusto en hacer quemar toda la obra de Demócrito.
De toda la diversidad de sus escritos solamente se conocen en lo esencial los títulos; ellos abarcan la Naturaleza, la música, la ética, las artes plásticas, la arquitectura y la astronomía. A la matemática se refieren, entre otros, los tratados **“Sobre el contacto de la circunferencia y la esfera”**, **“Sobre geometría”**, **“Sobre números”**, **“Sobre desarrollos”** (o sea, aplicación de la superficie de la esfera sobre el plano). Demócrito se vanagloriaba que ni siquiera los tensores de cuerdas egipcios podrían aventajarlo en la “combinación de líneas". Sus viajes lo condujeron posiblemente a Egipto, Persia, Babilonia, tal vez incluso a la India y Etiopía.
Uno de los pocos fragmentos conservados de los escritos de Demócrito se refiere a la descomposición de un cono en discos finos mediante secciones paralelas a la base: si se secciona un cono mediante planos paralelos a la base, cómo debe uno imaginarse las superficies del corte, iguales o desiguales. Si son desiguales, entonces harán irregular al cono, ya que este contiene incisiones y salientes; si por el contrario son iguales, entonces los cortes serán iguales y el cono ofrecerá la apariencia de un cilindro, en tanto este se compone de círculos iguales y no desiguales, *“lo cual es muy absurdo"*.
Partiendo de esta base atomista, Demócrito tuvo la posibilidad de indicar correctamente, por primera vez, los volúmenes de la pirámide y el cono. Posteriormente Eudoxo y Arquímedes tomaron esto como punto de partida y obtuvieron demostraciones rigurosas. Tal hecho pone de manifieste que las ideas de Demócrito permanecieron vivas, a pesar del predominio posterior del idealismo filosófico.
No hay pruebas de que en la antigüedad este proceder se tomara como un método riguroso, pero su fertilidad para intuir posibles resultados estuvo en gran estima por las principales figuras posteriores de la Matemática Griega.
Además de lo anterior, se adjudican a Demócrito la invención de la construcción abovedada, las investigaciones sobre las regularidades de la perspectiva en la pintura escenográfica, la afirmación de que las longitudes laterales en el monocordio son números enteros en los intervalos tonales y otras muchas cosas. A diferencia de la visión de la escuela pitagórica (formalmente casi idéntica), su concepción de que el número (entero) es a la medida de todas las cosas resulta totalmente materialista: el número sirve para la comprensión de la Naturaleza.



Estratificación de la Pirámide según la atomística de Demócrito

3. Hipócrates de Quios (470-410 a.C.)

La tendencia de abstracción y sistematización de la Geometría encontró un fuerte impulso en la obra de Hipócrates de Quios, el geómetra más importante del siglo V a.C.

Escribió una obra de carácter enciclopédico titulada **"Elementos"** para aglutinar todo el saber matemático de su época. Más tarde incluida en los libros I y II de la colección que Euclides tituló con igual nombre. Partiendo de un sistema de axiomas o verdades a priori, que tenían carácter intuitivo utilizó por primera vez el conocido esquema Premisa-Teorema-Demostración. Introdujo la designación de figuras geométricas por letras, y el método de demostración *por reducción al absurdo*.

Fue el primero en calcular áreas de regiones delimitadas por segmentos curvilíneos no rectos, en relación con el problema de la cuadratura del círculo. Para ello se valió del teorema que afirma *"la razón entre el área de dos círculos es la misma que la razón entre el cuadrado de sus radios"*. En relación con la duplicación del cubo probó que esta era posible siempre que pudieran encontrarse medias proporcionales entre un número y su duplo. Una cuestión fundamental en la matemática griega es con respecto a la "demostración", pues en las grandes culturas pregriegas estudiadas, ésta estaba ausente. Consta que el primero en intentar la "cuadratura del círculo" fue Anaxágoras de Clazomenae (499-428 a.C.). Sin embargo, donde se constata por primera vez de manera documentada el uso de la "demostración" en la matemática griega, y por tanto, en toda la matemática, es en el neo-pitagórico Hipócrates, el primer matemático "profesional", que trabajaba en Atenas, de él proviene el más antiguo libro de **"Elementos"** de geometría, desgraciadamente fragmentado; se trataba en esencia de una tentativa de resolución de la cuadratura del círculo a través de sus lúnulas (meniskoi), donde está presente el método deductivo ampliamente sistematizado. Proclo escribió de Hipócrates de Quios: *"el descubridor de la cuadratura de la lúnula, ... fue el primero de quien se recuerda que compiló unos Elementos"*. El libro de Hipócrates también incluía soluciones geométricas a ecuaciones cuadráticas e incluía antiguos métodos de integración. Heath, en la obra antes citada, escribió que: *"él deseó mostrar que, si el círculo no puede ser cuadrado por estos métodos, ellos pueden ser empleados para encontrar el área de algunas figuras acotadas por arcos de círculos, ciertas lúnulas, y la suma de un cierto círculo y cierta lúnula".*

La invención griega de la idea de la demostración no consiste en el uso ocasional de pruebas efectivamente convincentes. En este sentido, la matemática griega no habría sido muy singular: otras matemáticas anteriores o coetáneas, como la de los escribas egipcios, los sacerdotes babilonios o los ritualistas hindúes, también disponían de procedimientos de cálculo y de reglas para la comprobación de resultados. La invención griega tiene tres desarrollos característicos[83]:

[83] L. Vega-**"Los elementos de geometría y el desarrollo de la idea de la demostración"**, Mathesis 8(1992) 403-423.

1. La distinción expresa entre una demostración estrictamente concluyente y cualquier otro tipo de argumentación o de prueba más o menos eficaz y convincente.
2. La reflexión metadiscursiva sobre los supuestos y las condiciones que distinguen tal demostración, así como el análisis de sus aspectos lógicos, epistemológicos y metodológicos.
3. La proyección de sus virtudes sistemáticas con miras a la organización de un conjunto de resultados demostrados, bien al calor de una filosofía de la "ciencia demostrativa" o bien en el curso efectivo de construcción de ciertos cuerpos deductivos, "axiomatiformes", de conocimientos matemáticos.

Todo esto contribuyó, a la creación de un cuerpo matemático con "vida propia", en el cual se sustentaba su desarrollo independiente, prueba de esa independencia son, por ejemplo, los conocidos problemas clásicos de esta matemática.

Los problemas clásicos de la matemática griega son: el ya mencionado de **la cuadratura del círculo**, **la duplicación del cubo** y **la trisección del ángulo.**

El problema de la duplicación del cubo, también llamado délico, fue atacado por Hipócrates a través de dos medias proporcionales, que ahora representamos en la forma a:x=x:y=y:b, donde obtenemos (si ponemos b=2a) que $x^3=2a^3$, o sea, aparece el número irracional $\sqrt[3]{2}$, no reconocido como número en aquella época, por lo que el problema permanece sin solución satisfactoria.

Con respecto al tercer problema, debemos mencionar al sofista Hípias de Elis (460-400 a.C.) que concibió lo que Dinostrato (390-320 a.C.) llamó "quadratriz", es decir, la curva $\frac{y}{a}=\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}$. Pappo, que escribió su principal trabajo de geometría, **"Sinagoga"** en el 340, contiene, en el Libro IV, una amplia descripción de la cuadratriz de Hippias.

La resolución de los 3 problemas clásicos con regla y compás se mostró, en definitiva, como aporética, más esto fue constatado solamente mucho después por la matemática occidental (en el Epígrafe 8 de este capítulo, desarrollaremos éste y otros detalles con más amplitud)..

Debemos decir además, que en las construcciones geométricas desempeñan gran papel, además de la regla y el compás, la introducción de los movimientos que, seguramente, desempeñó un rol importante en la construcción primitiva del pentágono estrellado regular, símbolo de los pitagóricos.

Es un lugar común poner de relieve la contribución fundamental de las Matemáticas Griegas al desarrollo de esta ciencia en Occidente. La designación misma de "matemáticas" y "matemáticos" o sus equivalentes en la mayoría de las lenguas modernas son de origen griego, derivados del verbo "conocer, aprender"; mathema significa en griego "lo que se enseña", esto es, toda las formas de conocimiento, antes de que esta palabra, en plural, adquiera en la época clásica el sentido mas especializado que nosotros le damos "ciencias matemáticas".

Se sabe poco sobre la enseñanza de la matemática en la Antigua Grecia. Al parecer, algunas escuelas filosóficas, en una época en la que la especialización intelectual no era todavía habitual, tuvieron un importante cometido en la formación de los matemáticos. En la época clásica se habla incluso de escuelas llamadas "científicas" como la de Quios o la de Cízico, pero ignoramos si impartían una formación general o especializada y si eran algo más que un grupo de discípulos en torno a un maestro prestigioso. Al igual que con la medicina, de la que se tienen pruebas más

sólidas y antiguas de la existencia de escuelas, hay indicios de que el medio familiar pudo influir en la formación del sabio.
En la Grecia de la época clásica no existía un estado centralizado como los del Cercano Oriente de la antigüedad, en los que muy pronto se hizo sentir la necesidad de escribas "funcionarios". Existen tan sólo pequeñas ciudades independientes, permanentemente enfrentadas u organizaciones gentilicias cuyas estructuras estatales poco consistentes, no originaban necesidades de formación comparables a las que se observan en Egipto, Babilonia o China.
Si bien el comercio, la agrimensura o la navegación exigen un mínimo de conocimientos matemáticos y aunque el cálculo se enseña en la escuela elemental, la ciudad griega se interesa poco por la formación intelectual y técnica de los niños y jóvenes. La aparición de escuelas, algunas de las cuales llegarían a ser famosas, se debe a la iniciativa privada; así, los dos grandes pedagogos atenienses de principios de siglo IV a.C., Sócrates y Platón, fundan cada uno su propia escuela, el primero de retórica y el segundo de filosofía.
Los dos consideraban las Matemáticas como un instrumento indispensable de la formación intelectual, y ambos reconocen la dificultad de esos estudios, la "gimnasia" y la concentración intelectual que requieren. Pero sus enfoques respectivos son muy distintos: según Sócrates, las Matemáticas, al igual que los debates contradictorios que tanto atraen a la juventud, deben formar mentes *"bien hechas"*, aunque su contenido resulte inútil para el ciudadano cuyo ideal consiste en dedicarse a la vida política. Para Platón, si las Matemáticas cumplen también una función propedéutica, ésta es de muy distinta magnitud, pues deben servir de introducción al estudio de la filosofía, esto es, del idealismo platónico y también como medio de selección, pues esas Matemáticas y esa Filosofía, convertida en una auténtica ascesis intelectual, forman parte de un proyecto de reforma política.

4. La escuela pitagórica (siglos VI al III a.C.)

El nombre *Aritmética* (de la palabra griega Αριθμητικά y ésta de αριθμος que significa número), ha estado asociado siempre a la escuela pitagórica, y dedicado al estudio de las propiedades de los números naturales. La aritmética jugó un papel crucial en la filosofía, no sólo la del pitagorismo, sino que alcanzó un rol protagónico en las obras de Platón y Aristóteles. La *Aritmética* que nos referiremos aquí, es entonces, la teoría de números, y no la de las técnicas computacionales, o aquella de las cuentas del mercado, conocida por los pitagóricos como *Logística* (λογιστις).
El origen de la teoría de números va más allá de la cultura griega. Hasta mediados del siglo XX se creía que los inicios de la teoría de números y el algebra se remontaban a las culturas mesopotámicas del segundo milenio a.C., en razón, sobre todo, a evidencias mostradas por Otto Neugebauer[84] y Abraham Sachs[85] en su obra **"Mathematical Cuneiform Texts"**[86]. Sin embargo, investigaciones más recientes, descritas en la obra de van der Waerden[87] tienden a mostrar que la teoría de

[84] Matemático y astrónomo austriaco-americano, sus investigaciones se dedicaron exclusivamente a la historia de la ciencia, y en especial de la Astronomía. Nació el 26 de mayo de 1899 en Innsbruck y murió el 19 de febrero 1990 en Estados Unidos.
[85] Abraham Joseph Sachs. Uno de los especialistas en Asiria y Oriente Medio más destacado, nació el 11 de diciembre de 1914 en Baltilmore y murió el 22 de abril de 1983 en Providence.
[86] Neugebauer, O. et al-**"Mathematical Cuneiform Texts"**, New Haven, Conn, 1955.
[87] Bartel Leendert van der Waerden, matemático alemán, nació el 2 de febrero de 1903 y murió el 12 de enero de 1996 en Zurich. Sus principales contribuciones estuvieron centradas en el álgebra, la topología y la Historia de las Matemáticas.

números tuvo un origen anterior, probablemente en el período neolítico entre 3000 y 2500 a.C. en Europa Central y de allí, este conocimiento matemático se expandió a Gran Bretaña, el Cercano Este, Mesopotamia, India y China[88]. Dicho sea de paso, van der Waerden fue el primer discípulo que tuvo Neugebauer en Historia de las Matemáticas, cuando en la Universidad de Gotinga, se inauguró esta cátedra en 1927.

Los números naturales están presentes en la filosofía pitagórica, desempeñando un papel fundamental en la explicación de la esencia de todas las cosas, como se explicará más adelante. Durante el apogeo de la cultura griega, la teoría de números estaría presente en los monumentales trabajos de Euclides, de Arquímedes y de Diofanto de Alejandría. El *teorema fundamental de la aritmética*, que aparece en las matemáticas griegas es, a no dudarlo, un hito en el desarrollo de la teoría de números. Este teorema da una caracterización de los números naturales, como producto de números primos en forma única, salvo el orden de los factores. La aparición de los números primos, que juega un papel importante en la obra de Euclides, contrasta con el desarrollo matemático egipcio, inclinado más a representar los números como suma de fracciones de numerador uno y las matemáticas babilonias usando fracciones sexagesimales con el mismo propósito.

A la escuela pitagórica se le atribuye el descubrimiento de ciertos números con características especiales simulando, en ciertos casos, atributos propios del ser humano. Algunos ejemplos son los siguientes:

Números Perfectos son aquellos para los cuales la suma de sus divisores propios reproduce el mismo número. Por ejemplo, **6=1+2+3,** donde 1, 2 y 3 son los divisores propios de 6.

Números Amigos son parejas de números naturales con la propiedad de que la suma de los divisores propios de cada uno, reproduce al otro. Un ejemplo es el par **(220, 284)**, porque los divisores propios de 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, cuya suma es 284, y así mismo, los divisores propios de 284 son: 1, 2, 4, 71 y 142, que al sumarlos da 220.

Deténgamos en la primera clase de los arriba citados.

Un interludio. No se sabe cuándo se estudiaron por primera vez los números perfectos y quizá esos primeros estudios nos pudieran llevar a los tiempos en los que los números comenzaron a despertar la curiosidad del hombre. Parece bastante acertado pensar, aunque no podamos asegurarlo, que los egipcios analizaron aquellos números que habrían obtenido mediante sus primitivos métodos de cálculo[89] Los números perfectos fueron estudiados por Pitágoras y sus seguidores más por sus propiedades místicas que por sus propias propiedades teóricas. Antes de echar un vistazo a la historia del estudio de los números perfectos tenemos que definir los conceptos involucrados.

Los números perfectos son, sencillamente, números iguales a la suma de todos sus divisores propios, esto es, de todos los divisores del número a excepción de él mismo. El menor de tales números es el 6, que es igual a la suma de sus tres divisores propios, 1, 2 y 3. El siguiente es 28, suma de 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Los primeros comentaristas del Antiguo Testamento, tanto judíos como cristianos,

---

[88] Van der Waerden. B. L.-**"Geometry and Algebra in Ancient Civilizations"**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[89] Ver por ejemplo C M Taisbak-**"Perfect numbers: A mathematical pun? An analysis of the last theorem in the ninth book of Euclid's Elements"**, Centaurus 20 (4) (1976), 269-275, donde se da una justificación a esta aproximación.

quedaron muy impresionados por la perfección de esos dos números. ¿Acaso no fue el Mundo creado en seis días? ¿No tarda veintiocho días la Luna en su circunvalación en torno a la Tierra? En **"La Ciudad de Dios"**, libro 11, capítulo 30, San Agustín argumenta que, no obstante poder Dios haber creado el Mundo en un instante, El prefirió emplear seis días, porque la perfección del número 6 significa la perfección del Universo. (Parecidos puntos de vista habían sido expresados anteriormente por un filósofo judaico del siglo I, Philo Judaeus, en el tercer capítulo de su **"Creación del Mundo"**) *"Por consiguiente"*, concluye San Agustín, *"no debemos despreciar la ciencia de los números, la cual, en muchos pasajes de la Sagrada Escritura, demuestra ser de servicio eminente al intérprete cuidadoso"*.
Hoy en día la definición común de números perfectos se hace en términos de sus divisores, pero la definición original estaba hecha en términos de *partes divisibles* de un número.
Una *parte divisible* de un número es un cociente propio del número. Por ejemplo las partes divisibles de 10 son 1, 2 y 5. Esto es así si vemos que $1=^{10}/_{10}$, $2=^{10}/_{5}$, y $5=^{10}/_{2}$. Destaquemos que 10 no es una parte divisible de 10 porque no es un cociente exacto, i.e., un cociente diferente del propio número. Un número perfecto viene definido como el que es igual a la suma de sus partes divisibles.
Los cuatro números perfectos 6, 28, 496 y 8128 parecen haber sido conocidos desde los tiempos más antiguos a pesar de que no existe ninguna prueba de estos descubrimientos.

6 = 1 + 2 + 3,
28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,
496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064

Los primeros conocimientos matemáticos de los que se tiene información concerniente a los números perfectos aparecen en los **"Elementos"** de Euclides escritos alrededor del año 300 a. de C. Sorprenderá a mucha gente descubrir que hay teoría de números en los Elementos de Euclides que siempre se ha tomado como un libro de geometría. Sin embargo, aunque los números están representados por segmentos de líneas y tienen una apariencia geométrica, existe teoría de números significativa en los **"Elementos"**. Aparece en la proposición 36 del libro IX de los **"Elementos"** que dice *"Si colocamos los números que queramos comenzando desde una unidad en proporción doble de forma continuada, hasta que su suma se convierta en un primo, y si esa suma es multiplicada por el número final, el producto será perfecto".*
Aquí 'proporción doble' significa que cada número de la secuencia es dos veces el número precedente. Para ilustrar esta Proposición considera 1+2+4=7 que es primo. Entonces (la suma) × (el último) = 7 × 4 = 28, que es un número perfecto. Tomemos 1+2+4+8+16=31 como segundo ejemplo que también es primo. Entonces 31×16 = 496 que es un número perfecto.
Ahora Euclides nos proporciona una prueba rigurosa de la Proposición y tenemos el primer resultado significativo de números perfectos. Podemos definir la Proposición de una fórmula ligeramente más moderna usando el hecho, conocido por los Pitagóricos, de que $1 + 2 + 4 + ... + 2^{k-1}=2^{k}-1$. La Proposición se lee ahora *Si, para algún k > 1, 2^k - 1 es primo entonces 2^{k-1} (2^k - 1) es un número perfecto*.

El siguiente estudio importante de los números perfectos procede de Nicómaco de Gerasa alrededor del año 100 d.C. Nicómaco escribió su famoso texto **"Introductio Arithmetica"** que proporciona la clasificación de los números basada en el concepto de los números perfectos. Nicómaco divide los números en tres clases, los números superabundantes, que poseen la propiedad de que la suma de sus partes divisibles es mayor que el propio número; los números deficientes, que tienen la propiedad de que la suma de sus partes divisibles es menor que el número; y los perfectos, que tienen la propiedad de que la suma de sus partes divisibles es igual al número[90]: *"Entre los simples números pares, algunos son superabundantes otros son deficientes: estas dos clases son los extremos opuestos la una de la otra, y para los que ocupan la posición media entre las dos, se les llama perfectos. Y a los que son opuestos el uno al otro, los superabundantes y los deficientes, se dividen en sus condiciones, que es la desigualdad, entre demasiado grande y demasiado pequeño".*
Sin embargo Nicómaco tiene más que una teoría de números en mente porque muestra a continuación que piensa en términos morales en una forma que nos suena extraordinaria a los matemáticos de hoy en día[91]: *"En el caso de los 'demasiado grandes', se producen excesos, superfluidez, exageraciones y abuso; en el caso de los demasiado pequeños se produce deseo, deficiencias, privaciones e insuficiencias. Y en el caso de los que se encuentran entre los 'demasiado grandes' y 'demasiado pequeños', que es la igualdad, se produce virtud, mesura, decoro, belleza y cosas de ese estilo, de las que el mejor ejemplo es el tipo de números denominados perfectos".*
Satisfecho con las consideraciones morales de los números, Nicómaco pasa a proporcionar analogías biológicas en las que describe los números superabundantes como un animal con *"... diez bocas, o nueve labios y tres líneas de dientes; o con cien brazos, o teniendo demasiados dedos en una de sus manos"*[92].
Los números deficientes son comparados con animales con: *"un único ojo,… con un solo brazo o con manos con menos de cinco dedos, o acaso sin lengua".*
Nicómaco continúa describiendo ciertos resultados que involucran los números perfectos. Todos ellos se proporcionan sin ninguna prueba. Veámoslos en notación actual.

(1) El enésimo número perfecto posee n dígitos.
(2) Todos los números perfectos son pares.
(3) Todos los números perfectos terminan de forma alternativa en 6 y en 8.
(4) El algoritmo de Euclides[93] para generar números perfectos proporcionará todos ellos. i.e. cada número perfecto es de la forma $2^{k-1}(2^k - 1)$, para algunos $k > 1$, donde $2^k - 1$ es primo.
(5) Hay infinitos números perfectos.

Veremos ahora como esas aserciones han soportado el paso del tiempo mientras seguimos con nuestro estudio, pero por el momento digamos que las aserciones (1) y (3) son falsas, mientras que el resto todavía son preguntas abiertas. Sin embargo desde la época de Nicómaco sabemos mucho más sobre sus cinco aserciones que

[90] Para una traducción distinta ver D'Ooge (tr.)-**"Nicomachus, Introduction to arithmetic"**, New York, 1926 y M Crubellier and J Sip-**"Looking for perfect numbers"**, History of Mathematics: History of Problems, Paris, 1997, 389-410.
[91] Idem nota anterior.
[92] Ver D'Ooge (tr.) y M Crubellier and J Sip ya citados.
[93] El *algoritmo de Euclides* es un procedimiento muy eficiente para calcular el máximo común divisor *d* de una pareja de números enteros *m* y *n* y escribirlo en la forma $d = pm + qn$ donde *p* y *q* son también enteros. Esto se hace mediante divisiones euclidianas sucesivas.

la definición simplista que acabamos de hacer. Veamos con más detalle la descripción de Nicómaco del algoritmo para generar números perfectos, su aserción (4): *"Existe un método elegante y seguro para generar estos números, que no deja afuera ninguno de los números perfectos y no incluye los que no lo son; y que se hace la forma siguiente. Primero se colocan en orden las potencias de dos en una línea, comenzando desde la unidad hasta el número que se desee: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096; y entonces se suman cada vez que haya un nuevo término, y en cada suma se examina el resultado; si encuentras que es primo y no compuesto, debes multiplicarlo por la cantidad del último término que añadiste a la lista, y el producto siempre será perfecto. Si, de algún modo, es compuesto y no primo, no lo multipliques, sino que debes añadirlo al siguiente término, y de nuevo examinar el resultado, si es compuesto déjalo de lado, sin multiplicarlo, y súmalo al término siguiente. Si, por otra parte, es primo, y no compuesto, debes multiplicarlo por el último término tomado de su composición, y el número resultante será perfecto, y así hasta el infinito"*[94].

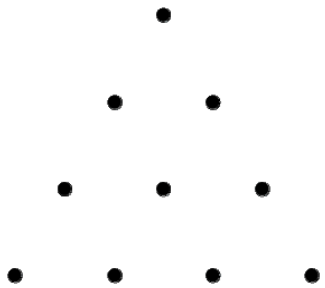
Como vemos, este algoritmo es precisamente el que nos daba Euclides en los *Elementos*. Sin embargo, es probable que este método de generar números perfectos sea parte de una tradición matemática manejada con anterioridad a Euclides y continuada hasta que Nicómaco escribió su tratado. Si las cinco aserciones de Nicómaco se basaron en algo más que en el algoritmo y el hecho de que sólo conociera cuatro números perfectos 6, 28, 496 y 8128, es imposible de decir, pero parece improbable que haya algo más detrás de las aserciones sin demostrar. Algunas de ellas se hicieron en esta cita sobre los números perfectos que sigue a la descripción del algoritmo: *"... sólo uno se encuentra entre las unidades, 6, sólo uno entre las decenas, 28, y un tercero en el rango de las centenas, 496 sólo, y un cuarto dentro de los límites de los millares, que está por debajo de diez mil, 8128. Y es su característica específica de terminar alternativamente en 6 u 8, y siempre ser pares. Cuando estos han sido descubiertos, 6 entre las unidades y 28 entre las decenas, debes hacer lo mismo para localizar al siguiente. ... el resultado es 496, en las centenas; y a continuación viene 8128 en los millares, y así sigue, mientras sea necesario seguir"*[95].

A pesar del hecho de que Nicómaco no ofreció ninguna justificación a sus aserciones, fueron tomadas por reales durante muchos años. Por supuesto habría una significación religiosa que todavía no hemos mencionado, ya que seis es el número de días que utilizó Dios para crear el mundo, y se creía que ese número fue escogido por Él porque era perfecto. Dios eligió también el siguiente número perfecto, el 28, como el número de días que tarda la luna en dar una vuelta a la Tierra. San Agustín (354 - 430), escribe en su texto ya mencionado *"Seis es un número perfecto en sí mismo, y no porque Dios creara todas las cosas en seis días; lo que parece cierto. Dios creó todas las cosas en seis días porque el número es perfecto…"*

Para los pitagóricos el número uno, la *mónada*, tenía un estatus especial. Más que un número, era considerado como el divino generador de todo, incluyendo a los números, la consideraron semejante al punto, que ni es número, ni es cuerpo; sin embargo, es el origen de los números y de el se crean los cuerpos. Las mónadas (o monas) se hallan, como el alma en el cuerpo, en cada número, está siempre

[94] Ver Ver D'Ooge (tr.) y M Crubellier and J Sip ya citados.
[95] Ver D'Ooge-Ob. Cit.

presente[96]. El dos estaba asociado a la recta y así, a la primera dimensión, por cuanto dos puntos distintos determinan una recta. El número tres se ligó con el triángulo, porque tres puntos distintos determinan un triángulo y aquí ya se distinguen dos dimensiones. Finalmente el cuatro representaba al tetraedro, porque con cuatro puntos distintos, no todos en el mismo plano, se puede determinar un tetraedro y allí están implícitas las tres dimensiones. La suma **1 + 2 + 3 + 4 = 10**, conformó lo que para ellos fue el *tetractys,* un número y un concepto muy importantes dentro de su filosofía, ya que en el se compendia el espacio y la mónada, la generatriz de todo ser.



Representación gráfica del *Tetractys* como un arreglo triangular, donde el número uno (*la monada*) ocupa el vértice superior y el cuatro, la base del triángulo equilátero. La primera fila representa el punto (sin dimensión), La segunda, la recta (dimensión uno). La tercera el plano (dimensión dos) y la cuarta fila, el espacio (dimensión tres).

Para los pitagóricos, el tetractys también simbolizó su cosmogonía, en el sentido de que allí se concentra el origen de todo ser, como una combinación de los cuatro elementos: tierra, agua, fuego y aire.

La importancia que se le dio al tetractys[97] se ve reflejada en la siguiente oración de la cofradía o hermandad de los pitagóricos, oración de la cual desconocemos sus orígenes *"¡Bendícenos divino número, tú que has generado al hombre y a sus dioses. O divino, divino Tetractys, tu que contienes la raíz y la fuente del flujo eterno de la creación! Por ti divino número empieza la unidad pura y profunda que culmina en el sagrado cuatro; entonces se engendra la madre de todo, el origen del universo, la que todo lo contiene y lo enlaza, la primitiva esencia, la que nunca se desvía, la inagotable y sagrada decena, la clave de todo ser".*

En este corto texto se concentra la filosofía de los pitagóricos. En ella, se asigna al número natural gran importancia, como el origen y la esencia de todos los seres.

Temas relacionados con la teoría de números, como números perfectos, por ejemplo, se ponen de moda de vez en cuando. Así lo sugiere André Weil en su libro de teoría de números[98], que muestra cómo Pierre de Fermat (1601-1665) y sus amigos epistolares, incluyendo Pascal, Descartes y Mersenne se ocuparon de estos temas. Igual ocurrió en los años posteriores a la invención de la computadora, cuando estas se dedicaron a encontrar números perfectos cada vez mayores. El interés en los números perfectos radica en el hecho de que con cada número perfecto está asociado un número primo y así, encontrar un nuevo número perfecto,

---

[96] Macrobius-Comm. Ex Cic."**, II. 2** ***"… Et monus punctum putatur, quia sicut punctum corpus non est, sed ex se facit corpora…"*****, Idem, ut supra** I.6 *"… monas id est, unitas dicitur, et mas idem et femina est; par idem atque impar; ipse non numerus, sed fons et origo numerorum. Hae monas initium finisque omnium…"*.

[97] Véase E. Zeller-**"A history of greek philosophy from the earliest period to the time of Socrates"**, 1881, I, 306-533, en particular a partir de la página 428; y T. Taylor-**"The theoretic arithmetic of the pythagoreans"**, Los Angeles, 1934, pp. 180-188, aunq esta última obra, debe leerse con prudencia crítica.

[98] Weil, A.-**"Number Theory. An approach through history. From Hammurabi to Legendre"**, Birkhäuser, Boston, 1983.

es también hallar un número primo nuevo. En el algebra geométrica también los pitagóricos nos dejaron una herencia muy rica, con los números geométricos y con las fórmulas recursivas para calcular la suma de los pares, los impares, los cuadrados, etc. Como trasciende el objetivo de este texto, recomendamos consultar el texto de Diego Pareja[99].

Al mismo tiempo, ya en la escuela de Pitágoras[100] se advierte un proceso de recopilación de hechos matemáticos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos. Así, por ejemplo, de la aritmética fue separada en una rama independiente la teoría de números, es decir, el conjunto de conocimientos matemáticos que se relacionan con las propiedades generales de las operaciones con números naturales. En esta época ya resultaban conocidos los métodos de sumación de progresiones aritméticas simples y resultados del tipo $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Se estudiaban cuestiones sobre la divisibilidad de los números, fueron introducidas las proporciones aritméticas, geométricas y armónicas (del tipo 1/a – 1/b =1/c -1/d, recibiendo su nombre del hecho que en la teoría matemática de la música, los intervalos entre los tonos completos son inversamente proporcionales a la altura del tono) y diferentes medias: la aritmética $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}$, la geométrica $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ y la armónica $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$. Junto a la demostración geométrica del Teorema de Pitágoras fue encontrado el método de hallazgo de la serie ilimitada de las ternas de números "pitagóricos", esto es, las ternas de números que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$ y que tienen la forma n, $(n^2-1)/2$, $(n^2+1)/2$, donde n es impar. Otra regla es la siguiente n, $(n/2)^2 -1$, $(n/2)^2+1$, donde n es par, la encontramos en las obras de Platón, o sea, en época posterior. Fueron descubiertas muchas leyes matemáticas de la teoría de la música. Una particularidad de la escuela de Pitágoras es que a ciertos números y relaciones numéricas se les asignaban propiedades misteriosas, mágicas, y la propia dedicación a la teoría de números se consideraba como patrimonio de "los elegidos" e "iniciados".

Nociones de Matemáticas Pitagóricas

Pitágoras y su escuela, contribuyeron al desarrollo de las Matemáticas. Su concepción filosófica, como dijimos antes, tenía por base el número natural. Para los pitagóricos todo era número. A la misma geometría intentaron aritmetizarla, asociando números a las figuras geométricas, los números triangulares los asociaron a los triángulos, los números cuadrados a los cuadrados geométricos, los números pentagonales a los pentágonos, etc. A los triángulos rectángulos les asociaron ternas como (3,4,5), (5,12,13), donde los números representan las longitudes de los lados del triángulo. Aunque el teorema que lleva el nombre de Pitágoras era ya un resultado conocido en Babilonia, un milenio antes de que naciera Pitágoras, posiblemente a él debamos una prueba razonable para el mismo.

---

[99] Pareja-Heredia, D.-**"Temas de Historia de las Matemáticas"**, Biblioteca Universidad del Quindío, Armenia, 1979.

[100] Vivió en el siglo VI a.C., nació en la Isla de Samos y murió en Metaponte. Como se ve, detalles de la vida de Pitagoras no aparecen en esta obra, existiendo la monumental monografía **"Pythagoras"**, de Kornel Zoltan Mehesz, editada por la UNNE en 1974, solo nos resta enviar el lector a ella.

A este filósofo y matemático griego, deberíamos recordarlo, más que por el famoso teorema, por el hecho de ser uno de los primeros pensadores que se preocupó por la búsqueda de un orden en el conocimiento abstracto y, sobre todo, como el filósofo que expuso razones que explicaran, usando el concepto de número, la esencia de todas las cosas.

Pitágoras fue heredero de la cultura científica jónica[101] liderada por Tales y que tuvo otros miembros destacados como Anaximandro, Anaxímenes y Heráclito. Pitágoras se autollamaba "filósofo", o sea, amante de la sabiduría, y en efecto él, entre otros, estuvo tras la búsqueda de patrones abstractos y de un orden cosmológico que diera respuesta a las múltiples preguntas que su curiosidad intelectual le formulaba.

El Teorema de Pitágoras, muestra todas las características del conocimiento matemático: *Abstracción, Precisión, Certeza y Permanencia.* Las Matemáticas de Pitágoras y los antiguos griegos, han servido de modelo para la búsqueda de nuevos conocimientos y para ir cimentando la acumulación de los mismos en forma razonada, con argumentaciones que rebasen, los ejemplos particulares. La cosmología griega va más allá del mundo que nos rodea, del movimiento planetario, de la predicción y análisis de los fenómenos naturales, pues toca también, los patrones de pensamiento y el lenguaje con el que razonamos y pensamos. ¿Qué hizo Pitágoras para que su famoso teorema tuviera la solidez y certeza que lo ha caracterizado? Uno respondería ahora que su certeza está en la demostración, o sea, en la cadena argumentativa, que por medios lógicos desemboca en la conclusión del teorema. El gran mérito de Tales, Pitágoras y demás matemáticos griegos, no es tanto haber descubierto y formulado resultados, sino haber asociado a los mismos, una demostración como argumentación verdadera, lógicamente concluyente. Debemos agregar que este Teorema de Pitágoras se conocía ya en tiempos de Babilonia, como lo muestra una tablilla de arcilla (datada como de alrededor de 1900-1600 a.C.) que en caracteres cuneiformes exhibe triplas pitagóricas que satisfacen la relación $\mathbf{x^2+y^2=z^2}$. Esta tablilla tiene el número 322 en el Catálogo Medelsohn de la colección Plimpton[102] del Museo de la Universidad de Columbia en Nueva York[103].

La aritmética, tuvo su época de oro en tiempos de los pitagóricos. Los pitagóricos construían las tablas de sumar y multiplicar pero sólo enseñaban a manejarlas; no a construirlas. Iniciaron el estudio del sonido, particularmente lo relativo a cuerdas vibrantes, asociando la longitud de la cuerda con su altura sonora. Encontraron que la armonía del sonido, depende de las relaciones numéricas asociadas a las longitudes de las cuerdas vibrantes. En astronomía llegaron a sustentar la esfericidad de la Tierra. El conocimiento que tuvieron en Matemáticas, se puede equiparar al contenido de los libros I, II, III, IV, y VI de los **"Elementos"** de Euclides, más, lo que representa el álgebra geométrica, que es un conjunto muy interesante de propiedades que se desprenden de las figuras geométricas. Estudiaron los números primos, los números perfectos y llegaron hasta asociar a los números cualidades humanas, como decíamos antes.

---

[101] Como hemos dicho, Jonia corresponde a una parte de las costas de Turquía en el Mediterráneo, donde estaban ciudades tan importantes como Mileto, Pérgamo, Éfeso, Samos, Perga y Rodas.

[102] Ver página 9 de la obra de Weil citada arriba y la página 2 de la obra de van der Waerden ya también citada.

[103] Para una opinión distinta a la sostenida por muchos autores respecto a lo que se presenta en dicha tablilla, recomendamos E. Robson-**"Neither Shrlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plympton 322"**, Historia MAthematica 28 (2001), 167-206.

La *logística* (aritmética elemental), siempre fue considerada por los griegos, una disciplina de bajo perfil. Tal vez por eso, no desarrollaron un sistema numérico que facilitara las operaciones y que agilizara el cálculo numérico. En el tiempo de los pitagóricos se usó el sistema jónico de numeración. Era un sistema decimal aditivo donde los números se representaban con las letras del alfabeto, adicionadas de tres símbolos tomados del antiguo alfabeto fenicio. En ese sistema a cada palabra se le asociaba un número. Por ejemplo, a la palabra *logos* (*λογοσ*) se le asoció el número 373, porque en su numeración, las letras griegas correspondientes *λ*=30, *ο*=70, *γ* =3, *ο* =70 y *σ* =200, dan como suma el número 373[104].

Sobre el concepto de *Logos.*

El término "logos" es de aparición frecuente en las lenguas occidentales que derivan del griego o del latín, o están emparentadas con éstas. Ese es el caso del español, el inglés, el alemán y las lenguas eslavas, por ejemplo. Como sufijo, significa estudio, tratado; por ejemplo, en las palabras *metodología, astrología, oftalmología, epistemología*, etc. También lo encontramos como prefijo en *logotipo, logaritmo, lógica, logística*, etc. Al latín se tradujo como *ratio* (razón), con muchas otras acepciones, entre ellas, *rata* (rata de interés, proporción), *cálculo, cuenta, tomar en consideración, disposición, plan, razón* (cociente de números), *razón, juicio, causa, teoría, doctrina,* y muchas otras. Pero de esta cadena se derivan otras muy importantes como por ejemplo, racional, razonamiento, causalidad, etc. El termino λογοσ-(plural, λογοί), en griego significa, *razón, idea, conocimiento.*

Recordemos que Pitágoras era *jonio* y compartía rasgos culturales con Tales de Mileto y Heráclito de Éfeso. Heráclito basaba su filosofía en el cambio y el movimiento y para Pitágoras la esencia de todo estaba en el número. Esa esencia que identifica al ser, lo inmutable, lo que se preserva, en y después del cambio. Popper[105] sugiere que el "logos", al que se refiere Heráclito, podría ser la ley del cambio, la causa del equilibrio de las cosas, la medida, la regla, el cambio sujeto a ley. Pero la medida es un número y la ley se enmarca en un sentido numérico y así partiendo de Heráclito llegamos a Pitágoras en cuanto al origen del logos.

Como dijimos, para los pitagóricos la geometría podía aritmetizarse. Partiendo de la *mónada*, extendiéndose a los números naturales y a sus λογοί, es decir, sus proporciones racionales, del tipo *a/b*, donde *a* y *b* son números naturales, creían posible *logizar* (metrizar), digámoslo así, el conjunto de todos los pares de segmentos. Su programa filosófico, sin embargo, colapsó, cuando descubrieron que, dos segmentos muy familiares en la geometría, como son, el lado y la diagonal del cuadrado, no permitían tal asociación. Aquí aparece uno de los grandes problemas que los pitagóricos no pudieron resolver y que a la postre, daría origen a una nueva clase de números, *los inconmensurables*; aquellos números no expresables como cocientes de números naturales.

El problema de la inconmensurabilidad.

El programa pitagórico dentro de la geometría tenía como objetivo, el asociar a entes geométricos, valores numéricos. Empezando por la escogencia de una unidad de medida, asociaron a cada segmento un número, su longitud. El siguiente paso fue asociar con cada par de segmentos la razón de sus longitudes. Este proceso requería que los segmentos en cuestión fueran *conmensurables*, en el sentido de

[104] Ver el alfabeto griego en el Anexo 2.

[105] Popper, K. R.-**"La sociedad abierta y sus enemigos"**, Ediciones Paidós, Barcelona, 1994, p. 206 y siguientes.

poder encontrar un tercer segmento que los midiera en unidades enteras. El problema de la inconmensurabilidad fue el detonante para que explotara el gran problema de la insuficiencia de los números naturales en la representación de magnitudes geométricas y como consecuencia de ello buscar nuevas alternativas para asociar estas magnitudes a números de otra especie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y (1+√5)/2, conocidos desde tiempos griegos, son ejemplos de números inconmensurables, es decir, cantidades no expresables como cocientes de números enteros. Para entender el por qué de la aparición de los números inconmensurables tenemos que empezar por entender que consideraban los griegos por conmensurabilidad.

Definición. Dos segmentos *AB* y *CD* son conmensurables, si existe un tercer segmento (la unidad 1), tal que:

AB = *m*/1, y, *CD* = *n* /1, (1)

donde *m* y *n* son números naturales. El *logos*, para los pitagóricos o la *ratio* en latín, será el cociente o el número racional carente de magnitud $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.
Observe que la razón *m/n,* es un número desprovisto de cualquier alusión a las magnitudes de los segmentos y así podrá usarse para representar otras relaciones ya sea de área, de volumen o de lo que sea. Esta particularidad de los números era vista por los pitagóricos como la esencia que se preserva después del cambio.
Cuando este es el caso, se dice que los segmentos *AB* y *CD* son conmensurables (o medibles) y están en la razón *m:n*. En lenguaje pitagórico, el *logos* de los dos segmentos es *m/n*. Para nosotros los dos segmentos están asociados al número racional, o a la razón, *m/n*. También, esta razón esta asociada a un proceso aritmético como es la división algorítmica de *m* entre *n* que da origen a un número racional y que uno expresa como una expansión decimal periódica. Por ejemplo 2/3=66/100, ó, 2/3=0.666…. Sin embargo para los pitagóricos y en general para los matemáticas griegos, el proceso de saber si dos segmentos son conmensurables o no, era la aplicación del llamado *Algoritmo de Euclides*, que consiste en dividir la magnitud mayor entre la menor y encontrar un cociente, digamos c_1 y un residuo r_1, la magnitud menor se divide entre este residuo para hallar un cociente c_2, y así continuar hasta obtener un cociente c_n. Si este proceso termina después de un número finito de pasos los segmentos son conmensurables, en otro caso los segmentos se dicen inconmensurables.

Definición. Si para los segmentos AB y CD, no existen enteros positivos m y n, que satisfagan (1), se dice que los segmentos son *inconmensurables* y en este caso el número asociado a ellos, se define (lo definimos ahora) como un *número irracional*.

Cuando se establece la razón de los segmentos, estos pierden su importancia y es el logos, todo lo que queda después de que los segmentos desaparecen. Vista a la luz de las matemáticas actuales, esta razón genera toda una familia de cocientes del tipo *km/kn*, donde *k* es entero, con la propiedad que, cualquier par de elementos de la familia, son iguales entre si. Esto permite generar la clase de equivalencia {m/n}, en el sentido de que los elementos de estas clases satisfacen las ya mencionadas propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

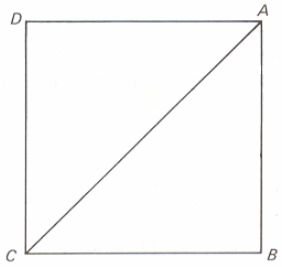
En general, cada clase tiene su representación en el racional *m/n, n*≠0, es decir, el papel que jugaban las rectas que representaban, en el plano proyectivo a las demás rectas, aquí lo juegan los racionales *m/n*, donde *m* y *n*, son enteros, primos relativos[106] y *n*≠0. En la geometría proyectiva las clases de equivalencia de las rectas paralelas generan la recta en el infinito, ahora las clases de equivalencia de los *logos* (*ratios*) da origen al conjunto **Q** de los números racionales.

La igualdad de dos elementos (razones) en una de estas clases, se llama una *proporción*. Por ejemplo, en la clase {1/2} = {… -2/-4, -1/-2, ½, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12, … }, se cumple que 2/4 = 6/12. En general si *m/n* y *j/k* están en la misma clase, se sigue que *m/n* = *j/k* y, consecuentemente, *mk* = *nj.* Al interior de estas clases de equivalencia se puede con sus elementos, elaborar una pequeña algebra. Por ejemplo, de, 2/*x* = 6/12, se sigue que x = 24/6 = 4 y sustituyendo queda, 2/4 = 6/12, lo cual es correcto.

Otra forma de expresar que *a/b y c/d* están en la misma clase, es decir que, los números *a, b, c* y *d* están en la proporción, *a:b* :: *c:d*, (se lee *a* es a *b* como *c* es a *d*). En este caso *a* y *d* se llaman extremos, *b* y *c* se llaman medios. De la definición se sigue que el producto de los medios es igual al producto de los extremos. En particular, si desconocemos un término de la proporción, digamos *x*, en *a:x* :: *c:d,* o en notación moderna, *a/x* = *c/d,* encontramos que *x* =*ad/c*. Cuando se cumple que *a/x* = *x/d*, a *x* se conoce como media proporcional entre *a* y *d*. De aquí se puede despejar *x,* y encontramos que la media proporcional entre *a* y *d* es: $x = \sqrt{ad}$. A este, valor se conoce también como la media geométrica entre *a* y *d*, que contrasta con la media aritmética de *a* y *d* que se define como (*a*+*d*)/2.

Por otro lado, en la clase de equivalencia {*m*/*n*} estará la razón *y/x* siempre que *m*/*n*=*y/x*, o sea *y=f(x)*=(*m*/*n*)*x*. Dando el salto a la geometría analítica, esto no es otra cosa que, la ecuación de la recta que pasa por el origen y con pendiente *m/n*. De aquí se sigue que nuestra clase de equivalencia {*m*/*n*} tiene su representación en los puntos de la recta con coordenadas enteras del tipo (*kn, km*), donde *k* es entero y diferente de cero.

La posición filosófica sostenida por los pitagóricos de que todo, y en particular la geometría, puede llevarse al logos, entendido como cociente de enteros, pierde su validez al descubrir que dos segmentos muy familiares como son la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. En este punto de la historia aparece la primera crisis en los Fundamentos de las Matemáticas al descubrir que los números naturales y sus logos no son suficientes para caracterizar los entes geométricos. Esta crisis induce el nacimiento de una nueva familia de números, los números irracionales que van a complementar a los racionales para formar lo que hoy conocemos como el conjunto de los números reales.



La prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado llegó a nosotros, según Popper[107], en la obra de Aristóteles, los **"Primeros Analíticos"**. La prueba es un ejemplo de una demostración indirecta, o demostración por reducción al absurdo, en la cual se niega la proposición que se quiere probar, y si suponiendo esto, se llega a una contradicción, concluimos que la

[106] Recordemos que dos números *n* y *m*, son primos relativos si ellos no tienen factor común diferente a la unidad, esto se denota simbólicamente como (*m, n*) = 1 y se lee "el máximo común divisor de *m* y *n* es 1".

[107] Popper, K. R.-Op. Cit. p. 249.

hipótesis es falsa o sea que nuestra proposición inicial es verdadera. La prueba establece la imposibilidad de una medida numérica (exacta) común entre las magnitudes consideradas, conclusión negativa de máximo alcance que los griegos sólo podían establecer indirectamente dentro del marco teórico de su discurso, tal es así, que la demostración directa de un resultado paralelo en la moderna teoría de los números (que la raíz cuadrada de un entero o es entera o es irracional) ha debido esperar a Löwenheim. La prueba de Löwenheim, mucho más interesante e informativa que la tradicional prueba indirecta de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, que supone no sólo nuestra teoría lógica de la cuantificación sino el principio de elección, no pasa de ser una curiosidad técnica prácticamente ignorada[108].
Formalicemos nuestra proposición en el siguiente teorema.

Teorema. En el cuadrado ABCD, la diagonal AC y el lado AB son inconmensurables.
Demostración. Sean AB y AC, las longitudes del lado y la diagonal del cuadrado, respectivamente.
Neguemos la conclusión del teorema, o sea, supongamos que la diagonal y el lado del cuadrado son conmensurables. Por definición existen números enteros m y n, tales que AC=m y AB=n. De aquí se sigue que:

$AC/AB= m/n$ (2)

Supongamos que la fracción m/n (el *logos* de los dos segmentos), identifica la clase {m/n}, es decir, la fracción es irreducible. Esto significa que m y n no tienen factor común distinto a la unidad, en particular, si uno es par el otro es impar y viceversa. Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad (2), da:

$AC^2/AB^2 =m^2/n^2$ (3)

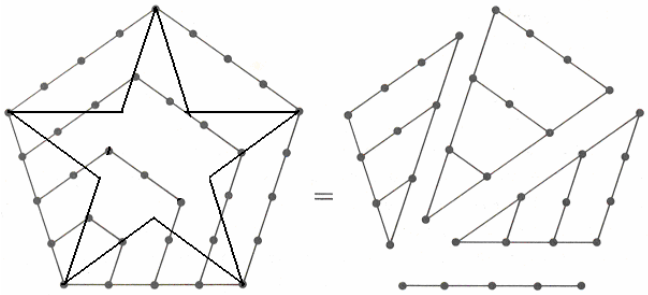
Por el Teorema de Pitágoras, aplicado al cuadrado anterior $AC^2=2AB^2$. Reemplazando en (3), llegamos a

$2=m^2/ n^2$, o sea, $m^2 =2n^2$ (4)

De (4) se sigue que m^2 es par y por consiguiente m es también par. Puesto que m y n tienen distinta paridad, n tiene que ser impar. Por otro lado, al ser m par, es de la forma m = 2k. Reemplazando en (4), obtenemos, $4k^2 = 2n^2$.
Simplificando queda, $n^2=2k^2$. Esto implica que n es par y así m debe ser impar. El razonamiento nos lleva a que m y n son a la vez pares e impares. Esta contradicción demuestra que (2) es falso, o sea que no hay enteros que cumplan esta condición. En este ejemplo, la contradicción se da tomando “m es par”, (o también, tomando “n es par”).
El teorema muestra que, la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. Dicho en otros términos, no hay ningún segmento, que mida en unidades enteras, al lado y a la diagonal de un cuadrado.
Cuando el lado del cuadrado tiene longitud unidad, el teorema muestra que, $\sqrt{2}$ no puede expresarse como cociente de enteros, o sea que $\sqrt{2}$ es irracional.
Antes bien, debemos destacar varios puntos:

[108] Löwenhein, L.-**"On making indirect proofs direct"**, Scripta Mathematica, 28/2, 1946, 101-115 (ed. y revisión inglesa de W. O. Quine).

(1) el objeto de la prueba es geométrico,
(2) nuestro "irracional" no equivale en extensión al *álogon* (sin razón expresable) de Euclides,
(3) en la medida que la matemática griega carece de nuestro concepto de número real, la idea de *álogon* de Euclides también queda lejos de coincidir intensional o conceptualmente con lo que hoy se entiende por "irracional"[109], aún en el siglo XIX los irracionales no poseían una identidad propia como números y cuando se les utilizaba, se recurría a la aproximación infinita tomando como base los números racionales[110], de aquí que es poco probable *"que los matemáticos griegos pensaran en términos de una progresión infinita de números"*[111].



Números pentagonales en sucesión, la estrella de cinco puntas y un número Pentagonal como suma de números triangulares más n (cuando *n* = 5).

Sorprende saber que, los pitagóricos no hubiesen descubierto la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del pentágono regular, sabiendo que la estrella de cinco puntas (el *Pentáculo*, según lo nombran en el *"Código Da Vinci"*[112],), símbolo de su hermandad, resulta de las diagonales del pentágono regular. La razón de estas longitudes es el número irracional $(1 + \sqrt{5})/2$, conocido como la razón áurea y estudiado por Euclides en los **"Elementos"**. Este número está presente en varias partes de de las matemáticas. En teoría de números aparece en relación con la Sucesión de Fibonacci, para la cual tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = (1+\sqrt{5})/2.$$

La extensión del concepto de *proporción* que incluye a los números irracionales, la hicieron, el pitagórico Arquitas de Tarento, colega de Platón, y con gran profundidad, el discípulo de este último, Eudoxo, cuyo trabajo quedó incluido en el libro V de los **"Elementos"**. Eudoxo fue un maestro en el arte de lo que hoy conocemos como el método dialéctico, o del uso de la razón para investigar no sólo las matemáticas y la naturaleza del hombre, si no también para explicar su entendimiento y la búsqueda de la verdad. El método de prueba por reducción al absurdo, iniciado primero por la escuela de los sofistas, tuvo en los desarrollados de Eudoxio, Euclides y Arquímedes, una herramienta fundamental en la demostración de teoremas. Otra muestra de este método la da Euclides en los **"Elementos"**, cuando prueba el siguiente teorema:

Teorema (*Infinitud de los primos*). Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos[113].

---

[109] Vega, L. -**"En torno a la idea tradicional de demostración"**, Laguna, 1995, 3: 28-56.
[110] Recalde, L.C.-**"El papel del infinito en el surgimiento de la topología de conjuntos"**, 1994, Cali, UniValle, Tesis de Maestría.
[111] Rotman, B.-**"Towards a semiotics of mathematics"**, Semiotica, 1988, 72-1/2, 1-35.
[112] Brown, D.-**"El Código da Vinci"**, Ediciones Urano S. A. Barcelona. 2004.
[113] Se aprecia *el horror al infinito* que tenian los griegos al plantear este teorema, Proposición 20, Libro IX, con el infinito potencial y no como hace Hilbert a principios del siglo XX cuando dice *"El*

Demostración. Sea {2, 3, 5 , …, *p*}, la cantidad propuesta de números primos y sea *p* el mayor de todos los primos propuestos.
Consideremos el número $q = (2\times3\times5\times\ldots\times p) + 1$.
Es claro que el máximo común divisor de *p* y *q* es 1, porque *p* es primo y *q* no se deja dividir por ninguno de los primos 2, 3, 5,…, *p*. En nomenclatura moderna, uno dice que p y *q* son coprimos. Por lo tanto *q* es primo, o tiene un factor primo mayor que *p*. En ambos casos hay un primo mayor que *p.* Esta es una contradicción porque supusimos que *p* era el mayor primo. En consecuencia hay un primo mayor que los dados.
Esta demostración moderna es sustancialmente distinta a la dada por Euclides, primero porque es geométrica y segundo, porque Euclides trabaja con el menor de los números "medidos" por dichos primos.
La definición general de *proporción* originada en los trabajos de Eudoxo, la presenta Euclides en el libro V en los siguientes términos[114]:

Definición. *Se dice que varias magnitudes están en la misma razón, la primera es a la segunda, la tercera es a la cuarta, cuando, un equimúltiplo, cualquiera que se tome, de la primera o de la tercera, y cualquier equimúltiplo de la segunda o de la cuarta, los primeros equimúltiplos en su orden exceden, igualan o son menores que los equimúltiplos de los segundos, respectivamente.*

En notación moderna la definición quedaría así *a:b*::*c:d*, significa que para *m* y *n* enteros positivos:

na > *mb* implica que *nc* > *md*
na = *mb* implica que *nc* = *md*
na < *mb* implica que *nc* < *md*

El camino iniciado por Eudoxo sólo vino a continuarse en el siglo XIX con los trabajos del matemático alemán, Richard Dedekind (1831–1916), quien con las *Cortaduras* que llevan su nombre, dio carta de ciudadanía en las Matemáticas, a los números irracionales.

5. Zenón de Elea (490 a.C.-430 a.C.)
Quizás el mayor conocimiento del Método Atomístico que se tiene es debido a las críticas que se le señalaron. Entre las más importantes y conocidas están las de Zenón de Elea, quien elaboró un conjunto de paradojas que ponen de manifiesto las incongruencias que surgen de considerar el espacio como suma de puntos. Digamos por ejemplo en la paradoja conocida como la dicotomía. En ella, Zenón advierte de la imposibilidad de realizar el movimiento desde un punto A hasta otro B a través de un segmento. Para ello se basa en que el camino puede ser dividido hasta el infinito primero por la mitad del segmento, después por la mitad de lo que queda y así sucesivamente, entonces sería necesario superar un conjunto infinito de tramos del camino en un intervalo de tiempo finito. Con las paradojas de Zenón se evidenciaba que si se buscaban demostraciones exactas y soluciones lógicas a los problemas de estratificación era imposible utilizar el infinito mediante la concepción atomística. Para lograr este objetivo es necesario considerar elementos de paso al límite al menos implícitamente y esta fue tarea primordial en el siguiente período de desarrollo de la matemática griega.

---

conjunto de los números primos es infinito", donde el infinito que se maneja es el actual.
[114] Ver Van der Waerden-Op. Cit. p. 90.

Zenón es el primero en reducir al absurdo, como lo señaló Paul Tennery, las ideas de Pitágoras, valiéndose de algunos argumentos que se han hecho célebres.
Zenón observa, en un primer argumento que, para ir de A a B es necesario pasar por el medio C del segmento AB, para ir de C a B por el medio D del segmento CB y así sucesivamente. No llegamos jamás a B, puesto que hay que pasar por una serie de medios que no tiene fin, puesto que todo segmento tiene un medio y todo punto una anchura, posiblemente muy pequeña, pero existente en todo caso, es decir, no nula, según la teoría de mónadas.
El segundo argumento de Zenón estudia la persecución de Aquiles que corre muy rápido detrás de una tortuga, que tiene sobre él una ventaja AB. Mientras que Aquiles liquida esa ventaja AB corriendo de A a B, la tortuga ha llegado a C. Mientras que Aquiles liquida su nuevo retardo BC, la tortuga llega a D y así sucesivamente: por pequeña que sea la distancia que separa Aquiles de la tortuga, es al menos igual, en la teoría de las mónadas, a la anchura de un punto. Mientras que Aquiles recorre la distancia la tortuga se ha desplazado, se decir, ha ido de un punto a otro. Está, en consecuencia, separada aún de Aquiles por lo menos por la anchura de un punto. Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga.
Pero nosotros sabemos por experiencia que podemos ir de A a B.
Sabemos que Aquiles atrapará a la tortuga.
La teoría de las mónadas está en contradicción con los datos inmediatos de la realidad.
Ya hemos dicho más arriba, que con Tales de Mileto, se empieza a considerar la matemática como un cuerpo de conocimientos deducibles a partir de ciertas suposiciones básicas por medio de la lógica corriente (el buen sentido), que según Descartes *"es la cosa mejor repartida del mundo, puesto que cada uno piensa estar tan bien provisto de el, que incluso aquellos que no son más difíciles de contentar en otra cosa cualquiera no acostumbran a desear más del que tienen"*[115]. Sin embargo, como acabamos de apuntar, al comienzo mismo de este período, en el siglo VI a.C., aparece la primera gran crisis en el desarrollo de la disciplina, al descubrir la existencia de los números inconmensurables, es decir, no expresables por medio de una fórmula *finita* en la que entran ciertos números enteros. La armonía de los números enteros y de las relaciones entre ellos, en el estudio de la cual tanto avanzaron los pitagóricos y que parecía regir todo el Universo, se estrelló contra la diagonal del cuadrado de lado unitario, que resultó inconmensurable, como ellos mismos demostraron.

Las Paradojas de Zenón. Precisiones[116].
Antes de entrar en detalle en la descripción y estudio de las Paradojas de Zenón, analizemos algunas cuestiones, que van a facilitar la comprensión de ciertos aspectos, de la lógica involucrada en la formulación de aporías, paradojas y antinomias.
Como vimos antes, la argumentación lógica unida a la argumentación matemática se usa para demostrar teoremas o para sustentar resultados técnicos de física o de otras áreas del conocimiento. Sin embargo, los antiguos griegos llevaron la argumentación lógico-matemática mucho más allá de lo ya mencionado, como por

[115] **"Discurso del Método"**, Sarpe, Madrid, 1984
[116] En este punto, en lo relacionado con diferentes tipos de paradojas, recomendamos Devlin, Popper y la página Web de la Universidad de Stanford: http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/ y J. E. Nápoles-**"Paradojas y Fundamentos de la Matemática"**, Revista Virtual Ciencia Abierta, Vol. 27, 3 (2005) disponible en http://cabierta.uchile.cl/revista/27/articulos/pdf/paper3.pdf

ejemplo, para investigar la naturaleza de la existencia de las cosas, incluyendo la naturaleza humana. El método de prueba basado puramente en la razón, o como dijimos, en argumentación lógica y matemática, se conoció como *método dialéctico* o *técnica dialéctica*: en cierto sentido, opuesto al método observacional, experimental o de medición para estudiar y analizar un fenómeno. Esta forma de razonar fue una innovación que a la larga se mantuvo y aún hoy la tenemos como herramienta efectiva en los procesos de demostración. El método dialéctico está inmerso en las obras de Platón y Aristóteles como ya lo destacamos en la prueba de la existencia de los inconmensurables, al probar por contradicción que la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables.

Debemos resaltar que las Paradojas, no aparecen como producto de un loco que busca descrestar a sus contemporáneos, sino más bien, como una reacción de Zenón, a los ataques de que fuera objeto su maestro Parménides, quien, en su cosmología rechazaba la pluralidad (la multiplicidad, el número) y el cambio. En este enfoque filosófico, el ser era indivisible e inmutable y toda apariencia de lo contrario, era pura ilusión. Como afirma Popper, *"para Parménides el mundo real era uno y siempre permanece en el mismo lugar, nunca se mueve. El mundo es uno, un todo indiviso, sin partes; homogéneo e inmóvil. El movimiento es imposible en un mundo semejante. En verdad no hay cambio alguno. El mundo del cambio es una ilusión"*[117]. Las críticas a la posición de Parménides, obviamente llegaron de todas partes por cuanto se consideró absurdo y ridículo concebir una realidad congelada como en una toma fílmica, sin la posibilidad de movimiento o de cambio. Fue entonces cuando Zenón apareció en escena para probar a los detractores de su maestro que a resultados igualmente absurdos se podía llegar aceptando tesis contrarias a las sostenidas por Parménides. Sostenía Zenón que el aceptar la pluralidad conducía por razonamientos lógicos legítimos, a la conclusión de que todo era infinitamente grande o infinitamente pequeño. Y que aceptar el movimiento como infinitamente divisible, nos lleva a la conclusión de que nada se mueve.

Si los razonamientos lógicos son perfectamente válidos y conducen a una contradicción o a un absurdo la conclusión de todo el proceso es que la hipótesis en la cual se inició la argumentación debe ser necesariamente falsa. Es importante no perder de vista los objetivos que Zenón tenía en mente cuando expone sus paradojas, como dice Apostol en su libro de cálculo[118], *"a Zenón hay que verlo no como a un loco si no como a un alumno de postgrado, excepcionalmente brillante"*. No es tan importante en sí la paradoja, como el objetivo contra el cual va dirigida. Usualmente hablamos de la paradoja pero olvidamos el propósito para el que fue formulada.

Para abordar a Zenón en sus paradojas empecemos por las menos conocidas, las que se refieren a la pluralidad ontológica, en el sentido de la existencia de muchos seres en contraposición de la existencia de uno y solo uno, como sostenía Parménides *"en forma abstracta al Ser como lo ingénito, eterno, inmutable, uno y continuo"*. Estas paradojas de la pluralidad intentan probar cómo, usando la pluralidad por hipótesis, y siguiendo una argumentación lógica, se desemboca en absurdas conclusiones.

Argumentación por densidad.

De acuerdo al comentador Simplicio, Zenón propone la siguiente argumentación para atacar la multiplicidad. Si hay muchas cosas, esas muchas, deben ser tantas,

[117] Popper, K. R. *Opus cit.* Pág. 185
[118] Apostol, T. M.-**"Calculus"**, Vol. I, Editorial Reverte, 1988.

que no sean ni más ni menos que las que verdaderamente son. Pero si hay tantas como se dicen ser, esas tantas, deben *estar limitadas*. Pero si están limitadas habrá otras cosas entre ellas que las separen; y entre éstas, otras, y otras y así *ad infinitum*. Por lo cual las cosas que son, deben *ser ilimitadas*.
La argumentación de Zenón intenta probar que no puede existir la pluralidad so pena de incurrir en una contradicción. Con esto busca apoyar la tesis de su maestro sobre la unicidad del ser. Recordemos que la *ontología* es el estudio del ser como objeto filosófico. Este argumento de densidad lo encontramos en la sección anterior cuando mencionábamos los números racionales y las Cortaduras de Dedekind. En una cortadura se presentan apiñamientos (clusters) de números racionales, por ejemplo, si damos dos racionales, digamos de menor a mayor, *a/b* y *c/d,* estará entre ellos el número (*a/b* + *c/d*)/2 y entre estos tres, habrá dos más y entre estos cinco, cuatro más y así hasta el infinito. Con esto estamos mostrando que el conjunto **Q** es *denso* en **R**. Esta característica de los racionales dentro de los reales es muy importante en el Análisis Matemático, por cuanto permite, aproximar todo número real *x,* tanto como se quiera, con números racionales. Los puntos de la recta también son densos en el sentido de que entre dos puntos siempre se puede encontrar un tercero. Sin embargo, los puntos de la recta no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números racionales, como lo mostramos al probar que $\sqrt{2}$ no es racional. Esto significa que la recta real tiene "más" puntos que aquellos que los racionales puedan cubrir. Por lo tanto decimos que los reales tienen una *potencia* o un *cardinal* mayor que los números racionales. La clasificación de las potencias de los conjuntos es obra de Georg Cantor, generando así un nuevo enfoque para el estudio del infinito.

La Paradoja de la Dicotomía.
Zenón argüía en los siguientes términos, a fin de "probar" que un corredor que parte de un punto A no puede llegar a la meta en el punto B, porque para recorrer la distancia AB, primero tiene que recorrer la mitad de esa distancia y luego la mitad de la mitad que le queda faltando y así indefinidamente. La argumentación terminaba sosteniendo que infinitas distancias no podían recorrerse en un tiempo finito. Para verlo mejor cuantitativamente, supongamos que la distancia AB es de un kilómetro. Entonces el corredor debe correr primero medio kilómetro, luego la mitad del medio kilómetro que le falta para llegar a la meta, es decir, un cuarto de kilómetro más, es decir, llegar al punto C, al punto D, luego deberá recorrer un octavo y así sucesivamente, al infinito. Según Zenón nunca se llegaría a la meta, porque infinitos tramos por recorrer no podría hacerse en un tiempo finito y así el movimiento, según el argumento de Zenón, era imposible.
Lo más interesante de la argumentación está, en asumir el hecho intuitivo de que, el movimiento es susceptible de dividirse en tramos, al igual que el tiempo, en instantes. Esta pluralidad era el objetivo de la polémica en la filosofía de Parménides. Asumir la pluralidad, entonces llevaba a la negación del movimiento. Hay que recordar que las matemáticas griegas no disponían de los recursos del cálculo infinitesimal, ni de la noción de series convergentes, que es lo que permite explicar conceptos como movimiento y sumas infinitas de cantidades. Para nosotros la paradoja de la dicotomía pierde su carácter paradojal, porque, la conclusión de que no se puede llegar del punto A al punto B, en un tiempo finito, no es válida, como lo mostraremos en las siguientes líneas.
Supongamos que la velocidad del corredor es constante y que la distancia entre el punto de partida y la meta es un kilómetro. Queremos probar que la suma de los

infinitos tramos recorridos es efectivamente un kilómetro. Se trata de sumar ½ + ¼ +…. Este es un ejemplo de una serie geométrica de razón ½. En general todos los sumandos son de la forma $(½)^n$, donde n = 1, 2, 3,… La suma de todos los términos se representa simbólicamente por la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, cuya suma es $\frac{1}{1-r}$.

Que es lo que se espera para el recorrido, suponiendo como dijimos que la distancia entre los puntos es de 1 Kilómetro.

Si la velocidad no es constante, el problema se va a complicar. Por ejemplo, pongamos por caso, la situación que propone Apostol[119]. Asumiendo que el primer tramo se recorre, digamos en media hora, el segundo en un tercio de hora, el tercer tramo en un quinto y así en adelante, en fracciones de hora, donde el denominador es el primo siguiente de aquel, de la fracción anterior, vamos a encontrar para la suma de los tiempos del recorrido, algo como $\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p}$, donde p recorre los primos 2, 3, 5, … . En el tiempo de Euler se demostró que esta serie diverge. En este caso, nunca el corredor llegaría a la meta, porque el valor de la suma es infinito.

Euler probó esta curiosa igualdad $\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p} = \prod_{p}\frac{1}{(1-1/p)}$.

Donde p recorre todos los primos, 2, 3, 5, 7,…. El símbolo de la derecha representa un producto infinito. Decimos curiosa, porque si ambas expresiones son infinitas, ¿en que sentido son iguales? Aquí el sentido es que, a medida que se consideran más y más primos en el proceso, los resultados en ambos lados de la expresión son cada vez más cercanos, aunque serán, desde luego, cada vez más y más grandes.

6. Los números irracionales y las Paradojas de Zenón.

Las Paradojas de Zenón demostraron convincentemente que si se buscan demostraciones exactas y soluciones lógicamente exhaustivas a los problemas, es imposible utilizar el infinito apoyándose en las consideraciones atomísticas ingenuas. Para semejantes objetivos es necesario elaborar y valerse de métodos que contienen, junto a las variedades de los criterios sobre los infinitésimos, elementos del paso al límite.

A pesar que en el punto anterior tratamos esto, creemos que debemos profundizar en algunos aspectos, teniendo en mente siempre las palabras de Russell[120] *"En este mundo caprichoso nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las más notables víctimas de la falta de juicio de la posteridad es Zenón, el eleático. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inmensamente sutiles y profundos, la tosquedad de filósofos posteriores lo declaró a él un mero prestidigitador ingenioso y todos y cada uno de sus argumentos sofismas. Después de dos mil años de continuas refutaciones, esos sofismas fueron restablecidos y constituyeron la base de un renacimiento matemático"*.

Trataremos con la que es, quizás, la más conocida, y espectacular, de sus aporías, la de Aquiles y la tortuga, propuesta por Zenón hace ya más de 24 siglos: si el veloz Aquiles concede alguna ventaja a la lenta tortuga, jamás podrá darle alcance por rápido que corra, el Pélida puede acercarse al quelonio cada vez más, pero sin alcanzarla.

---

[119] Apostol, T. M.-**"Calculus"**, II Edition, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967, p. 374 y ss.

[120] B. Russell-**"The Principles of Mathematics"**, Second Edition, George Allen & Unwin Ltd, London, 1937

Puesto que en la "vida real" no se necesita ser el alígero guerrero tesalio para alcanzar cualquier tortuga, el razonamiento de Zenón era demasiado chocante para ser aceptado. Aristóteles, por ejemplo, impugnaba las paradojas de Zenón afirmando que si bien el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles en potencia, no lo son en acto; que la esencia del movimiento es precisamente "franquear el límite", ser la identidad entre un lugar y otro lugar, así como el devenir tiene por esencia ser la identidad entre el ser y el no-ser, entre lo mismo y lo otro[121]. "Refutaciones" de este tipo seguían siendo consideradas válidas hasta el siglo XIX por filósofos como Hegel (1770-1831).

La verdadera refutación matemática de las paradojas del eleático, sólo es posible desde 1872, año en el cual Dedekind y Cantor publican, independientemente, sus construcciones de los números reales a partir de los racionales (en esencia, de los naturales). Esa construcción es la culminación de la llamada aritmetización del análisis (iniciada por Gauss y continuada por Bolzano, Cauchy y Weierstrass), que desterró de las matemáticas los misteriosos infinitesimales, a los que dedicaron muchas elucubraciones matemáticos aficionados y filósofos[122]. Podemos recalcar, que estas magnitudes infinitamente pequeñas volvieron a nacer en 1961 al inventar Abraham Robinson el Análisis no Estándar[123]. Pero estos infinitesimales de Robinson son objetos matemáticos perfectamente determinados, que no admiten especulaciones de diletantes.

Hay que decir que en estudios muy profundos y detallados como el de Russell en **"The Principles …"**, que ocupa buena parte de los capítulos XLII y XLIII, pero está más que todo dedicado a explicar la causa de la paradoja; pero Russell no se toma el trabajo de poner a Aquiles a alcanzar a la tortuga, suponiendo que el lector de su obra no debe tener ninguna dificultad en hacerlo por su cuenta. Russell cita dos artículos en los cuales, es posible, aunque no muy probable, que los autores se hayan tomado la molestia de hacer cálculos[124]. Para comprobarlo habría que efectuar una visita a la London Library, así que mientras los lectores curiosos esperan una oportunidad para hacerlo, les presentamos la elegante solución dada por un colega colombiano[125].

Supondremos, para evitar problemas de aceleración, que la carrera se realiza con partida lanzada, de modo que el cronometraje se iniciará en el momento en que los dos corredores hayan alcanzado velocidad constante y la tortuga se encuentre L unidades de longitud delante del Pélida en una pista recta con dos carriles paralelos. Sea t_0 =0 el instante inicial, estando Aquiles en el punto x_0=0 y la tortuga en x_0=L; t_1 el momento en que el héroe pasa por el punto x_1 y el quelonio por el punto x_2, etc. El instante t_n estará dado para Aquiles por la fórmula:

$$t_n = x_n/v, \qquad (5)$$

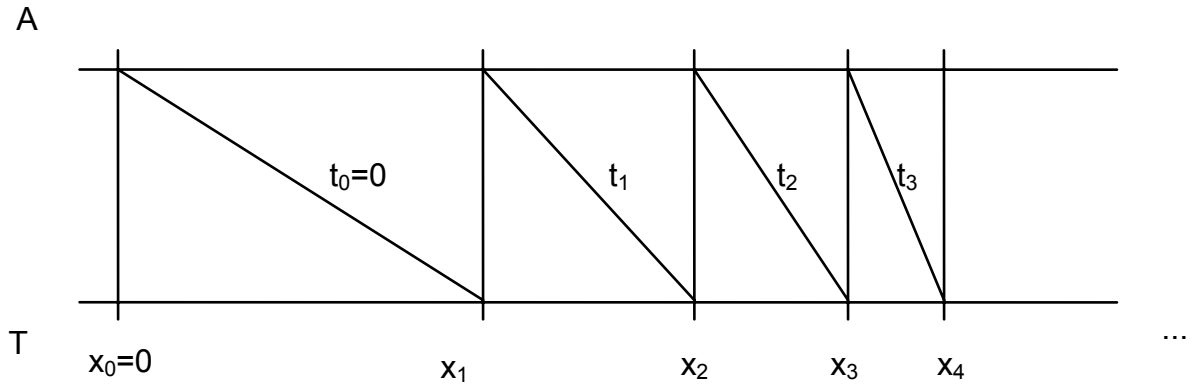
y para la tortuga por:

$$t_n = (x_{n+1} - x_1)av; \qquad (6)$$

[121] Aristóteles-**"Metafísica"**, Sarpe, Madrid, 1985.
[122] Ver por ejemplo K. Marx-**"Manuscritos Matemáticos"**, Edición bilingüe (alemán-ruso), Naúka, Moscú, 1968.
[123] Ver **"Non-standard analysis"**, Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A, v. 64, No.4 (1961), 432-440.
[124] N. Noel-**"Le mouvement et les arguments de Zénon d'Elée"**, Revue de Métaphysique et de Morale, Vol.I, 107-125 y C. D. Broad-**"Note on Achilles and the Tortoise"**, Mind, N.S., Vol.XXII, 318-319.
[125] B. Mayorga-**"Sopa de Tortuga"**, Rev. Integración, UIS-Colombia, Vol.4, No.1, 1986, 23-34.

igualando (5) y (6) obtenemos:

$x_{n+1} = L + ax_n$. (7)



Evidentemente las sucesiones $\{t_n\}$ y $\{x_n\}$ son estrictamente crecientes. Si podemos demostrar su acotamiento superior, tendremos su convergencia; es claro según (5), que el acotamiento de una es equivalente al de la otra. Luego si logramos demostrar que $\{x_n\}$ converge, eso significará que Aquiles alcanza la tortuga en el punto $x'=\text{Lim}x_n<\infty$ y en el instante $t'=\text{Lim}\ t_n<\infty$.
Señalaremos los pasos más importantes, dejando al lector el resto de la tarea.
Lema 1. En cualquier momento t_k la ventaja que la tortuga conserva sobre Aquiles está dada por la fórmula:

$x_{k+1} - x_k = a^k L$. (8)

Lema 2. La sucesión $\{x_n\}$ es fundamental (o de Cauchy).
Como se sabe, los espacios métricos en los cuales toda sucesión fundamental converge a un punto del mismo espacio se denominan completos. Uno de ellos es el conjunto de los números reales. La completitud de este se demuestra con base, otra vez, en las construcciones de Dedekind y Cantor de 1872. Con Cauchy hemos podido llegar hasta el Lema 2, pero sólo después de Dedekind y Cantor podemos afirmar que $\{x_n\}$ converge. Más exactamente, tenemos el siguiente:
Teorema. Aquiles alcanza la tortuga en el instante $t=L/(1-a)v$ y el lugar dado por $x=L/(1-a)$.

Estos valores están dados por un razonamiento elemental, se obtienen además, tomando límites en (7) y en (5).

7. Primeras teorías matemáticas en la Grecia Antigua.
Es casi seguro que la primera irracionalidad descubierta fue $\sqrt{2}$. Puede suponerse que el punto de partida de este descubrimiento fueron los intentos de encontrar una medida común con ayuda del algoritmo de sustracción sucesiva, Algoritmo de Euclides, o es posible que jugara cierto papel el problema de la teoría matemática de la música, división de las octavas que conducían a la resolución de proporciones 1:n=n:2. En fin, el interés de la Escuela Pitagórica por los problemas de la teoría de los números, al parecer, debe haber jugado un papel importante.

Los griegos antiguos conocieron muy temprano la rigurosa demostración lógica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por la vía de reducción al absurdo, como mostramos antes en la página 51, en ocasiones se presenta una variante de esa demostración suponiendo como antes que sea $\sqrt{2}=p/q$, donde p y q son primos entre sí, y n es el producto de sólo las primeras potencias de los factores. De donde $p^2=nq^2$. Si t es un divisor primo de n, entonces p^2 (y por lo tanto p) se divide entre t. Por consiguiente p^2 se divide entre t^2. Pero en n está contenida sólo la primera potencia de t. Por lo tanto, q^2 (al igual que q) se divide por t. Pero este resultado formalmente contradice la suposición de que p y q son primos entre sí.

Para la investigación de las recién descubiertas irracionalidades cuadráticas inmediatamente resultó necesario elaborar la teoría de la divisibilidad.

Tras la irracionalidad de $\sqrt{2}$ fueron descubiertas muchas otras irracionalidades. Así, Arquitas demostró la irracionalidad de los números de la forma $\sqrt{n(n+1)}$. Teodoro de Cirene estableció la irracionalidad de la raíz cuadrada de los números 3, 5, 6, ..., 17. Teeteto dio una de las primeras clasificaciones de las irracionalidades.

Con el surgimiento de la irracionalidad, en la aún no fortalecida matemática griega, aparecieron serias dificultades tanto en el plano teórico-numérico, como en el plano geométrico. Fue realmente amenazada toda la teoría de la geometría métrica y la teoría de la semejanza. La necesidad de comprensión científica de la esencia del fenómeno descubierto y su combinación con las ideas formadas provocó el desarrollo posterior de las teorías matemáticas.

Esta etapa siguiente se distingue por los esfuerzos de crear, para las necesidades de la investigación científica, una teoría matemática general adecuada tanto para los números racionales como para las magnitudes irracionales. En cuanto se descubrieron los irracionales resultó que la colección de las magnitudes geométricas (por ejemplo, los segmentos) era más completa que el conjunto de los números racionales, entonces resultó oportuno construir un cálculo más general en forma geométrica. Este cálculo fue creado. Recibió el nombre de álgebra geométrica.

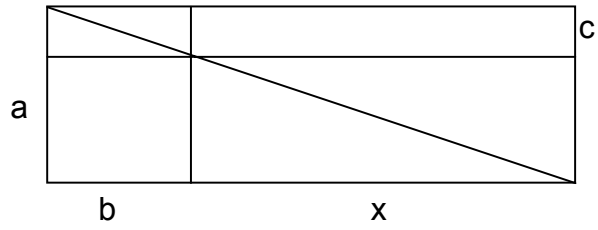


Figura 1

Los elementos primarios del álgebra geométrica resultaron los segmentos de recta. Con ellos fueron definidas todas las operaciones de cálculo. La suma se interpretaba como la adición de segmentos, la diferencia como la eliminación de una parte del segmento igual al segmento sustraendo. La multiplicación de segmentos condujo a la construcción de una representación bidimensional y el producto de los segmentos a y b se consideraba un rectángulo con lados a y b. El producto de tres segmentos daba un paralelepípedo, y el producto de un número mayor de factores en el álgebra geométrica no podía considerarse. La división resultaba posible solo bajo la condición de que la dimensión del dividendo fuera mayor que la dimensión del divisor. Ella se interpretaba como equivalente al problema de anexión de áreas:

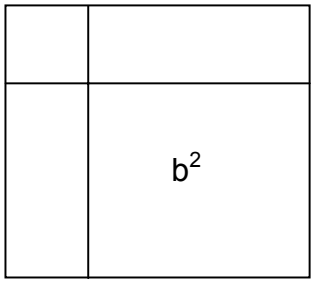


Figura 2

Anexar al segmento c un rectángulo equivalente al dado (ab). La resolución del problema como se ve en la Figura 1 y consiste en la adjunción uno a otro de los rectángulos ab y be en la construcción

de un nuevo rectángulo, la diagonal del cual es la diagonal del rectángulo be prolongada hasta la intersección con la prolongación del lado b. Entonces los rectángulos ab=cx resultan equivalentes y el problema está resuelto.
El método de anexión de áreas, descrito aquí, permitió resolver problemas que conducían a ecuaciones lineales y llevaba el nombre de método parabólico (*παραβολη´* significa en griego anexión de áreas).
En el álgebra geométrica también se incluía el conjunto de proposiciones geométricas que interpretaban las identidades algebraicas. Por ejemplo, la Figura 2 da una interpretación geométrica de la identidad $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
El método de anexión de áreas fue extendido también al caso en que la resolución del problema conduce a una ecuación cuadrática. Ejemplos de tales problemas lo constituyen la determinación del lado de los polígonos regulares inscritos: la llamada "división áurea" del segmento, esto es, la división del segmento a en dos partes: x y a-x que satisfacen la relación $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-c}$; la expresión de la arista de un poliedro regular a través del diámetro de la esfera circunscrita, etc. La solución de esta clase de problemas se realizaba con ayuda de un método canónico uniforme, que tiene las siguientes particularidades en dependencia de la forma de la ecuación cuadrática.

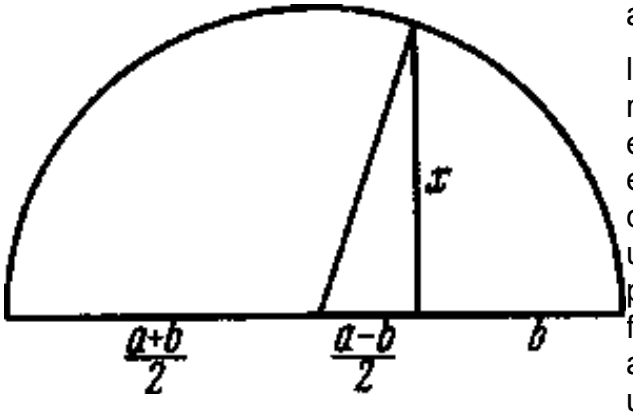


Figura 3

a) Construir un cuadrado equivalente a un rectángulo dado ab. La esencia del método consiste en la sustitución del rectángulo ab por la diferencia de los cuadrados $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ y la aplicación siguiente del Teorema de Pitágoras. Así $a^2=\left(\frac{a-b}{x}\right)^2+x$, y como $a=\frac{a+b}{2}$, se tendrá en definitiva que $x=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.
La construcción del segmento buscado x (lado del cuadrado) se ve claramente en la Figura 3. Esta construcción también fue tomada como base de la construcción de la media geométrica a:x = x:b.
b) Agregar a un segmento dado a un rectángulo de área dada b^2, de modo que la parte del área que falta para el rectángulo completo, sea un cuadrado. Por la condición del problema $b^2=(a-x)x$, análogamente al caso anterior $(a-x)x = (a/2)^2 - (a/2-x)^2$.
Con ayuda del Teorema de Pitágoras se halla el segmento a/2 - x y después x. Este caso de anexión de áreas se denomina elíptico (del griego *ελλειφις*, defecto).
c) Agregar a un segmento dado a un rectángulo de área dada b^2, de tal manera que el exceso sobre el rectángulo sea un cuadrado x^2, luego $b^2=(a+x)x$; y como $(a + x)x = (a/2+x)^2 – (a/2)^2$; se tendrá que $b^2=(a/2+x)^2 – (a/2)^2$ de donde con ayuda del Teorema de Pitágoras se encuentra mediante la construcción del segmento a/2 + x y después x. Este tipo de anexión de áreas se denomina hiperbólico (del griego *νπερβολη* exceso, sobrante).

Es evidente que semejante método daba sólo una raíz positiva de la ecuación cuadrática. Los matemáticos antiguos comprendían la necesidad de formular las condiciones del problema del álgebra geométrica de manera que ellos a ciencia cierta tuvieran una solución positiva. Por eso en los casos necesarios ellos imponían limitaciones (diorismos, *διορισμος*) a las condiciones del problema.
Esta circunstancia determinaba la limitación del campo de aplicación de los métodos del álgebra geométrica. Aún más, se limitaban las posibilidades del álgebra geométrica debido a que sus objetos eran figuras de dimensión no mayor que dos. Los medios de construcción eran sólo la regla y el compás. Era posible imaginarse en los límites del álgebra geométrica operaciones con figuras tridimensionales. Esto, sin embargo no se hacía, ya que incluso un problema al parecer tan sencillo como la construcción de un cubo, que tiene un volumen el doble que el dado, no admitía solución con ayuda de una regla y un compás. Los problemas que conducían a ecuaciones de grado superior al tercero, como ha sido indicado, eran en el álgebra geométrica de los antiguos simplemente imposibles.
La insuficiencia del álgebra geométrica como teoría matemática general fue especialmente subrayada por la distinción de una clase de problemas que no admitían solución con regla y compás. Entre estos problemas los más conocidos son los llamados Problemas Clásicos de la Matemática Griega: el problema de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo que aunque serán estudiados en detalle más adelante, se presentarán algunas cuestiones importantes para el desarrollo de las propias Matemáticas Griegas.
El problema de la duplicación del cubo, esto es, construir un cubo con arista desconocida x, pero que tiene un volumen el doble que el dado, se reduce a la resolución de la ecuación cúbica $x^3=2a^3$. Un problema equivalente lo constituye el problema de la construcción del segmento $\sqrt{2}$. El problema era enormemente popular, sobre lo que cuenta la leyenda llegada hasta nosotros acerca de la exigencia del oráculo en la isla de Délos de aumentar en el doble el volumen del altar cúbico situado ante él. Los numerosos esfuerzos de resolver este problema con ayuda de cálculos en el campo de los números racionales o con los medios del álgebra geométrica, resultaron, desde luego, infructuosos.
Ya dijimos que el primer éxito en la resolución de este problema lo alcanzó Hipócrates de Quíos. El lo redujo (más exactamente hablando, es el problema algo más general de la transformación de un paralelepípedo en un cubo) al problema de la búsqueda de dos medias proporcionales. La arista del cubo buscado se determina, según Hipócrates, por la proporción a:x = x:y = y:b. Es posible que el problema de la duplicación del cubo se concibiera como el análogo espacial del problema de la cuadratura de figuras planas. En tal caso la formulación del problema de Hipócrates es una generalización del problema plano correspondiente sobre la inserción de una media proporcional a:x = x:b.
Para la resolución del problema de Hipócrates sobre la inserción de dos medias proporcionales fueron elaborados nuevos métodos. En su mayoría se reducían a la investigación de los lugares geométricos $x^2 = ay$, $xy = ab$, $y^2 = bx$. Las dos medias proporcionales entre a y b se determinaban como las coordenadas del punto de intersección de dos de estos lugares geométricos. Esto último recibió a su vez una interpretación estereométrica como secciones de conos de revolución.
La historia del problema de la duplicación del cubo constituye uno de los ejemplos de como transcurre el enriquecimiento de los métodos matemáticos. La influencia de este problema fue una de las causas de que las secciones cónicas entraran en las Matemáticas, y de que se convirtieran en las matemáticas griegas antiguas en

medios de resolución de tales problemas, los cuales no pueden ser resueltos con ayuda de la regla y el compás. Por otra parte, para la resolución de este problema también se aplicaron otros métodos. Eratóstenes, por ejemplo, construyó un instrumento (mezolabio), cómodo para duplicar aproximadamente el cubo. Sin embargo, ninguno de los métodos influyó tan fuertemente en el desarrollo de las matemáticas antiguas como el método de las secciones cónicas.

El destino ulterior del problema considerado está relacionado con otro problema ¿se puede o no resolver en principio este problema por medio de construcciones con regla y compás? Con el desarrollo del álgebra la formulación del problema tomó una forma algebraica ¿Puede o no la operación de extracción de la raíz cúbica de un número racional ser reducida a un número finito de extracciones de raíces cuadradas? La duda sobre la posibilidad de tal solución del problema la expresó por vez primera en el año 1637 Descartes. Pero sólo después de 200 años de éste, el problema de la duplicación del cubo recibió solución definitiva. En el año 1837 Wantzel demostró que las irracionalidades cúbicas no pertenecen ni al campo de los números racionales ni a su ampliación mediante la adjunción de irracionales cuadráticos.

El segundo famoso problema de la antigüedad, que no admitía solución mediante regla y compás, fue el problema sobre la trisección del ángulo, o sea, sobre la división de un ángulo arbitrario en tres partes iguales. Este problema, como el anterior, se reduce a la resolución de una ecuación cúbica, lo que resulta evidente de la siguiente relación trigonométrica $\cos\varphi=4\cos^3(\varphi/3)-3\cos(\varphi/3)$, ó $a=4x^3-3x$. Nosotros comprendemos que los numerosos esfuerzos por realizar la trisección del ángulo sólo con regla y compás no podían tener éxito y conducían en el mejor de los casos, a la concientización de la necesidad de introducción de nuevos métodos. Ya en el siglo V a.C. Hippias de Elis aplicó, para la resolución del problema de la trisección del ángulo, una curva trascendente, la cuadratriz, definida de la forma siguiente. Supongamos que en el rectángulo ABCD (Figura 4) el lado BC se traslada paralela y uniformemente hasta coincidir con AD. Durante este mismo tiempo el lado AB gira alrededor de A en sentido de las agujas del reloj hasta su coincidencia con AD. El lugar geométrico de la intersección de estos dos lados forma una curva, la

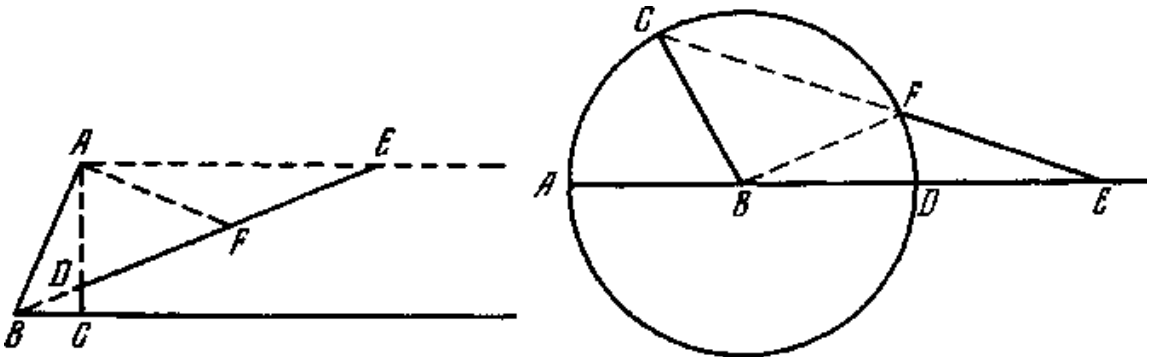
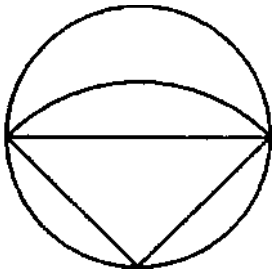


Figura 4

cuadratriz, cuya existencia permite reducir el problema de la división de un ángulo en cualquier número de partes iguales al problema de la división del segmento AB (o CD) en partes iguales. El punto G ($AG=2r/\pi$) de intersección de la cuadratriz con el lado AD se definía por continuidad, con razonamientos, los cuales pueden servir de ejemplo de una de las primeras formas del método de los límites. Otro método de resolución del problema sobre la trisección del ángulo, fue el método de las inserciones. Por inserción se entiende la construcción de un segmento de una recta,

cuyos extremos se encuentran en las líneas dadas y el cual (o su prolongación) pasa a través del punto dado.
Las inserciones se realizaban de forma mecánica con ayuda de una regla que se desplaza, en la cual ya antes fue trazada la magnitud de la inserción. La regla la giraban alrededor de un punto fijo, preocupándose de que una señal se moviera por una de las líneas dadas hasta que la otra señal cayera sobre la otra línea.
La trisección del ángulo tiene tan larga historia como la duplicación del cubo. La reducción de ella a una ecuación cúbica fue conocida sólo hacia los siglos IX-X. La demostración rigurosa de la imposibilidad de una trisección exacta del ángulo con regla y compás es una con secuencia sencilla del resultado de Wantzel mencionado anteriormente.
El tercer problema famoso de la antigüedad es el de la cuadratura del círculo, o sea, el problema sobre la búsqueda de un cuadrado de área equivalente a la de un círculo dado. Este problema en la Grecia Antigua lo consideraban en dos aspectos: exacto y aproximado. El último enfoque del problema condujo a la introducción de aproximaciones del área del círculo por polígonos inscritos o circunscritos y al cálculo aproximado del número π. La enorme cantidad de esfuerzos por cuadrar exactamente el círculo no pudo conducir al éxito como consecuencia de la naturaleza trascendente de este problema.
En efecto, sea el segmento r_0 el radio de un círculo dado; entonces el lado del cuadrado equivalente es $x=r_0\sqrt{\pi}$. El problema se reduce a la multiplicación gráfica del segmento r_0 por el número $\sqrt{\pi}$. Esta multiplicación puede realizarse sólo si este número es una raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros y resoluble en radicales cuadráticos. Por lo tanto, un tratamiento riguroso y completo del problema de la cuadratura del círculo puede obtenerse como resultado del esclarecimiento de la naturaleza aritmética del número π. La solución de este problema se prolongó durante muchos siglos.
Sólo a finales del siglo XVIII I. Lambert y A. Legendre pudieron demostrar que π no es un número racional. La trascendencia de este número, esto es, el hecho de que no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros, fue demostrada en el año 1882 por Lindemann. A propósito, en la geometría de Lobachevsky para algunos valores del radio de curvatura del espacio la cuadratura del círculo es resoluble en irracionalidades cuadráticas.
Los matemáticos antiguos, que se esforzaron por resolver con una exactitud teórica el problema sobre la cuadratura del círculo, esto, se sobreentiende, no lo sabían. Pero sus esfuerzos trajeron al desarrollo de las Matemáticas gran utilidad, enriqueciéndola con nuevos hechos y métodos. Así fue elaborado el método de exhaución, que es el predecesor del método de los límites, ueron introducidas diferentes curvas trascendentes, en primer lugar la cuadratriz y, por primera vez en la Historia de las Matemáticas fueron halladas figuras cuadrables, delimitadas por líneas curvas, por ejemplo las lúnulas (meniscos) de Hipócrates de Quíos, formadas por arcos de circunferencias. Las investigaciones de Hipócrates se apoyaban en el teorema de que en los círculos las áreas de segmentos semejantes son proporcionales a los cuadrados de los diámetros.



La primera de las lúnulas cuadrables fue recortada del semicírculo con arco de radio $r\sqrt{2}$, que se apoya sobre el diámetro. La lúnula resulta ser igual al área del triángulo rectángulo isósceles ABC cuya hipotenusa es el diámetro del círculo. Una variación de este resultado la constituye el teorema de que, si sobre los lados de un triángulo

rectángulo, como sobre diámetros, se construyen circunferencias, entonces la suma de las áreas de las lúnulas, que se apoyan sobre los catetos, será igual al área del triángulo, es decir, es cuadrable. Otro tipo de lúnula se obtiene cuando alrededor de un trapecio con lados 1,1, 1√3 se circunscribe una circunferencia y en la cuerda √3 se construye un segmento semejante a los segmentos truncados por las restantes cuerdas. El área de la lúnula obtenida es igual al área del trapecio original. Finalmente, el arco exterior de la tercera (3) es menor que la semicircunferencia.

La aparición de lúnulas cuadrables suscitó una serie de preguntas naturales ¿Cuán grande es la clase de las lúnulas cuadrables? ¿Han sido halladas todas sus formas? ¿Existen otras lúnulas, cuyas áreas también se expresan mediante irracionalidades cuadráticas a través de los elementos lineales que entran en su construcción? Sin embargo, las respuestas a estas preguntas también fueron obtenidas muchos siglos después. Sólo en el año 1840 el matemático alemán Klaus encontró dos lúnulas cuadrables más. La cuestión sobre las lúnulas fue totalmente investigada sólo en el siglo XX cuando los matemáticos soviéticos N.G. Chebotariov y A.V. Dórodnov utilizando los métodos de la Teoría de Galois mostraron que si las medidas angulares de los arcos interior y exterior de las lúnulas son conmensurables, entonces no existen más lúnulas cuadrables que las encontradas, las mencionadas 2/1, 3/1, 3/2, 5/1, 5/3. El descubrimiento de la inconmensurabilidad, como ya indicamos, puso en una situación difícil toda la parte métrica de la geometría, la teoría de la semejanza y aquellas partes de las Matemáticas, donde era imprescindible la utilización de formas elementales del concepto de continuidad, paso al límite, etc. La teoría de los números racionales ya no podía servir de base a estas ramas de las Matemáticas. Así, el surgimiento de las irracionalidades condicionó la necesidad de la creación de una teoría general de las relaciones, capaz de dar las definiciones e introducir las operaciones aplicables tanto en las magnitudes racionales como irracionales.

Dentro de los métodos infinitesimales utilizados en la antigüedad por los griegos, uno de los más antiguos es el método de exhaución. Su creación se le atribuye a Eudoxo.

Ejemplos de su utilización están expuestos en el libro duodécimo de los **"Elementos"** de Euclides y en una serie de obras de Arquímedes. El método de exhaución se aplicaba al cálculo de las áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitud de curvas, búsqueda de las subtangentes a las curvas, etc. Los pasos al límite, que antes se realizaban, frecuentemente, en virtud de consideraciones intuitivas y prácticas, obtuvieron en el método de exhaución la primera formalización teórica; históricamente es la primera forma del método de límites.

El rigor lógico del método de exhaución resultó insuperable en el transcurso de muchos siglos. En esencia, sólo en el siglo XIX fueron propuestos y comenzaron a recibir solución los problemas que surgen directamente de la esencia lógica del antiguo método de exhaución. Sin embargo, la forma de este último era muy imperfecta. El método se desarrollaba sólo en relación con problemas concretos: no se convirtió en un método abstracto con un sistema desarrollado de conceptos iniciales y con algoritmos únicos. La unicidad del límite se demostraba para cada problema de nuevo. Esta insuficiencia no era casual, particular. La cuestión es que cada intento de introducir esta demostración de una vez por todas para una determinada clase de problemas, suficientemente amplia, inevitablemente traía consigo la necesidad de precisar una serie de conceptos de naturaleza infinitesimal. Seria necesario dar una explicación racional al concepto de aproximación

infinitamente próxima, de magnitud infinitamente pequeña, etc. Los matemáticos griegos no pudieron superar las dificultades relacionadas con esto.
Las teorías matemáticas sobre lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, es decir, aquellas que permiten manejar el infinito como cantidad, han tenido una historia muy larga que todavía no culmina, y que en su forma más acabada se conocen hoy día como *"matemática no estándar"* por un lado y por el otro, como *"geometría diferencial sintética"*; ellas iniciaron su recorrido en épocas tan tempranas como el siglo V a.C., con una idea popularizada por Demócrito y Arquímedes, según la cual las líneas están constituidas por segmentos de longitud infinitamente pequeña. Pongamos por caso, una circunferencia es un polígono regular cuyos lados son infinitesimales o infinitésimos. Esta primera idea sufrió varias transformaciones en virtud de algunas dificultades para manejarla. El propio Arquímedes, gracias a su pericia en el manejo de las leyes mecánicas asociadas a las palancas, la convirtió en lo que más tarde Cavalieri llamaría indivisibles. Los indivisibles en el método de Arquímedes poseen una característica muy importante que no atrae mucho a los matemáticos, pero sí a quienes gustan de la física: tienen peso, primeramente, nos detendremos en algunos antecedentes.
Según se ha señalado, uno de los problemas clásicos griegos que más estimuló la investigación y la creatividad matemáticas, fue el de la cuadratura al círculo. Como intentos por solucionar este problema, surgen las propuestas de Antifón de Atenas[126], el sofista contemporáneo de Sócrates, y de Brisón[127], una generación más joven que el primero. Ahora bien, aun cuando las propuestas de Antifón y de Brisón tienen como objeto específico el de determinar cuál es el área de un círculo empleando, para ello, polígonos regulares (inscritos o circunscritos, según veremos), la propuesta de alguna manera se generalizó para aplicarse a la determinación del área de superficies limitadas por otras curvas. La generalización a la que aquí aludo, sin embargo, carece de una determinación precisa. Esto no se alcanzará sino hasta el siglo XVII. Lo que quiero decir con esto es que el proceso de *exhaustar* una figura (o un cuerpo) tenía que considerarse siempre de manera específica *para cada caso particular.* Cada curva diferente representaba un problema diferente, para cuya solución era preciso apelar, primeramente, a una intuición o a un mecanismo de otro tipo, que señalase la manera de atacar el problema. Una vez que se tenía lo anterior era posible, entonces, emplear el método de exhaución para dar una *demostración*

---

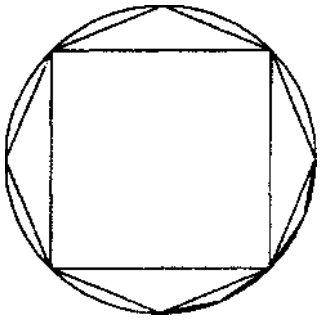
[126] (Atenas o Ramnunte, ca. 480 a.C.-411 a.C.) Nacido en el seno de una familia aristocrática, gozó de una gran reputación como logógrafo. Pertenecía a la escuela sofista, manteniendo que todo es uno para el λογος, de tal suerte que nada existe de manera individual para los sentidos ni para el conocimiento humano. Antifon fue contemporáneo de Sócrates, con quien mantuvo largas y tediosas discusiones, siendo el orador ático cuyos discursos son los más antiguos en su género que conservamos. Mayores detalles pueden encontrarse en M. Gagarin-**"Antiphon the Athenian. Oratory, Law, and Justice in the Age of the Sophists"**, University of Texas Press, Austin, 2002; G. B. Kerferd-**"The sophistic Movement"**, Cambridge University Press, 1989 y Gerardo Ramírez Vidal (2000)-**"La retórica de Antifonte"**, México.

[127] Llamado de Heraclea. Aunque es muy poco lo que se sabe sobre su vida y obra, según Aristóteles vivió a mediados del siglo V a.C., nació en Heraclea (hoy Tarento en Italia) en 450 a.C. y murió en 355 en Atenas, y era hijo de Herodoto (no el famoso historiador sino un conocido logógrafo). Fue discípulo de Sócrates y de Euclides de Megara. Su fama matemática proviene de su método de cálculo del área del círculo y no por su rigor matemático. Su intuición le dirigió al método de exhaución, formulado por Eudoxo,y a las bases de lo que hoy se conoce como el cálculo integral. Determinó el área del círculo como las áreas límite de las sucesiones, crecientes de polígonos inscritas y decrecientes de los polígonos circunscritos. Según Brisón de Heraclea, a medida que crece el número de lados del polígono de esas dos series de polígonos sus áreas se acercan cada vez más al área del círculo por ambos lados.

rigurosa del teorema que se había descubierto por otros medios. Es en este sentido que Arquímedes, aun cuando le atribuye a Demócrito el descubrimiento de la determinación de los volúmenes de la pirámide y el cono[128] *no* le atribuye la demostración del teorema, sino que ésta será obra de Eudoxo, como Arquímedes mismo lo señala. La posibilidad de crear un método uniforme y plenamente general, surge una vez que se emplean métodos infinitesimales, además de los geométricos, y los griegos no contaban con estos.

Veamos, ahora, cuáles son las propuestas particulares de estos autores. Antifón se propone determinar la superficie de un círculo dado, inscribiendo en el mismo un poígono, un cuadrado, por ejemplo, y luego construyendo, sobre los lados del mismo, triángulos isósceles cuya base sean los lados del cuadrado y cuyos vértices toquen los arcos del círculo; a su vez, sobre los triángulos recién construidos se construyen nuevos triángulos isósceles, y así sucesivamente.

Conforme a la propuesta de Antifón, la superficie del círculo quedará determinada una vez que se llenen con triángulos los espacios entre los últimos triángulos construidos y los arcos correspondientes de la circunferencia del círculo en cuestión. De acuerdo con esto, el problema de la cuadratura del círculo se resolvería, pues los griegos conocían la manera de obtener, de un polígono cualquiera, un cuadrado con la misma área del polígono en cuestión. La idea que parece asomar aquí es una especie de principio de continuidad, si la circunferencia se puede alcanzar mediante polígonos, entonces, lo que vale para los polígonos valdrá también para el círculo. Sin embargo, el caso *no* es estrictamente paralelo ya que, visto de esta manera, el círculo se convertiría en un polígono con un número *infinito* de lados (éste sin embargo, *no* es el caso de Antifón) y nada garantiza que un argumento, correcto para lo finito, sea también correcto para lo infinito.



La construcción de Antifón la criticó Alejandro, según nos dice Simplicio[129], señalando que la misma violaba la verdad del principio geométrico de que un círculo toca a una recta en un punto tan sólo. Eudemo hizo una crítica más aguda, señalando que la construcción de Antifón nunca llegará a agotar el espacio en cuestión, pues cualquier magnitud es divisible sin límite.

Euclides (en sus **"Elementos"**, Libro III, pág. 50) según nos dice el propio Heath[130], emplea el principio de Antifón señalando que si el proceso se continúa, la superficie que quede por acotar se podrá hacer siempre *menor* que cualquier magnitud dada.

Así pues, lo que ya se encuentra en germen en el método de Antifón es a) el método de exhaución, que surgirá con plena conciencia en Eudoxo, y b) una idea del círculo como *límite* de una sucesión de polígonos inscritos en el mismo. Esta noción de límite, por supuesto, no es nuestra idea de límite, teniendo en cuenta el tratamiento del infinito que hicieron los griegos, como potencial y no como actual.

La segunda figura en nuestra historia, Brisón, da un paso más que Antifón, al considerar no tan sólo polígonos inscritos sino, también, circunscritos. Así, si A_C es

---

[128] Es recomendable la consulta de Wilbur R. Knorr-**"Infinity and continuity: the interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity"**, en Norman Kretzmann (comp.), "Infinity and continuity in ancient medieval thought", Cornell University Press, Ithaca/Londres, 1982 y B. L. van der Waerden-**"Science Awakening"**, Oxford University Press, New York, 1971.

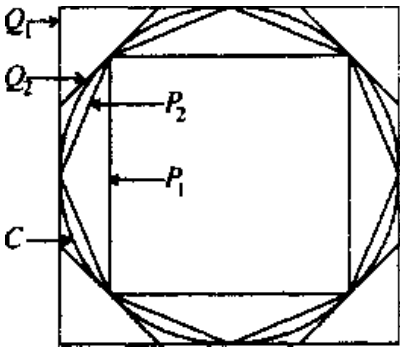
[129] Ver Sir T. L. Heath-**"A History of Greek Mathematics"**, Oxford at the Clarendon Press, 1921, Vol. I ("From Thales to Euclid"), pp. 221-222.

[130] Ibid., pp.371-378.

el área de círculo C, Brisón considera un par de sucesiones de polígonos, P_1, P_2, ..., P_n, inscritos y Q_1, Q_2, ..., Q_n, circunscritos, tales que la sucesión de las áreas de los polígonos P_i es una sucesión creciente y la sucesión de las áreas de Q_j es una sucesión decreciente. De esta manera se logra una especie de *comprensión,* con el área por determinar encontrándose, por el principio del "emparedado", entre las sucesiones de áreas de los polígonos inscritos y de los circunscritos.

Una vez llevada a cabo la construcción anterior, parece que la propuesta de Brisón pudo haber sido que el área del círculo coincidiría con el área de un polígono intermedio entre el mayor de los polígonos inscritos y el menor de los circunscritos.

Es interesante señalar que Arquímedes, por ejemplo, empleó este proceso para demostrar algunos de sus teoremas más importantes.



Apuntemos, por último, que Aristóteles atacó el intento de cuadratura de Brisón como sofístico y erístico[131], sobre la base de que no se fundaba en principios puramente geométricos, sino en otros más generales, aplicables a otros temas. Sea como sea, la propuesta de Brisón es interesante y representa un claro antecedente del método de exhaución, que estudiaremos en Eudoxo.

Heath, acerca del trabajo astronómico de Euxodo[132] nos dice *"Fue* [el de Eudoxo] *el primer intento por dar una teoría astronómica puramente matemática y esto, junto con sus grandes e inmortales contribuciones en geometría, lo ponen dentro del primer rango de los matemáticos de todas las épocas"*[133]. Abandonamos ahora estos aspectos, sobre los que volveremos en el Capítulo siguiente, para concentrarnos en el método de exhaución. Seguimos la presentación de Euclides en sus **"Elementos"**, éste en el libro V, define:

Definición 3. Una *razón (λογοσ)* es una suerte de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de la misma clase.

Y, de inmediato, añade:

Definición 4. De las magnitudes se dice que *tienen una razón* entre sí, si son capaces, cuando se las multiplica, de exceder una a la otra.

Más adelante, en el libro X, leemos:

Proposición 1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que su mitad y, de lo que queda, se sustrae una magnitud mayor que su mitad y si este proceso se repite continuamente, quedará alguna magnitud que será menor que la menor magnitud dada.

Finalmente, Arquímedes, en el prefacio a la **"Cuadratura de la parábola"**, formula el siguiente lema: De líneas, superficies o sólidos desiguales, el mayor excede al menor por una magnitud tal que es capaz, si se añade [continuamente] a sí mismo, de exceder cualquier magnitud de las que son comparables entre sí[134].

---

131 Ver http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Philosophical%20Texts/Bryson/Bryson.html

132 Todas las referencias con las que contamos provienen de fuentes secundarias, como el poema de Arato sobre astronomía. Eudoxo fue el primero en plantear un modelo planetario basado en un modelo matemático, por lo que se le considera el padre de la astronomía matemática. A su regreso, fundó en Cícico una escuela de Filosofía, Matemáticas y Astronomía; también enseñó en otras ciudades del Asia Menor.

133 Heath, ibid., pág. 15.

134 Citado por Heath, pág. 15.

De los pasajes citados, los siguientes comentarios son pertinentes: la Def. 4 establece un criterio para determinar qué magnitudes son las que pueden tener una razón entre sí y el criterio es que tales magnitudes han de ser *finitas,* esto es, no han de ser infinitesimales ni infinitamente grandes pues, por multiplicación (finita) ningún infinitesimal excederá una magnitud finita (por pequeña que ésta sea), ni una magnitud finita, por grande que sea, alcanzará (y, menos aún, excederá) a una magnitud infinita.
Los pasajes de Euclides y de Arquímedes son dos formulaciones del llamado *"Principio (o axioma) de (Eudoxio-Arquímedes"*. Las formulaciones son duales, ya que en un caso se habla de disminución exactamente donde en el otro se habla de aumento v a la inversa. En ambos casos, también, se restringe la consideración de magnitudes a magnitudes que tengan una razón entre sí. Según veremos, las demostraciones de teoremas mediante el método de exhaución, no proceden al infinito sino que, después de un número finito de pasos se concluye la demostración mediante una doble *reductio ad absurdum.*
Otro aspecto que es importante señalar, es que el principio se formula en términos de magnitudes, no de números ya que tal como está formulado, tiene una aplicación general y se elimina el problema de tener que tratar con *números* irracionales: dada una línea cualquiera, por ejemplo, sea ésta racional o irracional, siempre es posible determinar cuál sea su mitad por medios puramente geométricos. Como claramente lo señala Boyer[135] los griegos *no* tenían una concepción de un continuo aritmético y fue esto lo que mantuvo sus demostraciones geométricas.
Veamos, ahora, cuáles fueron las aportaciones de Eudoxo a la geometría, mediante el empleo del método de exhaución. En la **"Cuadratura de la parábola"**, Arquímedes señala "*Los geómetras anteriores también han usado este lema* [el principio de Arquímedes]*; pues es mediante el uso del mismo que han demostrado las proposiciones (1) que los círculos son entre sí en razón doble de sus diámetros, (2) que las esferas son entre sí en razón triple de sus diámetros y, además, (3) que toda pirámide es una tercera parte del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura; también, (4) que todo cono es una tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cono e igual altura, lo demostraron suponiendo cierto lema similar al antes dicho"*[136].
Por otra parte, el mismo Arquímedes le acredita a Eudoxo el haber demostrado las dos últimas proposiciones, por lo que parece seguirse que Eudoxo empleó, para hacer las demostraciones, el método de exhaución[137].
Es interesante analizar la aplicación de este principio en alguien como Euclides, en demostraciones de los teoremas atribuidos a Eudoxo; así voy a presentar una demostración algebraica, siguiendo en esto a Edwards[138], de la Proposición 1 de los **"Elementos"** citada antes.

Demostración. Supongamos que M_0 y ε son las magnitudes dadas, donde $\varepsilon < M_0$ y sea M_1, M_2, …, una sucesión tal que $M_0<M_1/2$, $M_1<M_2/2$, $M_2<M_3/2$, etc. Deseamos concluir, entonces que, para algún *n,* $M_n< \varepsilon$. Para mostrar esto, escójase [el menor] entero *N tal que*

[135] En su **"The History of Calculus and its Conceptual Development"**, Dover Publications Inc., New York, 1959, pág. 35.
[136] Citado por Heath, pág. 327.
[137] Heath, ibid., pp.327-329.
[138] Ver Edwards Jr., C. H.-**"The Historical Development of the Calculus"**, Springer-Verlag, New York Inc., 1979, pp.16-17.

$(N + 1)\,\varepsilon > M_0$, por Def. 4.

De esto que sigue que

$$\varepsilon \leq \frac{(N+1)\varepsilon}{2},$$

por lo que

$$N\varepsilon \geq \frac{1}{2M_0} > M_1$$

Si N = 1, tenemos el resultado buscado, esto es,

$$\varepsilon > M_1 = M_N;$$

en caso de que $N > 1$, entonces tenemos que $\varepsilon \leq \frac{1}{2N\varepsilon}$ y así

$$(N-1)\varepsilon \geq \frac{1}{2M_1} > M_2$$

Proseguimos de esta manera (restando, a cada paso, ε de la parte izquierda de la desigualdad) y en N pasos obtendremos la desigualdad deseada $\varepsilon > M_N$.

El resultado cuya demostración acabo de presentar es importante en la aplicación del método de exhaución, ya que el mismo se aplica de manera continua en las demostraciones de igualdad de áreas, volúmenes, etc.[139] La razón de esto es que en una demostración que emplee el método de exhaución, el núcleo de la prueba consiste en mostrar que el área (volumen) de la diferencia entre la figura (cuerpo), y la figura (cuerpo) inscrita (o), puede hacerse arbitrariamente pequeña con sólo escoger *n* suficientemente grande (que es lo que señala la proposición cuya demostración acabo de presentar). Ahora bien, no son los geómetras griegos los que consideran una sucesión *infinita* de polígonos inscritos, por ejemplo, sino que concluyen su demostración, después de considerar un número *finito* de polígonos inscritos mediante una prueba indirecta o por reducción al absurdo, según lo he señalado más arriba.

8. Los Tres Problemas Clásicos.

En el V a.C. la matemática aún no se había sistematizado. No obstante, tenemos dos saldos importantes, uno de carácter general: la exigencia de la demostración, y otro de carácter circunstancial: la consagración casi exclusiva de los matemáticos a las investigaciones geométricas.

De ahí que los matemáticos del siglo V se dedicaron a la búsqueda de nuevas propiedades de las figuras, ya de carácter general: nuestros teoremas, ya de carácter particular: nuestras construcciones, que deben considerarse como "teoremas de existencia" pues para los antiguos construir una figura, partiendo de los elementos dados y con propiedades prefijadas, era demostrar que tal figura existe o, lo que es lo mismo, deducir su existencia de propiedades conocidas.

Como las primeras figuras de las que partieron los griegos fueron la recta y la circunferencia, todas las proposiciones geométricas, fueran teoremas o construcciones, debían fundarse sobre esas dos figuras y sus relaciones o conexiones mutuas, en este contexto es que debemos situar a los ya mencionados problemas clásicos.

[139] Para ello, basta leer la obra de Arquímedes o los **"Elementos"** de Euclides.

LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

Cualquiera sea el origen de este problema, su resolución se reducía a la construcción, con regla y compás, de la raíz cúbica de una magnitud dada (en este caso el lado original del cubo).

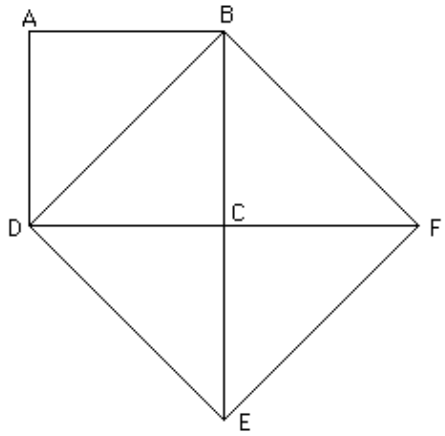
Los tres problemas clásicos fueron extremadamente importantes para el desarrollo de la geometría. Es justo decir que, aunque el problema de encontrar la cuadratura del círculo se convertiría en el más famoso en tiempos más modernos, sin duda entre los matemáticos aficionados, el problema de duplicar el cubo ciertamente fue el más famoso en los tiempos de los antiguos griegos.

Algo de historia.

Hay dos narraciones diferentes dadas por comentadores posteriores sobre los orígenes del problema. Teón de Esmirna cita una obra de Eratóstenes[140] *"Eratóstenes, es su obra titulada Platonicus relata que, cuando el dios anunció a los delianos a través del oráculo que, para deshacerse de una plaga, debían construir un altar del doble del que había, sus artesanos quedaron desconcertados en sus esfuerzos por descubrir cómo podían hacer un sólido que fuera el doble de otro sólido similar; por ello fueron a preguntarle al respecto a Platón, quien respondió que el oráculo quería decir no que el dios quisiera un altar del doble del tamaño sino que deseaba, al imponerles la tarea, avergonzar a los griegos por su descuido de las matemáticas y su desprecio por la geometría".*

La plaga sin duda fue un evento importante en la historia de Atenas, incluso llevó a la muerte a Pericles, *El Olímpico*, y aproximadamente un cuarto de la población ateniense murió por esta causa. Esto sucedió alrededor del 420 a.C. así que de haber algo de verdad en esta leyenda al menos podemos dar una fecha razonablemente exacta para la aparición del problema. Esto también es consistente con una contribución anterior de Hipócrates al problema.

Eutocio, en su comentario a **"Sobre la esfera y el cilindro"** de Arquímedes, dio una versión un tanto distinta. Esta se supone que es una carta escrita por Eratóstenes al Rey Tolomeo y, aunque la carta es una falsificación, el escritor sí cita algunos escritos genuinos de Eratóstenes[141] *"Eratóstenes al Rey Tolomeo, saludos. La anécdota dice que uno de los poetas trágicos antiguos representaba a Minos haciendo construir una tumba para Glauco y que, cuando Minos descubrió que la tumba media cien pies de cada lado, dijo 'Demasiado pequeña es la tumba que habéis señalado como el sitio real de descanso. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada lado de la tumba'. Esto claramente era un error. Ya que si los lados se duplican, la superficie se multiplica por cuatro y el volumen por ocho".*



Esta anécdota relata un episodio de la mitología griega más que hechos históricos. Sin embargo, los descubrimientos en Cnosos, en Creta, en tiempos relativamente recientes han mostrado que, al menos parcialmente, estos cuentos de la mitología están basados en acontecimientos históricos. La mitología relata que Glauco, el hijo

[140] Ver Heath-Op. Cit. Por esta razón, este problema también es conocido como Problema Délico.
[141] Ver Heath-Op. Cit.

de Minos, el rey de Creta y de su esposa Parsifae, murió siendo niño al caer en un recipiente de miel.

Los orígenes del problema de duplicar el cubo pueden ser un tanto oscuros como acabamos de ver, pero no queda duda de que los griegos sabían desde mucho antes cómo resolver el problema de duplicar el cuadrado. Así, tomar un cuadrado ABCD y dibujar la diagonal DB. Construir un cuadrado BDEF usando BD. De ahí es fácil ver que BDEF es el doble de ABCD. Duplicar el rectángulo es un poco más difícil pero también sabían cómo hacerlo y Euclides lo presenta en el Libro II de los **"Elementos"** y claramente es parte de un trabajo muy anterior.

El primer paso importante en la duplicación del cubo fue dado por Hipócrates, probablemente no mucho después de que el problema apareciera por primera vez. Sin embargo parece posible que ya antes estuvieran pensando en una forma más general del problema:

i. Encontrar un cubo tal que su razón a un cubo dado sea igual a la razón entre dos líneas dadas.

Hipócrates redujo entonces el problema a:

ii. Dadas dos líneas, encontrar dos medias proporcionales entre ellas. Es decir, dadas las líneas a, b encontrar x, y tales que $a:x = x:y = y:b$.

Con nuestra comprensión moderna de la proporción es fácil ver que (i) y (ii) son equivalentes ya que $a^3:x^3=(a:x)^3=(a:x)(x:y)(y:b)=a:b$

Así que si nos dan un cubo de lado a y queremos construir un cubo $b:a$ veces el volumen, entonces necesitamos construir un cubo de lado x.

Varios trabajos dedicados a la duplicación del cubo dan el argumento del párrafo anterior para demostrar el resultado de Hipócrates de que (i) y (ii) son equivalentes[142], pero como señala Saito[143], este tipo de argumento no lo tenía Hipócrates así que hay que tener en cuenta no solamente cómo demostró la equivalencia sino también, cómo fue que Hipócrates pensó en el resultado para empezar. No hay manera de conocer con seguridad las respuestas a estas preguntas. Sin embargo hay pistas que vienen del problema del caso bidimensional. Euclides en los **"Elementos"** demuestra que los siguientes dos problemas son equivalentes:

iii. Encontrar un cuadrado cuya razón a un cuadrado dado sea igual a la razón entre dos líneas dadas.

iv. Dadas dos líneas, encontrar una media proporcional entre ellas, es decir, dadas las líneas a, b encontrar x tal que $a:x = x:b$.

De nuevo, un argumento moderno dice $a^2:x^2=(a:x)^2=(a:x)(x:b)=a:b$, lo que demuestra que dado un cuadrado de lado a entonces, si construimos un cuadrado de lado x, este tiene un área igual a $b:a$ veces la del cuadrado de lado a. Euclides, en el Libro VI de los **"Elementos"** no solo muestra la equivalencia ente (iii) y (iv) sino que muestra cómo puede usarse (iv) para resolver (iii). Heath también sugiere en su mencionada obra, que Hipócrates podría haber llegado a la idea a partir de la teoría de números ya que cita el Libro VIII de los **"Elementos"** de Euclides *"Entre dos números cúbicos hay dos números que son medias proporcionales y el cubo tiene con el cubo una proporción triple de la que el lado tiene al lado".*

---

[142] Ver por ejemplo, W. R. Knorr-**"The ancient tradition of geometric problems"**, Boston, 1986.

[143] K. Saito-"**Doubling the cube: a new interpretation of its significance for early Greek geometry"**, Historia Math. **22** (2) (1995), 119-137.

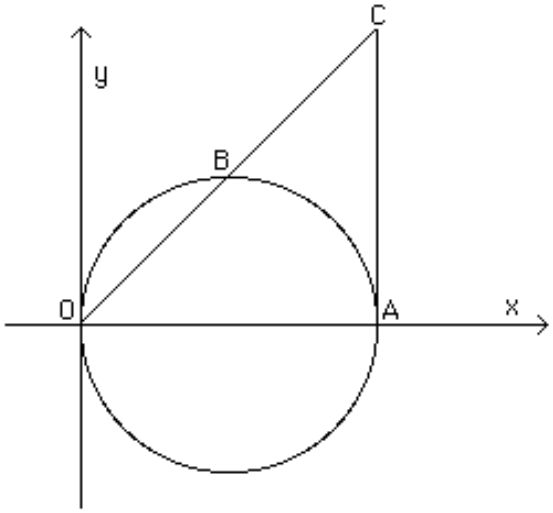
http://es.wikipedia.org/wiki/Imagen:Delos_location.svg

Sin embargo, un análisis textual[144] de **"Sobre la esfera y el cilindro"** de Arquímedes nos lleva a deducir que las razones compuestas, aunque eran bien conocidas para Arquímedes, pertenecen a matemáticas más modernas que las de la época de Hipócrates. Sea cual sea el razonamiento que llevó a Hipócrates a mostrar que el problema de duplicar el cubo se reducía a (ii), es notable que todos los matemáticos posteriores atacaran el problema (ii) en vez de la formulación original.

Consideramos ahora la solución propuesta por Arquitas. Es una solución muy bella que muestra una innovación sobresaliente de Arquitas. Al respecto, Heath escribe *"La solución de Arquitas es la más notable de todas, especialmente cuando se considera su fecha (primera mitad del siglo IV a.C.), ya que no es una construcción plana sino una atrevida construcción en tres dimensiones la cual determina un cierto punto como la intersección de tres superficies de revolución..."*[145]

Mostraremos la construcción usada por Arquitas, según la explica Eutocio. Intentaremos dar una interpretación moderna de esta construcción para hacerla más entendible, pero recordando que el sistema cartesiano utilizado no está presente en lo absoluto en el trabajo de Arquitas.

Considérese un círculo con diámetro *OA* en el plano *xy*, donde *O* es el origen y *A* es el punto (*a*, 0). Sea *B* un punto sobre el círculo tal que *OB* = *b*. El objetivo es encontrar dos medias proporcionales entre *a* y *b*. Extiéndase *OB* hasta la tangente al círculo en *A* y sea *C* el punto de intersección. Supóngase que esta figura está en el espacio tridimensional en el que el eje *Z* pasa por *O* saliendo perpendicular al plano del diagrama. Imagínese ahora las tres superficies de revolución a las que hace referencia Heath en la cita anterior. Una superficie es un medio-cilindro con el círculo *OAB* como base y que sale del plano del diagrama. La segunda es la superficie de un cono producido por *OC* cuando el triángulo *OCA* se gira alrededor de la línea *OA*. La tercera superficie se produce al considerar un semicírculo en el plano *XZ* con *OA* como diámetro por encima del plano *XY* y rotando este semicírculo sobre *OA* donde *OA* gira en el plano *XY* por encima de *O*. Esta superficie es la mitad de un toro tal que el agujero en su centro es solamente el punto *O*.



Supóngase que las tres superficies de revolución se intersecan solamente en el punto *P*. Entonces *P*, al estar sobre el medio-cilindro queda por encima de un punto *N* sobre el círculo *OBA*. Entonces las dos medias proporcionales construidas por Arquitas son *OP* y *ON*. Usaremos algo de geometría coordenada dentro de un momento para ver que Arquitas está en lo cierto pero primero damos la construcción en voz de Eutocio, sin hacerle cambios excepto por los nombres del punto que he cambiado para ajustarnos a la notación de nuestro diagrama y que está descrita arriba[146]. Esta es la solución de Arquitas, reportada por Eudemo *"Sean las dos líneas dadas OA [= a] y b, se requiere para construir dos medias proporcionales*

144 Ver K. Saito-Op. Cit.
145 Ver Heath-Op. Cit.
146 J. Delattre and R. Bkouche-**"Why ruler and compass?",** in History of Mathematics: History of Problems, Paris, 1997, 89-113.

entre a y b. Dibujar el círculo OAB con OA como diámetro donde OA es el mayor [OA = A b] e inscribir OB, la longitud b y hacerlo encontrarse con C la tangente al círculo en A. ... imaginar un medio-cilindro que sale perpendicularmente del semicírculo OAB y que en OA se eleva un semicírculo perpendicular sobre la [base] del medio-cilindro. Cuando este semicírculo es movido desde A hasta B, el extremo O del diámetro quedando fijo, cortará la superficie cilíndrica al hacer su movimiento y trazará sobre ella una cierta curva bien definida. Entonces, si OA se queda fijo y si el triángulo OCA rota alrededor de OA con un movimiento opuesto al del semicírculo, producirá una superficie cónica por medio de la línea OC la cual, en el transcurso de su movimiento, se encontrará con la curva dibujada sobre el cilindro en un punto específico [P]. ..."

Veamos esto, usando la notación actual. Notemos que la superficie cilíndrica tiene la ecuación $x^2 + y^2 = ax$; la superficie toroidal tiene ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{(x^2 + y^2)}$ y la superfie cónica tiene la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2x^2/b^2$.

Si (p, q, r) es el punto en el que estas tres superficies se intersecan, entonces $OP=\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$, mientras que $ON = \sqrt{(p^2 + q^2)}$.

Ahora bien, de las ecuaciones del cilindro y la cónica tenemos que $p^2+q^2+r^2=(p^2+q^2)^2/b^2$. Por lo tanto $a/\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}=\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}/\sqrt{(p^2+q^2)}=\sqrt{(p^2+q^2)}$ como se requiere.

A través de los escritos de Eutocio sabemos que Eudoxo también dio una solución al problema de la duplicación del cubo. Lamentablemente ésta se ha perdido, ya que la versión que Eutocio tenía era trivialmente errónea y por ello no la reprodujo. Nadie cree que Eudoxo cometiera un error elemental en su solución (era un matemático demasiado bueno para eso) así que el error debe haber sido introducido cuando su solución fue copiada por alguien que no la entendía bien. Paul Tannery sugirió que la solución de Eudoxo era una versión bidimensional de aquella dada por Arquitas que acabamos de describir, de hecho la solución obtenida proyectando la construcción de Arquitas a un plano. Sin embargo, Heath sugiere que Eudoxo era *"... un matemático demasiado original como para conformarse con una mera adaptación del método de solución de Arquitas"*[147]. En definitiva, parece poco probable que lleguemos a saber cómo fue que Eudoxo resolvió el problema de duplicar el cubo.

Se dice que Menecmo hizo su descubrimiento de las secciones cónicas mientras intentaba resolver el problema de la duplicación del cubo. La solución de Menecmo a encontrar dos medias proporcionales es descrita por Eutocio en su comentario a **"Sobre la esfera y el cilindro"** de Arquímedes.

Supongamos que nos dan a, b y queremos encontrar dos medias proporcionales x, y entre ellas, es decir, $a:x = x:y = y:b$. Ahora bien

$$a/x = y/b \text{ así que } xy = ab,$$
$$x/y = y/b \text{ así que } y^2 = bx \text{ y}$$
$$a/x = x/y \text{ así que } x^2 = ay.$$

Menecmo dio dos soluciones. La primera viene de la hipérbola rectangular y la parábola que son las dos primeras ecuaciones en nuestra lista. Ahora vemos que los valores de x y y se encuentran al intersecar la parábola $y^2=bx$ y la hipérbola rectangular $xy=ab$. Para su segunda solución, Menecmo usa la intersección de las dos parábolas $y^2=bx$ y $s^2=ay$ que son la segunda y tercera ecuaciones de nuestra lista.

147 Heath-Op. Cit.

Uno de los grandes interrogantes respecto a la solución del problema de la duplicación del cubo es que hay una solución mecánica conocida como la máquina de Platón. Parece muy poco probable que Platón haya dado una solución mecánica, sobretodo dadas sus opiniones sobre este tipo de soluciones. Plutarco escribió[148] *"Platón reprochó a los discípulos de Eudoxo, Arquitas y Menecmo por recurrir a medios mecánicos e instrumentos para resolver el problema de duplicar el volumen, ya que en su deseo de encontrar de alguna manera dos medias proporcionales, recurrieron a un método que era irracional. Al proceder de esto modo, se perdía irremediablemente lo mejor de la geometría, por una regresión al nivel de los sentidos, lo cual impide crear e incluso percibir las imágenes eternas e incorpóreas entre las que Dios es eternamente dios".*

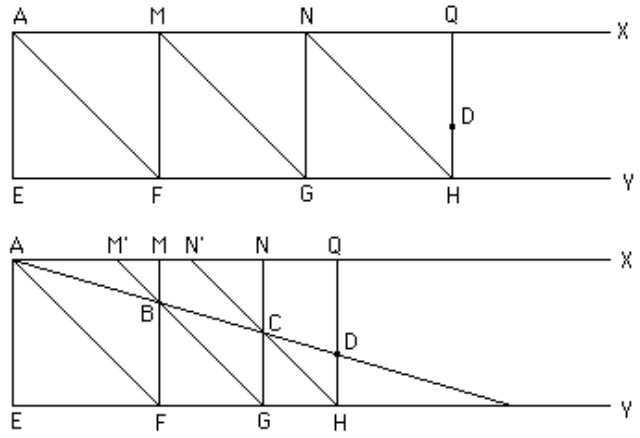
Hay dos teorías respecto a la máquina de Platón para resolver el problema de la duplicación del cubo. Una es que Platón inventó la solución mecánica para demostrar qué tan fácil es implementar este tipo de soluciones pero la teoría más aceptada es que la máquina de Platón fue inventada por uno de sus seguidores en la Academia.

Eratóstenes es importante en la narración tanto porque la historia del problema ha sido comunicada a través de él, como también por su propia contribución al problema. Él erigió una columna en Alejandría dedicada al Rey Tolomeo con un epigrama inscrito en ella el cual relata su propia solución mecánica al problema de duplicar el cubo *"Si, querido amigo, os ocupases de obtener a partir de cualquier cubo pequeño un cubo que lo duplique y debidamente de cambiar cualquier figura sólida en otra, esto está en vuestro poder; podéis encontrar la medida de un pliegue, un foso o el amplio cuenco de un pozo hueco mediante este método, es decir, si atrapáis entre dos reglas dos medias con sus extremos convergiendo. No busquéis hacer el difícil asunto de los cilindros de Arquitas ni cortar el cono en la triada de Menecmo ni alcanzar tal forma curva de líneas como la descrita por el piadoso Eudoxo. Podéis, en estas tabletas, fácilmente encontrar una miríada de medias, empezando por una pequeña base. Feliz sois, Tolomeo, ya que, como un padre igual a su hijo en su juvenil vigor, os habéis dado todo lo que es amado por las musas y los Reyes y talvez en el futuro, oh Zeus, dios del cielo, también recibáis el cetro en vuestras manos. Que así sea y que cualquiera que vea esta ofrenda diga 'Éste es el regalo de Eratóstenes de Cirene"*[149].

¿Cuál era entonces la máquina que inventó Eratóstenes para resolver el problema? Consiste de dos líneas paralelas con triángulos entre ellas como se muestra en el diagrama superior. Aquí *AE* y *DH* son las dos longitudes para las cuales se requiere encontrar dos medias proporcionales. Ahora nos quedamos con el primer triángulo *AMF* fijo pero permitimos que los triángulos *MNG* y *NQH* se deslicen dentro del marco acotado por *AX* y *EY*. Rotar *AX* hasta que pase a través de *D* pero mientras se hace esto, asegurarse de que los puntos *B* y *C* en los que esta línea que se mueve corta a *MF* y a *NG* siga también dentro de los lados *MG* y *NH* de los dos triángulos que se mueven a la izquierda para permitir que esta configuración siga siendo posible. Los triángulos se deslizan hacia la izquierda hasta que se alcance la parte baja de los dos diagramas. En este diagrama final *BF* y *CG* son las dos medias proporcionales entre *AE* y DH.

[148] J. Delattre and R. Bkouche-Op. Cit.
[149] Heath-Op. Cit.

Eratóstenes comenta sobre la cita anterior que su máquina es capaz de encontrar más de dos medias proporcionales. Si uno requiriera *una miríada de medias* proporcionales, entonces solamente se necesita poner ese número de triángulos movibles dentro de su máquina y el mismo procedimiento encontrará la 'miríada' de medias proporcionales.



Otras soluciones al problema fueron de Filón y Herón quienes dieron métodos parecidos. Su solución se produce de hecho por la intersección de un círculo y una hipérbola rectangular. Nicomedes, que era muy crítico con la solución mecánica de Eratóstenes, dio una construcción que usaba la curva concoide, la cual también usó para resolver el problema de trisecar un ángulo[150]. Diocles también inventó una curva especial para resolver el problema de duplicar el cubo, la llamada curva cisoide.

Aunque todos estos métodos distintos fueron inventados para duplicar el cubo e importantes descubrimientos matemáticos fueron realizados en los intentos, los antiguos griegos nunca habrían de encontrar la solución que realmente buscaban, es decir, una solución que pudiera hacerse mediante una construcción con regla y compás. Nunca encontrarían tal construcción ya que ésta no puede lograrse.

Como dijimos, la demostración de la imposibilidad tendría que esperar por las matemáticas del siglo XIX. Gauss había afirmado que los problemas de duplicar el cubo y trisecar el ángulo no podían ser resueltos con regla y compás pero no dio pruebas. Las piezas finales del argumento fueron reunidas por Pierre Wantzel[151]. En 1837, Wantzel publicó en el *Journal de Liouville* demostraciones de *"... los medios para establecer si un problema geométrico puede o no ser resuelto mediante regla y compás".*

Pruebas mejoradas fueron dadas más adelante por Charles Sturm pero no las publicó.

LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO

Este problema consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales, empleando únicamente la regla y el compás, de manera que la suma de las medidas de los nuevos tres ángulos sea exactamente la medida del primero.

Historia de la trisección del ángulo.

De alguna manera, éste es el menos famoso de los tres problemas. Hay varias razones por las cuales la trisección del ángulo difiere de los otros problemas clásicos griegos. Primero, no hay una historia real que relate la manera cómo el problema

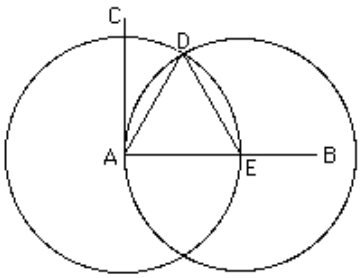
[150] Detalles de la construcción son dados en la obra de Heath ya citada.

[151] Pierre Laurent Wantzel matemático francés nacido en París, el 5 de junio de 1814 y fallecido en la misma ciudad el 21 de mayo de 1848). Famoso por haber resuelto de forma negativa dos problemas geométricos clásicos. Wantzel publicó en una revista de matemáticas francesa la primera prueba completamente rigurosa de la imposibilidad de trisecar un ángulo con la sola ayuda de una regla y un compás, demostración realizada en el año 1837, más adelante demostró, igualmente, la imposibilidad de resolver la duplicación del cubo.

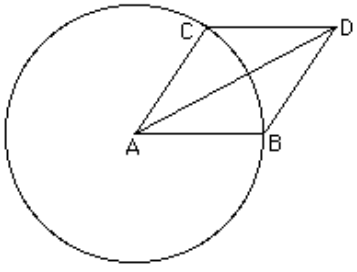
llegó a ser estudiado por primera vez. Segundo, es un problema de otro carácter; no es posible cuadrar un círculo ni duplicar un cubo; sin embargo, sí es posible trisecar ciertos ángulos. Por ejemplo, hay un método muy directo para trisecar un ángulo recto. Dado el ángulo recto *CAB* dibujamos un círculo que corta *AB* en *E*. Dibujamos un segundo círculo (con el mismo radio) con centro en *E* hasta que corta el primer círculo en *D*. Entonces *DAE* es un triángulo equilátero y el ángulo *DAE* es de 60° y *DAC* es de 30°. Ya tenemos el ángulo *CAB* trisecado.

Más sorprendentemente, ángulos como el de 27° pueden ser trisecados. El problema es trisecar un ángulo arbitrario usando regla y compás y, de no lograrlo, intentar encontrar un método para trisecar un ángulo cualquiera.

Pappo en su **"Colección Matemática"** escribe[152] *"Cuando los antiguos geómetras quisieron dividir un ángulo recto en tres partes iguales se vieron perdidos. Decimos que existen tres tipos de problemas en Geometría, aquellos denominados 'planos', 'sólidos' y 'lineales'. Aquellos que pueden ser resueltos mediante el uso de líneas rectas y círculos son los apropiadamente denominados 'planos' porque las líneas mediante las cuales se solucionan tienen su origen en el plano. Los problemas que se solucionan utilizando una o más secciones del cono son los denominados problemas 'sólidos'. Para su construcción es necesario el uso de superficies de figuras sólidas, es decir, conos. Y nos queda el tercer tipo, los problemas llamados 'lineales'. Para la construcción de éstos es necesaria la construcción de curvas de un origen más variado y más forzado sacadas de superficies más irregulares y siguiendo procedimientos más complejos. De este estilo son las curvas descubiertas en los llamados 'lugares geométricos de superficie' y muchas más relacionadas… Estas curvas tienen muchas maravillosas propiedades. Escritores más recientes han considerado incluso a alguna de ellas digna de un estudio más amplio, una de ellas es la llamada 'curva paradójica' de Menelao. Otras curvas del mismo tipo son espirales, cuadratrices, cocloide y cisoides… Como los problemas difieren entre sí, los primeros geómetras no fueron capaces de resolver el problema del ángulo que hemos mencionado porque es de naturaleza sólida; para ellos no eran familiares las secciones del cono y por ese motivo se vieron perdidos. Más tarde, sin embargo, trisecaron el ángulo mediante las cónicas, usando para la solución los medios que se describen a continuación…"*



A continuación veremos los métodos que se crearon para resolver este problema. Quizás el modo más obvio por el que se puede arribar a este problema sería examinando la construcción de la bisección de un ángulo con la regla y el compás, lo que es muy sencillo. Dado un ángulo *CAB* marcamos dos medidas iguales *AB* y *AC*.



Completamos el paralelogramo *CABD* y dibujamos la diagonal *AD* que se puede ver fácilmente que biseccionа el ángulo *CAB*.

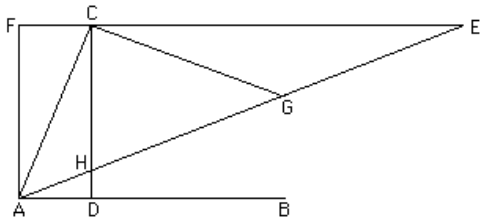
Seguramente los antiguos griegos se vieron en la necesidad de dividir ángulos en cualquier proporción para tener así la posibilidad de construir polígonos de cualquier número de caras. La construcción de polígonos regulares con regla y compás fue seguramente uno de los principales objetivos de los

[152] Ver I. Thomas-**"Greek mathematical works"**, London, 1939.

matemáticos griegos pero fue hasta que se produjeron los descubrimientos de Gauss que se construyeron con regla y compás algunos polígonos que los antiguos griegos no llegaron a descubrir.

Aunque es difícil determinar la fecha exacta del momento en el que el problema de trisecar un ángulo apareció por primera vez, sabemos que Hipócrates, quien hizo la primera aportación importante a los problemas de cuadrar un círculo y duplicar un ángulo, también estudió el problema de trisecar un ángulo. Hay un método muy directo para trisecar un ángulo que ya conocía Hipócrates.

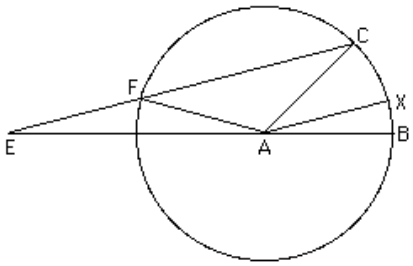
Funciona de la siguiente manera. Dado un ángulo *CAB* dibujamos *CD* perpendicular a *AB* que corta este segmento en *D*. Completamos el rectángulo *CDAF*. Prolongamos *FC* hasta *E* y dibujamos la línea *AE* que corta *CD* en *H*. Determinaremos el punto *E* de manera que se cumpla que *HE*=2*AC*. De esta forma el ángulo *EAB* es 1/3 del ángulo *CAB*. Veamos que *G* es el punto medio de *HE* de manera que *HG*=*GE*=*AC*. Ya que *ECH* es un ángulo recto, *CG*=*HG*=*GE*. Así, el ángulo *EAB*=ángulo *CEA*=ángulo *ECG*. También como *AC*=*CG* tenemos el ángulo *CAG*=ángulo *CGA*. Pero el ángulo *CGA*=ángulo *GEC* + ángulo *ECG* = 2*CEG* = 2*EAB* como se solicitaba.



Una de las razones por las que el problema de trisecar un ángulo parece haber sido menos atrayente para los matemáticos griegos a la hora de publicar sus soluciones, es que la construcción vista anteriormente, a pesar de no ser posible con una regla y un compás es, sin embargo, fácil de realizar en la práctica. Una solución de tipo mecánico es muy sencilla de encontrar. Marcamos una longitud de 2*AC* en el extremo derecho de la regla y la deslizamos con una marca en *CD* y la otra en *FC* prolongándola hasta que la regla define una recta que pase por *A*. Encontramos la trisectriz de esta manera mediante un proceso mecánico muy sencillo. Así que el problema, en la práctica, era sobradamente posible de resolver. Como los griegos no estaban en general satisfechos con las soluciones prácticas debido a un punto de vista puramente matemático, no fueron capaces de encontrarlas. Como dijo Platón *"Al proceder de un modo [mecánico], ¿no se pierde uno irremediablemente lo mejor de la geometría?…"*

Hay otra solución de tipo mecánico facilitada por Arquímedes. Bien podríamos calificarla de poco importante y decir que este método se explica ya en al trabajo árabe llamado **"Libro de Lemas"** atribuido a Arquímedes. Pero, este trabajo es una traducción aumentada de Arquímedes ya que es citado muchas veces en el mismo, de manera que es imposible atribuirlo exclusivamente a éste. Sin embargo, muchos historiadores de las Matemáticas creen que muchos de los resultados dados en el **"Libro de Lemas"** son también debidos a Arquímedes y que el resultado de trisecar un ángulo coincide tanto con el espíritu del libro **"Sobre las espirales"** que está ampliamente aceptada la idea de que este método sería también de Arquímedes. La construcción se realizaría de la siguiente manera: dado un ángulo *CAB* dibujamos un círculo con el centro en *A* de manera que *AC* y *AB* son radios del círculo. Desde *C* dibujamos una línea que corta la extensión de *AB* en *E*. Vemos que esta línea corta el círculo en *F* y tiene la propiedad que *EF* es igual al radio del círculo. De nuevo esto puede hacerse de forma mecánica marcando una longitud igual al radio del círculo en la regla y moviéndola teniendo una marca en la extensión de *BA* y la segunda marca en el círculo. Movemos la regla manteniendo una marca en la línea y otra en el círculo hasta que la línea pase por *C*. Entonces la línea *EC* ya está

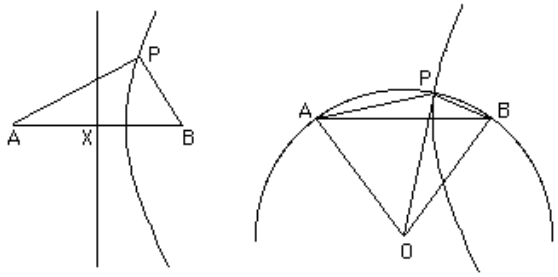
construida. Finalmente dibujamos desde *A* el radio *AX* del círculo con *AX* paralelo a *EC*. Así *AX* triseca el ángulo *CAB*.



Nicomedes vivió aproximadamente en el tiempo de Arquímedes (en el siglo II a.C.) y produjo su famosa curva concoide. De hecho, Nicomedes inventó precisamente esta curva para formalizar el proceso que hemos descrito de rotar una regla manteniendo un punto en una línea. La regla tiene una distancia fija marcada en sí misma y se mantiene una marca en una línea dada mientras los otros puntos definen una curva concoide. Ésta es exactamente la curva necesaria para solucionar el problema de trisecar el ángulo mencionado anteriormente y es así como Nicomedes consiguió resolverlo. Sin embargo, en la práctica, el método de mover la regla, hasta que el procedimiento necesario fue encontrado, era en principio más sencillo que dibujar la concoide así que el método de Nicomedes fue de un interés más teórico que práctico. Heath escribe en la obra ya citada *"Pappo nos dice que las concoides, de hecho, en muchas ocasiones no se utilizaban ya que algunos, por conveniencia, movían la regla sobre un punto fijo hasta que se encontraba la intersección que cuadraba con la medida dada"*.

Pappo nos habla de la concoide de Nicomedes en su **"Colección Matemática"**[153]. En el mismo trabajo, Pappo escribe sobre cómo el problema de trisecar un ángulo fue resuelto por Apolonio usando las cónicas. Pappo da dos soluciones que tienen que involucran dibujar una hipérbola.

La primera muestra que si *AB* es una línea fija, entonces tenemos un punto geométrico *P* de manera que 2ángulo *PAB* = ángulo*PBA* es una hipérbola. La hipérbola tiene excentricidad 2, foco en *B* y su directriz es la perpendicular de la bisectriz *AB*. La hipérbola se muestra en la izquierda de los dos diagramas. El diagrama de la derecha muestra cómo la hipérbola puede usarse para trisecar el ángulo *AOB*.



Fijémonos en que, debido a la propiedad de la hipérbola vista anteriormente, 2ángulo *PAB* = ángulo *PBA*. Pero 2ángulo *PAB* = ángulo *POB* (el ángulo en el centro del círculo es dos veces el ángulo en la circunferencia que hay en el mismo arco) Así, 2ángulo *POB* = ángulo *POA* como se solicitaba.

Heath comenta en qué medida este pasaje de Pappo es interesante en relación con el desarrollo de las cónicas para los griegos *"El pasaje de Pappo del cual se extrae esta solución es digno de mención ya que es uno de los tres pasajes de las matemáticas griegas entre los trabajos aun existentes…que se refiere a la propiedad de la relación entre foco y directriz de las cónicas"*[154].

Estas construcciones descritas por Pappo muestran como los griegos "mejoraron" sus soluciones al problema de trisecar un ángulo. Partiendo de una solución mecánica progresaron hacia una solución relacionada con las secciones cónicas. Nunca progresaron hacia las soluciones planas porque sabemos que son imposibles.

---

153 I. Thomas-Op. Cit.
154 T. Heath-Op. Cit.

Como dijimos antes, la demostración de esta imposibilidad tuvo que esperar a las matemáticas del siglo XIX, con Pierre Wantzel y aunque la demostración de que es imposible trisecar cualquier ángulo con regla y compás está establecido hace muchos años, existen matemáticos aficionados en todo el mundo que creen haber descubierto un método para hacerlo. El "trisecador" clásico es alguien que sabe suficiente geometría plana para idear un procedimiento, pero que no es capaz de comprender la prueba de imposibilidad ni de detectar el error de su propio método. La trisección es a menudo tan complicada y su demostración tiene tal cantidad de pasos, que incluso a un geómetra experto le resulta difícil encontrar el error que con toda seguridad contiene. Lo normal es que el autor envíe su pseudoprueba a un matemático profesional, quien por lo general la devuelve sin analizarla siquiera, porque buscar el error es un trabajo penoso y poco importante. Esta actitud confirma invariablemente la sospecha del "trisector" acerca de la existencia de una conspiración organizada entre los profesionales para impedir que llegue a conocerse su gran descubrimiento. Suele publicarlo entonces en un libro o panfleto pagado de su bolsillo, una vez que todas las revistas matemáticas a las que lo ha enviado han rechazado su publicación. En ocasiones describe el método en un anuncio del periódico local, en el que indica además que el manuscrito ha sido adecuadamente registrado ante notario.

A modo de curiosidad, digamos que el último matemático *amateur* que recibió gran publicidad en los Estados Unidos por un método de trisecar fue el reverendo Jeremiah Joseph Callahan. Anunció que había resuelto el problema de la trisección en 1921, cuando ocupaba el puesto de presidente de la Universidad Duquesne de Pittsburgh. La agencia *United Press* lanzó una larga historia que había sido escrita por el propio Callahan. La revista *Time* publicó su fotografía junto con un artículo muy favorable en el que se comentaba lo revolucionario de su descubrimiento (ese mismo año publicó Callahan un libro de 310 páginas titulado **"Euclides o Einstein"**, en el que "demolía" la teoría de la relatividad mediante la demostración del famoso postulado del paralelismo de Euclides, se deducía así que la geometría no euclidea, sobre la que está basada la relatividad general, era absurda). Los periodistas y el público profano mostraron su sorpresa al comprobar que los matemáticos profesionales, sin esperar a ver las construcciones del Padre Callahan, declararon inequívocamente que no podía ser correcta. Por último, a finales de año, la Universidad Duquesne publicó el opúsculo del Padre Callahan con el título **"La trisección del ángulo"**.

El 3 de junio de 1960 el honorable Daniel K. Inouye, en aquel entonces representante por Hawai y más tarde senador y miembro del Comité de Investigación del Watergate, incluyó en el *Congressional Record* (Apéndice, páginas A4733-A4734) de la sesión 86° del Congreso un largo tributo a Maurice Kidlel, un retratista de Honolulú que no solamente había trisecado el ángulo sino que además había conseguido la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo. Kidjel y Kenneth W. K. Young escribieron un libro sobre el tema, con el título de **"The Two Hours that Shook the Mathematical World"** ("Las dos horas que conmovieron el mundo matemático"), así como un opúsculo, **"Challenging and Solving the Three Imposibles"** ("Desafío y resolución de los tres imposibles"). Vendían esta literatura, así como los calibres necesarios para emplear su sistema, a través de la compañía *The Kidjel Ratio*. Los dos dieron en 1959 conferencias sobre su trabajo en varias ciudades norteamericanas, y una cadena de televisión de San Francisco, la *KPJX*, hizo un informe documentado bajo el título **"The Riddle of the Ages"**. Según Inouye, *"las soluciones de Kidjel se enseñan hoy en cientos de escuelas y colegios*

de todo Hawai, Estados Unidos y Canadá". Esperamos que la afirmación fuese exagerada. En un ejemplar del periódico *Los Angeles Times*, del domingo 6 de marzo de 1966 (Sección A, página 16), aparece alguien de Hollywood que había pagado un anuncio a dos columnas para dar a conocer, ¡en 14 pasos!, su procedimiento de trisecar ángulos.

¿Qué le puede decir actualmente un matemático a un trisector de ángulos? Le diría que en Matemáticas es posible enunciar problemas que son imposibles en un sentido final y absoluto, IMPOSIBLES en todo tiempo y en todos los mundos concebibles (lógicamente consistentes). Tan imposible es trisecar el ángulo como mover en ajedrez la reina de la misma manera que un caballo. En ambos casos la razón última de esa imposibilidad es la misma: la operación viola las reglas de un juego matemático. El matemático le recomendaría al "trisector" que se hiciese con un ejemplar de algún texto de geometría y se lo estudiara. Y que luego volviera sobre su demostración y pusiera más empeño en encontrar el error. Pero los "trisectores" son una raza muy dura y no es probable que acepten consejos de nadie. Augustus De Morgan, en su **"Budget of Paradoxes"**, cita una frase típica tomada de un panfleto del siglo XIX sobre la trisección de ángulos *"El resultado de años de intensa reflexión"*. El comentario de De Morgan es conciso *"muy probablemente, y muy triste"*.

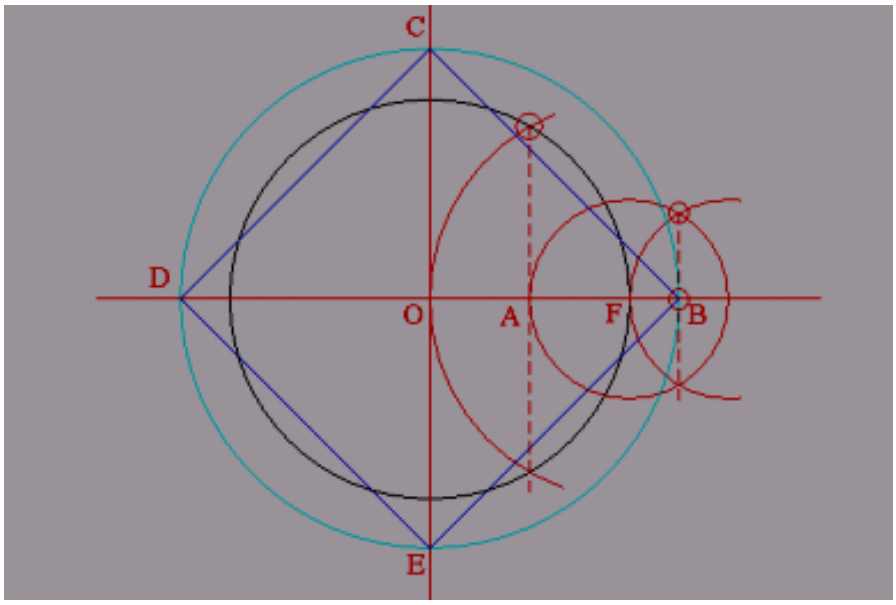
LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

La cuadratura del círculo consiste en tratar de obtener, dado un círculo, un cuadrado que tenga la misma área de éste. Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, utilizando las paredes de su celda cuando fue hecho prisionero por explicar diversos fenómenos que los griegos atribuían a los dioses. Tampoco pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible. Como curiosidad, el filósofo inglés David Hume llegó a escribir un libro con supuestos métodos para resolver el problema. Hume no tenía conocimientos matemáticos serios, y nunca aceptó que todos sus métodos fallaban.

La cuadratura del círculo, que por primera vez se planteó Anaxágoras consiste en construir un cuadrado de idéntica área a la de un círculo dado. Hicieron falta más de dos mil años para que Ferdinand Lindeman (1852-1939) demostrara que era imposible tal construcción con regla sin marcas y compás, pues π es un número trascendente.

Una construcción geométrica aproximada de la cuadratura del círculo con regla y compás con tales fines "pedagógicos" o simplemente recreativos debería cumplir los siguientes requisitos:

1) la aproximación de π debería ser la mejor posible,
2) el número de pasos debería ser el mínimo posible,
3) la construcción debería poder hacerse siguiendo la lógica de cualquier problema, partir del radio del círculo (el dato) para llegar al lado del cuadrado (la solución).



Por ejemplo (ver la figura) partiendo del radio OF (dato) de la circunferencia a cuadrar se haya su mitad (punto A) y luego la mitad de esta, es decir la cuarta parte del radio, de modo que se obtenga un segmento igual a 5/4 del radio (segmento OB) y tomando como radio este segmento se traza una circunferencia con el mismo centro (O) de la circunferencia de partida: los puntos de corte de esta circunferencia con los ejes de coordenadas (C, D E y F) nos dan los cuatro vértices del cuadrado solución[155].

O sea, este problema surgió sin duda de la exigencia práctica de determinar el área conociendo su radio o su diámetro, y traduciéndose geométricamente en un problema de equivalencia: dado un segmento como radio de un círculo, determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente.

Los pitagóricos habían resuelto el problema de la cuadratura de los polígonos, pero al pasar de los polígonos al círculo, el proceso resultaba inaplicable y, al igual que en los otros dos problemas clásicos, los intentos de "cuadrar el círculo", sin acudir a recursos especiales, resultaron infructuosos.

Como decíamos antes, son interesantes los intentos que en este sentido realizaron los sofistas Antifón y Brisón.

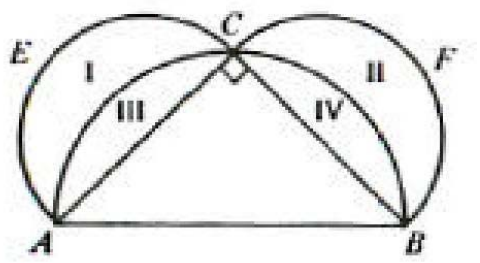
Con los problemas de Delos y de la cuadratura del círculo se vincula la figura de Hipócrates de Quíos, el primer matemático "profesional", quien habiendo llegado a Atenas en la primera mitad del siglo por razones nada científicas, se interesó por la Matemática y, siguiendo una probable tradición de mercader, enseñó esa ciencia por dinero a la manera de los sofistas.

Como hemos apuntado, las contribuciones de Hipócrates son importantes; en el problema de la duplicación del cubo redujo la cuestión a un problema de geometría plana que, generalizado, tomó el nombre de "problema de mesolabio", mientras que, sin lograr cuadrar el círculo, logró cuadrar recintos limitados por arcos de círculos, aparentemente más complicados que el círculo, que por su forma de luna creciente se los llamó "lúnulas de Hipócrates".

---

[155] Este ejemplo reúne las condiciones 2 y 3 pero el valor de π utilizado es aproximadamente igual a $\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25.2}{16} = 3.125$, o lo que es o mismo 3 1/8, que es obviamente muy pobre (aunque con cierto valor histórico pues es el que utilizaban los babilonios 2000 años a.C.). En los ejemplos se ha utilizado un radio elegido al azar en 30 unidades. Todos los dibujos son igualmente válidos con cualquier otra medida.

Las Lúnulas de Hipócrates.



Hipócrates no obtuvo, por supuesto, la solución del problema de la cuadratura del círculo sino que resolvió uno relacionado a este *Calcular un área curvilínea que fuera igual a un área acotada por líneas rectas*. Area del semicírculo ABC/Area del semicírculo AEB=AC^2/AB^2=2/1. Por lo tanto, Area ABC = 2(Area AEB) y Area OADB = Area AEB.
Por otro lado Area AEB=Area (lunula I) +Area (lunula II), Area OADB=Area Δ(OAB)+ Area (lunula II). Ya que Area AEB=Area OADB. Entonces Area (lunula I) + Area (lunula II) = Area Δ(OAB) + Area (lunula II), por lo tanto Area (lunula I) es igual al Area Δ(OAB).

Apuntes históricos de la cuadratura del círculo.
Como hemos dicho, es uno de los problemas matemáticos más antiguos. Entre los Babilonios y los Egipcios las aproximaciones que habían obtenido con ese planteamiento les bastaba para sus necesidades.
Según la tradición, uno de los primeros griegos en dedicarse a este problema fue Anaxágoras, cuando estaba encarcelado. Después de él, Antifón el Sofista intentó realizar la cuadratura mediante inscripción de polígonos regulares en el círculo, con duplicación indefinida del numero de sus lados. Brisón dio un paso más al considerar a la vez los polígonos inscritos y los circunscritos. Lamentablemente, se han perdido sus trabajos. Aristóteles, que es nuestra fuente de información, los critica y halla en ellos paralogismos, así se puede creer que nos encontramos ante esos autores en una situación parecida a la de Demócrito y el volumen de la pirámide, razonamiento plausible pero incorrecto y mal fundamentado. Eudoxo rectifica los argumentos de Antifón y de Brisón igual que había rectificado el de Demócrito, dándole fuerza demostrativa y prueba lo que desde hacia más de mil años admitían Babilonios y Egipcios a saber que los círculos tienen entre ellos la misma razón que los cuadrados de sus diámetros.
Hipócrates de Quios había descubierto en el siglo V tres lúnulas cuadrables por los procedimientos de aplicación de las áreas, o sea, mediante regla y compás. En todo caso, el problema sigue siendo célebre en esa forma restringida construir un cuadrado equivalente a un círculo dado mediante un número finito de trazados de rectas y de círculos. El problema seguía siendo imposible como presentían los matemáticos, pero sin poder demostrar esto hasta finales del siglo XIX.
Bajo este respecto resultará posible el problema, una vez identificado con el de la rectificación de la circunferencia. Arquímedes demuestra esa rectificación la cual sin duda se admitía mucho antes que él. El problema así entendido es tratado por Arquímedes pero acaso lo fuera ya por Dinostrato en el siglo IV: pero los testimonios son tardíos. Según ellos, Dinostrato utilizó la curva llamada la cuadratiz debida al sofista Hippias en su intento de la trisección del ángulo.

Algunos detalles adicionales.
La geometría analítica nos permite asociarle a los aspectos cuantitativos de objetos geométricos números reales. Elegiremos un sistema coordenado donde los puntos se representan con un vector real (x,y) y donde (0,0) y (0,1) son conocidos inicialmente. Sin pérdida de generalidad consideremos al círculo con

centro en (0,0) y de radio 1. El área es π por lo que los lados del cuadrado deben medir √π.
Un número real x se dice que es *construible* si es la distancia de dos puntos construibles con regla y compás. Se sigue que un punto (x,y) es construible si y sólo si sus coordenadas son construibles. Dados dos números construibles s, t ≠ 0 entonces s+t, s-t, st, s/t también son construibles. Por tanto el conjunto de los números construibles es un subcampo de los reales y queremos ver si contiene a raíz de π.
Una línea definida sobre un campo F puede representarse como ax+by+c=0 donde a, b, c pertenecen a F. Similarmente, un círculo se representa como $(h-x)^2+(k-y)^2=r^2$ donde h, k, r pertenecen a F. Los puntos de intersección pueden encontrarse como solución a estos sistemas de ecuaciones cuadráticas y lineales. Por tanto, sólo podemos construir raíces de polinomios de primer y segundo grado sobre F. Después de un número finito de pasos, sólo podemos construir raíces de polinomios sobre Q. Sin embargo la raíz de π es un número trascendente (i.e. no es solución de ningún polinomio sobre Q) y por lo tanto no es construible.
De aquí que para poder construir el cuadrado con regla y compás necesitamos ayuda adicional, a partir de la cual π sea construible. Por ejemplo, si deslizamos el círculo unitario una vuelta sobre una línea y marcamos el inicio y el fin obtenemos el perímetro de longitud 2π.

En 1925 Alfred Tarski le dio un giro interesante al problema. En vez de construir el cuadrado con regla y compás propuso cortar al círculo en un número finito de piezas, i.e. una partición, y reacomodarlas para formar un cuadrado. Las piezas no deben sobreponerse ni dejar huecos vacíos y el reacomodo debe preservar la forma de las piezas.
Después de mucho trabajo, Tarski logró demostrar que de ser posible la disección, el círculo y el cuadrado debían tener la misma área. La diferencia radica en que las piezas pueden ser tan complejas que no se pueden medir y no tenga sentido hablar de su área; es más, en 3 dimensiones no es cierto. Banach, Tarski y Robinson demostraron que es posible disectar una esfera en 5 piezas y reacomodarlas mediante transformaciones rígidas en dos esferas, cada una del mismo tamaño que la original.
En 1989, el matemático Miklos Laczkovich probó que es posible cortar al círculo y formar un cuadrado con las piezas. La cantidad estimada de piezas es de 10^{50}. Este número es tan grande que si pudiéramos acomodar mil millones de piezas cada milisegundo el tiempo que tardaríamos en armar el cuadrado sería más de un millón de veces la edad actual del Universo.

9. Génesis de las discusiones sobre los Fundamentos de la Matemática.
Acerca de las causas de transformación de la matemática en ciencia existen varias hipótesis. Al parecer no hay duda en que las primeras teorías surgen en la Antigua Grecia entre los siglos VI y III a.C. (ver la sección 7 anterior).
Para unos, la invención de la moneda que influiría directamente en el incremento del comercio fue uno de los impulsos principales para la formación de un nuevo tipo de hombre, el comerciante-navegante con espíritu independiente, con riquezas, esclavos y suficiente tiempo para reflexionar sobre el ¿por qué? de los hechos. La situación geográfica de la civilización helena, su origen étnico, su personalidad

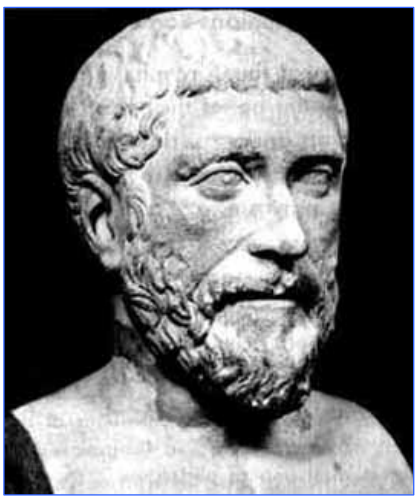
curiosa, inteligente, sensible, racionalista; la ausencia de religión completamente establecida y sin instituciones dogmáticas; todo esto, y quizás más, logró crear condiciones objetivas y subjetivas propicias para el salto cualitativo necesario en la conformación de la matemática como ciencia.

No es asombroso que en la matemática los griegos vieran, no sólo un medio práctico útil, sino ante todo, la expresión de la verdad y la naturaleza de las cosas. En el contexto de concepciones antropomórficas y mitológicas donde lo real estaba muy cerca de lo fantástico, la matemática aparece como un conocimiento de una naturaleza completamente distinta, cuya veracidad no promovía ninguna duda, cuyos hechos primarios eran claros y las conclusiones eran irrevocables, absolutas.

Así se cosmologizó y mistificó la matemática, haciendo de ella el punto de partida para todas las reflexiones en la descripción de la realidad. Esta mistificación de la matemática, encuentra su expresión en los pitagóricos. La Escuela de Pitágoras fue a la vez un partido político, que dominó sobre todo la ciudad de Crotona (al sur de Italia), cuya base social era la aristocracia esclavista, y una escuela filosófico-científica y además, una hermandad ó secta secreta. Analizaremos sólo los aportes y errores de los pitagóricos en relación con el desarrollo del contenido y los fundamentos de la matemática.

La tesis fundamental del pitagoreísmo *"todas las cosas son números"*. El sentido de esta aseveración no se reduce a la consideración natural que pudiera hacer cualquier científico contemporáneo de que en todo pueden observarse relaciones cuantitativas y que cada ley puede ser expresada por medio de relaciones matemáticas. La filosofía griega de este período se orientaba a la búsqueda del primer fundamento del mundo, la base con la cual se podía explicar todo lo acontecido o por suceder. Si Tales consideró tal principio en el agua, Heráclito en el fuego y Anaximandro en las partículas indivisibles llamadas "apeironas", entonces para los pitagóricos precisamente los números jugaban tal papel, determinando, de cierta manera, los fenómenos y procesos naturales. Las propiedades de las cosas se consideraban en correspondencia con las propiedades de tal o más cual número o relación numérica, como un reflejo de la armonía numérica.

La filosofía en los pitagóricos se convirtió en "la mística de los números", y las figuras geométricas sobre el mundo se reducían a su "armonía numérica". Todo lo que para el científico contemporáneo no sería más que una simple casualidad, los pitagóricos lo representaban como repleto de profundo sentido y expresión del "dios del ritmo y la armonía".



Así, las formas matemáticas (número y figura) se transformaron en herramienta universal para la comprensión de todas las cosas. Citemos a Filolaos (?-390 a.C.) que vivió en Tebas hacia el año 400 a.C. y que es el primer pitagórico del que nos han quedado algunos fragmentos importantes *"Todas las cosas accesibles al conocimiento poseen un número, puesto que sin el no podemos comprender ni conocer nada"*.

El criterio de veracidad en los pitagóricos no está en la demostración lógica de unas proposiciones por otras, ni está en la comparación de ellas con la experiencia práctica, ni tampoco en la reducción a cuestiones evidentes, sino en la construcción de cierto isomorfismo determinado por relaciones matemáticas en su estructura esencial.

En lo que concierne a la naturaleza de las leyes matemáticas, a las raíces de su veracidad incondicional los pitagóricos del período arcano no reflexionaron sobre estos problemas. Sin embargo, en Platón ya encontramos cierta teoría en este sentido.

Las verdades matemáticas para Platón representan impresiones sobre la verdad en sí misma, las cuales el alma obtiene al pasar al mundo más perfecto, el mundo de las ideas. El conocimiento matemático es por esto simplemente recuerdo, necesita, no experiencia sino contemplación de la naturaleza, sólo "visión con la inteligencia". El matemático, según Platón, estudia esencias singulares e ideales, a diferencia de las esencias dadas en la experiencia que son empíricas. *"Cuando los geómetras*, dice Platón, *utilizan dibujos y hacen de ellos conclusiones, su pensamiento se refiere no al dibujo sino a aquellas figuras semejantes a las cuales hizo el dibujo... Las figuras geométricas en sí mismas (a diferencia de los dibujos) se pueden ver sólo con una "vista pensante"*.

En estas reflexiones de Platón, por primera vez, se considera el problema sobre la especificidad del objeto de la matemática, el cual como sabemos es aún hoy unos de los fundamentales de la filosofía de la matemática.

Junto con las concepciones pitagóricas, considerando los objetos matemáticos como las últimas esencias de la estructura del mundo, existió, aunque en forma insuficientemente expresada, pero materialista, otra filosofía de las matemáticas, surgida en el atomismo de Leucipo y Demócrito.

La idea de los atomistas tenía en sí misma un valioso principio heurístico. Ya vimos que partiendo de ellas, el sofista Antifon elaboró un método de cálculo de áreas de figuras curvilíneas que fue el primer reflejo de cálculo infinitesimal. Recordemos su esencia: en una figura curvilínea se inscribía una figura rectilínea con relación a la cual era suficientemente evidente que en el aumento del número de lados, su área se aproximaba al área de las figuras curvilíneas. Si el área de las figuras rectilíneas se podía calcular en cada etapa del cálculo, entonces se suponía que el área de la figura original era igual al área de la figura rectilínea en su última división, esto es cuando sus lados eran tan pequeños que coincidían con las partículas que constituían el contorno de las figuras curvilíneas. Para la verificación de tal método era suficiente suponer que la cantidad de pasos necesarios para la aproximación era finito. Esto permitía superar las paradojas, relacionadas con la suposición de la división infinita del segmento.

El método de Antifon fue posteriormente perfeccionado en el sentido lógico por Eudoxo de Cnido y Arquímedes de Siracusa y pasó a la historia bajo el nombre de Método de Exhaución. En el Método de Exhaución, una parte importante del razonamiento la constituye la demostración rigurosa de que el área (volumen) de la figura inscrita al elevar el número de lados (aristas) difiere del área (volumen) de la figura circunscrita en una cantidad tan pequeña como se quiera, esto es, la demostración de lo que Antifonte consideraba evidente.

La mayoría de los matemáticos de la época del platonismo refutaron los razonamientos atomistas en la geometría, por no considerar a la esencia de la Matemática, sino de la Física. Las ideas atomista aparecieron sólo en el siglo XVII, en los trabajos de Kepler, Cavalieri y Vieta.

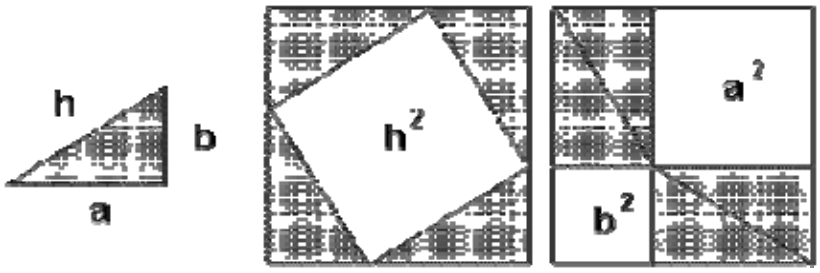
Hemos dicho que es con Pitágoras y su escuela cuando se puede hablar, por primera vez, de una ciencia de los números enteros y fraccionarios. ¿Qué puede hacer ese pensamiento pitagoriano después de haber especulado sobre los números? Todo pensamiento abstracto, negación de lo real, no puede más que negar esta negación en una síntesis explicativa del mundo. Como escribe Aristóteles

"Los pitagorianos pensaron que sus principios eran los principios de todas las cosas".

Los pitagorianos conocían tres medias a las que se denominan aritmética, geometría y armónica. Atribuyeron un valor de perfección a esas relaciones numéricas que introdujeron en música, en el dominio moral, en sus teorías de la justicia y de la ocasión.

Sus ideas simples quedaron sin desarrollo, en primer término, a causa de su propio carácter de perfección, puesto que si se ha descubierto la verdad absoluta no susceptible de corrección, todo desarrollo ulterior no tiene razón de ser, es decir, es imposible y, además, porque esas ideas no eran susceptibles de verificaciones positivas: esta síntesis pitagoriana es una síntesis idealista.

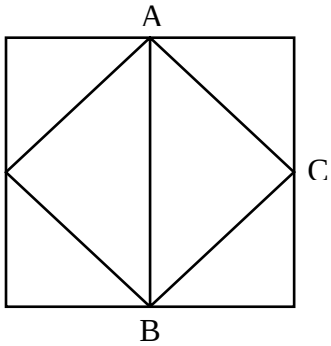
Por el contrario, la teoría pitagoriana de las mónadas puede ser considerada como la primera teoría de física matemática. El punto, según Pitágoras, es una unidad que tiene una posición, es decir, que es análogo a un pequeño grano de arena. Todos los puntos son idénticos. Un segmento AB es una sucesión de puntos y encierra un número entero de mónadas. La medición de un segmento cualquiera AB se efectúa comparándole a un segmento unidad. Al contener esos dos segmentos cada uno un número entero de mónadas, la medida del segmento AB es número fraccionario. Todo cuerpo sólido contiene igualmente un número entero de mónadas, y es por eso que las propiedades aritméticas de los números van a explicar el universo.



Teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos, expresado según el Álgebra Geométrica.

Más, aunque la Geometría no sea aún, en la época de Pitágoras, una ciencia deductiva, está no obstante, lo suficientemente avanzada para arruinar la concepción misma de las mónadas. Eso será una consecuencia del teorema de geometría que lleva el nombre de Pitágoras, aunque no sepamos exactamente si Pitágoras lo demostraba en el caso general.

Consideremos un cuadrado y el cuadrado construido sobre la diagonal del primero.



El examen de la figura muestra que la superficie del cuadrado grande es dos veces la del pequeño. Sabemos que la superficie de un cuadrado tiene por medida el cuadrado del número que mide su lado, es decir, el producto de ese número multiplicado por sí mismo a x a = a². Sea P el número de mónadas que contiene AB, Q el número de mónadas que AC. Se tiene, de acuerdo con lo que se ha dicho acerca de las superficies $Q^2=2P^2$. Lo que viene decir que el cuadrado de la fracción Q/P es el número 2. Como antes, simplifiquemos la fracción Q/P si eso es posible y sea q/p la fracción irreducible igual q/p=Q/P. Debemos tener $q^2=2p^2$. Sabemos que esta expresión es contradictoria: la diagonal de un cuadrado no puede estar en relación racional con su lado.

En las Matemáticas, partiendo de la recopilación de hechos concretos que tenían como base los problemas prácticos relacionados con la necesidad de cálculos

aritméticos, mediciones y construcciones geométricas, a lo que denominaron Logística, lograron producir resultados abstractos que unieron en sistemas teóricos. Así, por ejemplo, la Aritmética como conjunto de conocimientos relacionados con las propiedades generales de las operaciones con números naturales se fue separando como una rama independiente y la Geometría fue sometida a un proceso de abstracción y sistematización.

El descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables[156] mediante la imposibilidad de expresar la diagonal de un cuadrado como múltiplo y/o parte de sus les indujo a considerar que existen más segmentos que números. Por ello, para dar respuesta a la necesidad de una teoría que abarcara magnitudes conmensurables e inconmensurables crearon un método de Cálculo Geométrico General conocido como Álgebra Geométrica. Esta fue la vía alternativa para la extensión del dominio numérico de los racionales, recordemos que el concepto de número real no pudo ser definido rigurosamente hasta mediados del siglo XIX. Así la suma era interpretada como adición de segmentos, el producto de a por b como rectángulo de lados a y b, etc. Bajo esta metodología, la resolución de ecuaciones cuadráticas fue vista como problema de anexión de áreas y las identidades algebraicas como conjunto de posiciones geométricas, tal y como vimos antes.

Es, por otra parte, fácil mostrar que la teoría de las mónadas está en contradicción con la experiencia: esa fue una consecuencia de la obra de Zenón de Elea y de los eléatas, como vimos antes.

[156] No se puede hablar con propiedad de números irracionales hasta fines del siglo XIX y principios del XX.

Capítulo IV
Período Ateniense

En muchos textos conocidos de Historia de las Matemáticas, este período está incluido en el siguiente, el Helenístico, nosotros creemos que por la significación para el propio "carácter" de las Matemáticas Griegas, es conveniente estudiarlo separadamente. Cronológicamente, este período lo enmarcamos entre la vida de los matemáticos Teodoro de Cirene y Menecmo, aunque como verán, los límites no son tan inflexibles.

Primero comentemos sobre el ascenso de Atenas como centro cultural del Mundo Griego.

En tiempos muy antiguos, Atenas o el Ática, la península triangular en la que se hallaba emplazada la ciudad, no tenía nada particularmente distinto. Se la menciona en **"La Ilíada"**, pero no era una ciudad destacada entre las fuerzas griegas. Su líder, Menesteo, era de secundaria importancia.

En los siglos posteriores a la Guerra de Troya, el Ática logró sobrevivir a la invasión dórica y a los desórdenes que siguieron. Fue la única parte de la Grecia continental que siguió siendo jónica.

Lentamente, a lo largo de esos remotos siglos, toda el Ática se unió. Esto no se debió a que Atenas lograse la dominación absoluta sobre la otra ciudad del Ática, como la había alcanzado Esparta sobre las otras ciudades de Laconia. Tampoco encabezó una Confederación Ática, como Tebas encabezó la Confederación Beocia. En cambio, Atenas ensayó algo único, que puso los cimientos de su futura grandeza. Se expandió hasta convertirse en una gran ciudad que abarcaba toda la Ática. Una persona nacida en cualquier parte del Ática era considerada tan ateniense como si hubiera nacido en la ciudad misma.

Según las leyendas atenienses, ése había sido el logro del héroe micénico Teseo, padre del Menesteo de la Guerra Troyana. Sin embargo, es muy improbable que la unión del Ática fuese obra de un solo hombre en un momento determinado. Es mucho más verosímil que se produjera gradualmente, a lo largo de generaciones. Sea como fuere, en el 700 a.C. el Ática estaba unificada.

La última parte del Ática que se incorporó a la unión fue Eleusis, situada en la parte noroeste de la península, a unos 22 kilómetros de la ciudad de Atenas. Durante los siglos oscuros que siguieron a la invasión doria, Atenas, como la mayor parte de las otras ciudades de Grecia, cambió sus reyes por una oligarquía.

Según la tradición ateniense, fue en 1068 a.C. cuando la realeza llegó a su fin. El último rey, Codro, luchó desesperadamente contra una invasión doria procedente del Peloponeso. Un oráculo había declarado que vencería aquel ejército cuyo rey muriese primero. Codro se hizo matar deliberadamente para que Atenas siguiera siendo jónica. Un rey tan bueno, decidieron los atenienses, no debía tener sucesor, pues ninguno estaría a su altura (casi con seguridad, esta historia no es más que una novela).

Los atenienses también decían que, en tiempos posteriores a Codro, tenía el poder un *arconte*, voz que significa "gobernante", en vez de un rey. Al principio, el arconte era vitalicio y el cargo pasaba de padre a hijo entre los descendientes de Codro, de modo que difería sólo en el nombre del cargo de rey.

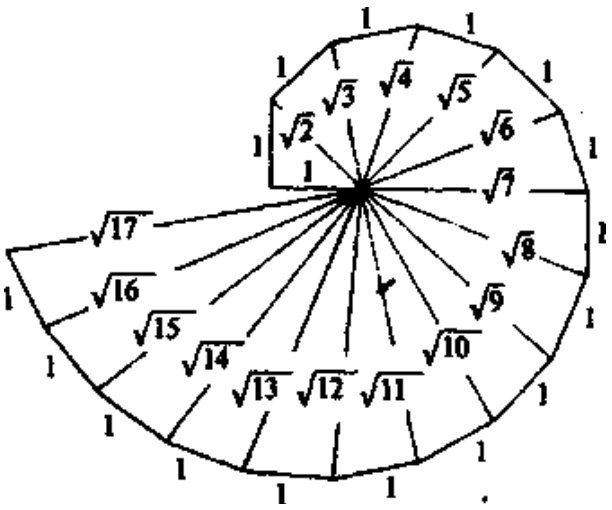
Más tarde, el período del arcontado se fijó en un lapso de diez años, y no pasaba necesariamente de padre a hijo, aunque estaba limitado a los miembros de la familia real. Luego, fue accesible a las restantes familias nobles.

Finalizada la guerra contra los Persas, a inicios del siglo V a.C., Atenas experimentó un notable florecimiento económico y alcanzó un papel hegemónico entre las ciudades estado griegas. En las postrimerías del siglo la devastadora Guerra del Peloponeso entre sus partidarios y los de Esparta, que culminó con la victoria de esta última, debilitó considerablemente el mundo griego de la época que terminó por sucumbir ante el empuje de los conquistadores de Macedonia. En el año 338 a.C., Atenas cayó en manos del Rey Filipo de Macedonia.
Durante este período alcanzaron un notable auge las ciencias y las artes. Fueron creadas obras maestras en arquitectura, escultura y literatura (la Acrópolis, Fidias y las tragedias por ejemplo,. Se desarrollaron influyentes escuelas de pensamiento filosófico, al calor de las cuales se fomentaron nuevos sectores del saber como la Medicina, la Biología y la Historia, a la vez que se sentaron las bases de la Astronomía científica.
Respecto a las Matemáticas, resaltan como principales características: el fortalecimiento de su base metodológica, el entrelazamiento con enfoques ideológicos y la consolidación del Álgebra-Geométrica como medio para superar las dificultades internas. A inicios de esta etapa el trabajo intenso desarrollado, sobre todo por los pitagóricos, llevó la Aritmética a un punto estacionario y la Geometría a un cúmulo de propiedades poco sistematizadas, en su mayoría vinculadas a la solución de los tres problemas clásicos. Los dos obstáculos principales a que se enfrentaban los matemáticos de la época consistían en la falta de:
1. Una teoría que incluyera de forma coherente tanto cantidades conmensurables como inconmensurables, es decir las irracionalidades. Ya que estas aparecían cada vez con mayor frecuencia en los problemas tratados.
2. Un método riguroso que permitiera resolver un grupo de problemas importantes sobre equivalencia de magnitudes geométricas. Por ejemplo, la mencionada cuadratura del círculo, la cubatura de la esfera y la cubatura de la pirámide.

1. Teodoro de Cirene (465-398 a.C.).
Vista históricamente, el Algebra Geométrica se nos presenta como una solución exitosa en el trabajo con los inconmensurables, e hizo posible la perpetuación de la matemática griego-helenística. Los trabajos decisivos para la consolidación del álgebra geométrica los realizaron tres matemáticos, los cuales, en correspondencia con los resultados de los pitagóricos, estaban vinculados a la escuela platónica o procedían de ella: Teodoro de Cirene, Theaitetos y Eudoxo de Cnido.
En el diálogo **"Theaitetos"** Platón enfrenta al anciano Teodoro con el inteligente joven Theaitetos, la escena se desarrolla en el año 399 a.C. en Atenas. El tema del diálogo es el problema de las irracionalidades.
Aquí Teodoro nos trazaba algo de la teoría de los cuadrados y demostraba para los cuadrados de tres y cinco pies de superficie, que las longitudes aisladas no son con-mensurables con las del cuadrado de un pie de superficie y así fue sacando cada uno hasta el cuadrado de 17 pies.
Esto ilustra lo siguiente, Teodoro demostró, formulado de forma moderna, que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$ son números irracionales. Esta cita no ofrece información segura acerca de cómo se realizó la demostración. Una suposición bastante fantástica de Anderhub[157] explica cómo es que Teodoro se detuvo precisamente en $\sqrt{17}$. Su método consistía en una aplicación continua del Teorema de Pitágoras para la construcción de segmentos con las longitudes $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, y posteriormente en la aplicación del

[157] H. J. Anderhub-**"Joco-Seria. De los papeles de un comerciante en viaje"**, Wiesbaden, 1941.

método de extracción alterna. Del trazado se desprende inmediatamente por qué Theodoro terminó en √17.



2. La ideología platónica y su influencia sobre el desarrollo de las Matemáticas.

Tal vez la mayor personalidad filosófica en la historia haya sido Sócrates, su célebre *"Sólo sé que no sé nada"* era la base de su filosofía. Nacido en el 469 a.C., practicó un diálogo continuo con sus alumnos hasta que fue sentenciado a muerte, condena que cumplió bebiendo cicuta en el 399 a.C. A diferencia de los sofistas, Sócrates se negó a aceptar dinero por sus enseñanzas, afirmando que no tenía ninguna certidumbre que ofrecer excepto la conciencia de la necesidad de más conocimiento. Sócrates no dejó ningún escrito, pero sus enseñanzas fueron preservadas para generaciones posteriores en los diálogos de su famoso discípulo Platón y también aparecen en los escritos de Jenofonte. Sócrates enseñó que cada persona tiene pleno conocimiento de la verdad última dentro de su alma y que sólo necesita llevarlo a la reflexión consciente para darse cuenta. Por ejemplo, en **"Menón"** (uno de los diálogos de Platón) Sócrates plantea a través de una ficción la forma en que un esclavo ignorante puede llegar a la formulación del Teorema de Pitágoras, demostrando así que el conocimiento está innato en el alma, en vez de ser implícito o indisociable de la experiencia. Sócrates creía que el deber del filósofo era provocar que la gente pensara por sí misma, en vez de enseñarle algo que no supiera. Por eso se decía partero de ideas. Su contribución a la historia de la filosofía no fue una doctrina sistemática, sino un método de reflexión, la mayéutica, y un tipo de existencia. Hizo hincapié en la necesidad de un examen analítico de las creencias de cada uno, de definiciones claras de los conceptos básicos, y de un planteamiento racional y crítico de los problemas éticos.

La Escuela Platónica sucedió a los sofistas a la cabeza de la actividad matemática. Sus precursores inmediatos, Teodoro de Cirene, en el norte de Africa y Arquitas de Tarento, en el sur de Italia fueron pitagóricos y maestros ambos de Platón, de manera que sus enseñanzas pudieron haber sido las que dieron lugar a la fuerte influencia pitagórico en toda la escuela de Platón.

Como dijimos antes, a Teodoro se le atribuye el haber demostrado que las razones que nosotros representamos por √3, √5, √7, ..., √17 son todas inconmensurables con la unidad. Arquitas, por su parte, introdujo la idea de considerar una curva como generada por un punto en movimiento, y una superficie generada por una curva en movimiento. Usando esta idea resolvió el problema de la duplicación del cubo, tal y como presentamos, hallando dos medias proporcionales entre dos cantidades dadas; estas medias proporcionales se construyen geométricamente hallando la intersección de tres superficies: la que genera una circunferencia girando alrededor de una tangente, un cono y un cilindro. Arquitas escribió también sobre mecánica matemática, diseñó maquinas, estudió el sonido y contribuyó a las escalas musicales mediante ciertos inventos y algo de teoría.

La Escuela Platónica estuvo encabezada, naturalmente por Platón, e incluyó entre sus miembros a Menecmo y su hermano Dimostrato (siglo IV a.C.) y a Teeteto (c.415-c.369 a.C.). A muchos otros miembros se les conoce solo de nombre.

Platón (429-348 a.C.) y la Academia de Atenas.

Entre las escuelas de pensamiento filosófico el mayor interés para las Matemáticas lo tuvo la Academia de Atenas fundada por Aristocles de Atenas, más conocido como Platón.

La Academia constituyó una continuidad de los trabajos desarrollados por los pitagóricos. El propio Platón mantuvo una estrecha relación con miembros de la hermandad, en especial con Teodoro de Cirene y Arquitas de Tarento (de quienes se dice fue discípulo).

Teodoro de Cirene se dedicó fundamentalmente al estudio de las irracionalidades y demostró la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$. Más tarde su discípulo Teeteto de Cnido llevó a cabo un proyecto para clasificar las irracionalidades cuadráticas, es decir, aquellos segmentos inconmensurables que forman un cuadrado cuya superficie es un número entero.

Una cita de la **"República"** de Platón puede servir para ilustrar la concepción contemporánea de los objetos matemáticos. Sócrates se dirige a Glaucón *"Si...Entonces este es un conocimiento del tipo que estamos buscando, que tiene un doble uso, militar y filosófico; pues el hombre de guerra debe aprender el arte de los números o no sabrá como disponer sus tropas, y el filósofo también, porque tiene que salir del mar del cambio y buscar el verdadero ser, y por lo tanto debe ser un aritmético... Por lo tanto este es un tipo de conocimiento que la legislación puede prescribir adecuadamente, y debemos intentar persuadir a los que estén destinados a ser hombres principales de nuestro Estado para que aprendan aritmética, pero no solo como aficionados, sino que deben proseguir ese estudio hasta ver la naturaleza de los números solo con la mente; y no, una vez más, como los mercaderes o los tenderos al por menor, con la vista puesta en vender o comprar, sino por su utilidad militar y para el alma misma, debido a que este será el camino más fácil para ella de pasar del cambio a la verdad y el ser... Entiendo, como estaba diciendo, que la aritmética tiene un gran efecto de elevación, impulsando al alma a razonar sobre el numero abstracto, y rechazando la introducción de objetos visibles o tangibles en el razonamiento..."*

Platón nació en una familia distinguida, y de joven tuvo ambiciones políticas, pero la suerte de Sócrates le convenció de que no había lugar en la política para un hombre de conciencia. Viajó a Egipto y visito a los pitagóricos en el sur de Italia; la influencia pitagórica pudo producirse a través de estos contactos. Hacia el 387 a.C., fundó Platón su Academia en Atenas, la cual se parecía en muchos sentidos a una universidad moderna. La Academia disponía de terrenos, edificios, estudiantes, y allí daban cursos formalmente Platón y sus ayudantes. Durante el período clásico se vio especialmente favorecido el estudio de la filosofía y de la matemática, y aunque el principal centro matemático se desplazó hacia Alejandría el 300 a.C., la Academia siguió manteniendo su preeminencia en filosofía durante todo el periodo alejandrino. En total duró casi 900 años hasta su cierre por orden del emperador cristiano Justiniano el año 529 d.C., *"porque enseñaba conocimientos paganos y perversos"*.

Platón, que fue uno de los hombres más sabios de su época, no era matemático, pero su entusiasmo por ella y la creencia de su importancia para la filosofía y para el entendimiento del universo, hizo que animara a los matemáticos a cultivarla.

Es notable, y así hay que destacarlo, que casi todas las obras matemáticas importantes del siglo IV se deban a amigos o discípulos de Platón. Platón mismo parece haber estado más interesado en mejorar y perfeccionar lo que ya se conocía. Platón estimuló considerablemente el desarrollo de conocimientos matemáticos en su Academia y consideró que ésta era un arte filosófico, cuyo estudio es imprescindible para la formación de individuos intelectualmente capaces. Su concepción del mundo de las Matemáticas como intermediario entre el mundo de las ideas y el de las cosas, avala el sentido de la famosa frase que presidía el frontispicio de la Academia *"Que no entre nadie que no sepa Geometría"*. Contribuyó a la divulgación de los resultados matemáticos e imprimió nuevo impulso al programa de matematizar fenómenos naturales, en su decir *"es el saber matemático el que concede carácter científico a todas las artes"*. Pero, por otra parte, su ideal de ciencia matemática de razonamiento puro desterró los métodos de cómputos y medición, así como las aplicaciones prácticas. La regla y el compás fueron santificados como únicos medios auxiliares posibles de construcción, en correspondencia con el ideal de recta y círculo como perfección de lo recto y lo curvo. Así, el estudio de las secciones cónicas y otras curvas algebraicas o trascendentes fue menospreciado por considerársele meras vulgarizaciones de estas perfecciones.
No obstante, esta actitud significó un fortalecimiento de la base metodológica de la Matemática como ciencia puramente deductiva y una sistematización lógica severa de todos sus conocimientos que alcanzó un punto cumbre en los **"Elementos"** de Euclides.
Quizás su contribución metodológica más importante fue la diferenciación entre el "Método Analítico" como método heurístico que consiste en suponer el resultado a demostrar como cierto o el problema planteado como resuelto y mediante verdades ya probadas reducirlo a un teorema o problema conocido, de forma tal que mediante el proceso inverso el teorema queda demostrado o el problema resuelto y el "Método Sintético" que corresponde al proceso inverso, es decir partiendo de una verdad conocida deducir la verdad a probar. Aunque sin dudas el "Método Analítico" fue ampliamente utilizado por los griegos en las investigaciones geométricas como método de descubrimiento; en la enseñanza predominó el método constructivo sintético. Por ello es frecuente encontrar que, para la demostración de un resultado, parten de otros resultados aparentemente ajenos, de donde se desencadenan toda una serie de consecuencias lógicas hasta que ingeniosamente se llega al resultado deseado.

Teeteto[158]. Hijo de Eufronio, del demo ateniense de Sunium, fue un matemático destacado. Platón le coloca como interlocutor principal de Sócrates en dos de sus diálogos, **"El Sofista"** y el llamado **"Teeteto"**.
Teeteto, como Platón, estudió bajo la dirección del matemático Teodoro de Cirene. Cirene era una próspera colonia griega en la costa del norte de África, en la actual Libia, al este del golfo de Sidra. Teodoro desarrolló la teoría de las cantidades inconmesurables y Teeteto continuó sus estudios, clasificando varias formas de números irracionales como expresiones de raíces cuadradas. Esta teoría está expuesta con gran detalle en el libro X de los **"Elementos"** de Euclides.

[158] En griego Θεαίτητος, en latín *Theaetetus* o *Theaitetos* (Atenas 417 a.C.-369 a.C.)

Participó en la batalla entre Atenas y Corinto en el año 369 a. C. Distinguido en la guerra, fue herido y enviado de regreso a Atenas, en donde contrajo disentería y murió ese mismo año a causa de la enfermedad.

3. Eudoxio de Cnido (408-355 a.C.).

El más grande de todos los matemáticos griegos de la época clásica, superado solo seguramente por Arquímedes en la antigüedad, al que Eratóstenes llamó *"divino"*. Nació en Cnido, en Asia Menor, hacia el 408 a.C., estudió con Arquitas en Tarento, viajo a Egipto, donde aprendió astronomía, y después fundó una escuela en Cyzico en el norte de Asia Menor. Hacia el 368 a.C. se unió a la escuela de Platón junto con sus discípulos, para regresar algunos años más tarde a Cnido, donde murió hacia el 355 a.C. Habiendo sido astrónomo, medico, geómetra, legislador y geógrafo, probablemente sea más conocido como creador de la primera teoría astronómica de los movimientos celestes.

Su primera contribución importante a la matemática fue una nueva teoría de las proporciones. El descubrimiento de un número cada vez mayor de irracionales (o razones inconmensurables) hizo necesario para los griegos hacer frente a estos números; pero ¿eran realmente números? Aparecían en razonamientos geométricos mientras que los números enteros y las razones entre números enteros aparecían tanto en geometría como en el estudio general de la cantidad. Pero ¿cómo se podrían extender las demostraciones geométricas que se habían hecho para longitudes, áreas y volúmenes conmensurables a los inconmensurables?

Eudoxo introdujo la idea de magnitud continua. No se trataba de un número, sino de entidades tales como segmentos rectilíneos, ángulos, áreas, volúmenes, tiempo, etc., que podían variar, como si dijéramos de una manera continua. Las magnitudes se oponían en esto a los números, que saltaban de un valor a otro, como del cuatro al cinco, mientras que a las magnitudes no se las asignaba ningún valor cuantitativo. Eudoxo definía entonces una razón de magnitudes y a partir de ella una proporción, es decir, una igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables. Sin embargo, una vez más, no se utilizaba número alguno para expresar tales razones. Los conceptos de razón y proporción estaban ligados así a la geometría.

Lo que consiguió así Eudoxo fue evitar los números irracionales en tanto que números, es decir, evitó darles valores numéricos a las longitudes de segmentos, tamaños de ángulos y otras magnitudes, así como a las razones de magnitudes. Mientras la teoría de Eudoxo permitió a los matemáticos griegos hacer grandes progresos en geometría, sumistrándoles los fundamentos lógicos necesarios para las razones inconmensurables.

También tuvo varias consecuencias desafortunadas. Por mencionar una, forzó una nítida separación entre numero y geometría, dado que únicamente la geometría podía manejar las razones inconmensurables, pero también hizo de los matemáticos geómetras, y la geometría iba a convertirse en la base de casi toda la matemática rigurosa durante los dos mil años siguientes. Nosotros decimos aún x^2, "*x cuadrado"* y x^3, *"x cubo"* en lugar de, digamos, *x segunda* o *x tercera*, debido a que las magnitudes x^2 y x^3 solo tenían un significado geométrico para los griegos.

La solución de Eudoxo al problema de cómo tratar las magnitudes inconmensurables o los números irracionales invirtió, de hecho, el punto de vista de la matemática griega anterior. Los pitagóricos primitivos habían puesto ciertamente el énfasis en el número como concepto fundamental, y Arquitas de Tarento, maestro de Eudoxo, afirmaba que solo la aritmética y no la geometría podía dar demostraciones

satisfactorias. Sin embargo, al volver a la geometría para manejar los números irracionales, los griegos abandonaron el álgebra y los números irracionales como tales. Pero ¿qué es lo que hicieron para resolver ecuaciones cuadráticas, donde las soluciones son frecuenemente números irracionales? y ¿de qué manera trataron el sencillo problema de hallar el área de un rectángulo de lados inconmensurables? La respuesta a ambas preguntas es la de que transformaron la mayor parte del álgebra en geometría en un proceso que se analizará más tarde. La representación geométrica de los irracionales y de las operaciones con ellos no era practica, evidentemente. Puede resultar lógicamente satisfactorio pensar en $\sqrt{2}\sqrt{3}$ como el área de un rectángulo, pero si se necesita saber el producto para comprar mosaicos, por ejemplo, no dará resultado.

Aunque los griegos dedicaron sus mayores esfuerzos en Matemáticas a la geometría, no hay que olvidar que los números enteros y las razones entre ellos siguieron siendo conceptos perfectamente aceptables. Este campo de la matemática, aparece organizado deductivamente en los libros VII, VIII y IX de los **"Elementos"** de Euclides; el material en cuestión cubre esencialmente lo que llamamos teoría de números o estudio de las propiedades de los enteros.

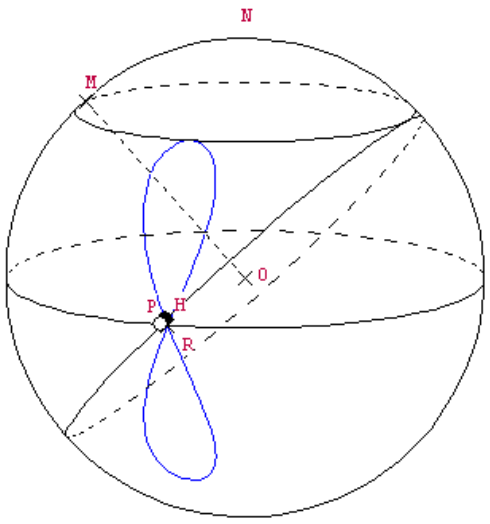
La siguiente pregunta se plantea de manera natural ¿Quéhicieron los griegos con la necesidad de los números en la investigación científica, así como en el comercio y en otros asuntos prácticos? Por un lado, la ciencia griega clásica fue cualitativa. En cuanto a los usos prácticos de los números, ya se ha dicho que los intelectuales de la época se limitaron a las actividades filosóficas y científicas y no se ocuparon del comercio ni de los oficios; el hombre cultivado no se interesaba por los problemas prácticos. Pero uno puede pensar en todos los rectángulos de la geometría sin referirse para nada a las dimensiones concretas de ninguno de ellos. El pensamiento matemático se vio así separado de las necesidades prácticas, y los matemáticos no encontraron motivación para mejorar las técnicas aritméticas y algebraicas. Cuando las barreras entre las clases cultivadas y los esclavos se hicieron menos estrictas en este período y el siguiente y los hombres cultos se interesaron por los asuntos prácticos, el énfasis se desplazó al conocimiento cuantitativo y al desarrollo de la aritmética y el álgebra.

Volviendo a las contribuciones de Eudoxo, también se debe a él el poderoso método griego para hallar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas que nosotros llamamos método de exhaució (el cual se profundizará más tarde). Se trata realmente de la primera etapa en la historia del cálculo infinitesimal, pero no utiliza una teoría de límites explícita. Con su ayuda demostró Eudoxo, por ejemplo, que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, que los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus radios, que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma con la misma base y altura, y que el volumen de un cono es un tercio del cilindro correspondiente.

Siempre puede encontrarse un motivo u otro para atribuir a cualquier escuela, desde Tales en adelante, el haber introducido la organización deductiva de la matemática, pero es incuestionable, sin embargo, que la obra de Eudoxo estableció la organización deductiva *sobre la base de unos axiomas explícitos*. La razón para ello fue sin duda la necesidad de entender y operar con razones inconmensurables. Dado que Eudoxo abordó la tarea de construir la base lógica precisa para estas razones, es lo más verosímil que viera la necesidad de formular axiomas y deducir consecuencias una por una, de manera que no se cometieran errores con estas magnitudes extrañas y conflictivas. Esta necesidad de manejar razones inconmensurables vino también a reforzar, sin duda, la decisión anterior de

apoyarse exclusivamente en el razonamiento deductivo de las demostraciones.
Como los griegos buscaban verdades y habían decidido utilizar las demostraciones deductivas, tenían que basarse en axiomas que fueran verdaderos, y encontraron, en efecto, afirmaciones cuya veracidad era evidente para ellos, aunque las justificaciones dadas para aceptar los axiomas como verdades indiscutibles fueran diversas. Casi todos los griegos creían que la mente era capaz de reconocer estas verdades y Platón, en particular, aplicó su teoría de la *anamnesis*, según la cual hemos tenido ya una experiencia directa de las verdades en un período de existencia como almas en otro mundo antes de venir a la tierra, y no tenemos más que recordar esta experiencia para saber que estas verdades influyen a los axiomas de la geometría; no es necesaria ninguna experiencia en la tierra. Algunos historiadores pretenden ver en esto, la idea de que puede haber alguna arbitrariedad en los axiomas, con tal solamente de que sean claros y verdaderos en la mente del matemático individual. Lo importante es razonar deductivamente sobre la base los axiomas elegidos. Aristóteles tenía mucho que decir sobre los axiomas.
Indudablemente, la obra de Eudoxo es una muestra de la madurez teórica y el rigor lógico alcanzado por la Geometría. Creando las condiciones previas para lo que sería la época de mayor esplendor de la Matemática Griega.
Naturalmente, es estrictamente cierto que en el transcurso de investigaciones matemáticas que va de Eudoxo a Euclides, se formó la Geometría como una nueva disciplina matemática.
Sus aportaciones principales en la Astronomía son, la invención de la esfera astronómica y aportes para comprender el movimiento de los planetas y con respecto a la primera de las aportaciones encima mencionadas, queríamos hablar sobre una curva que él mismo introdujo, *la hipopede*.

La Hipopede de Eudoxo.
Supongamos una esfera con centro O que gira alrededor de un eje ON. Sea un punto M en esa esfera que gira y sea P un punto de intersección de los círculos máximos perpendiculares a ON y OM. Si mientras gira la esfera un punto H parte de P y se mueve por el círculo máximo perpendicular a OM a la misma velocidad angular que la esfera y en sentido contrario, ese punto H describe una curva con forma de 8 en el espacio.

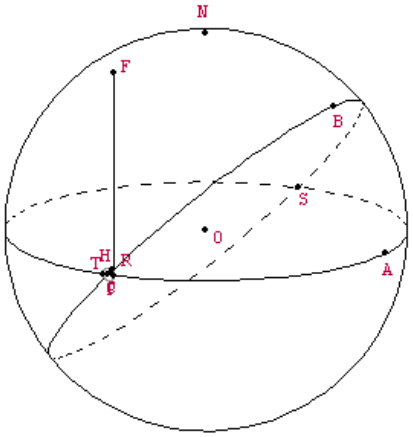


Según cuenta Simplicio, comentarista de Aristóteles del siglo VI, Eudoxo llamó *hipopede* a esa curva.
Si R es el punto del espacio en que coinciden en su movimiento P y H, el ángulo POR es siempre igual al ángulo POH.
Schiaparelli[159] observó que la hipopede es la intersección de la esfera con un cilindro tangente interiormente a la esfera en el punto R y que también es la intersección de la esfera con un cono cuyo eje es tangente a la esfera por R y

[159] Giovanni Virginio Schiaparelli astrónomo italiano que nació en Savigliano, cerca de Cúneo, el 14 de marzo de 1835 y murió en Milán, el 4 de julio de 1910.

paralelo a ON, y dio una demostración elemental de estos hechos, pero la prueba que sigue es más sencilla.

Suprimimos el giro de la esfera, pero dejamos que H se siga moviendo por su círculo máximo (círculo PBS de la figura), alejándose de P. Si al mismo tiempo que H sale de P salen de P dos puntos R y T moviéndose por el círculo máximo perpendicular a ON (círculo PAS de la figura) en sentidos opuestos y a la misma velocidad angular que H sobre su círculo, el plano en que están H, R y T en cada instante será siempre paralelo al plano tangente a la esfera en P.



Ese plano corta a la esfera en un círculo de diámetro RT y por tanto el ángulo RHT es recto. Entonces el ángulo HTR es complementario del ángulo HRT. Si FR es perpendicular al plano PAS, el ángulo FRH también es complementario del ángulo HRT, y entonces los ángulos FRH y HTR son iguales.

Pero el ángulo HTR inscrito en el círculo de diámetro RT es la mitad del ángulo central para el mismo arco, que es el ángulo entre los planos PAS y PBS.

Por tanto el ángulo entre las rectas FR y HR es constante. Y como los triángulos HRT, en sus diferentes posiciones, son semejantes, la razón RC/RT es constante, donde C es el pie de la perpendicular desde H sobre RT.

Ahora, si hacemos girar la esfera alrededor del eje ON a la misma velocidad angular que el punto R y en sentido contrario, el punto R quedará fijo en el espacio en la posición que ocupaba P y el punto H describirá la hipopede. Como el ángulo entre FR y HR es constante, HR es generatriz de un cono con eje FR, y como RC/RT es constante, el punto C describe una curva que es el resultado de aplicar una homotecia con centro R a la curva que describe el punto T, es decir, describe un círculo. Y como la hipopede se proyecta sobre ese círculo, está en un cilindro.

Como corolario, obtenemos que la curva intersección de un cilindro con un cono cuyo eje sea una generatriz del cilindro es una hipopede de Eudoxo y, por tanto, una curva esférica.

En la reconstrucción por Schiaparelli de la teoría astronómica de las esferas homocéntricas de Eudoxo, el movimiento del planeta sobre la hipopede que producen las dos esferas más interiores (de las 4 que usa para cada planeta) sirve para explicar las retrogradaciones planetarias, es decir los retrocesos transitorios que se observan en las trayectorias de los planetas vistos desde la Tierra moviéndose sobre el fondo de estrellas fijas.

4. Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) y el Liceo.

Otras de las escuelas de pensamiento filosófico que tuvo repercusión en las Matemáticas fue fundada por el discípulo de Platón: Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) que nació en Estagira, ciudad de Macedonia de donde le proviene el adjetivo de pertenencia. Durante 20 años fue discípulo de Platón y durante otros 3 años, del 343 al 340 a.C., fue tutor de Alejandro Magno. El año 335 a.C. fundó su propia escuela, el Liceo, con un jardín, un aula y un altar a las Musas.

Aristóteles escribió sobre mecánica, física, matemática, lógica, meteorología, botánica, psicología, zoología, ética, literatura, metafísica, economía y muchos otros temas. No hay ningún libro dedicado exclusivamente a la matemática, pero

en diversos lugares aparecen discusiones sobre la materia, que utiliza como ejemplos en muchos contextos.
Aristóteles, que empezó a estudiar en la Academia de Platón con 17 años, en el 367 a.C., es considerado el más ilustre discípulo de Platón y se sitúa junto con su maestro entre los más profundos e influyentes pensadores del mundo. Después de asistir durante varios años a la Academia de Platón, Aristóteles se convirtió en el preceptor de Alejandro Magno. Más tarde regresó a Atenas para fundar el Liceo, una escuela que, al igual que la Academia de Platón, fue durante siglos uno de los grandes núcleos de enseñanza en Grecia. En sus conferencias, Aristóteles definió los conceptos y principios básicos de muchas de las ciencias teóricas, como la lógica, la biología, la física y la psicología. Al establecer los rudimentos de la lógica como ciencia, desarrolló la teoría de la inferencia deductiva, representada por el silogismo (proposición deductiva que utiliza dos premisas y una conclusión), y un conjunto de reglas para fundamentar lo que habría de ser el método científico.
En su teoría metafísica Aristóteles discutió la separación que hizo Platón de idea y materia, y afirmó que las ideas o esencias están contenidas dentro de los objetos mismos que las ejemplifican. Para Aristóteles, cada cosa real es una mezcla de potencia y acto; en otras palabras, cada cosa es una combinación de aquello que puede ser (pero que todavía no es) y de aquello que ya es (también distinguido como materia y forma), porque todas las cosas cambian y se convierten en otra cosa diferente de lo que son, excepto los intelectos activos humanos y divinos, que son formas puras.
Para Aristóteles la naturaleza es un sistema orgánico de cosas cuyas manifestaciones comunes hacen posible ordenarlas en clases de especies y géneros; cada especie tiene una forma, propósito y modo de desarrollo en cuyos términos se puede expresar. El fin de la ciencia teórica es definir las actitudes, propósitos y modos esenciales de desarrollo de todas las especies y disponerlos en su orden natural de acuerdo con sus complejidades según su forma, siendo los principales niveles el inanimado, el vegetativo, el animal y el racional. El alma, para Aristóteles, es la forma o realidad del cuerpo, y los humanos, cuyo espíritu racional constituye una forma más elevada que la de las demás especies terrenales, la más elevada dentro de las perecederas. Los cuerpos celestes, compuestos de una sustancia imperecedera o éter, y movidos en un perfecto movimiento circular por Dios, son todavía más altos en el orden de la Naturaleza. Esta clasificación jerárquica de la Naturaleza se adoptó por muchos teólogos cristianos, judíos y musulmanes en la Edad Media como una visión de la Naturaleza.
La filosofía política y ética de Aristóteles, surgió también de un examen crítico de los enunciados platónicos. Las normas de conducta personal y social, según Aristóteles, pertenecen al estudio científico de las tendencias naturales de los individuos y las sociedades en vez de contemplarse en la esfera celeste de las ideas puras. Menos insistente que Platón en una conformidad rigurosa respecto a los principios absolutos, Aristóteles consideró las reglas éticas como guías prácticas para alcanzar una vida feliz y plena. El énfasis que puso en la felicidad, como el cumplimiento de las capacidades naturales, expresó la actitud hacia la vida que mantuvieron los griegos cultos de su tiempo. En teoría política adoptó una posición más realista que Platón. Se mostró conforme con el modelo de una monarquía gobernada por un rey sabio que llegaría a representar la estructura política ideal, pero reconocía asimismo que las sociedades difieren en sus necesidades y tradiciones, y creía que una democracia limitada conforma y ordena el mejor compromiso concebible. En su teoría del conocimiento, Aristóteles rechazó la doctrina platónica por la que el saber

es innato e insistió en que sólo puede adquirirse mediante la generalización desde la experiencia. Interpretó el arte como una vía al servicio del placer y de la ilustración intelectual en lugar de ser un instrumento de educación moral. Su análisis de la tragedia griega ha servido como modelo fundacional de la crítica literaria.

Aristóteles consideraba a las ciencias clasificadas en tres tipos: teóricas, productivas y prácticas. Las teóricas, que son las que buscan la verdad, son la matemática, la física (óptica, armonía y astronomía), y la metafísica; de ellas la más exacta es la matemática. Las ciencias productivas son en realidad las artes, y las prácticas, como por ejemplo la ética y la política, y tratan de regular las acciones humanas. En las ciencias teóricas la lógica es previa a los diversos temas de incluidos en ellas, y el metafísico discute y explica lo que el matemático y el filosofo natural (o científico) toma como dado, por ejemplo el ser o realidad de la materia y el tipo de los axiomas.

No obstante, aunque Aristóteles no contribuyó con resultados matemáticos nuevos de importancia (a pesar que algunos Teoremas de Euclides se le atribuyen), sus teorías sobre la naturaleza de la matemática y sus relaciones con el mundo físico ejercieron una gran influencia. Mientras Platón creía que había un mundo independiente y eterno de las ideas, que constituía la realidad del universo y del que formaban parte los conceptos matemáticos, Aristóteles atribuía este papel a la materia o sustancia concreta. Sin embargo, también llego a poner énfasis en las ideas, es decir en las esencias universales de los objetos físicos, tales como dureza, blandura, gravedad, ligereza, esfericidad, frialdad y calor. Los números y las formas geométricas eran también propiedades de los objetos reales; se reconocían por abstracción pero pertenecían en realidad a los objetos mismos. Así, la matemática trabaja con conceptos abstractos que se derivan de propiedades de los cuerpos físicos.

Aristóteles discute también el concepto de definición. Su idea de definición es la moderna y la denomina un nombre para una colección de palabras señalando también que una definición correcta debe estar expresada en términos de algo previo a la cosa definida. Así, por ejemplo, critica la definición “un punto es aquello que no tiene partes”, porque las palabras “aquello que” no dicen a que se refieren, excepto posiblemente a “punto”, y por lo tanto la definición no seria correcta. Reconoce, evidentemente, la necesidad de términos indefinidos, puesto que debe haber un punto de partida para la serie de definiciones, pero los matemáticos posteriores olvidaron esta necesidad hasta finales del siglo XIX.

Advierte también (como había dicho anteriormente Platón, según Plutarco) que una definición nos dice lo que es una cosa, pero no que la cosa misma exista. La existencia de las cosas definidas tiene que demostrarse excepto en el caso de unas pocas cosas primarias tales como el punto y la recta, cuya existencia se supone en los primeros principios o axiomas. Se puede definir un cuadrado pero tal figura puede no existir, es decir, las propiedades exigidas en la definición pueden ser incompatibles. Leibniz puso el ejemplo de un poliedro regular de 10 caras; uno puede definir naturalmente tal figura, pero no existe. Si no se comprueba que esta figura existe, y se procede a demostrar teoremas acerca de ella, los resultados no tendrán sentido. El método de demostrar la existencia que adoptaron Aristóteles y Euclides fue el de la construcción. Los tres primeros axiomas de los **“Elementos”** de Euclides garantizan la construcción de rectas y circunferencias; todos los conceptos matemáticos restantes han de ser construidos para establecer su existencia, es decir, en términos concretos estamos demostrando teoremas de existencia. Así, los trisectores de ángulos, aunque sean evidentemente definibles, no

son construibles con rectas y circunferencias y por tanto no podían admitirse en la geometría griega.

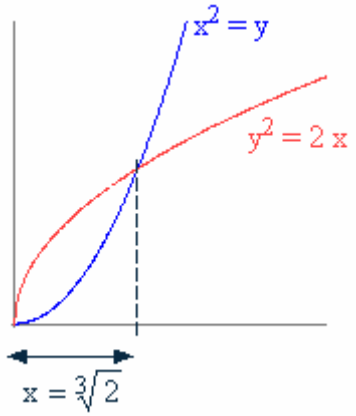
Aristóteles se ocupa también de los principios básicos de la matemática, distinguiendo entre los axiomas o nociones comunes, que son verdades comunes a todas las ciencias, y los postulados, que son primeros principios aceptables para una ciencia concreta. Entre los axiomas incluye los principios lógicos, tales como la ley de contradicción, la ley del tercio excluso, el axioma de que si se suman o restan cosas iguales de otras iguales los resultados son iguales, y otros principios análogos. Los postulados no necesitan ser auto-evidentes sino que su verdad debe venir garantizada por las consecuencias que se derivan de ellos. La colección de axiomas y postulados ha de ser lo más reducida posible, con tal de que permitan demostrar todos los resultados. Aunque, como se verá, Euclides utiliza la distinción de Aristóteles entre nociones comunes y postulados, todos los matemáticos hasta principios del XIX pasaron por alto esta distinción y trataron los axiomas y los postulados como igualmente auto-evidentes. Según Aristóteles, los axiomas se obtienen de la observación de los objetos físicos, de los que son generalizaciones aprehendidas de modo inmediato. Tanto él como sus seguidores dieron muchas definiciones y axiomas o mejoraron otros anteriores y algunas de las versiones aristotélicas las incluye directamente Euclides.

Aristóteles discute los problemas fundamentales acerca de las relaciones entre puntos y rectas. Un punto, dice, es indivisible y tiene posición; pero entonces ninguna acumulación de puntos, por muchos que incluyera, podría darnos algo divisible, mientras que una recta es desde luego una magnitud divisible. Por lo tanto los puntos no pueden construir nada continuo como una recta, pues un punto no puede ser continuo con otro punto. Un punto, añade, es como el ahora en el tiempo; el ahora es indivisible y no una parte del tiempo. Un punto puede ser un comienzo, un final o un divisor en un segmento pero no es parte de él ni de ninguna magnitud. Solamente por *movimiento* puede un punto generar una recta y ser así origen de la magnitud. También afirma que, puesto que un punto no tiene longitud, si una recta estuviera compuesta de puntos tampoco tendría longitud y, análogamente, si el tiempo estuviera compuesto de instantes no habría ningún intervalo de tiempo. Su definición de continuidad, propiedad que posee una recta, es la siguiente: una cosa es continua cuando los limites en los que se tocan dos partes sucesivas cualesquiera son uno y el mismo y están, como la palabra misma continuo implica, juntos. En realidad hace diversas afirmaciones sobre las magnitudes continuas que no concuerdan unas con otras. El núcleo de su teoría, sin embargo, es que los puntos y los números son cantidades discretas y hay que distinguirlas de las magnitudes continuas de la geometría; no hay continuo en la aritmética. En cuanto a la relación entre estos dos campos, considera a la aritmética (es decir, a la teoría de los números) como mas exacta, porque los números se prestan mas fácilmente a la abstracción que los conceptos geométricos. También considera a la aritmética como previa a la geometría, porque el número 3 es necesario para considerar un triángulo.

Al discutir el infinito hace Aristóteles una distinción, importante aún hoy, entre el infinito potencial y el infinito actual. La edad de la tierra, si es que tubo un comienzo, es potencialmente infinita pero en ningún instante es actualmente infinita. Según él, solo existe el infinito potencial. Los enteros positivos, concede, son potencialmente infinitos porque siempre podemos añadir 1 a cualquier número y obtener otro distinto, pero el conjunto infinito, como tal, no existe. La mayor parte de las magnitudes, incluso, no pueden ser ni siquiera potencialmente infinitas, porque

si se añadiera de una manera indefinida podrían exceder los limites del Universo. El espacio, sin embargo, si es potencialmente infinito en el sentido de que puede ser subdividido indefinidamente, y el tiempo es potencialmente infinito en los dos sentidos.
Esta distinción entre el infinito actual y el potencial (*"el horror al infinito"*), se convirtió en una de los defectos de la matemática griega[160]. Esto impidió, entre otras cosas, concebir la idea de la convergencia tal y como la manejamos hoy.
Uno de los logros más importantes de Aristóteles fue la fundamentacion de la ciencia de la lógica. Los griegos habían hecho ya el trabajo básico para fundar la lógica al producir razonamientos matemáticos correctos, pero correspondió a Aristóteles codificar y sistematizar las leyes que siguen estos razonamientos en una disciplina separada. Los escritos de Aristóteles dejan muy claro que derivo la lógica de la matemática. Los principios básicos de su lógica, la ley de contradicción, que afirma que una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa, y la ley del terecero excluso, que afirma que una proposición debe ser verdadera o falsa, están en el centro mismo del método de demostración indirecto en matemáticas; por otra parte, Aristóteles utiliza abundantes ejemplos matemáticos tomados de textos contemporáneos para ilustrar sus principios de razonamientos. Esta lógica aristotélica permaneció prácticamente incólume hasta el siglo XIX.

5. Menecmo (380-325 a.C.).
Nació alrededor del año 380 a.C. en Alopeconnesus, Turquía, Asia Menor y murió en el año 325 a.C. Posiblemente, fue estudiante de Eudoxo y se cree que trabajaba cerca de su ciudad.
Se dice que Menecmo (en latín, Menaechmus) fue tutor de Alejandro el Grande, lo cual no es del todo imposible, pues Aristóteles pudo haber sido el enlace entre ellos. También, se dice que fue el director de la Escuela en Cyzico.
De lo que sí se tiene certeza, es que resolvió el problema de la duplicación del cubo utilizando secciones cónicas. Platón no estaba de acuerdo con las soluciones mecánicas de Menecmo porque creía que con estas soluciones lo único que lograba era rebajar el estudio de la geometría.
Aún así, el trabajo de Menecmo se centró en el desarrollo de la geometría, e hizo un estudio donde discutió la distinción entre teoremas y problemas, a pesar de que muchos habían dicho que eran diferentes. Aún así, Menecmo sostuvo que no existía ninguna diferencia fundamental.
Se sabe que él obtuvo una aproximación de π estableciendo la desigualdad $22/7<\pi<223/71$ y también la curva fundamental de la parábola cuya ecuación es $y^2= 2px$ al considerar un solo cono y hacer variar la oblicuidad del plano que lo corta. Las otras dos curvas las caracteriza por $y^2<2px$, que equivale a la hipérbola. Fue fundador de la astronomía matemática griega, usando modelos geométricos para explicar la teoría planetaria.

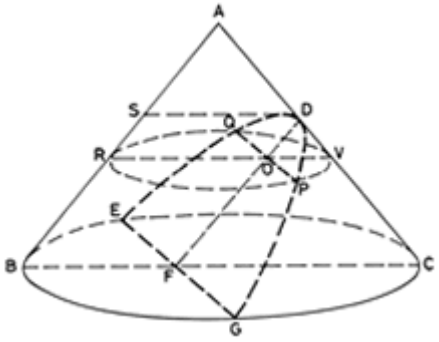


Como dijimos antes, se le atribuye a Menecmo el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola, la llamada *"Triada de Menecmo"*. Sabemos que fue un feliz

[160] Ver footnote 103 de la página 62, teniendo en cuenta la diferencia entre los **"Elementos"** de Euclides y los **Grundlagen der Geometrie"** de Hilbert de 1899.

hallazgo relacionado con el problema délico. Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.

Partiendo de un cono circular recto de una sola hoja con ángulo recto en el vértice, Menecmo descubrió que al cortar el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices, la curva intersección es tal que su *ecuación* (utilizando de nuevo un anacronismo en términos de Geometría Analítica moderna) puede escribirse en la forma $y^2=lx$, donde l es una constante, que depende exclusivamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección. Ignoramos como obtuvo exactamente Menecmo esta propiedad, pero como quiera que depende nada más de algunos teoremas de Geometría elemental, se supone que Menecmo utilizaría los conocimientos geométricos familiares a los matemáticos de la Academia platónica.



Sea, pues, ABC el cono y sea EDG la curva obtenida al cortarlo por un plano perpendicular en el punto D a la generatriz ADC del cono. Sea P un punto cualquiera de la curva sección y un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia PVQR, siendo Q el otro punto de intersección de la curva sección con esta circunferencia.

Por razones de simetría resulta que los segmentos PQ y RV son perpendiculares en el punto O, de modo que OP es la media proporcional entre RO y OV. Por tanto $OP^2=RO\cdot OV$.

Ahora de la semejanza de los triángulos DOVD y DBCA se tiene $OV/DO=BC/AB$, mientras que de la semejanza de los triángulos DSDA y DABC se deduce $SD/AS=BC/AB$.

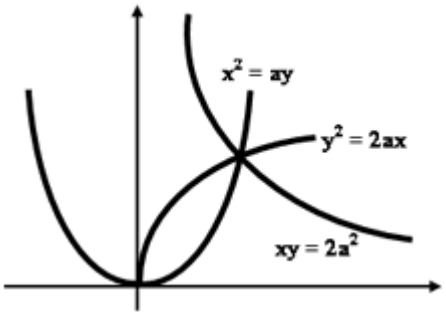
Tomando OP=y, OD=x, como *"coordenadas"* del punto P, se tiene $y^2 = RO\cdot OV$, de modo que sustituyendo:

$$y^2=OP^2=RO\cdot OV=SD\cdot OV=AS\cdot(BC/AB)\cdot DO\cdot(BC/AB)=([AS\cdot BC^2]/AB^2)\cdot x\ .$$

Ya que los segmentos AS, BC y AB son los mismos para todos los puntos de la curva EQDPG, podemos escribir la *ecuación de la curva* o *"sección del cono rectángulo"* en la forma: $y^2=lx$, donde l es una constante que más tarde se llamaría el *"latus rectum"*

De una forma totalmente análoga para conos con ángulo agudo y obtuso en el vértice Menecmo obtendría expresiones de la forma:

$y^2= lx – (b^2/a^2)\cdot x^2$, *sección de cono acutángulo*,
$y^2= lx + (b^2/a^2)\cdot x^2$, *sección de cono obtusángulo*,



donde a y b son constantes y el plano de corte es perpendicular a una generatriz.

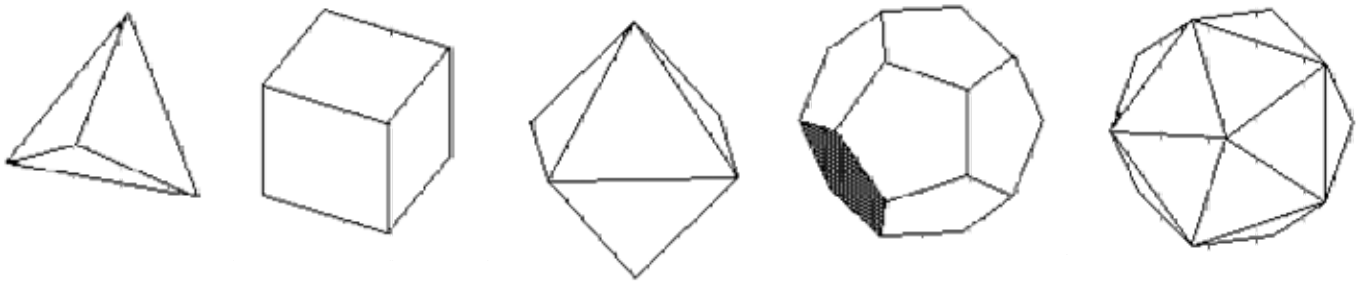
Se observa una gran similitud entre los desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a *ecuaciones* y el uso de *coordenadas*, lo que

induce a los historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la Geometría Analítica. De hecho ignorando el lenguaje de ésta se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo.
Aunque según el testimonio de Proclo y Eutocius fue Menecmo el primero que descubrió las secciones cónicas, tal vez no fue así, ya que antes Arquitas de Tarento (hacia el 400 a.C.), gran político reformador y maestro de Platón, había estudiado el problema délico como vimos en el capítulo anterior, obteniendo las dos medias proporcionales mediante una compleja intersección de un cono de revolución, un cilindro de revolución y una superficie tórica. Así pues, Arquitas pudo haber estudiado la elipse como sección oblicua del cilindro. Por otra parte, después de la línea recta, es la elipse la curva más habitual en la experiencia, ya que los objetos circulares mirados de forma oblicua, así como la sombra que arrojan, son elípticos.
Se ha especulado a veces incluso con un origen de las cónicas por generación cinemática como la Cuadratriz de Hippias o la Espiral de Arquímedes, pero parece desmentirlo la persistencia hasta el siglo XVII del nombre que los griegos dieron de *"Problemas Sólidos"* a los que dependían de las cónicas para su resolución, como si se quisiera insistir en su origen estereométrico.
Las cónicas se definen ahora como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta, directriz, y a un punto, foco, están en una determinada razón, excentricidad. Esta definición se traslada de forma muy simple al lenguaje algebraico de ecuaciones de nuestra Geometría Analítica y además, la trigonometría permite mediante la rotación de ejes pasar fácilmente de la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes a la referida a sus asíntotas. De modo que realmente impresiona la extraordinaria habilidad de Menecmo descubriendo la más útil familia de curvas de toda la Matemática y de toda la Ciencia y en ausencia del instrumento y el simbolismo algebraicos. Pero no sólo esto, sino que, independiente de su origen plano o estereométrico, Menecmo fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas (equivalentes a nuestras *ecuaciones*), que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas, que serían plasmadas por Apolonio en los primeros libros de **"Las Cónicas"**. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Menecmo que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos, y empezando por Menecmo, la paternidad de la Geometría Analítica, al establecer como la esencia de esta rama de la Matemática el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*.
Murió alrededor del año 325 a.C.

6. Otros seguidores de Aristóteles.
Si bien estos no se ocuparon directamente de las Matemáticas, mucho de lo que hoy conocemos se debe a sus abundantes notas históricas, tanto es así que Aristóteles encargó a uno de sus discípulos Eudemo de Rodas (siglo IV a.C.) escribir una **"Historia de las Matemáticas Griegas"** (355 a.C.), primera obra de género conocida y fue autor del **"Sumario de Eudermo"** citado por Proclo y por Simplicio. Se trata, pues, del primer historiador de la ciencia que conocemos, pero lo que es más importante es que los conocimientos ya existentes en su época fueran lo suficientemente amplios como para merecer ser historiados.
Después de este acontecimiento Eudemo sale de Atenas y decide fundar su propia escuela en Rodas. De sus escritos encontramos **"Historia de la Geometría"**, **"Historia de la Aritmética"**, e **"Historia de la Astronomía"**. De los tres el más

significativo fue el primero, que a pesar de la pérdida del texto original se conoce por diferentes autores que lo siguieron.
Eudemo murió alrededor del año 290 a. C.
Aristóteles tuvo otro gran seguidor aparte de Eudemo, Teofrasto de Lesbos, (en griego Θεόφραστος) al cual escogió como su sucesor cuando sus días llegaban al final. Era oriundo de Ereso, en Lesbos donde nació en el año 372 a. C. Su nombre original era Tirtamo, pero se lo conoce por su apodo Teofrasto, el cual le fue puesto por Aristóteles, según se dice, para indicar la gracia de sus disertaciones. Una de las obras más importantes de Teofrasto fue su famoso libro **"Sistema Naturae"**. Teofrasto presidió la escuela peripatética durante treinta y cinco años y murió en 287 a.C.
Pero el mayor aporte de los Aristotélicos fue el perfeccionamiento del aparato lógico formal creando una Teoría de la Deducción que sería muy bien utilizada en el período posterior.

Los 5 Sólidos Platónicos



Nombre	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Vértices	4	8	6	20	12
Aristas	6	12	12	30	30
Caras	4	6	8	12	20
Aristas por Cara	3	4	3	5	3
Interpretación	Fuego	Tierra	Aire	El Mundo	Agua

Los cinco poliedros regulares (los lados, ángulos y polígonos que conforman cada una de sus caras son idénticos). Interpretados por Platón como forma fundamental de los elementos del mundo. Euclides, al final del libro XII de **"Elementos"**, incluyo la prueba de que son los únicos posibles.

Capítulo V
Período Helenístico

1. Alejandria. El Museo.

En los siglos III a II a.C. las Matemáticas experimentan un auge considerable. La mayoría de las obras que se conservan en esta época pertenecen a matemáticos relacionados de algún modo con Alejandría, capital de la dinastía griega de los lágidas que gobiernan a Egipto desde el 306 al 31 a.C. Es sabido que esos reyes fomentaron considerablemente una política de mecenazgo, que antes se practicaba, en ocasiones, solo en beneficio de individuos aislados, muchas veces poetas. Se crearon instituciones, las más conocidas de las cuales son el Museo y la Biblioteca de Alejandría. No cabe poner en tela de juicio el impulso que dieron esas instituciones a los estudios literarios. Salta menos a la vista, tal vez, la correlación con el desarrollo científico, pero tampoco puede desecharse, ya que el clima que así se había creado sólo podía ser favorable.

Ignoramos, sin embargo, si los grandes sabios de la época (Herófilo de Calcedonia, Euclides de Alejandría, Stracton de Lámpsaco, Aristarco de Samos (310-230 a.C.), Eratóstenes de Cirene (262-190 a.C.), Apolonio de Pergamo), cuya presencia en Alejandría está documentada o es probable, formaron discípulos, impartieron enseñanzas o dieron simples conferencias en el Museo mismo o con carácter privado; así, no hay ninguna seguridad de la existencia de una escuela como tal en Alejandría. De hecho, el Museo sólo funcionó como una universidad en la época del Imperio Romano, siendo emulado entonces en Efeso, Atenas, Esmirna y Egina.

Después de la caída de Atenas, Filipo de Macedonia se trazó ambiciosos planes de conquistas del Asia Menor dominada por los Persas, pero la muerte le sorprende en el año 336 a.C. Su hijo Alejandro Magno retoma sus propósitos como herencia política, edificando un poderoso imperio que abarcó regiones del sudeste europeo, el Asia Central, la India y Egipto, en apenas una década. Cuando tempranamente la muerte le sorprende en el 323 a.C. el imperio fue dividido entre sus generales.

Los rudos conquistadores macedonios a su vez habían sido conquistados culturalmente para los griegos, el propio Alejandro se forjó en sus años mozos al calor de un célebre tutor: Aristóteles de Estagira. Por ello una de las consecuencias inmediatas de la existencia del imperio Alejandrino fue la expansión acelerada de la cultura griega dando paso al helenismo.

En el 331 a.C. fue fundada en la desembocadura del río Nilo una de las tantas ciudades dedicadas al conquistador: Alejandría de Egipto. Su céntrica posición geográfica con respecto al nuevo mundo helenístico le propició un notable florecimiento económico, científico y cultural. Con apoyo del estado, fue fundado un Museo (Recinto de las Musas) el cual funcionó como un complejo científico-docente y constaba de observatorio astronómico, jardín botánico, zoológico y biblioteca. Desde entonces hasta aproximadamente el año 415 d.C., los principales matemáticos de la antigüedad siempre estuvieron de alguna forma en contacto con el Museo.

Cuando se estudia esta etapa de las matemáticas griegas la obra de Euclides, Arquímedes y Apolonio prácticamente eclipsa a la de sus contemporáneos que se ocuparon de diversos problemas particulares a través de una gran variedad de métodos especiales. Entre ellos merece destacar:

- Nicomedes (300-240 a.C.), conocido por el descubrimiento de la concoide que lleva su nombre (curva obtenida por la prolongación o disminución del radio vector de cada punto de una recta dada en un segmento constante). Aplicó dicha

curva a la solución de los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. También utilizo la cuadratríz de Hippias para la cuadratura del círculo.
- Diocles (240-180 a.C.), introdujo la cisoide ($y^2=x^3/(2a-x)$) en relación con la duplicación del cubo. También realizó estudios sobre parábolas y esferas.
- Dionysodoro (250-190 a.C.), estudió la resolución de ecuaciones cúbicas mediante intersecciones de parábolas e hipérbolas.

2. Euclides.

Euclides ha sido el matemático griego clásico por antonomasia y su nombre aún es, quizá, el más popular en la larga y poblada Historia de las Matemáticas. Pero nadie ha sabido resumir mejor que E. M. Forster[161] la ocultación de su persona bajo el personaje *"Nada sabemos de él. A decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como hombre"*.

Euclides pasa por ser, en dos palabras, la geometría: la geometría clásica griega, en términos más precisos. Es una identificación que debe a sus **"Elementos"**, la obra más editada después de la Biblia. Luego veremos que ni Euclides, ni los **"Elementos"** son sólo geometría. En todo caso, entre los polígrafos antiguos, Euclides ya daba nombre a esta disciplina y él mismo pasaba a ser conocido por el mero apodo de *"el elementador"* (el autor de los **"Elementos"**). Si existe alguien en la Historia de la Ciencia que haya desaparecido, soterrado bajo el peso del éxito de su propio best-seller, piensen en Euclides.

La referencias más dignas de crédito lo sitúan, en el tiempo, entre la generación de los discípulos directos de Platón (muerto en 348) y la de Arquímedes (nacido hacia 384 a.C.); en el espacio, cerca del rey Tolomeo I Sóter, del que era *"comensal (parásitos)"*, escribe Ateneo (s. II d.n.e.), en Alejandría de aquí que sea habitual situar su vida entre el 325 a.C. y el 265 a.C., aproximadamente. Salvo estos detalles, su vida es poco conocida. Existen algunos otros datos poco fiables[162]. Ciertos autores árabes afirman que Euclides era hijo de Naucrates y se barajan tres hipótesis:

1. Euclides fue un personaje histórico que escribió los **"Elementos"** y otras obras atribuidas a él.
2. Euclides fue el líder de un equipo de matemáticos que trabajaba en Alejandría. Todos ellos contribuyeron a escribir las *obras completas de Euclides*, incluso firmando los libros con el nombre de Euclides después de su muerte.
3. Las obras completas de Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos de Alejandría quienes tomaron el nombre Euclides del personaje histórico Euclides de Megara, que había vivido unos cien años antes.

Es probable que Euclides se educara en Atenas, lo que explicaría con su buen conocimiento de la geometría elaborada en la escuela de Platón, aunque no parece que estuviera familiarizado con las obras de Aristóteles. Enseñó en Alejandría, donde alcanzó un gran prestigio en el ejercicio de su magisterio durante el reinado de Tolomeo I Sóter; se cuenta que éste lo requirió para que le mostrara un procedimiento abreviado para acceder al conocimiento de las matemáticas, a lo que Euclides repuso que no existía una vía regia para llegar a la geometría (el epigrama, sin embargo, se atribuye también a Menecmo como réplica a una demanda similar por parte de Alejandro Magno).

La tradición ha conservado una imagen de Euclides como hombre de notable amabilidad y modestia, y ha transmitido así mismo una anécdota relativa a su

[161] **"Alejandría",** Sección I, E, [i], Barcelona, Seix Barral, 1984; p.64.
[162] Consultar http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Euclid.html

enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje; Euclides, tras explicarle que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma, ordenó a su esclavo que diera unas monedas al muchacho, dado que éste tenía la pretensión de obtener algún provecho de sus estudios.

A pesar de que el sistema de numeración griego, permitía expresar inconmensurables como series infinitas de fracciones, no fue en los marcos exclusivos de la aritmética donde se arribó a este resultado, sino que requirió de tres siglos y del concurso de los conocimientos geométricos, para que Euclides adquiriera conciencia de ello y aún en forma limitada.

La aparición de la huella de una disciplina matemática en el resto de las ya existentes, marca el inicio de ella como tal. Pero si escogemos, de entre todas las disciplinas, aquellas que nos brindan la huella más abstracta, ello nos conduce a la Aritmética teórica o Teoría de los Números.

La aparición de la huella anteriormente mencionada, nos habla de la forma de relación de las disciplinas matemáticas. Esta forma de relación, es siempre de influencias recíprocas; es decir, tiene un carácter de retroalimentación.

El hecho que la Geometría se constituyera en una disciplina matemática, significó la matematización de conocimientos que hoy se corresponderían con la agrimensura, la arquitectura, la astronomía y diversas artes constructivas.

La investigación de esta "matematización" trajo por consecuencia la aparición de un elemento mediador entre los conocimientos iniciales y la Matemática de aquel entonces.

Este elemento mediador estuvo constituido por los conocimientos geométricos, que en sí no pertenecían unilateralmente a los conocimientos originarios.

Mientras los conocimientos geométricos no se integraron en forma de conocimientos teóricos, con un determinado grado de sistematicidad y relación entre ellos, no apareció un vínculo entre ellos y los conocimientos aritméticos.

Este vínculo que hemos utilizado para determinar el carácter de la Geometría como disciplina, no se presenta, de forma general en ninguna de las disciplinas o teorías matemáticas, hasta tanto no alcanzan el nivel teórico correspondiente.

Este hecho es comprendido como un abismo entre la matemática pura y la matemática aplicada, de esta manera encontramos que Bertrand Russell incluía a la Matemática Aplicada de su definición de la matemática como rama de la lógica[163].

En el desarrollo de la Matemática en este primer período, puede observarse como diversos conocimientos que comenzaron a desarrollarse en el seno de la matemática aplicada, pasaron después a la denominada matemática pura.

[163] Ver B. Russell, **"Obras Completas",** T.2, 1973, Madrid, Aguilar, pp. 393-398.

Hechas estas aclaraciones, vamos a referirnos al sistema euclidiano.
En términos generales no cometemos ningún error al centrarnos en estas figuras, ya que en ellas está reflejada la principal fuerza creadora de este periodo, que como rasgos generales tiene:

1. Proceso de formación de nuevas teorías matemáticas mediante objetos geométricos.
2. Ampliación considerable del espectro de métodos particulares de la Matemática, especialmente los infinitesimales bajo presión directa de las exigencias científico practicas.
3. Sistematización rigurosa de todo el saber matemático desde el punto de vista del Álgebra Geométrica.
4. Consolidación del programa de matematizar fenómenos naturales, particularmente con las obras de Arquímedes que sientan las bases de la Estática y la Hidrostática.

3. Los "Elementos".

Las principales tendencias de todo el período anterior alcanzaron su punto culminante en el proyecto enciclopédico llevado a cabo por Euclides de Alejandría [164]en su obra **"Elementos"**. Fiel a los preceptos platónicos más ortodoxos, y armado con los recientes éxitos de la lógica Aristotélica y su teoría para la construcción de una ciencia deductiva, Euclides creó la obra que quizás más ha influido en el pensamiento científico de la humanidad. Esta recopilación de conocimientos geométricos constituyo el núcleo básico de la enseñanza de la Matemática por unos 2000 años. Sobre ella Einstein sentenció *"si Euclides no ha sido capaz de encender tu candidez intelectual, no has nacido para ser un pensador científico"*.
Los **"Elementos"** son un texto valioso de geometría, pero lo que hace que sea una obra admirable es la antigüedad que tiene. Por eso es conveniente explicar por qué se puede estar seguro de que el texto que ahora se atribuye a Euclides coincide con lo que un matemático del siglo III a.C. escribió.
Desgraciadamente los libros en la época de Euclides se solían escribir en unas láminas obtenidas a partir de las hojas de los papiros. Esa materia resiste bien en climas calurosos y secos, pero en climas fríos o húmedos se descompone con rapidez. Por eso se puede asegurar que los **"Elementos"** fueron copiados y recopilados frecuentemente hasta que en el siglo II de nuestra era se comenzó a escribir en pergamino que es una materia más duradera. La copia completa más antigua que se conserva de esta obra fue escrita en el año 888. Hay algunos fragmentos anteriores, incluso un trozo de cerámica del año 225 a.C. que contiene algunos textos que pueden ser de los **"Elementos"**.
Si se ha podido llegar a conocer qué partes son originales y cuales fueron incorporadas en la antigüedad en esos manuscritos es porque han sobrevivido bastantes versiones de orígenes diferentes y, comparándolas, se pueden descubrir los añadidos.
La mayor parte de los ejemplares antiguos que se conservan son copias de una versión de los **"Elementos"** que realizó Teón de Alejandría (s. IV). Este matemático reconoce en otros escritos que su versión de los Elementos contiene explicaciones y

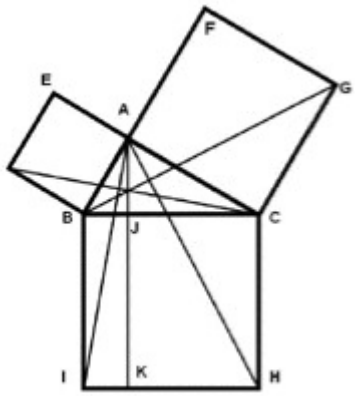
[164] También se puede saber más sobre Euclides y su obra consultando los artículos de I. Bulmer-Thomas, 1971, **"Euclid. Life and works"** y John Murdoch, 1971, **"Euclid: Transmission of the Elements"** en Dictionary of Scientific Biography (1971, New York, v. 4, p. 414-437 y 437-459), o de A. Dou, 1986, **"Euclides"** en "Historia de la Matemática hasta el siglo XVII" Ed. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid.

cambios añadidos por él. Desde comienzos del siglo XIX se sabe que un manuscrito que se encuentra en la biblioteca del Vaticano no tiene esos cambios y es más fiel al texto de Euclides que las de origen "teonino", aunque esa copia fue escrita en el siglo X.
Su texto está completo y ha ejercido una gran influencia en las últimas ediciones de los Elementos.
Se conservan también otras versiones de los **"Elementos"** que proceden de las traducciones al árabe que se hicieron en los siglos IX y X. Partiendo de estos textos árabes se ha podido saber algo sobre los cambios que introdujeron en sus copias de los **"Elementos"** otros sabios griegos, como Heron. Pero, las versiones traducidas al árabe no son fieles porque algunas incorporan cambios importantes para hacerlas más pedagógicas y sencillas y otras, más que traducciones, son comentarios de los Elementos.
Desde la aparición de la imprenta es más fácil seguir la transmisión de los **"Elementos"**. La primera edición impresa la publicó E. Ratdolt en Venecia en 1482. No es muy exacta porque procede de la versión latina medieval de Campano. El mejor texto impreso fue durante varios siglos el del humanista italiano F. Commandino de Urbino que fue publicado en 1572. Actualmente la versión mejor considerada es la que se encuentra en la recopilación **"Euclidis Opera Omnia"** (1883-1916) de J. L. Heiberg y H. Menge. En esa obra se comparan las versiones antiguas que han llegado hasta nosotros y se tienen en cuenta los fragmentos de papiros antiguos para dar una versión crítica en la que se discuten las variaciones que aparecen en los textos antiguos y se explica por qué se aceptan o rechazan.
De todo lo anterior se puede concluir que se puede estar razonablemente seguro de que la versión que se considera conforme con el texto original es muy parecida a la obra que escribió Euclides. Sobre el autor, Euclides, se sabe menos que sobre los **"Elementos"**. La información que se tiene sobre su vida coincide, a grandes rasgos, con lo que el filósofo neoplatónico Proclo de Licia (s. V a.C.) dice sobre él en su libro **"Comentarios a los Elementos de Euclides"**, *"En la composición de sus Elementos, Euclides coordinó muchos trabajos de Eudoxo, perfeccionó los de Teeteto y demostró irrefutablemente los que sus predecesores habían presentado de una manera difusa"*.
Faltaría por discutir si ese texto lo escribió Euclides o si se trata de una recopilación de obras anteriores. El contenido de la matemática euclidiana aparece en trece libros[165], dedicados los seis primeros a la planimetría, los tres siguientes a la teoría elemental de los números, el décimo a la teoría de los irracionales y los tres restantes a la estereometría.
Se sabe que en esa época otros matemáticos griegos, como Hipócrates de Quíos, León o Tedio de Magnesia escribieron otros **"Elementos de Geometría"**. Parece evidente que el texto de Euclides era mejor que el de esos tratados pues ha continuado siendo reproducido hasta nuestros días, mientras que los escritos de esos otros autores han desaparecido. Pero, también se cree que la mayoría de los resultados que se presentan en los **"Elementos"** se conocían con anterioridad, aunque la forma de presentarlos sea de Euclides. Se considera que los orígenes de los distintos libros son los siguientes:

[165] Ver la edición bilingue griego-español **"Elementos de Geometría"**, Universidad Nacional Autónoma de México, 1944. Versiones online se encuentran en las páginas http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html y http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.

Los libros I, III y VI se cree que son el resultado de una elaboración hecha por Euclides partiendo del contenido de tratados de geometría anteriores.
Detengámonos un momento en el Libro I, pues algunos resultados presentados han tenido y tienen repercusiones actuales. La mayor parte de las proposiciones del Libro I son bien conocidas para cualquiera que haya seguido un curso de geometría escolar, entre ellas los conocidos teoremas sobre congruencia de triángulos (lamentablemente, sin ningún axioma que justifique el método de superposición), sobre las construcciones elementales con regla y compás, sobre las desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, sobre las propiedades de rectas paralelas (con la consecuencia principal de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 2R) y de los paralelogramos. En particular, incluye las proposiciones 47 y 48 (El Teorema de Pitágoras[166] y su recíproco) con una demostración distinta a la que se da en los libros de texto actuales[167]. Parece que Euclides está ansioso de situar lo más pronto posible, de la manera más rápida y directa, el Teorema de Pitágoras en los **"Elementos"**, por la necesidad de utilizarlo *a posteriori* con asiduidad; pero ante la imposibilidad de tratar adecuadamente el caso de inconmensurabilidad, que será desarrollada en los Libros V y VI, con base en las proposiciones I.36, y I.41, realiza, con una estética inefable y con una sutileza sublime, la siguiente demostración:

- Los triángulos DCB y ABI son iguales ya que AB=BD, BI=BC y el ángulo B del triángulo DCB es igual al ángulo B del triángulo ABI.
- El área del cuadrado ABDE es doble del área del triángulo DCB ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.
- El área del rectángulo BIKJ es doble del área del triángulo ABI ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.



Combinando los tres resultados anteriores, resulta que el área del rectángulo BIKJ es igual al área del cuadrado ABDE.
Razonando de forma análoga se demuestra que el área del rectángulo CHKJ es igual al área del cuadrado ACGF. Luego, ya que el área del cuadrado BIHC es igual a la suma de las áreas de los rectángulos BIKJ y CHKJ, definitivamente, el área del cuadrado cuyo lado subtiende el ángulo recto, BIHC, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados, ABDE y ACG, cuyos lados comprenden el ángulo recto.
La demostración euclídea del Teorema de Pitágoras es de naturaleza estrictamente geométrica. En ella juega un papel fundamental una figura que procede de una secuencia de construcciones que, mediante ciertas congruencias de triángulos, va transformando los cuadrados sobre los catetos en dos rectángulos que al encajarse

---

[166] El Teorema de Pitágoras era conocido por las primeras civilizaciones de la humanidad (Mesopotamia, Egipto, India, China,…), al menos desde un punto de vista práctico. Algunos se inclinan por atribuir el descubrimiento de este teorema a los egipcios; otros, sostienen que un diagrama en la Aritmética Clásica china representa la más antigua demostración conocida … admirada por su elegancia, y más tarde expuesta en el **"Vijaganita"** ("Cálculo de Raíces") del matemático hindú Bhaskara.

[167] Ver C. Boyer-**"Historia de la Matemática"**, Alianza Editorial, Madrid, 1996, pp. 149-150. Detalle adicionales, están muy bien desarrollados en **"El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4000 años"** de Pedro M. González Urbaneja, Sigma 32, 2008, 103-130. Puede consultar también http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/3740/euclid.html y http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm.

componen el cuadrado sobre la hipotenusa. La figura euclídea se ha hecho famosa por las curiosas calificaciones que se le han dado. Edouard Lucas[168] en **"Recréations mathématiques"** dice que los árabes le llamaban *"silla de la novia"*, porque se parece a la silla que en algunos países orientales llevaba un esclavo a la espalda para transportar a la novia hasta la ceremonia. También se ha llamado *"calesa de la mujer recién casada"* (Bhaskara), *"capucha de franciscano"*, "*cola de pavo real"*, *"figura del molino de viento"*. El filósofo Schopenhauer, que muy impresionado por el hecho del teorema, siempre se preguntó por la razón natural de la relación pitagórica, llamaba a la demostración de Euclides *"una prueba paseando en zancos"* y también *"prueba de la ratonera"*.

A partir de la época de Euclides se han propuesto una infinidad de demostraciones alternativas, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración de él para alcanzar el grado de *Magíster matheseos*.

Algunos autores proponen hasta más de mil demostraciones. Otros autores, como el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927, **"The Pitagoream Proposition"**[169]. En ese mismo libro, Loomis clasificó las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores. En su libro **"Induction and analogy in Mathematics"**[170], Polya presenta una demostración que hace que el número de demostraciones listadas por Loomis sea muy lejano de la realidad, ¿por qué? Porque Polya usa la propiedad *"las áreas de dos figuras semejantes son entre sí, como el cuadrado de la razón de semejanza"*, de aquí que si consideramos tres figuras semejantes de áreas S_a, S_b y S_c, construidas sobre los catetos y la hipotenusa, respectivamente, entonces se demuestra fácilmente que $S_a + S_b = S_c$, lo que haría el número de demostraciones infinito.

Es de notar, a cuenta de los méritos de Euclides, que el Teorema de Pitágoras vaya seguido inmediatamente por una demostración del recíproco, es frecuente en algunos libros de texto modernos que los ejercicios que siguen a dicho teorema, sino el recíproco no demostrado aún. Puede haber muchos defectos menores en los **"Elementos"**, pero el libro tiene todas las virtudes lógicas mayores.

Los libros II, VII, VIII y IX se piensa que provienen de las doctrinas de los pitagóricos. El libro IV tiene su origen en la escuela pitagórica, pero está completado con algunos descubrimientos de Teeteto y de otros matemáticos.

---

[168] **François Édouard Anatole Lucas**. Matemático francés nacido el 4 de abril de 1842 en Amiens y muerto en París el 3 de octubre de 1891. Trabajó en el Observatorio de París y más tarde fue profesor de matemáticas en la capital del Sena. Se le conoce sobre todo por sus trabajos sobre la serie de Fibonacci y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también fue un apasionado por las matemáticas recreativas (es el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos como el de las *Torres de Hanoi*). Su serie **"Récréations mathématiques"** (publicada entre 1882 y 1894) es hoy día un verdadero clásico para los aficionados y ha sido reeditada por Aguilar bajo los títulos **"El laberinto"** (2008), **"El juego militar"** (2009) y **"Juegos Matemáticos 3"** también de este año.

[169] Reeditado como **"The Pythagorean Proposition. Its Demostrations Analyzed and Classified"**. National Council of Teachers of Mathematics, **"Classics in Mathematics Education"**, Washington, 1968.

[170] Es el Volumen I **"Inducción y analogía en matemáticas"**, del renombrado **"Matemáticas y razonamiento plausible"**, Madrid, España, Tecnos, 1966.

En cuanto al libro V se piensa que esa forma de definir la igualdad de razones entre magnitudes la propuso Eudoxo, pero que Euclides, partiendo de dicha definición, ideó el resto del libro.
El libro X se cree que proviene de los escritos de Teeteto.
Al libro XI no se le suele dar un origen preciso. En él se nota influencia de Platón y Aristóteles, pero la mayor parte debe ser una reelaboración de unos Elementos de geometría anteriores.
En el libro XII el método de exhausción, que resulta fundamental en su desarrollo, se considera que fue descubierto por Eudoxo.
Del libro XIII se dice que proviene de Teeteto y que fue mejorado por Aristeo.
Además en el texto hay muchas cuestiones que se cree que fueron descubiertas por Euclides. Los comentaristas antiguos le atribuyen el famoso V Postulado, la demostración del Teorema de Pitágoras que aparece en los **"Elementos"** y la generalización de ese teorema que aparece en la proposición VI.31, entre otras partes.
En los **"Elementos"** por primera vez se funden interactivamente grandes masas de conocimientos matemáticos bajo un único punto de vista, la deducción rigurosa a partir de un grupo reducido de verdades inicialmente aceptadas (axiomas y postulados[171]). Éste es precisamente el gran aporte metodológico de Euclides: el Método Axiomático o Postulacional como también se le ha llamado, que perduró como modelo de construcción rigurosa de una ciencia hasta el siglo XIX. Aunque es justo reconocer que en períodos anteriores fueron parcialmente ejecutadas estas ideas, sin dudas correspondió a Euclides el mérito de ver el principio unificador en el todo.

	AXIOMAS
1	Los iguales a un tercero son iguales entre sí.
2	Si se suman los iguales con los iguales, las sumas son iguales.
3	Si se restan los iguales de los iguales, los restos son iguales.
4	Las cosas que coinciden mutuamente son mutuamente iguales.
5	El todo es siempre mayor que la parte.

	POSTULADOS
I	Por dos puntos cualesquiera pasa una línea recta.
II	Un segmento de recta puede prolongarse indefinidamente.
III	Desde cualquier centro y con cualquier radio puede trazarse una circunferencia.
IV	Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

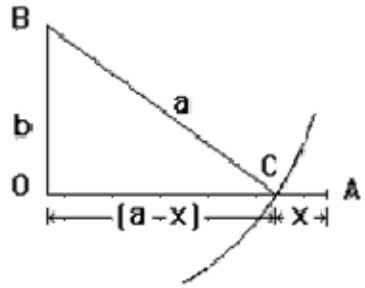
[171] En muchas obras se utiliza también el término *nociones comunes*. Según la RAE, en su segunda acepción, axioma es *"cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría".* Mientras que postulado *"supuesto que se establece para fundar una demostración".* Por su parte, Proclo, dio tres formas distintas de explicar la diferencia entre ambos vocablos. La primera afirma que "*un **postulado** difiere del **axioma** como un **problema** difiere de un **teorema**."* Queriendo significar que un postulado afirma la posibilidad de una construcción. La segunda forma dice "*un **postulado** es una proposición con significado geométrico, mientras que un **axioma** es una proposición común a la geometría y a la aritmética*". Finalmente, su tercera interpretación fue dada por Aristóteles, aunque éste no utilizara tales palabras con un sentido matemático exclusivamente. Ésta establece "*un **axioma** es aquello que es verdadero por sí solo*" y "*un **postulado** es aquello que, sin ser un axioma, es admitido sin demostración*."

V	Si dos rectas de un plano son cortadas por una tercera y si la suma de los ángulos interiores, que se forman de un mismo lado de la recta es menor que dos rectos, entonces las dos primeras rectas, al ser prolongadas convenientemente, se cortan del mismo lado donde esto tiene lugar.

La obra comprende trece tomos de los cuales los seis primeros están dedicados a la Planimetría e incluyen la Teoría de Proporciones, del séptimo al noveno se condensa la Teoría de Números, el décimo recoge los estudios sobre clasificación de irracionalidades cuadráticas y los últimos tres libros se dedican a la Estereometría, particularmente en el duodécimo recoge el método de Exhaución (recordemos a Eudoxo). Sus principales rasgos característicos son:

1. Se parte de cinco axiomas que introducen las relaciones entre igualdad o desigualdad de magnitudes y cinco postulados que garantizan la posibilidad de realizar las construcciones geométricas. De ellos el más célebre es el V Postulado o postulado sobre las paralelas, que dio pie a importantes estudios posteriores y al descubrimiento de las geometrías no euclidianas (ver cuadro de la página anterior).
2. Definiciones, en número de 119, que por regla general son de tipo descriptivo, y comprensibles al relacionarlas con los objetos reales que históricamente las originaron.
3. Proposiciones, en número de 465, demostradas por el Método Sintético bajo el clásico esquema: formulación de la proposición, exposición de un dibujo auxiliar, determinación de lo buscado según el dibujo, construcción de líneas auxiliares, demostración y conclusiones sobre lo demostrado y de como esto resuelve adecuadamente la proposición.
4. Todo expuesto según el Álgebra Geométrica. La regla y el compás como únicos instrumentos admitidos para las construcciones geométricas (ver la figura siguiente). Sin estudio de secciones cónicas u otro tipo de curvas.

La Matemática Euclidiana sintetiza a la Matemática anterior, particularmente a la geometría de Eudoxo. Es digno de observarse que Euclides dedica cuatro de sus tres libros a la teoría de los números y que además sus planteamientos están encaminados a lo que posteriormente habría de constituir el teorema fundamental de la Aritmética, es decir, la univocidad de la descomposición de números en sus factores primos.



Solución de la ecuación $x^2 + b^2 = 2ax$. Trazamos el segmento OA de longitud a, por uno de sus extremos se traza perpendicularmente el segmento OB de longitud a y tomando el compás con abertura a, apoyados en B se determina el punto C. La solución de la ecuación es el segmento CA (nótese que por el Teorema de Pitágoras $(a-x)^2 + b^2 = a^2$, lo que es equivalente a la ecuación original)

El libro X también merece especial atención, por estudiarse aquí las nuevas expresiones numéricas que le dieron a la geometría el rango de disciplina Matemática.

El propósito de Euclides, en este libro, es determinar el tipo de las irracionalidades que se encuentran en el cálculo de los cuerpos regulares, para determinar las condiciones bajo las cuales se puede prescindir del uso de raíces de la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Como se refleja en el comentario de Pappo (320 a.C.), Apolonio no adelantó mucho cuando investigaba raíces de la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Entre los teoremas generales de Euclides reviste particular importancia, el que expresa que las magnitudes inconmensurables tienen un número infinito de términos. Este teorema es el X2 y puede enunciarse así *"Las magnitudes son inconmensurables cuando al aplicarse el algoritmo de Euclides, el número de términos de éste resulta infinito"***.**

La presentación axiomática de la Geometría, en la obra de Euclides, aumentó el caudal metodológico de la matemática. Analizada la axiomática de Euclides a la luz de posteriores avances y sobre todo a la luz de la moderna teoría de la demostración, presenta determinados defectos. Ella, sin embargo, se mantuvo como suprema expresión de la matemática antigua, hasta hace relativamente poco tiempo.

Con la matemática euclidiana terminó el período históricamente analítico de la Matemática griega y comenzó la etapa sintética, lo cual significó que todo nuevo conocimiento del período podía explicarse a partir de la Matemática Euclidiana.

En el campo de la Matemática aplicada se desarrollaron diversos conocimientos en la Antigua Grecia, que después se integraron a los conocimientos teóricos y fueron la fuente de nuevas disciplinas matemáticas.

Esta posibilidad se contenía en los trabajos de Arquímedes, Apolonio y Diofanto. Este último desarrolló la Aritmética siguiendo la tradición Egipto-Babilónica, en oposición al método griego.

Algunas particularidades características del método de razonamiento matemático y formas de exposición de Euclides son evidentes ya desde el primer libro:

a) El método de razonamiento de Euclides es siempre sintético. Para la demostración de cualquier teorema él parte de la afirmación válida a ciencia cierta, la cual se apoya en última instancia en el sistema de condiciones iniciales. A partir de esta última él desarrolla sucesivamente consecuencias que conducen a la afirmación buscada. El camino inverso de razonamiento es: tomando el teorema buscado como demostrado, el deducir de él una sucesión de consecuencias, hasta que sea obtenida a ciencia cierta una afirmación verdadera, en los **"Elementos"** en calidad de demostración no se utiliza. En contraposición a la síntesis los antiguos denominaron a este método análisis.
b) Como dijimos, las demostraciones se construyen según un esquema único que consta de las siguientes partes: formulación del problema y del teorema (esto es, exposición); formulación según el dibujo de lo que se busca (o sea, determinación); introducción de líneas auxiliares (esto es, construcción); demostración propiamente dicha (es decir, demostración); declaración de lo que se demostró y de que lo demostrado resuelve el problema o el teorema adecuadamente propuesto (o sea, conclusión). En forma algo simplificada, este esquema se convirtió en tradicional y llegó hasta nuestros días como modelo clásico de razonamiento matemático, en cierto sentido obligatorio para los matemáticos.
c) Los medios de construcción geométrica, la regla y el compás, en esencia no se utilizaban como medios de medición. La regla no tiene subdivisión. Por esto en los **"Elementos"** no se trata de la medición de las longitudes de los segmentos, de las áreas de las figuras y los volúmenes de los cuerpos, sino sólo sus relaciones.

El examen del contenido de los **"Elementos"** de Euclides, muestra que esta obra constituye un sistema de los fundamentos de la matemática antigua. En ella están incluidos: la geometría elemental, los fundamentos de la teoría de los números

racionales, la teoría general de las relaciones entre magnitudes y basadas en ellas, la teoría de las proposiciones y la teoría de las cuadráticas y bicuadráticas, elementos del álgebra en forma geométrica y el método de exhaución. Lo más característico de los **"Elementos"** es que está dado un sistema que permite ver en él, el predecesor antiguo de la actual construcción axiomática de las teorías matemáticas. Al mismo tiempo la estructura lógica de los **"Elementos"** refleja el camino histórico de la formación de las teorías matemáticas desde las más simples, tipo de Algebra Geométrica, hasta las más complejas: teoría de las relaciones, método de exhaución y clasificación de las irracionalidades.

Ya mencionamos que los **"Elementos"** de Euclides dejaron una huella imborrable en la historia de la matemática y en el transcurso de muchos siglos sirvieron de prototipo clásico de la rigurosidad y secuencia matemática. Sin embargo, algunas particularidades de los **"Elementos"** reflejan una serie de condiciones favorables al desarrollo subsiguiente de las matemáticas, las cuales se formaban en la época de su redacción. La exposición es geométrica, incluso los números están representados como segmentos. Los medios de construcción geométrica, en esencia, estaban limitados a la regla y el compás. Por eso en los **"Elementos"** no aparece la teoría de las secciones cónicas, ni curvas transcendentes y algebraicas. Finalmente en los **"Elementos"** están completamente ausentes los métodos de cálculos.

Todas estas insuficiencias de los **"Elementos"** podrían, hasta cierto punto, justificarse por los objetivos específicos de su autor. Sin embargo, en las condiciones de la antigüedad, este primer experimento de exposición axiomática de las Matemáticas podía tener una tendencia limitadora tan fuertemente expresada sólo bajo la influencia de las tendencias limitadoras generales de la filosofía idealista. Por esto, puede decirse que los **"Elementos"** de Euclides reflejan tanto el alto nivel teórico de las Matemáticas como la situación socioeconómica e ideológica desfavorable para el posterior desarrollo al final de la antigüedad griega.

En el transcurso de toda la multisecular Historia de las Matemáticas, los **"Elementos"** constituyen el fundamento de todas las investigaciones geométricas. Incluso el cambio decisivo de todo el sistema de la geometría, provocado por la introducción a principio del siglo XIX, en los trabajos de Lobatchevsky, de la geometría no Euclidiana, en gran medida está vinculado con los esfuerzos de perfeccionamiento de los **"Elementos"**.

Los **"Elementos"** de Euclides aún en nuestra época constituyen la base de los textos escolares de geometría, el número de sus ediciones es enorme.

Un dato que puede ilustrar lo anterior es el siguiente: las versiones españolas correspondientes al período 1574-1774 ascienden a ¡18 obras!, once impresas y siete manuscritas[172].

En fin, los **"Elementos"** de Euclides vienen a ser la culminación de una aparente tradición de tratados en cuyo seno se habría ido gestando y desarrollando la organización deductiva de unos resultados y teoremas básicos hasta tomar la forma de unos cuerpos relativamente sistemáticos de conocimientos: la geometría plana en los libros I-IV de los propios **"Elementos"**, la teoría generalizada de la proporción en V-VI, la aritmética en VII-IX o la geometría sólida en XI-XIII.

Lo anterior es reafirmado si utilizamos a Proclo[173] en sus **"Comentarios"** al libro I, donde nombra los siguientes pasos anteriores a Euclides *"Hipócrates* [de Chios] *fue,*

---

[172] L. Vega- **"Las versiones de los Elementos como signos de los tiempos (1574- 1774)"**, en "Contra los Titanes de la Rutina", Encuentro hispano- francés sobre Historia de la Matemática, Madrid, C.S.I.C., 1994.

[173] Proclo (410-485) escribió sobre los **"Elementos"**, basándose en escritos de contemporáneos de

de entre aquellos de quienes se tiene noticia, el primero en haber compuesto (protos ... synégrapsen) unos elementos (stoikheía)"[174].
Entre la segunda mitad del siglo V a.C. y principios del siglo IV, Leodamas, Arquitas (428-350 a.C.) y Teeteto avanzaron hacia una construcción más científica de la geometría. Tras ellos, un tal León: *"... pudo compilar (suntheinai) elementos con más cuidado en la cantidad y utilidad de lo* demostrado"[175].
Luego Eudoxo de Cnido, algo más joven que León, fue el primero en aumentar el número de los llamados "teoremas generales".
Otro autor que tuvo relación con la Academia platónica y se distinguió tanto en Matemática como en el "resto de la filosofía", fue Teudio de Magnesia *"También él, por cierto, sistematizó (synétaxen) de modo excelente los elementos y convirtió en más generales muchas propiedades* particulares"[176].
Poco después, Hermótimo de Colofón no sólo hizo progresos en la línea de investigación abierta por Eudoxo y Teeteto, sino que *"descubrió muchos elementos"*[177]. En fin, tras hacerse eco de Filipo (mediados del siglo IV), continúa Proclo por su cuenta *"No mucho más reciente que ellos es Euclides, quien ha compilado (synagagón) los elementos sistematizando muchas proposiciones de Eudoxo y perfeccionando muchas de Teeteto, amén de conducir a unas demostraciones incontestables teoremas de los que sus predecesores sólo habían dado pruebas* endebles"[178].
Proclo no deja lugar a dudas sobre la culminación de este camino de perfeccionamiento en los **"Elementos"** de Euclides, ni sobre sus virtudes: la riqueza de recursos metódicos, el orden selectivo que preside su sistematización científica, el rigor de sus pruebas e incluso sus calidades didácticas y disciplinarias. En suma: *"Los* **"Elementos"** *contienen una guía incontestable y perfecta de la investigación científica en* geometría"[179].
Hay además, según es bien sabido por tratarse del aspecto más comentado a partir del mismo Proclo, secuelas metodológicas. En este sentido, los **"Elementos"** de Euclides fijan una especie de nivel característico de exigencia tanto en lo que se refiere a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos y a la explicación de sus asunciones básicas, como en lo referente al rigor informal de la demostración matemática. Bien es verdad que, antes del tratado de Euclides, ya había señales claras de la explicitación de definiciones, sobre todo, y del repuntar de un patrón informal de prueba deductiva[180].

Euclides, como Eudemo, discípulo de Aristóteles, que escribió una obra, hoy desaparecida, conocida como el **"Sumario de Eudemo"**.

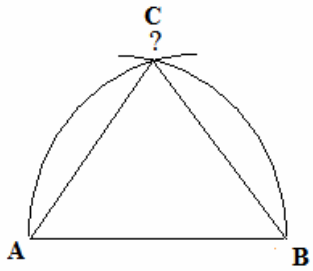
[174] 66.6-70.
[175] 66.19-21.
[176] 67.14-16.
[177] 67.22.
[178] 68.6-10.
[179] 70.16-18.
[180] Sobre el contenido propiamente dicho y sus imbricaciones, tanto metodológicas como filosóficas, recomendamos encarecidamente de Ian Mueller **"Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements"**, Dover Books on Mathematics, 1996 un texto del que guardamos un grato recuerdo por su profundidad en el estudio de los **"Elelemntos"**; y los artículos **"Euclid's Elements and the Axiomatic Method"**, The British Journal for the Philosophy of Science 1969 20(4):289-309 y **"Remarks on Euclid's Elements I,32 and the Parallel Postulate",** Science in Context (2003), **16**:**3**:287-297.
Sobre la relación entre los **"Elementos"** y los fundamentos de las matemáticas se puede consultar la conferencia de L. J. Hernández Aparicio, 2000, **"Sobre los principios fundamentales de la**

Quisiéramos apuntar por último, algunos temas historiográficos sobre los que debiera trabajarse[181]:

1. la recepción y difusión de los **"Elementos"** de Euclides hasta el punto de constituir algo así como la geometría natural de nuestro espacio físico;
2. la suerte y diversidad de los programas acogidos al llamado more geométrico desde sus primeros rastros (ya en el siglo XII) hasta su confusión con la que llamaría "axiomática clásica" de los siglos XVII-XVIII;
3. las relaciones entre la propia geometría euclídea propiamente dicha, la de los **"Elementos"**, y la geometría euclidiana, i.e., la elaborada modernamente, e.g. a partir de la geometría analítica cartesiana, sobre la base de ciertas asunciones características compartidas como el postulado de las paralelas.

Tradicionalmente la geometría la hemos asociado al concepto de espacio físico, donde entidades como puntos, rectas y formas tienen su hábitat, y entre las cuales aparecen definidas relaciones de diverso tipo. Sin embargo, después de haber evolucionado por alrededor de cinco mil años, la concepción geométrica ha cubierto amplios espacios que lindan con el análisis matemático, con la topología y el álgebra. En la vastedad de estos linderos se desarrolla la geometría proyectiva, la geometría diferencial, la geometría algebraica, la geometría métrica y la geometría euclidiana con sus variantes no euclidianas.
La característica central de la geometría griega, fue su carácter axiomático-deductivo[182], donde las proposiciones geométricas están acompañadas de su correspondiente demostración, dejando en segundo plano la evidencia empírica de las mismas. Los **"Elementos"** es la obra que mejor ilustra esta característica, una de las más recientes ediciones apareció en 2002 y corresponde a la reedición de la traducción hecha por Thomas L. Head y editada por Dana Densmore[183]. Entre las cuestiones que hacen importante la obra, está, el enfoque lógico de su desarrollo.
La primera proposición de Euclides, es apropiada para chequear la eficiencia de sus herramientas.

Proposición 1. *Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado AB.*



Demostración. Se empieza construyendo una circunferencia con centro en A y radio AB. Esto lo permite el postulado **P3.** Igual construcción se hace tomando como centro el punto B y radio BA. La intersección de las dos circunferencias determina el punto C. Este punto, junto a los extremos del segmento AB forma el triángulo ABC que cumple con los requerimientos de ser equilátero y de tener el segmento AB como uno de sus lados. Los segmentos AC y BC tienen la misma longitud que AB por el Axioma **A1**, en

---

geometría", lección inaugural del curso 2000-2001 de la Universidad de la Rioja en la dirección http://www.unirioja.es/Prensa/Noticias/l1.html/

[181] L. Vega-**"Los elementos de geometría y el desarrollo de la idea de la demostración"**, Mathesis 8(1992) 403-423.

[182] Ver Tarski, A.-**"Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences"**, Dover Publications, Inc. New Cork, 1995, página 120 y siguientes.

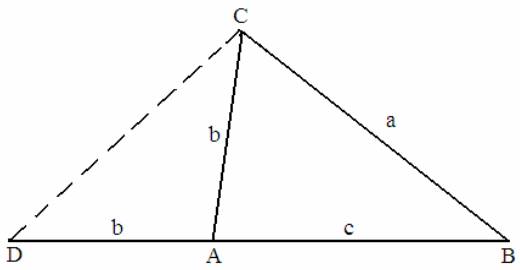
[183] **"Euclid's Elements"**, Tr. T. L. Head, Ed. Dana Densmore, Green Lyon Press, 2002.

el que se afirma: dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si. Por construcción los radios de las circunferencias trazadas coinciden con el segmento AB.

Un resultado muy interesante y que tendrá repercusiones en varias partes de las matemáticas es la proposición 20, de la que se desprende la llamada *desigualdad del triángulo*, que aun, para espacios abstractos, como los de Banach y Hilbert se enuncia $|A+B| \le |A|+|B|$, donde *A* y *B*, son elementos arbitrarios del espacio y las barras verticales indican la norma o *longitud* de los elementos involucrados.

Proposición 20. *En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado*.

Esta proposición, según cuenta Proclo "... *Los epicureanos tienden a ridiculizar este teorema, diciendo que es trivial, aun para los burros, y que la demostración es innecesaria. Es una muestra de la ignorancia de un individuo, dicen, exigir que se les demuestre, verdad tan evidente…. Hasta un burro situado en un vértice, sabe que, si le colocan la hierba en una esquina de un triángulo, no necesita ir a buscarla siguiendo dos lados, si no por la vía más corta, que es el tercer lado"*.
¿Por que demostrar un teorema tan obvio? Continúa preguntándose Proclo, y su respuesta es *"…para la percepción es evidente, pero no lo es para el pensamiento científico. Muchas cosas tienen este carácter, por ejemplo, sabemos que el fuego quema, pero es un reto para la ciencia saber, por qué y cómo es que el fuego quema"*.
Demostración. Consideremos el triángulo ABC con lados de longitudes *a, b, c*. Queremos probar que la suma de las longitudes de dos lados, digamos, *b* + *c* es mayor que *a*.
En la figura, extendemos el lado BA hasta D de tal forma que AD = AC = *b*. De aquí se sigue que BD = *b* + *c*. Esta construcción da origen al triángulo DAC, el cual es isósceles por tener dos lados de longitud *b*. Consideremos ahora el triángulo mayor BDC.



∠BCD > ∠ACD Porque el todo es mayor que una de sus partes
∠ACD = ∠BDC Por ser ángulos base del triángulo isósceles DAC
Así, ∠BCD es mayor que ∠BDC. Como Euclides previamente había demostrado que a mayor ángulo se anteponía mayor lado, se sigue que BD>BC, dicho en otros términos *b* + *c* > *a*, como se quería probar.

Queríamos señalar por último, que existen los libros XIV y XV de los **"Elementos"** de Euclides. Estudios eruditos coinciden en que se trata de libros apócrifos sin ninguna duda, contienen algunos resultados de geometría importantes que seguramente fueron escritos por Hipsicles.
Algunas ediciones de los **"Elementos"** de Euclides han incluido dos libros más, esto es debido a que en épocas anteriores no era infrecuente que estudios y resultados

obtenidos con posterioridad fueran adscritos a una obra popular o de gran renombre. Tal y como ha demostrado la crítica erudita posterior ambos libros son apócrifos[184].
El llamado Libro XIV continúa con la comparación hecha por Euclides de los sólidos regulares inscritos en una esfera, y el resultado más importante es el de que la razón de las superficies del dodecaedro y el icosaedro inscritos en la misma esfera es la misma que la razón de sus volúmenes, siendo esta razón la de la arista del cubo a la arista del icosaedro. Hoy se cree que este libro pudo ser escrito por Hipsicles (apoyándose en un tratado de Apolonio que se ha perdido, en el que comparaba el dodecaedro y el icosaedro). Hipsicles vivió probablemente durante la segunda mitad del siglo II a.C. y se cree que pudo ser el autor de una obra astronómica, el "**De ascensionibus**", a partir de la cual quizá se adoptase la división de la circunferencia en 360 partes iguales.
El falso Libro XV, que es inferior, se considera obra (al menos en parte) de Isidoro de Mileto (aprox. 532 d.C.), el arquitecto de la catedral de la Santa Sabiduría (Hagia

[184] Como se ha comentado el texto más ajustado de los **"Elementos"** se encuentra en J.L. Heiberg y H. Menge, 1883-1916, **"Euclidis Opera Omnia"**, 8 vol. y suplementos, Ed. Teubner Leipzig. Una versión en griego antiguo se puede consultar en la web en el proyecto Perseus http://www.perseus.tufts.edu/cgi-bin/ptext?lookup=Euc.+1. Una edición asequible, completa y exacta, en inglés es la de T. L. Heath, 1908, **"The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath"**, 3 vols, Cambridge University Press. Hay una segunda edición en la misma editorial de 1925, que ha sido reimpresa varias veces por Dover Publications a partir de 1956. Los comentarios críticos de esta versión de Heath son tan importantes como el texto mismo. No se limita a cuestiones de lógica o de lingüística. Hay también muchas observaciones muy pertinentes sobre aspectos matemáticos. En la web se puede consultar esta versión de Heath en la dirección http://aleph0.clarku.edu/djoyce/elements/elements.html. El texto está algo simplificado para hacerlo más comprensible. El responsable de esta edición es D. E. Joyce, de la Universidad de Clark. Tiene también comentarios, aunque son menos completos que los de Heath, y abundantes figuras. En castellano la mejor edición es la de Ma. L. Puertas Castaños, **"Elementos"** Libros I-IV (1991), Libros V-IX (1994), Libros X-XII (1996). Ed. Gredos. Colección Biblioteca Clásica, Madrid. Es una traducción cuidada de la versión griega de Heiberg. Incorpora algunos comentarios de Heath sobre aspectos matemáticos, pero no llega a tener la riqueza de esa versión inglesa. En la introducción de L. Vega se profundiza en aspectos lógicos e históricos. Una versión menos precisa en cuestiones lingüísticas es la de F. Vera **"Euclides: Elementos de geometría"**, en Científicos Griegos, 1970, v. I, p.702-980. Este autor simplifica las demostraciones en los últimos libros y en general prefiere que la traducción sea comprensible a que sea fiel. Las notas al pie de página sobre aspectos matemáticos son adecuadas, pero demasiado escasas. Una edición antigua bastante correcta, pero sólo de los seis primeros libros es la de R. Zamorano de 1576, **"Los Seis Libros Primeros de la Geometría de Euclides"**, traducidos en lengua Española por Rodrigo Camorano, Astrólogo y Matemático, y Catedrático de Cosmografía por su Majestad en la casa de la Contratación de Sevilla Dirigidos al ilustre señor Luciano de Negró, Canónico de la Sancta Iglesia de Sevilla. Con licencia del Consejo Real. En Sevilla en casa de Alonso de la Barrera 1576. Ha sido publicada de nuevo en 1999, en una reedición facsímil a cargo de J. Ma. Sanz Hermida, por la Universidad de Salamanca. En francés se puede consultar la versión de Vitrac, publicada por P.U.F., Paris 1990. También se tiene la versión clásica de Peyrard **"Les Oeuvres d'Euclide"** (1819) que ha sido reeditada por ed. Blanchard en 1966. Esta edición fue la primera que se hizo tratando de recuperar el texto original de Euclides. No se han utilizado esas versiones en este estudio. Otra edición, que es uno de los mejores ejemplos de las versiones pedagógicas del Renacimiento y del Barroco, la de D. Henrion, 1632, **"Les quinze livres des Eléments Géometriques d'Euclide Traduits en Francois par D. Henrion Professeur es Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du vivant de l'Autheur: avec commentaires beaucoup plus amples & faciles & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impressions precendentes Plus le Livre des Donnez du mesme Euclide aussi traduict en Francois par ledit Henrion, & imprimé de son vivant A Paris, De l'impremerie d'Isaac Dedin Et se vendent en l'Isle du Palais, `a l'Image S.Michel, par la veufue dudit Henrion",** M.DC.XXXII. Este libro se puede consultar en la página web de la Bibliothéque Nationale de Paris http://gallica.bnf.fr/

Sophia) de Constantinopla. Trata también de los sólidos regulares, mostrando cómo inscribir algunos de ellos dentro de otros, contando su número de aristas y ángulos, y calculando las medidas de los ángulos diedros formados por dos caras que tienen una arista común.

El Problema del V Postulado

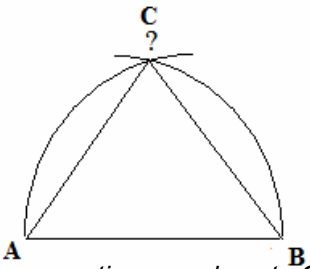
Sabemos que la axiomatización de una teoría exige que los axiomas cumplan las siguientes propiedades:

1) *Completitud.* Todo lo necesario para el desarrollo de la teoría debe aparecer explicitado en los axiomas.

2) *Consistencia.* Los axiomas no pueden llevar a proposiciones contradictorias.

3) *Independencia.* Ningún axioma debe ser consecuencia de los otros.

Euclides, al igual que otros matemáticos posteriores, dudaron de la solidez y completitud de los postulados de la geometría. Euclides, por ejemplo, usa con mucha prudencia el postulado de la prolongación de un segmento en sus dos extremos, evitando hablar de la prolongación de estos segmentos hacia el infinito. Recurre a este axioma en la medida que las demostraciones, usando gráficas, así lo exigen. Algo parecido pasa con el quinto postulado, cuya aparición como requisito en una demostración, muy poco aparece.



¿Qué nos garantiza que el punto C existe?

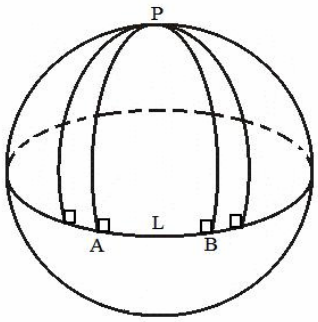
Las demostraciones, desde el punto de vista lógico, no han sido cuestionadas, pero algunos procedimientos si. Sin ir más lejos, la construcción de un triángulo equilátero, dado uno de sus lados (Ver Figura), asume la existencia del punto de intersección de las circunferencias centradas en los extremos del intervalo y con radio igual a la longitud del mismo. Pero ni en los axiomas, ni en los postulados aparece algo que garantice que los dos arcos construidos, tengan un punto en común, que de origen al tercer punto implicado en la determinación del triángulo. Se podría argüir que el gráfico así lo "demuestra". Sin embargo los gráficos o dibujos, no pueden ser parte de la prueba, solamente son ayudas o guías para una mejor comprensión de los pasos del racionamiento y en ningún modo el soporte de la demostración[185]. Habría que esperar hasta los aportes de Hilbert, a la formalización de la geometría a través de su obra ya citada **"Grundlagen …"**, para completar la axiomatización y partiendo de allí la correspondiente formalización.

En su versión más simple, el V Postulado afirma que por un punto P, exterior a una recta L puede pasar una recta y sólo una. Este axioma en apariencia evidente, porque a nivel local, es decir en cercanías al mundo que nos rodea, aparece como algo obvio, no lo es cuando nuestro enfoque se amplía, por ejemplo, a la geometría proyectiva, donde las paralelas tienen un punto en común en el infinito o en la geometría esférica, para la cual, "rectas paralelas", como son los meridianos, se tocan en los polos.

[185] Ver el trabajo del autor **"Paradojas y Fundamentos de la Matemática..."**, ya citado.

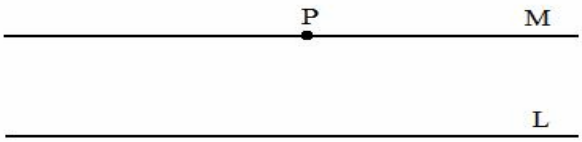
El V postulado, como decíamos, fue puesto en duda desde la antigüedad, pero no fue sino hasta el siglo XVIII que Girolamo Sacheri (1667-1733), profesor de la Universidad de Pavía, se propuso atacar el postulado con una idea muy original. Dada una recta L y un punto P exterior a ella, Sacheri consideró las tres posibles alternativas: a) existe exactamente una paralela a L que pasa por P. b) no hay ninguna recta paralela a L que pasa por P. c) hay al menos dos rectas paralelas a L y que pasan por P. La primera alternativa es precisamente el V postulado. Si supusiéramos la alternativa (b) o la alternativa (c) y los nueve axiomas restantes de Euclides y llegáramos a una contradicción; no quedaría más alternativa que aceptar (a) o sea que el axioma de las paralelas quedaría como único posible.

Al tomar (b) y los otros axiomas, Sacheri descubrió teoremas en el sistema que se contradecían entre si. Esto significaba que el no aceptar la existencia de paralelas a una recta dada que pasen por un punto exterior a L, conduce a contradicciones y por lo tanto esa alternativa debe desecharse. Quedaría entonces considerar que pasa con la tercera alternativa. Aunque Sacheri encontró resultados extraños con la inclusión de (c), no logró encontrar contradicciones en la geometría con este nuevo postulado. El encuentro de estos extraños resultados, hizo pensar a Sacheri que Euclides estaba en lo correcto con su V postulado y como consecuencia de su análisis, decidió escribir la obra, **"Euclides ab ovni naevo vendicatus"** ("Euclides reivindicado de toda mácula"), en la que daba por sentado que, Euclides había escogido la única alternativa correcta.



Los meridianos (rectas "paralelas") *se tocan en los polos.*

El fracaso de Sacheri de abrir las puertas a las geometrías no euclidianas, pudo deberse al peso histórico de más de dos mil años de la geometría de Euclides. Sin embargo, en buena medida, la Revolución Francesa de fines del siglo XVIII, aceleraría el uso de la razón como el mayor paradigma para cuestionar, tanto lo pasado, como lo presente, en todas las áreas del conocimiento. Este movimiento revolucionario generó además, patrones de pensamiento que irrumpieron en el siglo XIX con un ímpetu nunca antes visto en el desarrollo de las ciencias. Fue dentro de este plano antidogmático donde aparecieron, casi simultáneamente, los ataques al V postulado. Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1782-1856) en la Universidad de Kazán, János Bolyai (1802-1860) en Hungría y Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en la Universidad de Gotinga, prepararon el terreno para dar a luz las geometrías no euclidianas. Lobatchevsky y Bolyai publicaron sus artículos sobre estos temas, uno muy cerca del otro, pero sin conocer el resultado del otro. Gauss siguió la línea de Sacheri pero no se asustó ante los extraños resultados que encontró, si no que aceptó que se podía construir otras geometrías diferentes a la



Por P *pasa sólo una recta paralela a* L.

euclidiana. Los resultados de sus investigaciones en estos temas, se encontraron después de su muerte entre sus manuscritos no publicados.

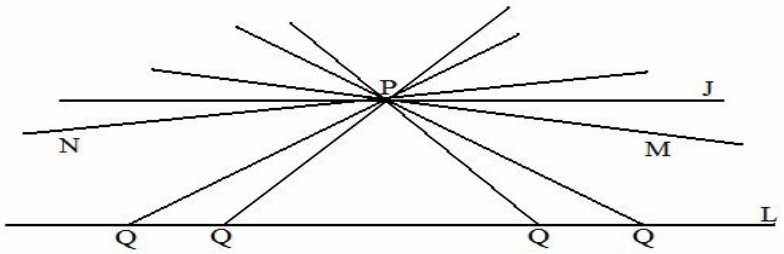
Origen de las geometrías no euclidianas.

Para mejor comprensión de la forma en que se crearon las geometrías no euclidianas consideremos la recta L y un punto P exterior a ella.

El V postulado afirma que existe sólo una recta K que pasa por P y paralela a L. Sea Q un punto arbitrario de L que se mueve a lo largo de la recta. En la geometría euclidiana, las rectas que unen a Q y P siguen el sentido contrario al de las manecillas del reloj, si Q se desplaza a la derecha y siguen el sentido de las manecillas del reloj si Q se mueve hacia la izquierda. Cuando Q se desplaza a la derecha, las rectas QP, digamos, tienden a aproximarse a K. De igual modo cuando Q se mueve a la izquierda, las rectas que unen a Q con P, también se aproximan cada vez más a la recta K por la izquierda.

Bolyai y Lobatchevsky, sin embargo, pensaron que las rectas de la izquierda se aproximan a una recta límite N, diferente a la recta límite M a la cual se aproximan las rectas QP de la derecha.

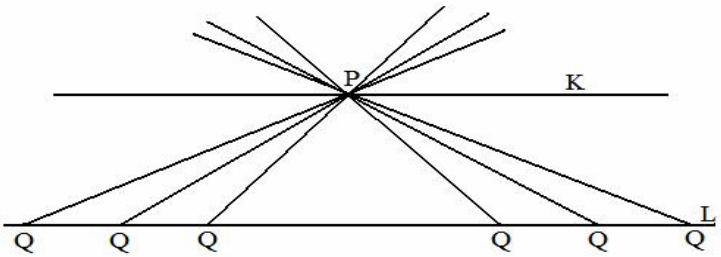
Más aún, asumieron que cada recta J que esté entre N y M no intercepta a la recta L, y así podría haber infinitas rectas paralelas a L y que pasan por el punto P. Mencionábamos antes que las gráficas no son argumentos que prueben o no determinado enunciado matemático; aquí podría argüirse que las rectas M y N mostradas, si se prolongan lo suficiente, tocarían la recta L en algún punto, pero lo



En las geometrías no euclidianas las rectas QP *de la izquierda tienden a la recta* N, *mientras que las rectas* QP *de la derecha se aproximan a la recta* M *a medida que* Q *se aleja de* P.

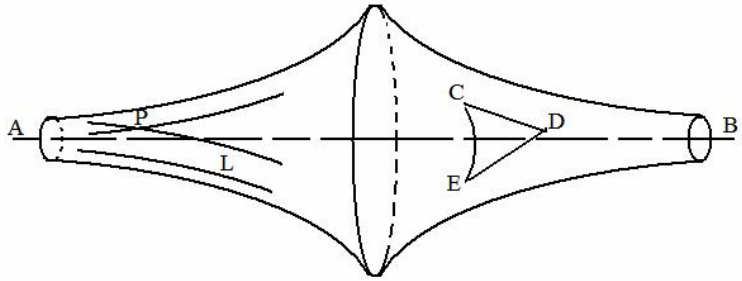
que buscamos son razones lógicas para sustentar la posibilidad de construir más de una recta paralela a L que pase por P, y precisamente lo que hicieron Lobatchevsky y Bolyai, fue demostrar que con esta asunción y el resto de los axiomas de Euclides se podía demostrar todo lo de Euclides, que no tuviera que ver con el V postulado, sin que se presentara contradicciones dentro de la teoría.

Al igual que en la Geometría de Euclides, las pruebas en las geometrías no euclidianas recurren a la lógica usual. Sin embargo, las gráficas no son muy buena ayuda para la mejor interpretación de las demostraciones. Los teoremas nuevos de estas geometrías sorprenden por su exotismo a nuestros ojos acostumbrados a los resultados de la geometría tradicional. Es el caso, por ejemplo, en la geometría de



En la geometría euclidiana todas las rectas QP tienden a K.

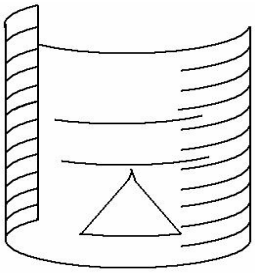
Bolyai y Lobatchevsky, para la cual, l*a suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre menor que dos rectos*, y más aun, *entre dos triángulos el que tiene mayor área es aquel, para el cual, la suma de sus ángulos interiores es menor*.
Hay contrastes sorprendentes en los dos tipos de geometrías: en la euclidiana, *dos triángulos semejantes pueden tener distinto tamaño pero sus ángulos correspondientes son iguales*. En la geometría hiperbólica (la geometría de Bolyai-Lobatchevsky), *si dos triángulos son semejantes ellos son congruentes (idénticos)*. Otro teorema afirma que la distancia entre dos rectas paralelas tiende a cero en una dirección y a infinito en la otra. La geometría de Euclides siempre se interpretó como una forma genuina, digámoslo así, de describir el espacio físico. Pero, entonces podemos preguntarnos ¿puede esta nueva geometría describir nuestro mundo físico o algún otro? Adentrémonos un poco en su estudio para poder responder a esta pregunta.
Otra pregunta de fondo es ¿si la Geometría de Euclides es correcta, cómo es posible que otra geometría que conduce a resultados contrarios pueda ser correcta? Y aun más. ¿Cómo pueden los extraños teoremas que aquí aparecen aplicarse a nuestro propio mundo? También tenemos que preguntarnos que tan correcta es la Geometría de Euclides, cuando nuestra realidad está tan limitada en el espacio, y no estamos en capacidad de confrontar esta geometría en la vastedad del universo.
Ante estas preguntas Gauss, propuso un criterio para ver qué tan correcta era la geometría de Euclides: específicamente en lo atinente a que, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es dos rectos. Propuso el experimento de medir los ángulos de un triángulo “muy grande” formado por las cimas de tres montañas. Después de hacer las mediciones de rigor, observó que la suma de los tres ángulos daba dos segundos menos que dos rectos. Esta diferencia podría atribuirse, a errores de redondeo, pues los instrumentos de medición no son exactos, o, al hecho de que los rayos de luz que llevan la información visual de un instrumento al otro se curvan en forma imperceptible. Sin embargo el experimento no fue conclusivo y no pudo confirmarse, que la geometría euclidiana fuera incorrecta. Queda entonces, la posibilidad de argüir en favor de la geometría euclidiana con respecto a los triángulos semejantes, para la cual triángulos semejantes implica ángulos iguales. En la geometría hiperbólica, triángulos semejantes no existen. Sin embargo si se hacen mediciones en el espacio pequeño que manejamos las diferencias entre triángulos grandes y pequeños de la geometría no euclidiana, vamos a encontrar que las pequeñas diferencias que aparecen pueden atribuirse a errores de medición y así el experimento, de nuevo no es concluyente. La conclusión entonces es que tampoco se puede descartar que la geometría hiperbólica describa el espacio físico del universo que nos rodea.
Otra forma de ver el problema de si la nueva geometría describe o no al espacio físico es volviendo a la geometría de Euclides, interpretada físicamente como si el plano euclidiano de las rectas y los puntos, fuera una enorme hoja de papel. Imaginemos que se puede doblar nuestra hoja de papel un poco hacia arriba a la izquierda y a la derecha, formando una superficie curvada como se muestra en la figura.



Pseudoesfera, *modelo para representar la geometría Hiperbólica de Lobatchevsky.*

Esta superficie cilíndrica, se supone que se extiende indefinidamente en todas direcciones. Como es de suponer, las rectas de este plano se curvan, pero sigue valiendo el hecho de que la distancia entre dos puntos es la línea recta, aunque en este caso sea curva. Estas curvas se llaman *geodésicas*. Las rectas paralelas en el plano corresponderán a geodésicas paralelas, es decir, geodésicas "curvas", que no se interceptan como rectas en la hoja de papel. Los triángulos del plano, se convertirán en figuras formadas por geodésicas que se cortan en la hoja de papel, pero los seguiremos llamando triángulos. Las circunferencias del plano serán también circunferencias en la superficie cilíndrica. Lo interesante del asunto es que, todos los axiomas de Euclides se siguen cumpliendo, sólo sobre el supuesto, que interpretemos los términos, recta, triángulo, circunferencia, etc. como mencionamos antes. Igual, los teoremas de la geometría de Euclides siguen valiendo, como es el caso de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Las consideraciones anteriores tienen por objeto mostrar que el modelo donde las geometrías aplican pueden cambiarse, siempre y cuando se respeten los términos primitivos, los axiomas, y desde luego, las reglas de la lógica, cuando de demostrar se trata. Para el caso de la geometría hiperbólica uno puede escoger un modelo donde se puede describir el "mundo físico" al que se quiere aplicar esta geometría. Este modelo físico donde puede tener cabida la geometría hiperbólica, se denomina *seudoesfera* (figura siguiente) y corresponde a una superficie de revolución donde la generatriz es la hipérbola con sus dos ramas. En este modelo vemos cómo, por un punto P, exterior a L pueden pasar, al menos, dos rectas paralelas a la recta dada L. Se observa también, que los triángulos aquí lucen ligeramente distintos a como se presentan en el modelo euclidiano, con sus ángulos algo distorsionados, lo que hace que la suma de sus medidas sea menor que dos ángulos rectos.



Geodésicas en el modelo curvado de la geometría plana.

Las rectas en la pseudoesfera, son curvas que determinan la menor distancia entre dos puntos de la superficie. Estas curvas, se llaman aquí también, geodésicas. El axioma que afirma que dos puntos determinan una geodésica, es también válido aquí. Como muestra la figura por un punto exterior a una geodésica pueden pasar infinitas geodésicas que no interceptan a L. La pseudoesfera permite la visualización de una geometría no euclidiana, con el pequeño sacrificio de ver las rectas convertidas en geodésicas, pero que satisfacen todos los postulados de Euclides, excepción hecha, del V Postulado.

Al volver a nuestra pregunta de si la geometría hiperbólica puede describir el espacio donde vivimos, tenemos que convenir que la geometría del espacio físico depende del significado que le demos al concepto de línea recta. Por la experiencia diaria, asociamos una recta a un hilo tensionado. Para este caso, la geometría euclidiana responde muy bien. Pero la situación real, no siempre se acomoda al modelo del hilo tenso. Si se vive en un país montañoso como el nuestro, por ejemplo, la menor distancia entre dos puntos no siempre es la línea recta, debemos acomodarnos a la topografía del sector para buscar la geodésica que minimice la distancia. Desde luego que en este modelo no todos los axiomas de Euclides se van a cumplir; verbigracia, puede haber más de una geodésica entre A y B que minimice la distancia entre estos dos puntos.

En distancias astronómicas el modelo del hilo tenso ya no se aplica y debemos recurrir al rayo de luz para modelar el concepto de línea recta. Sin embargo, como Albert Einstein (1879-1955) demostró, los rayos de luz se curvan cuando atraviesan campos de alta gravitación y así tampoco los rayos lumínicos pueden representar las rectas ideales de la geometría euclidiana. Las perpendiculares comunes a dos geodésicas tienen distinta representación dependiendo de la geometría en que se haga el trazado. Esta observación corresponde al hecho de que en un triangulo, la suma de los ángulos interiores es, menor que 180º, exactamente 180º, o mayor que 180º, según se trate en geometría hiperbólica (Bolyai-Lobachevsky), euclidiana o elíptica (Riemann).

Al contar la historia del origen de las geometrías no euclidianas los textos de Historia de las Matemáticas[186], omiten el aporte de Franz Adolph Taurinus (1794-1874) y de su tío F. K. Schweikart. La contribución de Taurinus y Schweikart se hizo, digamos, desde fuera de los dominios de las matemáticas académicas, por cuanto que ambos fueron abogados de profesión y tenían a las matemáticas sólo como un *divertimento*. Taurinus mantuvo correspondencia con Gauss sobre estos temas. En 1826 comprobó que no había contradicciones en las geometrías no euclidianas y publicó en Colonia, Alemania ese mismo año, su obra **"Geometriae Prima Elementa"**, donde aceptaba que había otra geometría para la cual la suma de los ángulos de un triángulo era menor que 180º. A esta geometría la denominó **"Geometría Esferologarítmica"**. También estudió la trigonometría no euclidiana con aplicación a problemas elementales de resolución de triángulos esféricos. Su mayor mérito es haber propuesto la idea de que una geometría elíptica podía realizarse en la superficie de la esfera y que era posible extender el número de geometrías no euclidianas hasta el infinito[187].

4. Arquímedes de Siracusa (alrededor 287-212 a.C.).

Es no sólo el talento matemático griego por excelencia, sino el científico más célebre de la Antigüedad. Su fama nació tanto de sus contribuciones teóricas como, o quizá más, de sus habilidades técnicas en ingeniería civil y militar, y de la circunstancia de estar en el lugar y en el momento oportunos (la caída de Siracusa el año 212, durante la 2ª Guerra Púnica entre los romanos y los cartagineses, a quienes Siracusa se había aliado dos años antes), para atraer la atención de los grandes historiadores greco-romanos (Polibio, Livio, Plutarco). Mereció una biografía temprana de Heráclides, hoy perdida lamentablemente. Pese a su popularidad y a la vez en aras de ella, las noticias que nos han llegado de su vida y milagros, heurísticos e ingenieriles, no son muchas, ni son todas fiables[188].

---

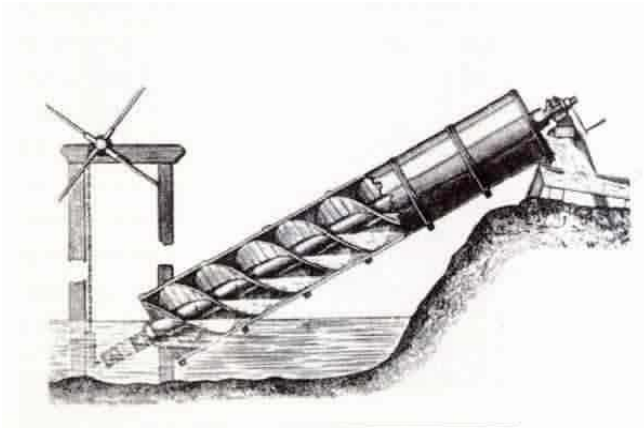
[186] Ver por ejemplo, Eves, H.-**"An Introduction to the History of Mathematics"**. Holt, Reinhart and Winston, New York, 1976, y Boyer, C. B.-**"A History of Mathematics"**, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1989. Detalles adicionales sobre las GNE pueden ser consultados en Aaboe, A.-**"Matemáticas: Episodios Histórico desde Babilonia hasta Ptolomeo"**, Editorial Norma, Cali, 1964 y en Kline, M.-**"Mathematics in Western Culture"**, Oxford University Press, London, 1980.

[187] Sobre la historia del V Postulado se puede ampliar en R. Bonola, 1923, **"Geometrías no Euclidianas. Exposición Histórico-crítica de su Desarrollo"**, Ed. Calpe, colección Biblioteca de Ideas. Como esta edición no es fácil de encontrar, se puede acudir a la versión italiana que se encuentra en http://historical.library.cornell.edu/math/math B.html

[188] Recomendamos **"El contador de arena"** de Gillian Bradshaw, editado por Planeta DeAgostini, Buenos Aires, 2009.

Sabemos por él mismo (Arenario, I 9) que fue hijo de Fidias, astrónomo. Mantuvo, al parecer, buenas relaciones con la dinastía siracusana y le rindió cumplidos servicios: tal vez fuera una especie de consejero áulico del tirano Hierón II, a cuyo hijo -y corregente- Gelón está dedicado el Arenario. Hierón, un sagaz estadista, procuró sacar partido de la inventiva de Arquímedes, sobre todo en obras de fortificación y defensa militar, al tiempo que lamentaba no disponer en sus dominios de otro talento similar para el desarrollo de la agricultura. El dato mejor establecido de la vida de Arquímedes es su muerte en el fragor de la toma y saqueo de su ciudad natal, Siracusa, en 212 a.C. (ver su Cronología más adelante). Ha contribuido a su fama, el hecho que murió a manos de un legionario mientras se hallaba absorto en la consideración de un problema geométrico, aunque ésta sólo sea una de las varias versiones que correrían siglos después sobre una desgracia también sentida por el general romano Marcelo, ansioso de conocer al "Briareo geómetra" que había contenido y atemorizado con toda suerte de máquinas y artilugios defensivos a sus tropas de asalto. Si, a partir de ese dato, diéramos crédito a lo que Tzetzes, un polígrafo bizantino del s. XII, afirma sobre Arquímedes *"trabajó en geometría hasta edad avanzada viviendo 75 años"*[189], podríamos suponer que nació el año 287 a.C.

Nada tenemos acerca de su formación como no sean conjeturas. Puede que, bajo la tutela de su padre, estudiara astronomía: no solo estaba bien informado, es nuestra primera fuente sobre la concepción heliocéntrica de Aristarco, sino que construyó un planetario o una esfera celeste móvil donde estaban representadas las constelaciones, formó parte del botín romano[190], además de escribir una obra hoy perdida sobre este tipo de aparatos; el citado Arenario da ya muestras de su interés por las mediciones angulares. Puede también que la astronomía lo condujera inicialmente hasta Eudoxo, aunque luego le interesasen de él en especial sus contribuciones matemáticas y en particular los supuestos implícitos en su método de convergencia. Se dice, que viajó a Egipto y, más aún, que dejó allí la impronta de su ingenio con la invención de una coclías, "rosca o tornillo de Arquímedes", sabemos que los romanos emplearon una coclías de roble en una mina de Sotiel Coronada (Huelva) para la extracción de agua.

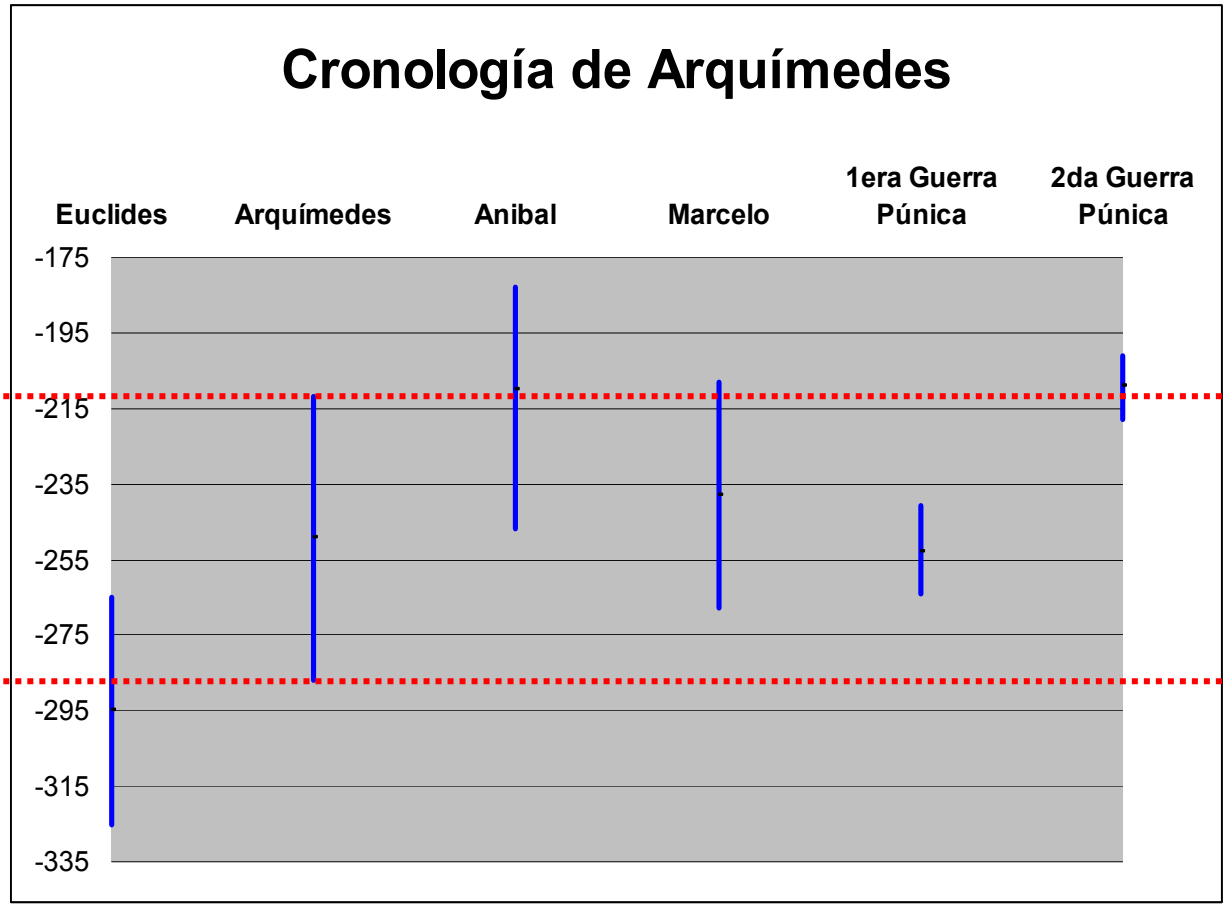


La máquina está constituida por un cilindro con una hélice en su interior dispuesto el conjunto oblicuamente de forma que la parte inferior esté sumergida en el depósito del que se quiere elevar el agua. Girando el tornillo en el sentido descendente de la hélice (en el que se enrosca) arrastra una cierta cantidad de agua que es vertida en el depósito elevado. El mismo efecto se logra si se arrolla un tubo flexible a un cilindro.

De su visita a Alejandría lo que queda claro es su comunicación personal y su correspondencia científica con algunos matemáticos alejandrinos distinguidos por su competencia matemática, Conón de Samos (276 a.C.-194 a.C.), o por su valía intelectual, Eratóstenes de Cirene (280 a.C.-222 a.C.), o por alguna otra razón que hoy se nos escapa, Dositeo de Pelusio discípulo de Conón. Pero sus relaciones con

[189] Quiliades, 2, **"Historia"** xxxv.
[190] Cicerón, **"De repub."**, I, xiv, 21-22.

la comunidad alejandrina, tal vez investida de una ortodoxia post-euclídea, no dejaron de ser un tanto problemáticas: Arquímedes parece impacientarse en ocasiones, como Apolonio, ante unos investigadores y becarios, digamos, del Museo



de Alejandría que han sustituido la investigación original por el celo escolar en las demostraciones de lo ya sabido. Aparte de esos eventuales viajes, se supone que Arquímedes residió siempre en Siracusa donde, según las leyendas, gozó de gran popularidad gracias a alguna extravagancia y a no pocas maravillas.

Herón II, Rey de Siracusa, pidió un día a su pariente Arquímedes, que comprobara si una corona que había encargado a un orfebre local era realmente de oro puro. El Rey le pidió también de forma expresa que no dañase la corona. Arquímedes dio vueltas y vueltas al problema sin saber como atacarlo, hasta que un día, al meterse en la bañera para darse un baño, se le ocurrió la solución. Pensó que el agua que se desbordaba tenía que ser igual al volumen de su cuerpo que estaba sumergido. Si medía el agua que rebosaba al meter la corona, conocería el volumen de la misma y a continuación podría compararlo con el volumen de un objeto de oro del mismo peso que la corona. Si los volúmenes no fuesen iguales, sería una prueba de que la corona no era de oro puro.

A consecuencia de la excitación que le produjo su descubrimiento, Arquímedes salió del baño y fue corriendo desnudo como estaba hacia el palacio gritando *"¡Lo encontré! ¡Lo encontré!"*.

La palabra griega "**¡Eureka!**" utilizada por Arquímedes, ha quedado desde entonces como una expresión que indica la realización de un descubrimiento.

Al llevar a la práctica lo descubierto, se comprobó que la corona tenía un volumen mayor que un objeto de oro de su mismo peso. Contenía plata que es un metal menos denso que el oro.

Las aportaciones de Arquímedes a las Matemáticas fueron de gran categoría científica. Su método fue fundamentalmente geométrico, obteniendo conclusiones que no sólo representaron un gran avance sobre la geometría, sino que también llevan al cálculo integral. Fue el primer matemático conocido del que se tienen noticias que calculó el área limitada por un segmento parabólico en el intervalo [0,1], determinando la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
No obstante el método de exhaución yace en la base de muchos métodos infinitesimales y de logros notables concretos de los matemáticos antiguos, en primer lugar de Arquímedes, al cual le pertenece el parabólico.
Las obras de Arquímedes fueron escritas fundamentalmente en forma de cartas. Hasta nosotros han llegado diez obras grandes y algunas más pequeñas de carácter matemático. La característica fundamental de las obras matemáticas de Arquímedes es la aplicación de métodos matemáticos rigurosos en la mecánica y la física.
Esta particularidad hace de los trabajos de Arquímedes el más brillante modelo del desarrollo de los conocimientos matemáticos aplicados, de la técnica del cálculo y de nuevos métodos matemáticos, en especial los infinitesimales, en la época final de la antigüedad.
Nosotros no nos proponemos la tarea de dar una caracterización completa de la obra de Arquímedes. Aquí consideramos la cuestión sobre la interpenetración de los métodos de las matemáticas y la mecánica de los trabajos de Arquímedes, sobre la elaboración por él del método de las sumas integrales y sobre sus así denominados métodos diferenciales.
Numerosos inventos y descubrimientos mecánicos de Arquímedes son ampliamente conocidos. A él pertenece el tornillo Arquimediano, los sistemas de palanca, bloques y tornillos para el levantamiento y movimiento de grandes pesos, determinación del contenido de las aleaciones mediante su sumersión en agua, el planetario, catapultas, etc. Son conocidos también los trabajos teóricos de Arquímedes en la mecánica **"Sobre el equilibrio de las figuras planas",** donde se expone la ley de las palancas**, "Sobre los cuerpos que flotan", "El libro de los soportes"**, etc. En virtud del rigor, la originalidad y la trascendencia de sus resultados se le considera el primer matemático moderno. Arquímedes en algún momento de su formación visitó Alejandría y estuvo en contacto con los sucesores de Euclides, particularmente mantuvo relación con Conón de Samos, y Eratóstenes de Cirene, como mencionamos antes. El primero fue el descubridor de la espiral que hoy conocemos con el nombre de Arquímedes (a la que nos referiremos más adelante) y estudió los puntos de intersección entre dos secciones cónicas. El segundo fue director de la biblioteca de Alejandría a partir de 235 a.C. y autor del conocido método de la Criba para la determinación de números primos.

La obra de Arquímedes fue desarrollada fundamentalmente a través de cartas escritas en el más absoluto rigor euclidiano y con un marcado énfasis en la aplicación de los métodos matemáticos a la Mecánica y la Física. Así por ejemplo en **"Sobre el equilibrio de las figuras planas"** expone la

ley de las palancas, **"Sobre los cuerpos que flotan"** estudia los principios básicos de la hidrostática, etc. También a él pertenecen toda una serie de inventos prácticos y artefactos bélicos como: el tornillo sinfín, la rueda dentada, los sistemas de palancas, la polea móvil, el planetario, las catapultas, etc.

En lo fundamental su obra matemática estuvo vinculada a la solución de problemas sobre cuadraturas, cubaturas y cálculo de tangentes por lo que se le considera un precursor del Cálculo Diferencial e Integral. En el terreno metodológico llevo el Método de Exhaución a alcanzar sus máximas conquistas demostrativas. Muchas de estas fueron previamente divisadas por un grupo importante de métodos; que en este momento tenían un valor fundamentalmente heurístico, pero cuya maduración posterior constituiría los principios del Cálculo Infinitesimal y el Método Experimental en ciencias naturales. Entre ellos son de interés: el Método Mecánico-Geométrico, el método de Sumas Integrales y el Método de Tangencia a los que nos referiremos a continuación.

Tal fue la fascinación de Arquímedes por la Mecánica que no sólo se ocupó de buscar basamento geométrico para sus principios sino que también logró que ésta penetrara en sus métodos matemáticos. Así en su **"Carta a Eratóstenes"** también conocida como **"Tratado del Método"** redescubierta en 1906, afirma *"Estoy...convencido de que el método no es menos útil para la demostración de los teoremas. Pues algunas de las cosas que se me hicieron claras por vía "mecánica", se demostraron más tarde de forma geométrica, porque el modo de observación de este tipo carece de fuerza probatoria. Pues es más fácil realizar la demostración cuando previamente se ha obtenido una idea de la cuestión por vía "Mecánica", que cuando no se cuenta con este conocimiento previo"*.

Más adelante describe como utiliza el método Mecánico-Geométrico (también conocido como "Pesadas Infinitesimales") para determinar que el área de un sector parabólico es 4/3 del área del triángulo inscripto de igual base y altura (ver cuadro 10). Este consiste en pesar idealmente en una balanza de brazos desiguales ambas figuras como si estuvieran provistas de masa y mediante deducciones apoyadas en las leyes de la palanca arribar a tal conclusión. La esencia del método, es decir las analogías mecánicas y físicas, fue utilizada ampliamente en el estudio de las ecuaciones de la física matemática a partir del siglo XVIII.

Estos resultados fueron sometidos a una prueba en el rigor del Álgebra Geométrica y el Método de Exhaución en la carta "Cuadratura de la Parábola". Particularmente es de interés el lema inicial, donde mediante ingeniosos procedimientos halla que la "suma" de la "serie" es π, para luego inscribiendo triángulos exhaustivos llegar al resultado.

Arquímedes llevó el Método de Exhaución y su aspecto aritmético a producir sorprendentes resultados como la estimación $3.14085<\pi<3.14286$ (que equivale a promediar 3.14195 en lugar del conocido 3.14159) en **"Medida del Círculo"** haciendo inscripciones y circunscripciones de polígonos de hasta 96 lados. Al decir del historiador E. T. Bell *"Aplicando el Método de Exhaución, Arquímedes se reveló como un maestro consumado del rigor matemático y un artista perfecto"*.

Otro de sus métodos fue el de "Sumas Integrales" que resultaba del perfeccionamiento de los procesos exhaustivos mediante una estratificación por exceso y por defecto adecuada a cada problema. Análogo a las sumas superiores e inferiores de Darboux para la integral definida, pero 22 siglos antes. En **"Sobre Conoides y Esferoides"** determina el volumen de paraboloides e hiperboloides de revolución (Conoides), así como de Elipsoides de revolución (esferoides) estratificando en cada paso con cilindros de igual altura. En **"Sobre espirales"**

repite el método para calcular el área de la primera espira de la hoy conocida como espiral de Arquímedes, estratificando con sectores circulares de igual amplitud en cada caso.

Es precisamente es en este último trabajo donde desarrolla su "Método de Tangencias" (primer antecedente del cálculo diferencial) para determinar la tangente a cualquier punto de la espiral. Este consiste esencialmente en establecer un "Triángulo diferencial" formado por el incremento del radio vector a partir del punto de tangencia, el segmento de tangente y el arco de la circunferencia (trazada desde el origen con radio de longitud igual a la del radio vector del punto de tangencia) comprendido entre el punto de tangencia y el incremento del radio vector. Sobre este se establecen, consideraciones que pudiéramos llamar "infinitesimales", suficientemente pequeño, para determinar un segundo punto de la recta tangente a la espiral en el punto A y así construir la misma.

A diferencia de sus predecesores griegos, Arquímedes, también desarrolló una maestría de cómputo original. Esto se manifiesta en el "Problema de los bueyes" (resuelve la ecuación), el método de cálculo de raíces (aún no bien aclarado), y en **"Arenario"** (o "El contador de arena").

En este último, haciendo uso magistral y reiterativo del conocido hoy como Axioma de Arquímedes (*"Las magnitudes tienen una razón entre si, cuando multiplicadas son capaces de superarse la una a la otra"*, según la definición 4 de **"Elementos"** y que antes fue ampliamente utilizado por Eudoxio en la fundamentación de su teoría de proporciones) se propone estimar la cantidad de granos de arena que existen en el mundo usando un embrión de lo que hoy llamamos notación científica o exponencial para denotar números muy grandes. Hemos dicho que este trabajo es además importante, por contener una de las pocas referencias conocidas a la teoría heliocéntrica del Sistema Solar, presentada por Aristarco.

La obra matemática de Arquímedes fue una fuente de inspiración importante para los precursores del Cálculo Infinitesimal a partir del siglo XVI. Al decir de W. Leibniz (1646-1716) *"estudiando a Arquímedes, dejas de asombrarte por los éxitos de los matemáticos actuales"*.

En la obra de Arquímedes, los trabajos sobre mecánica ocuparon un lugar tan importante que los métodos de la mecánica y análogos penetraron incluso en los métodos matemáticos. Hasta hace poco tiempo era imposible juzgar a ciencia cierta sobre tales penetraciones. La cuestión se aclaró definitivamente después que en el año 1906, Johan Ludwing Heiberg encontró la obra de Arquímedes **"Epístola a Eratóstenes"**, sobre el método mecánico de resolución de problemas geométricos, en un palimpsesto de la Biblioteca de Irak.

Este mismo método de analogía mecánica lo utilizó Arquímedes en la obra **"Sobre la cuadratura de la parábola".** Una lámina parabólica se representa colgada de uno de los brazos de una palanca de brazos desiguales y divididos en elementos, cada uno de los cuales está equilibrado por la correspondiente carga en el otro brazo.

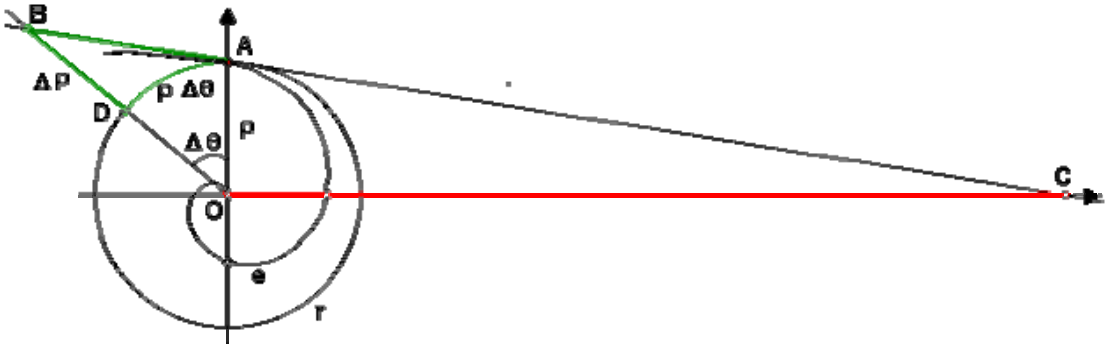
En concordancia con la tradición científica de su época Arquímedes tradujo las demostraciones, obtenidas por el método de la analogía mecánica, al lenguaje de uso general del método de exhaución con la obligatoria culminación de este último, con la demostración por reducción al absurdo para cada caso particular.

La siguiente variedad de los métodos infinitesimales de la remota antigüedad es el método que puede caracterizarse como el método de las sumas integrales. Ya hemos dicho que los más brillantes ejemplos de aplicación de este método se encuentran en las obras de Arquímedes **"Sobre la esfera y el cilindro", "Sobre las**

espirales", "Sobre los conoides y **esferoides".** La esencia de este método en su aplicación, por ejemplo, al cálculo de los volúmenes de los cuerpos en revolución consiste en lo siguiente: Un cuerpo en revolución se divide en partes y cada parte se aproxima por cuerpos inscritos y circunscritos, cuyos volúmenes pueden ser calculados. La suma de los volúmenes de los cuerpos circunscritos será mayor y la suma de los cuerpos inscritos, menor que el volumen del cuerpo en revolución. Ahora queda escoger los cuerpos que se aproximan inferior y superiormente de tal manera que la diferencia de sus volúmenes pueda hacerse tan pequeña como se quiera.

Como ejemplo de método de las sumas integrales citemos el de la resolución de Arquímedes del problema del cálculo del volumen de un Elipsoide en revolución en las obras **"Sobre los conoides y esferoides"**. Así él denomina los cuerpos formados el giro de las secciones cónicas alrededor del eje mayor, los conocidos son los paraboloides e hiperboloides en revolución y los esferoides son los elipsoides en revolución. A la resolución concreta del problema se antepone el lema, si está dado un segmento de esferoide, seccionado de la misma manera, entonces pueden ser inscrito en él y circunscrito alrededor de él figuras que constan de cilindros de igual altura y de tal forma que la figura circunscrita supere a la inscrita en menos que cualquier magnitud sólida (volumétrica).

Parecería que la analogía del método de las sumas integrales de los antiguos y la integración definida es total. Tal impresión se refuerza porque nosotros modernizamos la forma de exposición. Por eso, es necesario señalar también sus diferencias. La cuestión está en que el método de las sumas integrales de los antiguos se apoya en un concepto de área intuitivo, no rigurosamente definido y no utiliza el aparato aritmético-algebraico. En él no se introducen y no se definen los



Hallar la tangente a la espiral e en el punto A (**"Sobre Espirales"**, Arquímedes): El método consiste en encontrar la magnitud de la subtangente OC. Por construcción el ángulo AOC es recto, consideremos ahora el triángulo diferencial ABD formado por el incremento en el radio vector (DB), el arco de circunferencia DA y el segmento AB de la tangente. Nótese que los ángulos DAB y OCA son iguales luego los triángulos DBA y AOC son aproximadamente semejantes. Entonces OC/OA = DB/DA, como en nuestra notación polar OA=ρ, DB=2ρ y el arco DA es de longitud $\rho\Delta\theta$; de la relación anterior se tiene que OC=$\rho^2\Delta\theta/\Delta\rho$. Recordar que la ecuación de la espiral de Arquímedes es $\rho=\theta$.

conceptos generales necesarios: límite, integral, suma infinita, etc. y no se estudian las condiciones de aplicabilidad de los teoremas enunciados. El método se aplica para cada problema concreto sin la extracción y formalización de sus fundamentos teóricos generales.

Junto al método de las sumas integrales, en las matemáticas antiguas fueron elaborados métodos, los cuales pueden ser retrospectivamente valorados como diferenciales. Como ejemplo de semejantes métodos puede servir, como dijimos, el

método para encontrar la tangente a la espiral en la obra de Arquímedes **"Sobre espirales".**

Finalmente, en las matemáticas antiguas se consideraban también los denominados problemas variacionales. En las obras de Arquímedes semejante problema se encuentra sólo una vez en la proposición final de la obra **"Sobre esfera y el cilindro".** Aquí se consideran segmentos con igual superficie de diferentes esferas y se demuestra que el segmento que tiene forma de semiesfera tiene el mayor volumen. Algo después, apareció la obra de Zenodoro, en la cual la teoría de las figuras isoperimétricas fue desarrollada rigurosa y completamente para los polígonos, círculos y en cierta medida para los poliedros, los cuerpos simples en revolución y la esfera. Las proposiciones de carácter extremal estaban ampliamente difundidas en aquella época, algunas veces teniendo un carácter no puramente matemático, sino mecánico e incluso de filosofía natural.

En general, los sólidos platónicos tienen muchas limitaciones, entre otras, necesitas el mismo número de polígonos regulares en cada vértice. Si relajamos esta condición, y simplemente pedimos que haya arreglos similares en cada vértice, pero admitimos usar diversos tipos de polígonos regulares, tenemos más posibilidades, a saber, los poliedros semiregulares. El cubo-octaedro y el icosa-dodecaedro son dos ejemplos de este tipo de poliedros. Heron en el siglo I A.C. dijo que Arquímedes descubrió 13 poliedros que satisfacen estas condiciones. Es decir, los sólidos arquimedianos o sólidos de Arquímedes son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. Todos los sólidos de Arquímedes son de vértices uniformes. La mayoría de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos. Arquímedes describió ampliamente estos cuerpos en trabajos que fueron desapareciendo, fue sólo en el Renacimiento cuando artistas y matemáticos los redescubrieron[191].

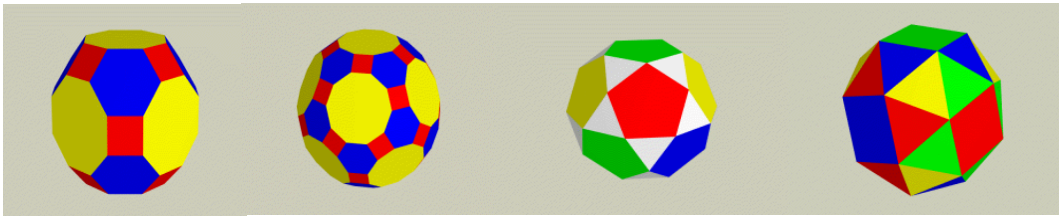
En la siguiente tabla presentamos el nombre de estas figuras, así como el número *v* de vértices, el número *a* aristas, el número *c* de caras y el número f_n de polígonos de n lados que presentan las caras de los sólidos Arquimedianos.

n	Sólido	v	a	c	f3	f4	f5	f6	f8	f10
1	cubo- octaedro	12	24	14	8	6				
2	gran rombi-icosa-dodecaedro	120	180	62		30		20		12
3	gran rombo-cubo-octaedro o rombicuboctaedro mayor	48	72	26		12		8	6	
4	icosa-dodecaedro	30	60	32	20		12			
5	pequeño rombo-icosa-dodecaedro	60	120	62	20	30	12			
6	pequeño rombi-cubo-octaaedro o rombicuboctaedro menor	24	48	26	8	18				
7	cubo "snub"	24	60	38	32	6				
8	dodecaedro "snub"	60	150	92	80		12			
9	cubo truncado	24	36	14	8				6	
10	dodecaedro truncado	60	90	32	20					12
11	icosaedro truncado	60	90	32			12	20		

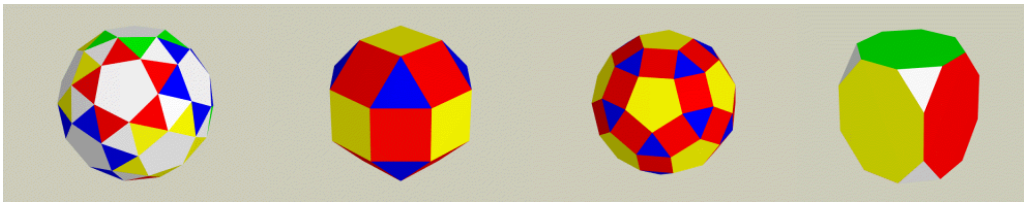
[191] En el trabajo del autor **"El Teorema de Euler y la Topología"**, Revista Eureka, Núm.19 (2002), 16-57 disponible en http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka, se presentan diversas relaciones entre los sólidos platónicos, los arquimedianos y la Fórmula de Euler, así como propiedades geométricas de los mismos.

12	octaedro truncado	24	36	14	6	8
13	tetraedro truncado	12	18	8	4	4

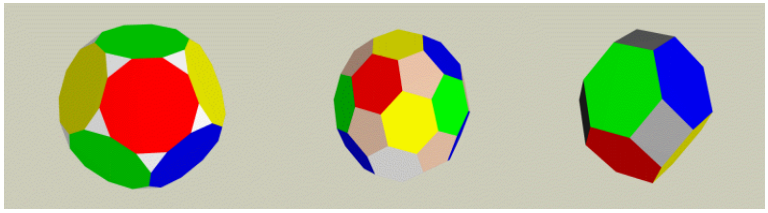
A continuación presentamos los sólidos arquimedianos que se obtienen truncando los sólidos platónicos.



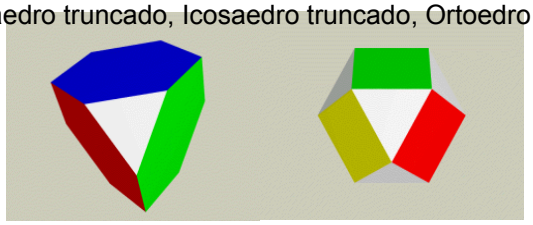
Cubortoedro truncado, Icosidodecaedro truncado, Icosidodecaedro, Cubo snub



Dodecaedro snub, Rombocubortoedro, Rombicododecaedro, Cubo truncado



Dodecaedro truncado, Icosaedro truncado, Ortoedro truncado



Tetraedro truncado, Cubortoedro

5. "El Método" de Arquímedes.

Heiberg publicó su reconstrucción de los trabajos de Arquímedes encontrados en el palimpsesto mientras éste permanecía en el monasterio en Estambul. Sin embargo antes de completar la publicación de la nueva edición de Heiberg[192] sobre los trabajos de Arquímedes incorporando estos nuevos descubrimientos, la guerra estalló en la zona junto con el resto de Europa. Durante la Primera Guerra Mundial, los aliados planearon la partición del imperio Otomano, pero Mustafa Kemal, más tarde conocido como Atatürk, tenía otra idea. Atatürk se enfrentó a los levantamientos locales, las fuerzas otomanas opuestas a él y a las fuerzas armadas griegas. Aunque Turquía había sido declarada nación soberana en enero de 1921, los ejércitos griegos estuvieron a punto de llegar hasta Ankara. La supervivencia de

[192] J. L. Heiberg (ed.)-**"Archimedes Opera omnia cum commentariis Eutocii"**, Leipzig, 1910-15, reprinted 1972.

la biblioteca del Metoquión del Sagrado Sepulcro de Estambul no podía garantizarse durante el conflicto, y los líderes de la iglesia ortodoxa griega solicitaron que los libros de la biblioteca se enviaran a la Biblioteca Nacional griega para que estuvieran seguros. De los 890 trabajos tan sólo 823 llegaron a Grecia y el palimpsesto de Arquímedes no estaba entre ellos.

No se sabe qué ocurrió exactamente con el palimpsesto de Arquímedes. Terminó, según parece, en las manos de un desconocido coleccionista francés de los años 20 mientras era declarado oficialmente perdido y la mayor parte de la gente asumía que había sido destruido. El coleccionista francés puede haberlo vendido muy recientemente pero lo que sabemos con certeza es que el palimpsesto apareció en una subasta en la casa Christie's de Nueva York en 1998 donde fue adquirido por un comprador anónimo. Se mostró con la parte central rota y abierta para mostrar el texto original examinado por Heiberg. Fue comprado por 2 millones de dólares el 29 de octubre de 1998[193].

Quedan por resolver varios misterios sobre el palimpsesto además de quién es el actual propietario:

- ¿En 1922 fue vendido o robado?
- ¿Quién fue su propietario entre 1922 y 1998?
- El palimpsesto parecía tener un cierto número de iconos cuando se mostró en Christie's en Nueva York en 1998, sin embargo Heiberg no había mencionado la existencia de ninguno de ellos. ¿Fueron añadidos por uno de sus propietarios con la intención de aumentar su valor?

Los diagramas vistos en la versión de **"Sobre los cuerpos flotantes"** en el palimpsesto son diferentes de los de la traducción de Guillermo de Moerbeke. Y también son diferentes de los que aparecen en la versión de Heiberg de **"Sobre los cuerpos flotantes"** que tiene el texto del palimpsesto. ¿De dónde sacó Heiberg estos diagramas si no son originarios del palimpsesto?

La idea más antigua sobre lo infinitamente pequeño está asociada a una manera muy particular de entender las circunferencias y los círculos. No es extraño que fuera precisamente la figura más esclarecida del atomismo griego, Demócrito de Abdera, quien sugirió por primera vez, que las circunferencias y los círculos son, en realidad, polígonos regulares con infinitos lados infinitamente pequeños.

La concepción atomista en las diferentes etapas del desarrollo científico se ha manifestado también en matemáticas a través del concepto que se tenga sobre lo infinitamente pequeño. La primera presentación formal coherente y sólida que se conoce de una teoría atomista se debe a Demócrito. Ésta descansa sobre el principio del movimiento de la materia. Según dicha concepción, los átomos se mueven eternamente; el átomo es la materia misma en movimiento, Demócrito entendía los átomos como el ser, y el vacío como el no ser; pero el vacío era para él tan real como los átomos[194].

Aristóteles refiriéndose a Demócrito sostenía *"Parece haber meditado sobre todas las cosas, y nadie antes que él había hablado del crecimiento y del movimiento más que de un modo superficial"*[195].

---

[193] Para mayor información recomendamos Wilson, N.-**"The Archimedes Palimpsest. A Progress Report"**, Lincoln College Oxford (http://www.archimedespalimpsest.org/) y González Urbaneja, P. M. (2006)-**"A un siglo del descubrimiento de El Método de Arquímedes por Heiberg"**, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 9.3, pp. 715-744.

[194] Dynnik, M.A.-**"Historia de la filosofía"**, t. I, Grijalbo, S.A., México, 1968.

[195] Vera, F.-**"Científicos griegos"**, Aguilar, Madrid. 1970.

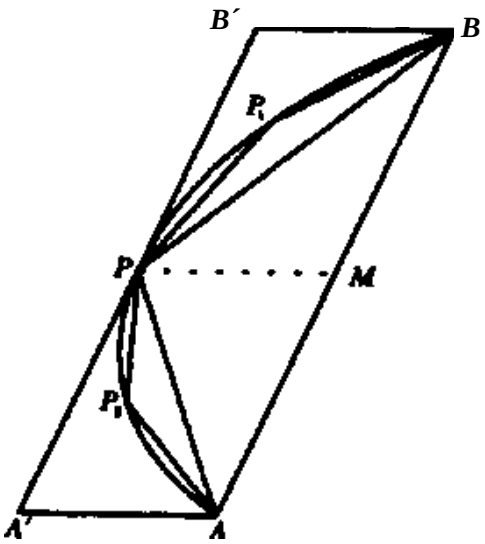
Marx y Engels lo consideraban como un *"naturalista empírico y primera mente enciclopédica de los griegos"*[196]. Fue el primero que planteó en toda la historia de la ciencia griega de la Antigüedad el problema del espacio y del tiempo; para este filósofo abderita, espacio es todo el gran vacío en el que se mueven los átomos, además lo consideraba continuo infinito en extensión y negaba que su divisibilidad fuera infinita[197].

El último autor que es preciso considerar con respecto a este tema es Arquímedes. Acerca de él, los historiadores son unánimes al señalarlo como un excelentísimo matemático. Podemos resumir esto con las palabras de Edwards[198], quien dice *"Arquímedes de Siracusa fue el mayor matemático de los tiempos antiguos y veintidós siglos no han disminuido el brillo o la importancia de su obra. Otro matemático de poder y creatividad comparables no se vio antes de Newton en el siglo diecisiete, ni uno con una claridad y elegancia similares en el pensamiento matemático, antes de Gauss, en el siglo diecinueve"*.

Arquímedes no tan sólo alcanzó fama por su producción teórica sino, también, por sus múltiples inventos prácticos y por haber sido responsable de la destrucción de la flota romana del general Marcelo, por medio de catapultas, cuando éstas atacaban su natal Siracusa.

Cualquier persona interesada en obtener mayores detalles sobre la vida de Arquímedes podrá consultar casi cualquier Historia de las Matemáticas y no quedará defraudada. Aquí me concretaré en presentar *sólo parte* de un resultado en el que es claro el papel que desempeña el método de exhaución para obtener la demostración de aquél. El problema al que se enfrenta Arquímedes es el de determinar el área de un segmento parabólico *APB.*

Consideremos el paralelogramo circunscrito alrededor del segmento parabólico *APB,* con *AB, A'B'* como lados; y *AA'* y *BB'* como bases, paralelas al diámetro *PM* (siendo *P* el vértice). Puesto que el área del triángulo inscrito, *APB,* es la mitad del paralelogramo circunscrito, se sigue que el área de este triángulo es más de la mitad del segmento parabólico *APB.*



Ahora consideremos los dos segmentos parabólicos menores, AP_2P y PP_1B que tienen a P_2 y a P_1 como vértices, respectivamente, y trácense los triángulos AP_2P y PP_1B, por un razonamiento similar al anterior, concluimos que cada triángulo ocupa una porción mayor de la mitad del segmento en que se encuentra. Quedan, ahora, cuatro segmentos parabólicos, con respecto a los cuales el proceso continuará.

Conforme al método de exhaución y a la Proposición 1 del Libro X de los **"Elementos"**, ya que cada uno de los triángulos trazados tiene una magnitud mayor que la mitad del área en que se encuentra, dada una magnitud $\varepsilon > 0$ obtendremos, luego de un número finito de pasos, un polígono inscrito en el segmento *APB,* tal que su área diferirá de la del segmento por una magnitud menor que ε.

---

[196] Marx, C. y F. Engels-**"La ideología alemana"**, Obras completas, t. III, Mir, Moscú, 1955.
[197] Dynnik, M.A.-Op. Cit.
[198] Edwards, C.H.-**"The Historical Development of the Calculus",** Springer-Verlag, New York, 1979. pág. 29.

El resto de la demostración queda para el lector. Lo que aún falta por hacer es a) demostrar que la sucesión de triángulos que se forma, será tal que, a cada paso, el conjunto de triángulos resultante tiene una área de 1/4 del área del conjunto anterior. Lo que quedaría por hacer, entonces, sería b) tomar el límite de la suma $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{4^i}$ cuando $n\to\infty$ y concluir que el área del segmento parabólico es 4/3 el área del primer triángulo inscrito. Sin embargo, no es ésta la forma de proceder de Arquímedes, ya que esto implicaría la consideración de una serie geométrica *infinita.* En lugar de hacer esto, Arquímedes concluye su demostración mediante una típica *reductio ad absurdum doble,* basada en el equivalente de una sumatoria finita de esta serie.

Creo que los aspectos del método de exhaución que he presentado bastan para dar una idea de la manera como el mismo funciona. Vale la pena subrayar, nuevamente, que el método se usó como un método riguroso de *demostración,* pero no de descubrimiento. Las exigencias mismas del método limitaban grandemente la libertad de quienes lo usaban y era posible usarlo sólo una vez que *ya* se había descubierto (al menos intuitivamente) el resultado. Acerca de esto, las siguientes palabras de Arquímedes son esclarecedoras *"Pues ciertas cosas primero se me aclararon mediante un método mecánico aunque, posteriormente, tenían que demostrarse por la geometría, puesto que su investigación por dicho método no proporcionaba una demostración real. Pero, claro está, cuando mediante el método hemos adquirido previamente algún conocimiento de las cuestiones, es más fácil proporcionar la prueba que lo quesería encontrarla sin ningún conocimiento previo* [...] *Estoy persuadido de que será de gran utilidad a la matemática; pues mediante el método, una vez que se establezca, considero que algunos, sean mis contemporáneos o bien mis sucesores, serán capaces de descubrir otros teoremas más que aún no se me han ocurrido"*[199].

En la carta a Eratóstenes enviándole un ejemplar de **"El Método"**, Arquímedes atribuye a Demócrito el cálculo del volumen de la pirámide, además, de acuerdo a la interpretación de algunos escritos de Plutarco refiriéndose a Demócrito, se afirma que éste ya tenía la idea del sólido como suma de infinitos planos paralelos o de láminas infinitamente delgadas e infinitamente próximas, lo cual constituye la más importante anticipación de la misma idea que conducirá a los resultados más fecundos de Arquímedes[200]. Las ideas de Demócrito suscitaron el rechazo de algunos filósofos entre ellos Platón quien *"abrigó el propósito de quemar todas las obras de Demócrito que él había podido reunir pero los pitagóricos Amiclas y Clinias le disuadieron"*[201]; si bien es cierto, no se quemaron, desafortunadamente desaparecieron en el siglo III, quedando tan sólo algunos fragmentos y referencias a sus escritos a través de otros autores. Demócrito fue llamado *"el filósofo que ríe"*[202], sostenía que *"es preferible un descubrimiento científico a la corona de un rey"*[203], se afirma además que se quedó voluntariamente ciego: para meditar mejor, según unos y para que el corazón no se le fuera tras lo que veían sus ojos, según otros[204].

La tesis de que las circunferencias y los círculos son, en realidad, polígonos regulares con infinitos lados infinitamente pequeños, fue retomada posteriormente

---

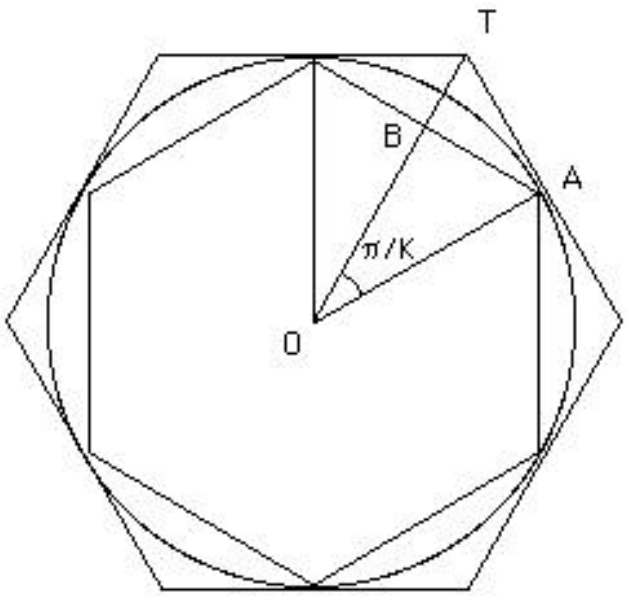
199 Ver Edwards, Op. Cit., pág. 68.
200 Ver Vera (1970).
201 Heath, T.-**" A History of Greek Mathematics"**, vol. I. Dover Publications, Inc. New York, 1981.
202 Vera, F.-Op. Cit.
203 Vera, F.-Op. Cit.
204 Vera, F.-Op. Cit.

por Arquímedes y muchos siglos después por L Hôpital. Aquí aparecen dos tipos de infinitos cualitativamente diferentes: uno para contar (infinitos lados) y otro para medir (cada lado es infinitamente pequeño).

En manos de Arquímedes, esta idea permite construir argumentos para justificar teoremas. Un ejemplo interesante es el siguiente (ver figura). Para calcular el área de un círculo C de radio r (en este caso OT), sabiendo que la longitud de la circunferencia es 2r (notación moderna), Arquímedes procedió de la siguiente manera. Sean p_n un n-ágono regular inscrito en C (aquí n=6) y a_n su lado; al trazar los radios que van del origen a los vértices del n-ágono, obtenemos n triángulos todos de base a_n y altura b.

El área de cada triángulo es $\frac{1}{2}a_n b$, luego el área de p_n es $\frac{1}{2}a_n b$. Pero el propio círculo C es un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños (infinito actual), en este caso na_n es la longitud de la circunferencia, esto es 2πr y b es el radio r. De donde el área del círculo es $\frac{1}{2}.2\pi r.r$. Este mismo resultado se obtiene si trabajamos con el hexágono circunscrito.

De sus escritos se pueden intuir algunos aspectos de su personalidad como puede ser un fino sentido del humor. En su obra **"Sobre las espirales"**, cuenta que algunos de sus amigos de Alejandría resolvieron publicar unos teoremas que él les mandó, como propios. Por tal razón en el siguiente envío incluyó dos teoremas falsos *"para que aquellos que afirman haberlo descubierto todo pero no ofrecen prueba alguna, puedan ser refutados de haber pretendido en realidad descubrir lo imposible"*[205].



La obra científica de Arquímedes es inmensa, Plutarco se refirió a ella con las siguientes palabras *"No es posible encontrar en geometría cuestiones más difíciles e intrincadas, ni explicaciones más sencillas y brillantes. Algunos lo atribuyen a su genialidad; otros a un increíble esfuerzo y desvelo que producen estos resultados aparentemente fáciles y naturales"*[206].

Su producción intelectual ha sido clasificada en tres categorías[207]:

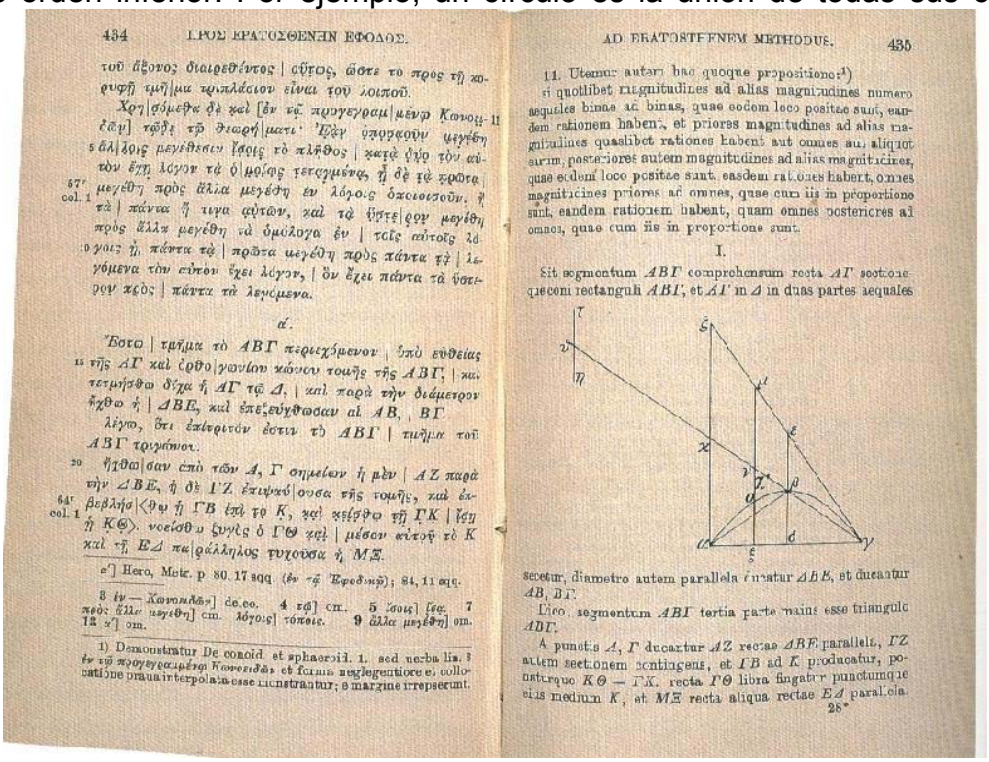
1. Las que se han conservado a través de los tiempos.
2. Los palimpsestos.
3. Las que están incompletas o definitivamente han desaparecido.

[205] Vardi, I.-**"Arquímedes ante lo innumerable"**, Investigación y Ciencia, Temas 23, Barcelona, 1998.
[206] Heath, T.-Op. Cit.
[207] Castro, I.-"Temas de teoría de anillos, teoría de cuerpos y números algebraicos", t. III, Departamento de Matemáticas y Estadística Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

Los palimpsestos son llamados así, debido a que algunos monjes del siglo XIII rasparon unos pergaminos en donde estaban escritas ciertas obras (de Arquímedes entre otros) para rescribir en ellas oraciones y liturgia. Como dijimos, entre éstos se destaca **"El Método"**.

En **"El Método"** y en **"Sobre el equilibrio de las figuras planas"** (una de las obras que se han conservado a través de los tiempos), Arquímedes establece los principios de su técnica en forma de una teoría con axiomas y teoremas, los elementos básicos de esta teoría son[208]:

1. Todas las figuras tienen peso.
2. El peso de cada figura es igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una línea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.
3. Todas las figuras tienen centro de equilibrio, o como se llama modernamente centro de masa, por ejemplo, el centro de masa de un círculo es su centro geométrico, similarmente, el centro de masa de un triángulo equilátero es su centro geométrico.
4. Cada figura, según el caso, se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior. Por ejemplo, un círculo es la unión de todas sus cuerdas



"Opera Omnia" de Arquímedes, Leipzig, 1911
http://euler.us.es/~libros/calculo.html

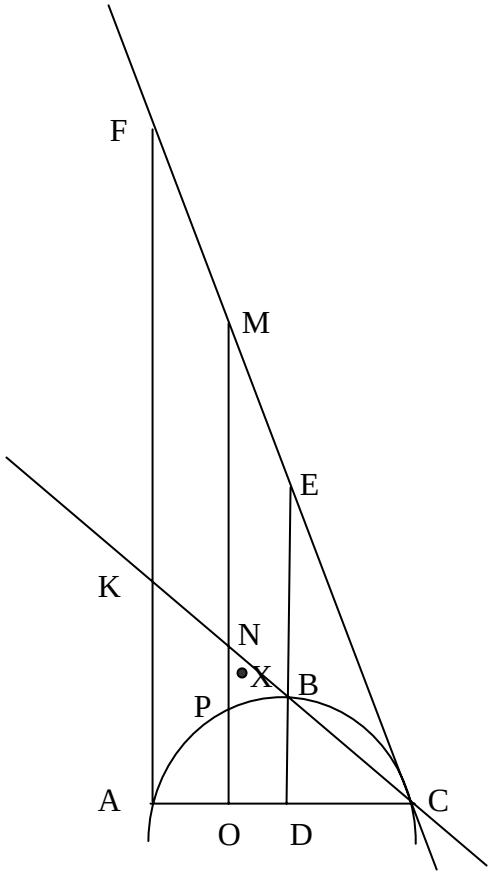
paralelas a una cuerda dada.

Este último principio fue la fuente de inspiración para el posterior trabajo de Cavalieri.

Como todas las figuras tienen peso, utilizando una balanza y equilibrando figuras se pueden determinar magnitudes como se ilustra en los dos ejemplos que se presentan a continuación.

---

[208] Pérez, J.H.-**"El método de Arquímedes"**, Boletín de matemáticas, vol. XVII, nº 1-2-3, Bogotá, 1983.



Área de un segmento parabólico.

Considérese una parábola de vértice en B y cuyo eje es BD (véase la figura correspondiente). Se quiere determinar el área comprendida entre la parábola y la perpendicular AC al eje.

Sobre la tangente a la parábola en el punto C tomamos F de tal manera que FA sea paralelo a ED; MO se construye paralelo a ED. Los puntos K y H se toman en la recta determinada por los puntos B y C de tal manera que HK = KC.

Por propiedades de la parábola se tiene que EB=BD, esto es fácil de ver si consideremos coordenadas cartesianas de tal manera que el punto B sea el origen del sistema y la recta que pasa por D y E coincida con el eje y. En esta forma la ecuación de la parábola será $y=-ax^2$ en donde a>0. Si x_0 es la ordenada del punto C, entonces la ecuación de la recta tangente será $y=-(2ax_0)x+ax_0^2$. En esta forma la abscisa del punto E es ax_0^2 mientras que la de D es $-ax_0^2$. Luego la longitud de BE es ax_0^2 y la de BD es también $2ax_0$, y así, BE = BD.

Por otra parte, los triángulos AFC y KFC son semejantes, respectivamente, a los triángulos DEC y BEC, por lo tanto FK = KA. En forma análoga se demuestra que MN = NO. Como los triángulos AKC y ONC son semejantes se tiene que CA:CO = CK:CN luego, CA:(CA-AO) = CK:(CK-KN) y así CA:AO = CK:KN.

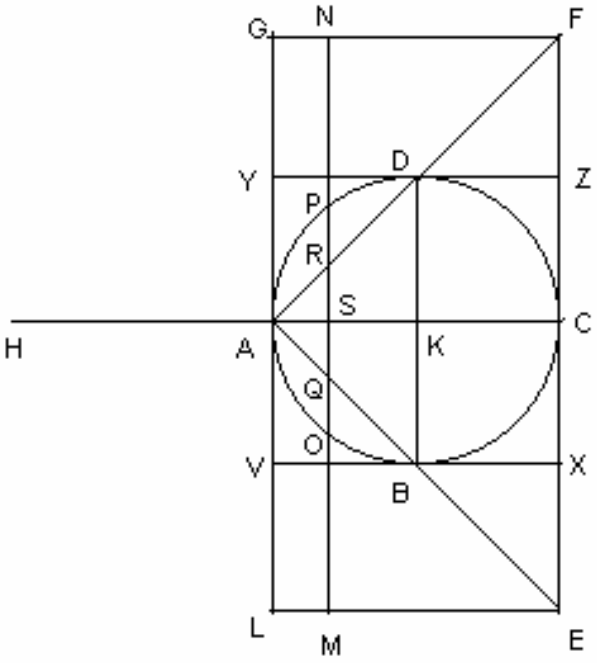
Se tiene también la relación CA:AO=MO:OP. Esto se puede ver, como antes, considerando un plano cartesiano en el cual el origen es el punto B y la recta determinada por los puntos B y D es el eje de las ábcisas. Para simplificar, considere que la ecuación de la parábola es $y=-x^2$ y llamando, nuevamente, x_0 la ordenada del punto C; la ecuación de la tangente será $y=-(2x_0)x+x_0^2$, y entonces si x_1 es la ordenada de los puntos P y M, estos se representarán como $P=(x_1,-x_1^2)$ y $M=(x_1,-(2ax_0)x+ax_0^2)$.

De esto se sigue que $OM=x_0^2-2x_0x_1+x_0^2=2x_0(x_0-x_1)$, $OP=x_0^2-x_1^2$. Por otra parte $AC=2x_0$ y $AO=x_0+x_1$. En conclusión $\frac{OM}{OP}=\frac{AC}{AO}$. Como CK=HA se tiene entonces que KH:KN = MO:OP. Suponiendo ahora que los segmentos MO, OP tienen pesos iguales a sus longitudes, y trasládese OP al punto. Tomando K como centro de equilibrio de la palanca HN se tiene entonces que el segmento OP colocado en H equilibra al segmento MO colocado en N y si O recorre AC el área que se busca colocada en H equilibra el área del AFC colocado en X, centro de gravedad del mismo. Así pues, llamando α el área del sector parabólico y β la del triángulo se tendrá α: β = KX:HK, o sea, 3 α= β.

Volumen de una esfera.

Veamos ahora cómo abordó, utilizando su método, el problema de determinar el volumen de una esfera de radio r.

Supondremos sabido, como en efecto lo es desde la época de Euclides, que el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $\pi r^2 h$, y que el volumen de un cono de igual base y altura es la tercera parte del volumen del cilindro. Consideremos una esfera de diámetro AC y centro K (ver figura). Sea BD un diámetro perpendicular a AC. Sean AF y AE las intersecciones del cono de vértice A, eje AC y ángulo al vértice recto con el plano de la figura. La sección de este cono con el plano perpendicular al eje AC que pasa por C, es un círculo de diámetro EF. Consideremos también el cilindro que tiene este círculo por base y eje AC, cuya otra base es el círculo de diámetro GL. Sea H el punto simétrico de C respecto de A, y consideremos HC como una palanca con punto de apoyo en A.



Tomemos ahora cualquier punto S en el diámetro AC y consideremos el plano perpendicular a AC por S. Las intersecciones de este plano con la esfera, el cono y el cilindro son los círculos de diámetros OP, QR y MN, respectivamente.

Ahora bien, como los triángulos APC y ASP son semejantes, se tiene que $AC/AP=AP/AS$ y por lo tanto $AC\cdot AS=AP^2$. Además, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AP^2 = AS^2+SP^2 = SR^2+SP^2$. Por consiguiente, $AH/AS = AC/AS = AC^2/(AC\cdot AS) = SN^2/(SR^2+SP^2)$.

Pero el área de un círculo, y también su masa (si nos lo imaginamos como una delgada lámina de un material homogéneo) son proporcionales al cuadrado del radio. Por lo tanto, en virtud de la ley de la palanca, la igualdad anterior puede interpretarse como que el círculo de radio SN, permaneciendo en su sitio, equilibra a los círculos de radios SP y SR, trasladados ambos de tal manera que sus centros de masa estén en H. Imaginando ahora a la esfera, el cono y el cilindro como compuestos de un gran número de delgadas láminas circulares, se sigue que el cilindro, permaneciendo en su sitio, equilibra a la esfera y el cono, trasladados ambos de tal manera que sus centros de masa estén en H. Como el centro de masa del cilindro es K, y $AH = 2\cdot AK$, de nuevo por la ley de la palanca se tiene que $Vol_{(cilindro)} = 2(Vol_{(esfera)} + Vol_{(cono)})$, pero como $Vol(cono) = Vol(cilindro)/3$, se deduce que $Vol_{(esfera)} = Vol_{(cilindro)}/2 - Vol_{(cono)} = Vol_{(cilindro)}/6$.

Finalmente, como el volumen del cilindro que estamos considerando es cuatro veces el volumen del cilindro circunscripto a la esfera (por tener la misma altura pero radio doble) se concluye que $Vol_{(esfera)} = (2/3)Vol_{(cilindro\ circunscripto)} = (2/3)(\pi r^2)(2r) = 4\pi r^3/3$.

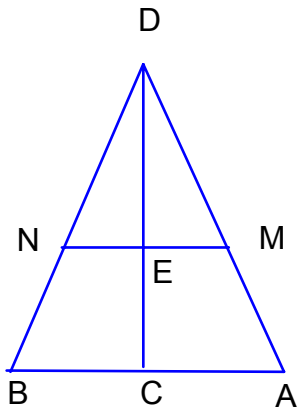
Como se observa, los argumentos arquimedianos aunque no son rigurosos desde el punto de vista de la geometría euclideana son convincentes, muy sencillos, constituyen una teoría elemental y ofrecen una forma bastante fácil para calcular

algunas áreas y volúmenes lo cual representa un gran aporte a la metodología de la enseñanza de la geometría[209].

Los Principios Fundamentales de la Estática y el Postulado de Euclides.

Para demostrar el principio de la palanca, Arquímedes se apoya en ciertas hipótesis: algunas enunciadas; otras, sobreentendidas. Entre las hipótesis pasadas en silencio, además de la que con lenguaje moderno se llama hipótesis del refuerzo de las ligaduras, hay uno de los mismos casos de la palanca, que pudiera enunciarse así *"Una palanca, suspendida por su punto medio, está en equilibrio cuando a un extremo se aplica el peso 2P y al otro extremo se cuelga, por el punto medio, una nueva palanca, llevando en cada extremo un peso igual a P".*

Sin entrar en la historia de las críticas hechas a Arquímedes por el uso de tal hipótesis y de las varias tentativas hechas para demostrarla, refiramos a este propósito las argumentaciones de Lagrange, porque de ellas puede hacerse derivar de un modo sencillo y claro una importantísima conexión entre la hipótesis en cuestión y el postulado de las paralelas.



Sea ABD un triángulo isósceles (AD=BD), cuyos vértices A y B soportan dos pesos iguales a P, y el vértice D un peso igual a 2P. Este triángulo estará en equilibrio alrededor de la recta MN, que une los puntos medios de los lados iguales del triángulo, porque cada uno de estos lados puede mirarse como una palanca cuyos extremos soportan pesos iguales.

Pero el equilibrio de la figura se puede obtener también apoyando el triángulo sobre una recta que pase por el vértice D y por el punto medio C del lado AB, por lo cual, llamando E al punto del encuentro de los dos ejes MN y CD, nuestro triángulo estará en equilibrio si se le suspende por el punto E. Con palabras de Lagrange tendremos (**"Euvres de Lagrange",** t.XI, pp. 4-5) *"Or comme l'axe (MN) passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passera aussi nécessairement par le mileu de la droite menée du sommet du triangle au milieu (C) de sa base; donc le levier trnsversal (CD) aura le point d'appui (E) dans le mileu et devra, par conséquent, être chargé également aux deux bouts (C,D): donc la charge que supporte le point d'appui du levier, qui fait la base du triangle, et qui est chargé, à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids".*

---

[209] Mayores detalles de la obra de Arquímedes y su influencia en, prácticamente, toda la Matemática actual, pueden ser consultados en Hogendijk, J. P.-**"The Surface Area of the Bicylinder and Archimedes' Method"**, Historia Mathematica 29 (2002), 199–203; Aaboe, A., and Berggren, J. L.-**"Didactical and other remarks on some theorems of Archimedes and infinitesimals"**, Centaurus 38, 1996, 295–316; Dijksterhuis, E. J.-**"Archimedes"**, translated by C. Dikshoorn; reprint ed. Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 1987; Heath, T. L., Ed.-**"The Works of Archimedes"**, with a Supplement: "The Method of Archimedes", Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 1912; Heiberg, J. L., and Zeuthen, H. G.-**"Eine neue Schrift des Archimedes"**, Bibliotheca Mathematica 3, Folge 7, 321–363, 1906; Heiberg, J. L.-**"Archimedis Opera omnis, cum commentariis Eutocii iterum"**, ed. 3 vols. Leipzig: Teubner, 1910–1915; Marsden, J. E., and Tromba, A. J.-**"Vector Calculus"**, 4th ed. New York: Freeman, 1996; Netz, R., Saito, K., and Tchernetska, N.-**"A new reading of Method Proposition 14: Preliminary evidence from the Archimedes Palimpsest"**, 1. SCIAMVS 2, 9–29, 2001; y Sato, T.-**"A reconstruction of the Method Proposition 17, and the development of Archimedes' thought on quadrature—Why did Archimedes not notice the internal connection in the problems dealt with in many of his works?"**, Historia Scientiarum 31,61–86/32,75–142, 1986/1987.

El razonamiento de Lagrange, además de contener algunas hipótesis de índole estática, relativas a las simetrías, al refuerzo de las ligaduras, etc., utiliza una propiedad geométrica del triángulo euclídeo. Pero si se quiere prescindir de ésta, lo que, bajo cierto aspecto, parece natural, las anteriores conclusiones vienen modificadas.
En efecto, subsistiendo como verdadero el principio de que el triángulo ABD esté en equilibrio alrededor del punto E, en que se encuentran los dos ejes MN y CD, no se puede asegurar que sea E el punto medio de CD, porque esto equivaldría a admitir el postulado de Euclides. Por consiguiente, no se podrá asegurar que los dos pesos aplicados en A y B puedan sustituirse con el único peso 2P, aplicado en C, puesto que, si tal sustitución pudiese tener lugar, debería subsistir el equilibrio de una palanca con pesos iguales en los extremos, alrededor de un punto que puede no ser su punto medio. Recíprocamente, si se admite con Arquímedes, que a dos pesos iguales pueda sustituirse un peso único aplicado al punto medio de la palanca, se deduce fácilmente que E es el punto medio de CD y, sucesivamente, que ABD es un triángulo euclideo. Con esto queda establecida la **equivalencia** entre el V Postulado de Euclides y la susodicha hipótesis de Arquímedes. Tal equivalencia, bien entendido, es relativa al sistema de hipótesis formado por las hipótesis estáticas antes indicadas y por las hipótesis geométricas ordinarias.
Por último debemos decir, que el otro principio fundamental de la estática, esto es, la ley del paralelogramo de las fuerzas, en la usual interpretación geométrica que a él se acompaña, está en estrecha conexión con la naturaleza euclidea del espacio.

6. Aristarco de Samos.

A pesar de su relevancia en las concepciones astronómicas modernas, Aristarco parece no haber tenido la atención que mereciera de los historiadores de la matemática hasta tiempos recientes. Por ejemplo, Heath comienza el Volumen II de su historia de las matemáticas griegas con las siguientes palabras[210]: *"Los historiadores de las matemáticas tienden, como regla, a dar muy poca atención a Aristarco de Samos; la razón sin duda es que él fue un astrónomo y por lo tanto, se supone que su trabajo no tendría el suficiente interés para los matemáticos. Los griegos eran más sabios y lo llamaban 'Aristarco el matemático'".*
Sin embargo, el hecho de que fuera mejor conocido como astrónomo que como matemático es contradicha por una sentencia de Neugebauer en su trabajo[211]: *"... es un ejercicio puramente matemático el cual tiene ... poco que ver con la práctica astronómica..."*.
Zhitomirskii, enuncia[212]: *"Aristarco de Samos es poco conocido pero frecuentemente citado como precursor de Copérnico. Toda la información que tiene que ver con él deriva de un puñado de parcas referencias en los escritores Clásicos, además de un pequeño tratado de él en el que no menciona el heliocentrismo. De acuerdo con los historiadores, se le menciona frecuentemente y se citan uno o dos hechos y se pasa a otro tema - después de proporcionar unas pocas palabras explicativas que revelan mucho sobre los prejuicios de los historiadores"*.
Este trabajo hace un intento por remediar lo que el autor considera un defecto de otros historiadores. Permítanos en este artículo hacer más que la simple 'mención de

[210] T. L. Heath-**"A history of Greek mathematics"**, I, II, Oxford, 1931.
[211] O. Neugebauer-**"A History of Ancient Mathematical Astronomy"**, 3 Vols., Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
[212] S. V. Zhitomirskii-**"The heliocentric hypothesis of Aristarchos of Samos and ancient cosmology"**, Istor.-Astronom. Issled. No. **18** (1986), 151-160 (en ruso).

uno o dos hechos' e indicar tanto la magnitud y la originalidad de los logros de Aristarco como también el papel que jugó en el desarrollo de las matemáticas astronómicas.

Aristarco era ciertamente astrónomo y matemático, y es más conocido por ser el primero en proponer un Sistema Solar centrado en el Sol. Es también famoso por su intento pionero de determinar los tamaños y distancias del Sol y la Luna. Veremos en detalle estos logros más adelante.

Aristarco fue estudiante de Estratón de Lámpsaco, quien fue el director del Liceo Aristotélico. Sin embargo, no se piensa que Aristarco estudiara con Estrato en Atenas, sino en Alejandría. Estrato se convirtió en el director del Liceo de Alejandría en el 187 d.C. y se piensa que Aristarco estudió con él comenzando sus estudios poco después de esa fecha.

Aristarco es mencionado por Vitruvio (siglo I d.C.) famoso arquitecto e ingeniero romano. Vitruvio fue el autor de un importante tratado **"De architectura"** y en este trabajo él lista a los hombres que han sido eruditos en varias ramas de la ciencia[213]: *"Hombres de su tipo son raros, hombres tales como fueron antiguamente Aristarco de Samos, Filolao y Arquitas de Tarento, Apolonio de Perga, Eratóstenes de Cirene,* Arquímedes *y Escopinas de Siracusa, quienes dejaron para la posteridad muchos artefactos mecánicos y de conocimiento que ellos inventaron y explicaron con principios matemáticos".*

Por supuesto, hay una interrogante inmediata sobre qué fue lo que inventó Aristarco, y Vitruvio explica que él invento el reloj de sol en forma de tazón hemisférico con un apuntador para crear sombras localizadas a la mitad del tazón.

Hay poca evidencia existente respecto al origen de la creencia de Aristarco en el sistema heliocéntrico. Sabemos que no hubo hipótesis de este tipo antes, pero de hecho la teoría no fue aceptada por los griegos así que aparentemente no tuvo popularidad alguna. Solo sabemos de la teoría de Aristarco debido a un enunciado en resumen que hizo Arquímedes en **"El arenario"** y una referencia similar de Plutarco. Arquímedes escribió[214]: *"Tú, Rey Gelón estás conciente de que 'universo' es el nombre dado por la mayoría de los astrónomos a la esfera cuyo centro es la Tierra, mientras que su radio es igual a la línea recta entre el centro del Sol y el centro de la Tierra. Éste es el conocimiento común que has escuchado de los astrónomos. Pero Aristarco ha traído un libro en el que explica cierta hipótesis, en la que, basado en ciertas suposiciones, el universo es mucho más grande que el 'universo' que acabo de mencionar. Sus hipótesis son que las estrellas fijas y el Sol permanecen fijos, y es la Tierra la que se mueve alrededor del Sol en la circunferencia de un círculo, el Sol yace sobre la órbita y la esfera de estrellas fijas, situadas sobre el mismo centro que el Sol, es tan grande que el círculo en que él supone que la Tierra se mueve, guarda igual proporción respecto a la distancia de las estrellas fijas como la que hay entre el centro de la esfera y su superficie".*

Ahora que Arquímedes había reportado la visión de Aristarco, criticó aquellos puntos de vista dándoles proporciones matemáticas insignificantes. De hecho, la manera en que Aristarco expresó sus proporciones es, de acuerdo a Heath, similar a otras expresiones que ocurrían en los escritos griegos, e indicando que Aristarco consideraba que el radio de la esfera de las estrellas fijas fuera infinitamente grande

---

[213] Ver por ejemplo los trabajos de Heath, **"Aristarchus of Samos"**, Oxford, 1913; **"Aristarchus of Samos. The ancient Copernicus",** Reimpresión del trabajo original de 1913, (New York, 1981 y **"A history of…"**.

[214] Ver las referencias de la nota anterior.

comparado con la órbita de la Tierra. Por supuesto, Aristarco tenía que tomar semejante suposición, pues de otra manera, los efectos de paralaje[215] serían visibles.

Plutarco nos da un poco más de información, pues él reporta que Aristarco siguió a Heráclides de Ponto en la creencia de que la rotación diaria aparente de las estrellas fijas se debía a la rotación de la Tierra sobre su eje. El único trabajo de Aristarco que sobrevive es **"Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna"** no está basada en la teoría del Sol en el centro y desafortunadamente este trabajo de la teoría del Sol en el centro referida por Arquímedes, se ha perdido. En **"Sobre …."** proporciona a detalle su sobresaliente argumento geométrico, basado en la observación, donde el determinó que el sol estaba a 20 veces la distancia de la Tierra de lo que está la Luna, y que medía 20 veces el tamaño de la Luna. Ambas estimaciones resultaron ser de un orden de magnitud[216] menor al real pero el error se debe a la falta de instrumentos precisos de Aristarco, más que en el correcto método de razonamiento.

Neugebauer argumenta[217] en que Aristarco no estaba interesado en la información astronómica precisa (ya que podría haberlo hecho mucho mejor si hubiera querido). En su lugar, Neugebauer sugiere que Aristarco estaba solamente interesado en la teoría matemática detrás de su descubrimiento de las distancias y diámetros. Él mostraba que tales mediciones podrían ser realizadas y, ya que tuvo éxito mostrándolo, su trabajo es de la mayor importancia. Como Neugebauer escribe[218]: *"... el poder de la aproximación matemática a problemas astronómicos ha sido drásticamente demostrado, en el mismo sentido en que Eudoxo, un siglo antes, construyó modelos de movimiento los cuales podían relacionarse con el movimiento planetario sin resolver un problema específico".*

Existen una o dos referencias al trabajo de Aristarco que han sido investigadas recientemente. Por ejemplo, Bowen y Goldstein[219] interpretan: *"... un pasaje difícil en un comentario anónimo escrito en griego, durante el siglo II AC en el libro 20 de la Odisea de Homero…el autor [anónimo] cita a Aristarco de Samos haciendo referencia a* Tales *y a Heráclito para apoyar su tesis [de] eclipses solares…[Su] tesis concerniente a las ocasiones en que pueden ocurrir los eclipses solares descansa en un análisis de las convenciones de los calendarios griego y egipcio, más que apelar a la observación de eclipses solares".*

7. Apolonio de Pergamo (247-205 a.C.).

El tercero de los grandes del período Alejandrino fue Apolonio, primero profesor en el Museo de Alejandría durante un período prolongado y después en su ciudad natal. Su obra fundamental **"Cónicas"**, es una especie de complementos de los

---

[215] *Paralaje* es el aparente cambio de posición de un objeto causado por un cambio en la posición del observador. Por ejemplo, el cambio (medido como ángulo) de un cuerpo celeste cuando se le observa desde puntos opuestos sobre la superficie terrestre (*paralaje diurna* o *geocéntrica*) o desde puntos opuestos de la órbita terrestre (*paralaje anual* o *heliocéntrica*).

[216] Un *orden de magnitud* es un factor de diez. Por ejemplo, decir que dos números difieren en un orden de magnitud, significa que uno es 10 veces mayor que el otro; si difieren en dos órdenes de magnitud, uno es 100 veces mayor que el otro, etc.

[217] O Neugebauer-**"A History of Ancient Mathematical Astronomy"**, 3 Vols., Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

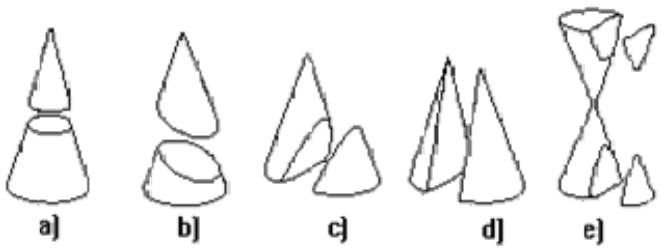
[218] Ver **"A History …"**.

[219] A C Bowen and B R Goldstein-"Aristarchus, Thales, and Heraclitus on solar eclipses: an astronomical commentary on P Oxy 53.3710 cols. 2.33-3.19, Physis Riv. Internaz. Storia Sci. (N.S.) **31** (3) (1994), 689-729.

"Elementos" de Euclides. Con anterioridad se habían realizado algunos estudios de importancia sobre los lugares geométricos sólidos (denominación original el tema) por Meneichmos (discípulo de Eudoxo), Areistaeos de Elder (360-300 a.C., colaborador de Euclides) y Conón de Samos (colaborador de Arquímedes).
Apolonio mezcló desde premisas iniciales suficientemente generales todo el ese saber anterior con resultados propios y conformó su obra fundamental en ocho libros de la manera siguiente:

- Libro 1º: Reemplazo del corte perpendicular al cono agudo, el cono recto y el obtuso con que introducían las elipses, parábolas e hipérbola sus predecesores por el conocido cono circular de dos cavidades, dándole unidad al tratamiento y considerando, por primera vez, ambas ramas de la hipérbola (ver figura anterior). Determinación del centro, diámetro, y diámetro conjugado de las secciones cónicas.
- Libro 2º: Estudio de la hipérbola, ejes y asíntotas.
- Libro 3º: Generación de las cónicas mediante proyecciones.
- Libro 4º: Intersección de dos secciones cónicas.
- Libro 5º: Curvatura, normal y subnormal.
- Libro 6º: Secciones cónicas semejantes.
- Libro 7º: Propiedades especiales del diámetro conjugado.
- Libro 8º: Problemas de aplicaciones del material anterior (reconstruido por E. Halley (1656-1742)).

En el terreno metodológico su gran aporte fue el empleo del Álgebra Geométrica en el lugar en que hoy usamos el álgebra para la geometría métrica de las secciones cónicas, realizando un estudio del tema profundo y complejo. Sin ecuaciones ni fórmulas, mediante equivalentes geométricos, Apolonio logró llevar adelante su proyecto con un método cercano a la Geometría Analítica mediante un incipiente sistema de coordenadas dependiente de cada curva y sólo para reflejar algunos puntos privilegiados. En él se manifiesta de forma explícita, por primera vez, que las construcciones geométricas solo pueden realizarse con regla y compás.
Apolonio además fue uno de los fundadores de la astronomía matemática griega, utilizó modelos geométricos para la explicación de la teoría planetaria, modelando los complejos movimientos de los planetas mediante movimientos circulares. Como aritmético estudió las irracionalidades e inventó un algoritmo para aproximar π.



Secciones Cónicas de Apolonio. a.) circunferencia, b.) elipse, c.) parábola, d.) líneas convergentes y e.) hipérbola.

En Grecia también hubo un desarrollo considerable de la parte "cuantitativa" de la matemática. Sobre la base del crecimiento de esta parte de las matemáticas de cómputo, y posiblemente bajo otras influencias complementarias se engendraron elementos de álgebra y formas elementales de la simbología algebraica.

Sobre estas circunstancias testimonian los métodos y resultados de Diofanto (siglo III n.e.).

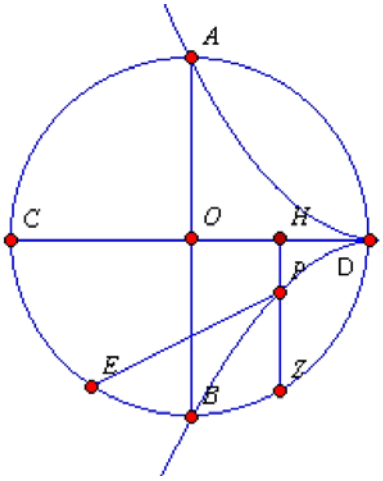
8. Otros matemáticos de la escuela alejandrina.

Pese a que los griegos clásicos introdujeron y estudiaron algunas curvas poco corrientes, como las cuadratices, la máxima atención de esa geometría estuvo dedicada a figuras que podían dibujarse con regla y compás y relego a aquellas curvas al olvido. Los alejandrinos, sin embargo, se sintieron liberados de tal restricción; así Arquímedes no dudo en introducir la espiral. Varias curvas más fueron introducidas durante el período alejandrino.

Nicomedes (sobre el 200 a.C.) es conocido por su definición de la concoide. Comienza con un punto P y una línea AB; elige entonces una longitud *a* y coloca en todos los rayos que parten de P y cortan AB la longitud *a* partiendo del punto de intersección del rayo con AB, en la dirección que se aleja de P. Los puntos extremos así determinados son los puntos de la concoide.

Si *b* es la distancia perpendicular de P a AB y si las longitudes *a* se miden a lo largo de los rayos que parten de P, y comenzando en AB pero en la dirección de P, obtenemos otras tres curvas según sea $a>b$, $a=b$ o $a<b$. Luego hay cuatro tipos de concoides, todas ellas debidas a Nicomedes. La ecuación polar moderna es $r=a+b\sec\theta$. Nicomedes usó la curva para trisecar un ángulo y duplicar el cubo.

Se atribuye a Nicomedes el invento de un mecanismo para construir las concoides. La naturaleza del mecanismo es de mucho menos interés que el hecho de que los matemáticos de la época estuvieran interesados en inventarlo. Las concoides de Nicomedes, junto con la recta y el círculo son las curvas construibles más antiguas de las que se posee una información satisfactoria.



Diocles (final del siglo II a.C.), en su libro **"Sobre los Espejos Ustorios"** resuelve el problema de la duplicación del cubo introduciendo la curva llamada cisoide. La curva se define haciendo AB y CD diámetros perpendiculares de un círculo y EB y BZ arcos iguales. Se traza ZH perpendicular a CD y se traza entonces ED. La intersección de ZH y ED determina un punto P de la cisoide. Para Diocles la cisoide es el lugar geométrico de todos los puntos P determinados por todas las posiciones de E sobre el arco BC y Z sobre el arco BD con (arc BE) = (arc BZ). Se demuestra que CH:HZ = HZ:HD = HD:HP.

Así HZ y HD son dos medias proporcionales entre CH y HP. Esto resuelve el problema de Delos. La ecuación de la cisoide en coordenadas rectangulares es $y^2(a+x)=(a-x)^3$, donde O es el origen; *a* el radio del circulo, y OD y OA los ejes de coordenadas. Esta ecuación incluye las dos ramas de la curva que se muestran en la figura, las cuales no fueron consideradas por Diocles.

9. Los métodos infinitesimales en la Antigua Grecia.

Los métodos infinitesimales de la Grecia Antigua sirvieron de punto de partida para muchas investigaciones de los científico-matemáticos de los siglos XVI y XVII. Particularmente con igual frecuencia se estudiaban los métodos de Arquímedes. Recordemos que Leibniz, uno de los fundadores del análisis matemático decía que,

estudiando los trabajos de Arquímedes cesas de admirarte de los éxitos de los matemáticos actuales.
Los métodos infinitesimales constituyen aquella parte de las matemáticas antiguas, la cual se formaba bajo la presión directa de las exigencias científico-prácticas. Ellos salían de los límites de sistemas matemáticos cerrados formados en aquella época, construidos sobre la base de un número mínimo de condiciones iniciales. En los métodos infinitesimales obtuvieron la primera manifestación los elementos de los nuevos recursos matemáticos, los cuales condujeron a la creación de un análisis infinitesimal. La relación de contradicción entre el conjunto de semejantes métodos y los sistemas lógico-matemáticos cerrados en la Grecia Antigua constituyen uno de los ejemplos históricos de contradicciones, las cuales han sido la fuerza motriz del desarrollo de las ciencias matemáticas.
Que Platón y Aristóteles explicaran correctamente la naturaleza de los argumentos de Zenón y el propósito que el mismo Zenón tenía en mente al presentarlos, no tuvo importancia en trazar la historia del pensamiento sobre este tema después del tiempo de Aristóteles. Aparentemente los escritos de Platón y Aristóteles constituyeron las fuentes de información para los escritores posteriores. Aristóteles dio a conocer los argumentos de Zenón en forma de *falacias*, y lo que hay que rastrear es la influencia de estas falacias. No hay duda de que esta influencia fue enorme en el desarrollo de la geometría griega. Ya que Aristóteles, con toda su habilidad dialéctica, no fue capaz de explicar satisfactoriamente todas las paradojas que surgieron en el estudio del infinito y del movimiento, H. Hankell y otros historiadores recientes de las Matemáticas, sacaron la conclusión, probablemente correcta, de que en la geometría clásica griega fueron sacrificados el infinito y lo infinitesimal en aras de mayor rigor. Veremos que en escritos, recientemente descubiertos, de Arquímedes se confirma este punto de vista. Los matemáticos supusieron que toda magnitud se puede dividir a placer. La doctrina de las líneas inconmensurables queda más allá de la posibilidad de la división ilimitada. La negación de la existencia de lo infinitesimal se remonta a Zenón, quien, según Simplicio afirmó *"Aquello que, al ser añadido a otra cosa, no la hace más grande, y al quitarlo no la disminuye, es nada"*. Esta cuestión trascendental se le presentó veintidós siglos después a Leibniz, quien le dio distintas explicaciones. En una exposición Leibniz extendió la definición de igualdad hasta declarar a las magnitudes como iguales aún cuando difieren una de otra por una cantidad incomparablemente pequeña. Los matemáticos griegos posteriores siguieron una política radical hacia el infinitesimal: formalmente lo excluyeron de su geometría demostrativa por medio de un postulado. Esto lo hicieron Eudoxo, Euclides y Arquímedes. Arquímedes da el postulado, atribuyéndolo a Eudoxo, como sigue *"Cuando dos espacios son desiguales, es posible añadir la diferencia por la cual el menor es sobrepasado por el mayor, tantas veces que todo espacio finito será excedido"*.
Euclides en sus **"Elementos"** (Libro V, Def. 4) da el postulado en forma de definición *"Se dice que las magnitudes están en razón una de otra, cuando la menor puede ser multiplicada de manera que exceda a la otra".*
"El Método" de Arquímedes, da la interesante evidencia de que Arquímedes, aunque no usaba la noción de infinitesimales en demostraciones formales, la empleaba en la búsqueda tentativa como un método de descubrimiento. Consideraba a los infinitesimales lo suficientemente científicos para sugerir la verdad de los teoremas, pero no para proporcionar pruebas rigurosas. El proceso es mecánico, consistente en la ponderación de los elementos infinitesimales, a los que

llama líneas rectas o áreas planas, pero que son en realidad tiras infinitamente angostas o láminas planas infinitamente delgadas.
Se considera la misma anchura o espesor en los elementos ponderados en cada tiempo cualquiera.
El escéptico Sexto Empírico (200 d.C.) dio más evidencia de que los infinitesimales preocupaban a los pensadores griegos a través de los siglos. Este aventura la paradoja de que, cuando una línea girando en un plano sobre uno de sus extremos describe un círculo con cada uno de sus puntos, estos círculos concéntricos son de área desigual, sin embargo cada círculo debe ser igual al vecino que toca. La dificultad encontrada aquí es similar a la sugerida por Demócrito 500 años antes.
Plutarco (ca. 90 d.C.) hizo una interesante observación sobre Zenón, en su vida de Pericles. Dice que Pericles también era oyente de Zenón, el eléata, quien *"también se perfeccionó en un arte propio para refutar y silenciar oponentes en discusiones"*, como Timón de Phlius lo describe *"También la lengua de doble filo del gran Zenón, quien, Dijera uno lo que quisiera, podía argumentar que era falso"* Aquí y allá en la superficie del pensamiento griego aparece la personalidad de Zenón y algunas de las ideas contenidas en sus paradojas o aporías, lo que indica que hay un flujo subterráneo de estas ideas a lo largo de toda la historia griega.
Sexto Empírico también da una versión de la "flecha" muy parecida a la que hemos citado de Diógenes Laercio. Él no atribuye la paradoja a Zenón, sino a Diodoro Crono. La existencia del movimiento se refuta porque *"Si la materia se mueve, o está en el lugar en el que está, o en el lugar en el que no está; pero no puede moverse en el lugar en el cual está y definitivamente tampoco en el lugar que no está, entonces no se mueve en absoluto"*. A esto Sexto Empírico replica planteando otro argumento igualmente paradójico y desde luego muy alejado de ser esclarecedor: Por la misma regla los hombres nunca mueren, porque si un hombre muere, debe ser o en el tiempo en el que está vivo, o en el tiempo en el que no está vivo; por lo tanto nunca muere.

Capítulo VI
Período greco-romano o de la decadencia

La Edad de Oro de las matemáticas griegas llegó a su fin con la muerte de Apolonio. A partir de Tales había habido una cadena casi continua de matemáticos importantes. Hasta el siglo III n.e. cuando Herón, Pappo y Diofanto dieron fama una vez más a la escuela alejandrina, parece no haber habido ningún matemático de preeminencia. Durante ese intervalo de medio milenio, la presión de la cultura romana había desalentado a los matemáticos griegos, si bien se mantuvo un cierto interés por la mecánica y la astronomía; la época produjo al gran astrónomo Hiparco (180-125 a.C.) y dos notables comentaristas: Menelao (70-130) y Ptolomeo (85-165). Este cuarto y último período estuvo matizado por los bruscos cambios que se sucedieron en el terreno económico-social debido a la instauración, esplendor y derrumbe del Imperio Romano. Desde la caída de Siracusa en el 212 a.C. hasta la de Egipto en el 30 a.C. se sucedieron las guerras que arrasaron numerosos centros científicos. La difusión de una economía esclavista agrícola fue fatal para la prosperidad del trabajo científico creador. No obstante el Museo de Alejandría logró sobrevivir y nuevamente fue centro de los principales avances de la época, por ello también suele llamársele Segunda Etapa Alejandrina.

No es justo conceder al entorno socio histórico el papel de único freno del desarrollo de nuevo saber matemático. Desde el punto de vista interno; el antes salvador método de enfoque geométrico, con el consecuente rechazo al trabajo algebraico, se había convertido en un pesado lastre que impedía todo avance mas allá de las secciones cónicas. Los resultados originales fueron cada vez más exiguos y específicos, la actividad científica se centró en la crítica y revisión del material acumulado mediante comentarios. Los principales destellos de esta etapa se caracterizaron por la búsqueda de nuevos recursos en la matemática aritmético-algebraica de los eruditos egipcios y babilonios, con una marcada tendencia al cómputo y orientación hacia la práctica.

Haciendo un inventario de los sucesos estudios de mayor importancia en la etapa inicial del período merecen ser mencionados:

- Zenodoro (200-140 a.C.) estudió problemas relativos al área y el volumen de figuras con perímetro y superficie fija, respectivamente.
- Hypsicles de Alejandría (180-120 a.C.), escribió el libro XIV de **"Elementos"** de Euclides tal como lo conocemos hoy, incluyendo resultados propios sobre inscripción de sólidos regulares en esferas.
- Zenón de Sidón (150-70 a.C.), realizó críticas importantes al trabajo de Euclides que permiten considerarle como pionero en admitir la posible existencia de geometrías no-euclidianas. Analizó el principio de inducción.
- Nicomaco de Gerasa (60-120 d.C.), escribió una obra titulada **"Introducción a la Aritmética"** donde dio un tratamiento separado de la geometría. Su estilo se asemejaba al de los antiguos sacerdotes mesopotámicos y fue texto estándar de aritmética por un milenio aproximadamente. En el incluyo las primeras tablas de multiplicar conocidas en libro del mundo griego.
- Herón de Alejandría, probablemente era de origen egipcio, en su obra se desvió de las abstracciones matemáticas para orientarse hacia la práctica en el espíritu de método experimental arquimediano. Es célebre su fórmula "Si A es el área de un triángulo de lados a, b y c entonces $A^2=m(m-a)(m-b)(m-c)$, donde $m=(a+b+c)/2$". Trató diversos problemas relacionados con la Óptica, la Agrimensura, la Geología y la Mecánica aplicada, en forma de recetarios prácticos comentados. Son célebres

sus juguetes animados por vapor o diferencia de presión de aire y el estudio de la trayectoria minimal del rayo luminoso reflejado.

- Hiparco de Nicea (180-125 a.C.) y Ptolomeo de Alejandría
- El perfeccionamiento del aparato de cómputo estuvo también impulsado por la realización de tablas y cálculos astronómicos que dieron continuidad a los trabajos de Aristarco de Samos y Apolonio. Los encargados de esta labor fueron Hiparco y Ptolomeo.

El primero introdujo la división del círculo en 360 grados, desarrolló métodos para resolver triángulos esféricos y calculó tablas trigonométricas de cuerdas entre otros resultados.

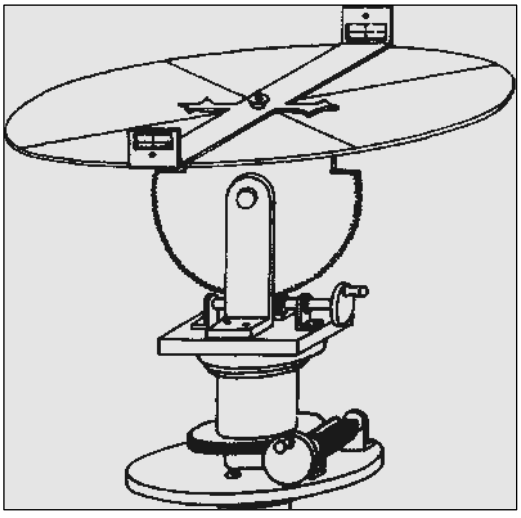
Ptolomeo abordó el tema en el espíritu de rigor Euclidiano. En su tratado astronómico **"Sintaxis Matemática"** (más conocida bajo el titulo árabe **"Almagesto"**) aparecen tablas de cuerdas (similares a las de senos) para ángulos desde 0^o hasta 180^o cada 30' y equivalentes geométricos para las fórmulas de suma y diferencia de senos y cosenos, así como los cimientos de la trigonometría esférica. Obtuvo para π la aproximación 3(17/20) = 3,14166.

- Menelao de Alejandría (70-130 d.C.), escribió un trabajo titulado **"Esférica"** donde dio un tratamiento a los triángulos esféricos similar al del libro I de Euclides para triángulos planos y abundó en las aplicaciones a la astronomía. También probó al teorema que hoy lleva su nombre.

Pero aún quedaba tiempo para la obra de dos figuras comparables a los grandes del pasado, Diofanto y Pappo. Sus trabajos sintetizan lo mejor del espíritu creador del período y abrieron la puerta del desarrollo futuro.

1. Herón de Alejandría (65-125 d.C.).

Herón, es de gran interés no solo desde el punto de vista de la Historia de las Matemáticas, sino también para mostrar las características de este período. Proclo se refiere a Herón como *mecánico,* lo que podría significar un ingeniero mecánico de hoy y hable de él en conexión con Ctesibio, su maestro. Herón fue también un gran agrimensor.

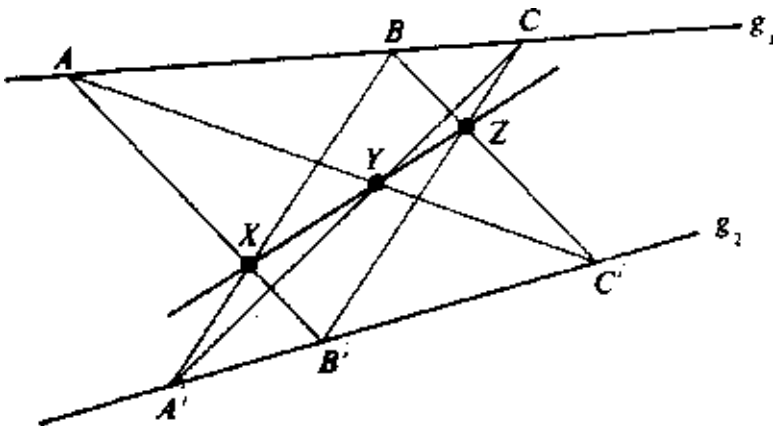


Lo que más llama la atención de los trabajos de Herón es su mezcla de rigor matemático y lo aproximado de los métodos y formulas de los egipcios. Por otra parte, escribió un comentario sobre Euclides, uso los resultados precisos de Arquímedes (a los que se refiere con frecuencia), y en trabajos originales probó algunos teoremas nuevos de la geometría euclidea. Por otra parte, de dedicó a la geometría aplicada y la mecánica y dio todo tipo de resultados aproximados sin justificación. Uso formulas egipcias con libertad y gran parte de su geometría fue también egipcia en cuanto a su carácter.

En su **"Métrica y Geometría"**, que ha llegado hasta nosotros solamente a través de un libro que trata sobre su trabajo, Herón da teoremas y reglas para áreas planas, áreas se superficies y volúmenes de gran número de figuras. Los teoremas de estos libros no son nuevos. Para figuras con bordes curvilíneos utiliza los resultados de Arquímedes. Además, escribió de **"Geodesia"** y **"Esteorometria"** (cálculo de volúmenes de figuras), los cuales se refieren a las mismas cuestiones

de los dos primeros libros. En todos estos trabajos esta interesado en resultados numéricos.
En su **"Dioptra"** (teodolito), un tratado de geodesia, Herón muestra como calcular la distancia entre dos puntos de los que solo uno es accesible y entre dos puntos visibles que no son accesibles. Muestra también como trazar una perpendicular desde un punto a una línea que no se puede alcanzar y como hallar el área de un campo sin entrar en él.
Aunque algunas de sus fórmulas están demostradas, Herón da varias sin demostración y otras son aproximadas. Así, da una fórmula inexacta para el área de un triángulo junto con la anterior correcta. Un motivo por el que Herón da varias fórmulas egipcias puede ser que las exactas precisaban raíces cuadradas o cúbicas y los agrimensores no ejecutaban tales operaciones. De hecho se distinguían entre geometría pura y geodesia métrica. El cálculo de áreas y volúmenes pertenecía a la geodesia y no formaba parte de una educación general; estaba reservado a agrimensores, albañiles, carpinteros y otros técnicos. No hay ninguna duda de que Herón continuo y enriqueció la ciencia egipcia de la medida de campos; sus escritos sobre geodesia fueron utilizados durante varios siglos.
Herón aplicó varios de sus teoremas y reglas al diseño de teatros, salas para banquetes y baños. Sus trabajos de aplicación incluyen **"Mecánica"**, **"La Construcción de Catapultas"**, **"Mediciones"**, **"El Diseño de armas"**, **"Neumática"** (la teoría y el uso del aire comprimido), y **"Sobre el Arte de la Construcción de Autómatas"**. Dio diseños para relojes de agua, instrumentos de medida, maquinas automáticas, maquinas elevadoras de pesos e ingenios de guerra.

2. Pappo de Alejandría (290-350 d.C.)
Su **"Colección Matemática"** (Synagoge) en ocho tomos, es una recopilación importante de las obras de los clásicos a las que anexó sus propios trabajos sobre figuras proyectivas, problemas variacionales (propiedades maximales de las celdas de un panal de abejas, problemas isoperimétricos, etc.) y lugares geométricos especiales entre otros. Mucho de lo que hoy conocemos acerca de la Matemática griega es debido a sus notas históricas.
Este último matemático notable de la antigüedad se distinguió también como geógrafo y astrónomo. Ideológicamente se aproximaba al neoplatonismo. De él surgieron, entre otras cosas, comentarios sobre el **"Almagesto"** y sobre el libro X de los **"Elementos"**. La obra principal de Pappo constituye un trabajo grandioso, perdido en parte **"Collectio"** (Colección), en la que se abordan muchas obras matemáticas de épocas remotas, entre ellas muchas cuyos originales se perdieron.



La **"Collectio"** contiene además resultados de investigaciones propias de Pappo, entre ellos algunos rudimentos de la geometría proyectiva.

El Teorema de Pappo dice así: Sobre dos rectas g, y g_r sean paralelas o no, se seleccionan tres puntos *A, B, C y A\B\C.* Las rectas de unión *AB\ AC, BA\BC\CA\CB'* se cortan en los puntos *X, Y.* Z. que se encuentran sobre una recta. La **"Collectio"** contiene también las reglas sobre los puntos de gravedad de cuerpos en rotación, citadas por el matemático suizo Guldin en el siglo XVI-XVII.

La actividad matemática en general y geometría en particular, declinó en Alejandría aproximadamente a partir del comienzo de la era cristiana. Lo que se sabe acerca de los trabajos de geometría de la primitiva era cristiana viene de los principales comentaristas Pappo, Teón de Alejandría (fin del siglo IV d.C.) y Proclo. En conjunto muy pocos teoremas originales se descubrieron en este período. Los geómetras dan la impresión de haberse ocupado principalmente del estudio y comprensión de los trabajos de los grandes matemáticos que les precedieron. Completaron demostraciones que los autores originales habían omitido, bien porque las habían considerado suficientemente sencillas para dejarlas a los lectores, bien porque fueron dadas en tratados que se habían perdido. Estas demostraciones recibieron el nombre de lemas, en un antiguo uso de la palabra.

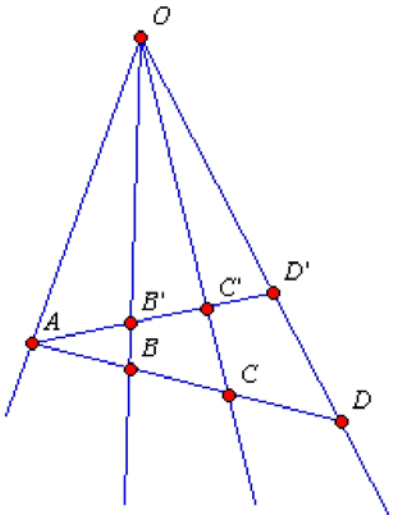
Tanto Teón como Pappo informan acerca de Zenodoro, que vivió en algún momento entre el 200 a.C. y el 100 d.C. Al parecer, Zenodoro escribió un libro sobre figuras isoperimétricas, es decir, figuras con el mismo perímetro y en él probó los teoremas siguientes:

1. Entre los polígonos de *n* lados con el mismo perímetro, el polígono regular es el que tiene mayor área.
2. Entre los polígonos regulares con igual perímetro, el que tiene más lados tiene mayor área.
3. El círculo tiene mayor área que un polígono regular del mismo perímetro.
4. De todos los sólidos con la misma superficie, la esfera tiene el mayor volumen.

El contenido de estos teoremas, que hoy en día llamaríamos problemas de máximos y mínimos, era novedoso en la matemática griega.

Al final del periodo alejandrino, las aportaciones de Pappo a la geometría aparecen como una especie de contrapunto. El nuevo trabajo de Pappo no fue de primer orden, pero algo del mismo merece ser tenido en cuenta.

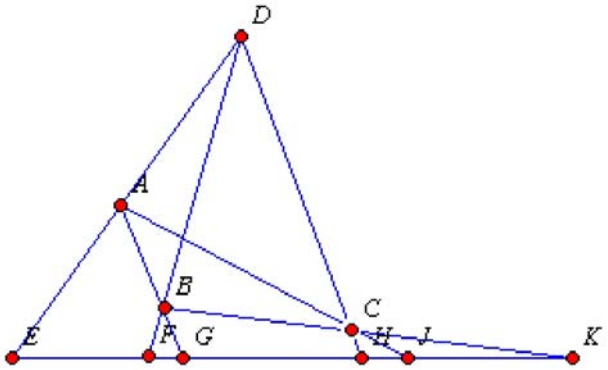
El libro V da las demostraciones, resultados y extensiones de los trabajos de Zenodoro relativos a las áreas limitadas por curvas con el mismo perímetro. Pappo añade el teorema por el cual de todos los segmentos de un círculo que tienen el mismo perímetro, el semicírculo tiene mayor área. Prueba también que la esfera tiene mayor volumen que cualquier cono, cilindro o poliedro regular con la misma área de su superficie. Este libro fue uno de los favoritos de los comentaristas posteriores, al plantear entre otras cosas la cuestión de la sagacidad de las abejas. Después de haber demostrado Pappo que de los polígonos regulares con el mismo perímetro, tiene mayor área el que tenga mayor número de lados, sacó la conclusión de que las abejas demostraban tener alguna forma de inteligencia matemática al construir sus celdas en forma de prisma hexagonal y no triangular ni cuadrada.



La Proposición 129 del libro VII es un caso

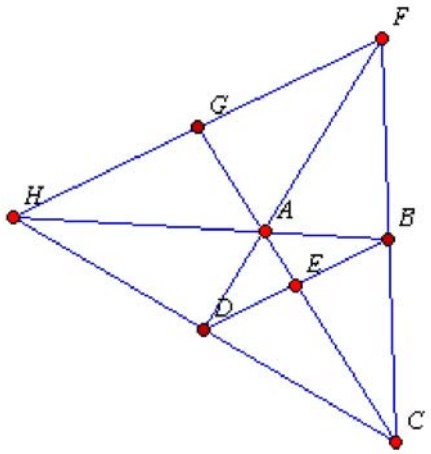
particular del teorema en el que la razón doble $\frac{\frac{AB}{AD}}{\frac{BC}{CD}}$ es la misma para toda sección transversal de cuatro rectas que parten de O. Pappo exige que las dos líneas transversales pasen por A.

La Proposición 130 afirma, en nuestro lenguaje, que si cinco de los puntos en los que los seis lados de un cuadrilátero completo (los cuatro lados y las dos diagonales) cortan una línea recta son fijos, el sexto también lo es. Así, si ABCD es un cuadrilátero tal que los seis puntos en los que sus seis lados cortan a una línea recta arbitraria EK son E, F, G, H, J y K, si cinco de ellos son fijos, también lo es el sexto. Pappo observa que estos seis puntos verifican la condición $\frac{EK}{EH}\frac{JK}{JH}=\frac{EK}{EF}\frac{GK}{GF}$.



Esta condición establece que la razón doble determinada por E, K, J y H coincide con la razón doble determinada por E, K, G y F. La condición es equivalente a la que se puede encontrar, introducida por Desargues, que llama a seis puntos como los indicados, "puntos de una involución".

La Proposición 131 del libro VII equivale a la afirmación de que la diagonal de cualquier cuadrilátero queda cortada armónicamente por la otra diagonal y por la línea que une los puntos de intersección de los pares de lados opuestos. Así, ABCD es un cuadrilátero; CA es una diagonal; CA queda cortada por la otra diagonal BD y por FH, que une la intersección de AD y BC con la intersección AB y CD. Entonces, los puntos C, E, A y G de la figura forman un conjunto armónico; es decir, E divide internamente a AC con la misma razón que G divide externamente a AC.

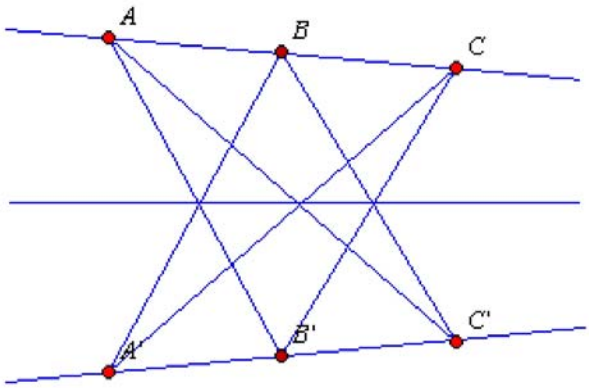


La Proposición 139 del libro VII enuncia lo que se llama todavía Teorema de Pappo. Si A, B y C son tres puntos de una recta y A', B' y C' son tres puntos de otra, entonces AB' y A'B, BC' y B'C y AC' y A'C se cortan en tres puntos alineados.

Uno de los últimos lemas, la Proposición 238, establece una propiedad fundamental de las secciones cónicas: el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias desde un punto fijo (foco) y desde una línea fija (directriz) están en razón constante es una sección cónica. Esta propiedad fundamental de las cónicas no aparece en el libro de Apolonio **"Secciones Cónicas"**, pero, como ya se ha observado anteriormente, era probablemente conocida por Euclides.

En la introducción del libro VII, Pappo se apoya en la afirmación de Apolonio de que su método capacita para ayudar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos líneas es igual al producto de sus distancias a otras dos líneas por una constante. Pappo sabe (pero no demuestra) que el lugar es una cónica. Apunta también que el problema se puede generalizar también a cinco, seis o mas rectas.

El libro VIII es de especial importancia puesto que está dedicado esencialmente a la mecánica, la cual, conforme a los puntos de vista alejandrinos, se contempla como una parte de la matemática. En efecto, Pappo prologa el libro planteando esta cuestión. Cita a Arquímedes, Herón y otras figuras menos conocidas como las figuras de la mecánica matemática. El centro de gravedad de un cuerpo se define como el punto interior del mismo (no ha de ser necesariamente interior) tal que si el cuerpo se suspende desde el mismo, permanece en su posición inicial. Explica entonces procedimientos para la determinación del punto. Trata también sobre el movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano inclinado y aborda la cuestión de comparar la fuerza requerida para deslizar un cuerpo por un plano horizontal con la que se necesita para hacerlo en un plano inclinado.



El libro VII contiene también un famoso teorema llamado a veces Teorema de Pappo y a veces Teorema de Guldin[220], quien lo redescubrió de forma independiente. El teorema afirma que el volumen generado por la rotación completa de una curva cerrada plana totalmente situada a un lado del eje de rotación es igual al área limitada por la curva multiplicada por la circunferencia del circulo que pasa por el centro de gravedad. El resultado es muy general y Pappo era consciente de ello. No da una demostración del teorema y es muy posible que tanto el teorema como su demostración se conocieran con anterioridad a su tiempo.

3. Diofanto de Alejandría (200-284).

Sobre su vida se tiene poca información, a excepción de la información que nos aporta el siguiente acertijo. Según se afirma este fue escrito por si mismo en su tumba, horas antes de morir:

"¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto y los números pueden mostrar ¡oh milagro! Cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su feliz infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de bellos cubriose su barbilla y la séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril. Pasaron cinco años más y le hizo ichoso el nacimiento de su primogénito, que entregó su existencia a la tierra, la cual duró tan solo la mitad de la de su padre. Se dedicó Diofanto afligido, por entero al álgebra buscando consuelo en la misma, pero su pena era tan profunda que descendió a la sepultura sobreviviendo solo 4 años al deceso de su hijo. Dime ¿Cuantos años vivió Diofanto?"

[220] En honor de Paul Guldin (nombre original, Habakkuk Guldin) matemático y astrónomo suizo que nació el 12 de junio de 1577 en Mels, Suiza y murió el 3 de noviembre de 1643 en Graz, Austria.

Haciendo uso de nuestro simbolismo si x es la cantidad de años que vivió Diofanto se tiene que: x = (x/6) + (x/12) + (x/7) + 5 + (x/2) + 4, es decir x = 84.
La tendencia a la realización de cálculos obligaba a perfeccionar el aparato aritmético algebraico si se aspiraban a nuevos progresos, sobre todo a reformar la estructura formal. Así Diofanto hizo derivar el álgebra retórica hacia en un álgebra sincopada. Utilizó los síncopes o abreviaturas de modo algo similar a nuestros actuales símbolos algebraicos.
Valiéndose de la revolución formal que entrañaba el uso de abreviaturas, Diofanto logró acceder a nuevos conocimientos en la teoría de ecuaciones. Una buena parte de estos están recogidos en lo que hoy llamamos análisis diofántico. Sus obras sirvieron de referencias para el desarrollo de numerosas investigaciones teóricas numéricas y algebraicas a partir del siglo XVI, especialmente su **"Arithmetica"** (escrita en 13 libros, de los que solo han sobrevivido 6 y que originalmente contenían 130 problemas con sus soluciones).
De las obras matemáticas de Diofanto, se conservan 6 libros de la **"Aritmética"** y fragmentos del libro **"Números Poligonales y Porismas".** Estos libros comenzaron a atraer la atención en Europa sólo 1200 años después de ser escritos. Como observó Regionmontano en 1463; *"En estos libros antiguos se halla oculta la flor y nata del conjunto de la aritmética, el* ***ars rei et census*** *que actualmente conocemos bajo el nombre árabe de álgebra".* El concepto de números poligonales surgió en la matemática pitagórica como consecuencia de la interpretación geométrica de las relaciones teórico-numéricas. Si se designan los números por puntos y se distribuyen en forma de cualquier figura, entonces las sumas parciales de las progresiones aritméticas (de la forma a_1=1, d=n-2) pueden ser representadas en forma de familias de polígonos semejantes (ver figura para n=3,4,5) y los correspondientes valores numéricos se llaman poligonales. En la época de Diofanto, tal idea también se extendía al espacio.
Con ello se obtenían los números espaciales, representados por familias de paralelepípedos semejantes, números piramidales, etc.

Las operaciones con los números racionales, se investigan en la **"Aritmética"**. En el primer libro él introduce los conceptos fundamentales de la aritmética, las reglas de los signos de multiplicación, las reglas de las operaciones con polinomios, resuelve ecuaciones lineales. En los libros siguientes están contenidos numerosos problemas que conducen a ecuaciones con coeficientes racionales, que tienen raíces racionales.
Diofanto en todos los problemas utiliza valores numéricos especiales y realiza sólo operaciones con números, no mencionando en ninguna parte teoremas generales. Para la designación de la cantidad incógnita en la ecuación y para la escritura de las funciones de ella estuvo obligado a elaborar un sistema de símbolos.
La simbólica de Diofanto está basada en la abreviatura de palabras. En la historia del desarrollo de la simbología algebraica ésta marca el paso de las expresiones con palabras de las dependencias algebraicas (álgebra "retórica") a las abreviaturas de estas expresiones (álgebra "sincopada"). La siguiente etapa de desarrollo ya es el

álgebra puramente simbólica, que comenzará con Vieta dentro de 13 siglos. Para tener una idea más clara de esto, tomemos la siguiente expresión simbólica $(250x^2+2,520):(x^4+900-60x^2)$, sus síncopas le permitieron escribir, y trabajar, con ecuaciones que implicaban éstas u otras expresiones parecidas. Por $250x^2$ escribió $\Delta^\tau\sigma\nu$ aquí la letra ν significaba 50 y σ, 200 de acuerdo con la práctica griega corriente. Pero Δ^τ era una abreviación de la palabra griega que significa potencia (es nuestra palabra dinámica); y potencia representaba el cuadrado del número desconocido. Diofanto empleó la letra s para la primera potencia de la incógnita y la abreviación de la palabra cubo para la tercera potencia. No empleó ningún signo más, pero sí una especie de ψ para menos, la letra ι para igual y una frase especial para designar la división de una expresión por otra. Es interesante que su idea de adición y sustracción fuera "venidero" y "deficiente" y que la palabra griega para deficiente se halle relacionada con el término pitagórico elipse.

Con ayuda de semejante simbólica, en los libros 2-6 de la **"Aritmética"** Diofanto resuelve (encuentra una de sus soluciones racionales) numerosos problemas que conducen en su mayoría a ecuaciones indeterminadas de segundo grado. Encuentra soluciones racionales de alrededor de 130 ecuaciones indeterminadas, las cuales pertenecen a más de 50 clases diferentes. En cada caso Diofanto se limita a encontrar una sola raíz. Un método general de solución de estas ecuaciones o su clasificación, no aparece en la obra de Diofanto. No hay tampoco demostraciones; la veracidad del resultado obtenido se confirma sólo porque al efectuar la sustitución satisface las condiciones del problema.

La teoría general de las ecuaciones diofánticas de primer grado ax + by =1, donde a y b son enteros primos entre sí, fue construida en el siglo XVII por el matemático francés Bachet de Méziriak (1587-1638), quien también editó en el año 1621 las obras de Diofanto en griego y latín con sus comentarios. Sobre la teoría general de las ecuaciones diofánticas de 2do grado trabajaron muchos matemáticos notables: Fermat, J. Wallis, Euler, Lagrange y Gauss. Como resultado de sus esfuerzos a comienzos del siglo XIX estaba en lo fundamental investigada la ecuación general no homogénea de 2do grado con dos incógnitas y coeficientes enteros $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$.

Las ecuaciones diofánticas son objeto de estudio en la matemática contemporánea. Así se denominan las ecuaciones algebraicas indeterminadas o sus sistemas con coeficientes enteros, a los que se les busca soluciones enteras o racionales. Un punto de vista más general sobre las ecuaciones diofánticas consiste en que las soluciones de estas ecuaciones se buscan entre los números algebraicos. Investigaciones fundamentales en la teoría de las ecuaciones diofánticas han sido llevadas a cabo por los matemáticos de la antigua URSS A. O. Guelfond, B. N. Delone, D. K. Faddev y V. A. Tartakovsky.

El nombre de Diofanto se afianzó sólidamente también en la parte de la teoría de los números que estudia la aproximación de los números reales por números racionales. Estas aproximaciones se denominan diofánticas. Con esta teoría también se relacionan las cuestiones relativas a la solución en números enteros de desigualdades (o sus sistemas) con coeficientes reales y las cuestiones sobre la teoría de los números trascendentes.

Un lugar central de la teoría de las aproximaciones diofánticas lo ocupan los métodos y resultados del académico I. M. Vinogradov.

Todo esto sirviera para situar a Diofanto como un algebrista respetado, pero llegó más lejos. Pongamos el caso de la ecuación $x^4+y^4+z^4=u^2$, halló 4 números enteros para los cuales la afirmación es cierta. Siglos más tarde, Fermat se preguntaba

"¿Por qué Diofanto no buscó dos cuartas potencias tales que su suma fuese un cuadrado? De hecho este problema es imposible, como puedo demostrar con todo rigor mediante mi método" Sin duda, Diofanto había experimentado lo suficiente con dicha ecuación, para demostrar que no había solución.

De esta forma, las obras de Diofanto sirvieron en esencia de punto de partida a muchas investigaciones teórico-numéricas y algebraicas. Con relación a las matemáticas antiguas, ellas caracterizaron el reforzamiento de las tendencias algebraicas, el florecimiento de las cuales fue entorpecido (como también el desarrollo de todas las ramas de las matemáticas) por las condiciones socio-económicas desfavorables de los siglos siguientes, sobre todo en Europa.

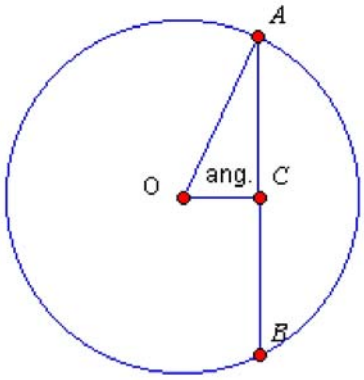
Entre los rasgos característicos de las matemáticas de esta época, se encuentra además la gran difusión de obras que son comentarios a las obras clásicas. El predominio de los comentarios constituye, indudablemente, un criterio de descenso en la creatividad matemática. Sin embargo, las obras de los comentaristas fueron muy útiles para la historia de las matemáticas, conservando en fragmentos o en recuentos muchas obras clásicas importantes. A veces los comentarios son la única fuente de información sobre obras perdidas o logros olvidados de los matemáticos antiguos.

4. El surgimiento de la trigonometría y Ptolomeo.

Completamente nueva en la geometría cuantitativa griega alejandrina fue la trigonometría, una creación de Hiparco, Menelao y Ptolomeo. Este trabajo estuvo motivado por el deseo de construir una astronomía cuantitativa, y seria utilizada para predecir las trayectorias y posiciones de los cuerpos celestes y para ayudar a medir el tiempo, el cálculo del calendario, la navegación y la geografía.

La trigonometría de los griegos alejandrinos es lo que llamamos trigonometría esférica aunque, como se vera, incluye también las ideas básicas de la trigonometría plana. La trigonometría esférica presupone la geometría esférica, como por ejemplo las propiedades de los círculos máximos y los triángulos esféricos, muchas de las cuales ya eran conocidas. Los **"Phaenomena"**, de Euclides, basados asimismo en un antiguo trabajo, contienen algo de geometría esférica. Muchos de sus teoremas pretendían tratar sobre el movimiento aparente de las estrellas. Teodosio (sobre el 20 a.C.) recopiló los conocimientos aprovechables de entonces en su **"Sphericae"**, pero su trabajo no era numérico y por tanto no seria de utilidad para abordar el problema fundamental de la astronomía griega, es decir, medir el tiempo durante la noche mediante la observación de estrellas.

El fundador de la trigonometría es Hiparco, que vivió en Rodas y Alejandría y murió alrededor del año 125 a.C. Se conoce muy poco acerca de él. La mayor parte de lo que conocemos proviene de Ptolomeo, que atribuye a Hiparco muchas ideas de trigonometría y astronomía. Le debemos a él varias observaciones astronómicas y descubrimientos, la teoría astronómica con mayor influencia en la antigüedad y trabajos sobre geografía. De todos los trabajos de Hiparco solamente se ha conservado su **"Comentario sobre los Phaenomena de Eudoxo y Aratus"**.



El método de Hiparco es el siguiente. La

circunferencia de un circulo se divide en 360º, tal como hizo por primera vez Hypsides de Alejandría (sobre el 150 a.C.) en su libro **"Sobre la Salida de los Astros"** y por los babilonios de los últimos siglos antes de Jesucristo, y un diámetro se divide en 120 partes. Cada parte de la circunferencia y del diámetro se divide a su vez en 60 partes y cada una de ellas en otras 60, conforme al sistema babilónico de fracciones sexagesimales. Entonces, para un arco dado AB de un determinado numero de grados, Hiparco da el número de unidades en la cuerda correspondiente AB. El método de cálculo de estas unidades será descrito en la exposición del trabajo de Ptolomeo, que presenta de forma combinada sus pensamientos y resultados.

El número de unidades de la cuerda correspondiente a un arco de un determinado numero de grados equivale a la función seno moderna. Si 2 α es el ángulo central del arco AB , para nosotros sen α=AC/OA, mientras que, en vez de sen α, Hiparco da el numero de unidades en 2AC cuando el radio OA contiene 60 unidades. Por ejemplo, si la cuerda de 2α es de 40 unidades, para nosotros senα=20/60, o, con mas generalidad,

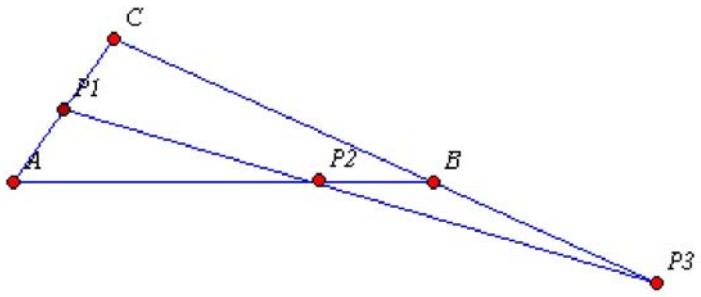
senα=1/60·1/2 cuerda 2α=1/120 cuerda 2α (9)

La trigonometría griega alcanzó una alta cota con Menelao (sobre 98 d.C.). Su **"Sphaerica"** es su obra capital, aunque parece ser que también escribió **"Cuerdas en un Circulo"** en seis libros y un tratado sobre la situación (o levantamiento) de arcos del Zodiaco. Los árabes le atribuyen algunas otras obras.

La **"Sphaerica"**, existente en versión árabe, está en tres libros. En el primero, sobre geometría esférica, se encuentra el concepto de triángulo esférico, es decir, la figura formada por tres arcos de círculos máximos sobre una esfera, cada uno de ellos menor que una semicircunferencia. El objetivo del libro es probar teoremas para triángulos esféricos, análogos a los probados por Euclides para los triángulos planos. Así, la suma de dos lados de un triángulo esférico es mayor que el tercer lado y la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos. Lados iguales abarcan ángulos iguales. Entonces Menelao demuestra el teorema, que no tiene análogo en los triángulos planos, según al cual si los ángulos de un triángulo esférico coinciden con los de otro, los dos triángulos son congruentes. Da también otros teoremas de congruencia y teoremas sobre triángulos isósceles.

El segundo libro de la **"Sphaerica"** de Menelao trata fundamentalmente de astronomía y solo indirectamente se refiere a la geometría esférica. El tercer libro contiene algo de trigonometría esférica y bases para el desarrollo del primer teorema del libro, el cual supone que tenemos un triángulo esférico ABC y algún circulo máximo que corta los lados del triángulo (trazado donde convenga). Para establecer el teorema se usara nuestra moderna noción del seno, pero para Menelao el seno de un arco como AB (o el seno del ángulo central correspondiente en el centro de la esfera) se constituye por la cuerda del arco doble AB. En términos de nuestro seno, el teorema de Menelao afirma que:

$$\text{Sen } P_1A \cdot \text{sen } P_2B \cdot \text{sen } P_3C = \text{sen } P_1C \cdot \text{sen } P_2A \cdot \text{sen } P_3B$$

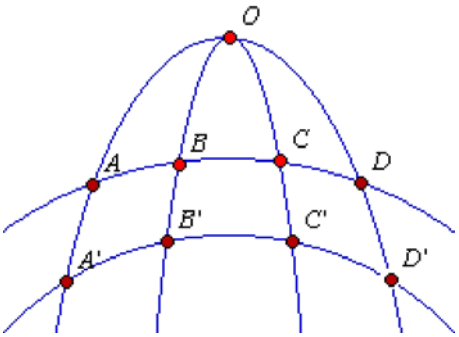


La demostración de este teorema se apoya sobre el teorema correspondiente para triángulos planos, llamado también teorema de Menelao. Para triángulos planos el teorema establece que:

$$P_1A \cdot P_2B \cdot P_3C = P_1C \cdot P_2A \cdot P_3B$$

Menelao no demuestra el teorema plano. Se puede concluir que ya era conocido o tal vez que Menelao lo había probado en un escrito anterior.

El segundo teorema del libro III, con la notación de que el arco *a* se opone al ángulo A en el triángulo ABC, dice que si ABC y A´B´C´ son dos triángulos esféricos y si A=A´ y C=C´ o C es suplementario de C´, entonces $\frac{senc}{sena} = \frac{senc'}{sena'}$.



El Teorema 5 del libro III utiliza una propiedad de los arcos que era presumiblemente conocida en tiempos de Menelao, si cuatro arcos de círculo máximo parten de un punto O y ABCD y A´B´C´D´ son círculos máximos que cortan a los cuatro, se tiene $\frac{senAD}{senDC} = \frac{senBC}{senAB} = \frac{senA'D'}{senD'C'} = \frac{senB'C'}{senA'B'}$.

Se puede encontrar una expresión correspondiente a cada uno de los dos miembros reformulada bajo el concepto de razón armónica o razón doble en los trabajos de Pappo y en trabajos posteriores de geometría proyectiva. Se deben a Menelao muchos más teoremas sobre trigonometría esférica.

El desarrollo de la trigonometría griega y sus aplicaciones a la astronomía tuvieron su culminación en los trabajos del egipcio Claudio Ptolomeo, que era miembro de la familia real de matemáticos aunque no era de la casa real de Egipto. Ptolomeo vivió en Alejandría y trabajo en el Museo.

En su **"Sintaxis Matemática"** o **"Colección Matemática"** (el trabajo fue titulado por los árabes como **"Megale sintaxis, Megiste"** y finalmente **"Almagesto"** como apuntábamos antes), Ptolomeo continua y completa los trabajos de Hiparco y Menelao en trigonometría y astronomía. La trigonometría y la astronomía están mezcladas en los trece libros del **"Almagesto"**, si bien el libro I trata con amplitud sobre trigonometría esférica y los restantes se dedican principalmente a la astronomía.

El **"Almagesto"** de Ptolomeo es esencialmente matemático, salvo en los lugares en que utiliza la física aristotélica para refutar la hipótesis heliocéntrica, sugerida por Aristarco. Afirma que, debido a que solamente el conocimiento matemático, abordado interrogativamente, dará a sus practicantes un conocimiento fiable, había decidido cultivar tanto como le fuera posible esta disciplina teórica. Ptolomeo dice también que desea fundamentar su astronomía *"sobre los caminos incontrovertibles de la aritmética y la geometría"*.

En el capitulo IX del libro I, Ptolomeo comienza calculando las cuerdas de los arcos de un circulo, con lo que extendía los trabajos de Hiparco y Menelao. Como ya se ha observado, la circunferencia se divide en 360 partes o unidades (no usa la palabra grado) y el diámetro en 120 unidades; propone entonces, dado un arco que contenga un determinado numero de las 360 unidades, encontrar la longitud de la cuerda expresada en términos del número de unidades que contiene todo el diámetro, es decir, 120 unidades.

Comienza con el cálculo de las cuerdas de los arcos de 36º y 72º. En la figura ADC es un diámetro de un círculo con centro en D y BD es perpendicular a ADC. E es el punto medio de DC y F se elige de manera que EF=BE. Ptolomeo demuestra geométricamente que FD coincide con un lado del decágono regular inscrito y BF, con un lado del pentágono regular inscrito. Pero ED contiene 30 unidades y BD, 60 unidades. Como $EB^2= ED^2+BD^2$, $EB^2 =4500$ y EB=67 4'55" (lo que expresa $67+4/60+55/60^2$). Ahora, EF=EB por lo que podemos conocer EF. Entonces FD=EF-DE=67 4'55"-30=37 4'55". Como FD es igual que el lado del decágono, es la cuerda de un arco de 36º. Luego conocemos la cuerda de este arco. Utilizando FD y el triángulo rectángulo FDB, podemos calcular BF y es igual a 70º32'3". Pero BF es el lado del pentágono por lo que se tiene la cuerda del arco de 72º.

Naturalmente, para el lado de un hexágono regular, como coincide con el radio, se tiene evidentemente que la cuerda de longitud 60 pertenece al arco de longitud 60. Asimismo, como el lado del cuadrado inscrito se puede calcular de manera inmediata a partir del radio, se tiene la cuerda de 90º, que es 84 51'10". Además, puesto que el lado del triángulo equilátero inscrito puede calcularse también de manera inmediata a partir del radio, se obtiene que la cuerda de 120º es 103 55'23". Con el uso de un triángulo ABC, sobre el diámetro AC se puede obtener inmediatamente la cuerda del arco suplementario AB si se conoce la cuerda del arco BC. Por tanto, como Ptolomeo conocía la cuerda de 36º podía calcular la de 144º, que resulta ser 114º7'37".

La relación que se ha establecido aquí es equivalente a $\text{sen}^2 A+\cos^2 A=1$, donde A es un ángulo agudo arbitrario. Esto puede verse como sigue: Ptolomeo ha probado que si S es un arco menor de 180º entonces $(\text{cuerda } S)^2 + [\text{cuerda } (180-S)]^2 = 120^2$. Pero por la relación (9) anterior:

$$(\text{cuerda } S)^2 = 120^2 \text{ sen}^2 \ S/2$$

Luego se tiene $120^2 \text{ sen}^2 S/2+120^2 \text{ sen}^2 (180-S)/2=120^2$, o bien

$$\text{sen}^2 S/2+\text{sen}^2 [90- (S/2)]=1$$

Es decir, $\text{sen}^2 S/2+\cos^2 S/2=1$. Ahora Ptolomeo demuestra lo que él llama un lema, pero que se conoce hoy en día como el teorema de Ptolomeo: dado cualquier cuadrilátero inscrito en un circulo, demuestra que AB·BD=AB·DC+AD·BC. La demostración es inmediata. Toma entonces el cuadrilátero especial ABCD en el que AD es un diámetro. Supongamos que conocemos AB y AC. Ptolomeo muestra ahora como calcular BC. El segmento BD es la cuerda del arco suplementario de AB, y CD es la cuerda del suplemento del arco AC. Si se aplica el lema, se ve que cinco de las seis longitudes involucradas en él son conocidas, por lo que la sexta, que en este caso es BC, se puede calcular. Pero (arco BC)=(arco AC)–(arco AB). Luego podemos calcular la cuerda de la diferencia de dos arcos cuando se conoce la cuerda de cada uno de ellos. Con la terminología

moderna esto significa que si conocemos sen A y sen B podemos calcular sen(A-B). Ptolomeo apunta que, puesto que conoce las cuerdas de 72º y 60º, puede calcular la de 12º.

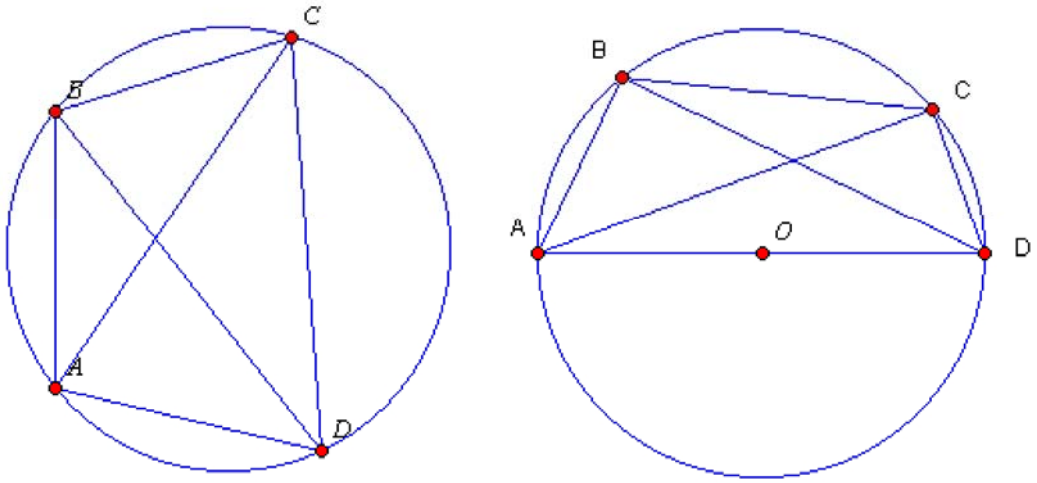
Prueba a continuación como, dada un acuerda cualquiera en un círculo, se puede calcular la cuerda del arco mitad de la cuerda dada. En términos modernos esto representa calcular sen A/2 a partir de sen A. Este resultado es potente, como afirma Ptolomeo, ya que podemos comenzar con un arco cuya cuerda es conocida y calcular las cuerdas de sus sucesivas mitades. Prueba también que si se conocen las cuerdas de dos arcos AB y BC se puede calcular la cuerda del arco AC. Esto representa, en nuestro lenguaje actual, la formula de sen(A+B). Como caso particular, se puede determinar, en términos modernos, sen2A a partir de sen A.

Como Ptolomeo puede calcular la cuerda de 0.75º a partir de la cuerda de 12º mediante divisiones sucesivas en mitades, puede añadir este arco de 0.75º o restarlo de cualquier arco de cuerda conocida, y en virtud de los teoremas anteriores, puede calcular la cuerda de la suma o la diferencia de dos arcos. Por lo tanto, esta en disposición de obtener las cuerdas de todos los arcos a intervalos de 0.75º. Sin embargo, desea obtener las cuerdas de arcos con saltos de 0.5º, lo que se dispone a hacer recurriendo a razonar con desigualdades. El resultado aproximado es que la cuerda de 0.5º es 0 31’25”.

Esta ahora en disposición de construir una tabla de las cuerdas de arcos, para arcos que difieren entre si 0.5º, desde 0º hasta 180º. Esta es la primera tabla trigonométrica.

Pasa entonces Ptolomeo a resolver problemas de astronomía, comenzando por encontrar arcos de círculos máximos sobre una esfera. Estos arcos son lados de triángulos esféricos, algunas de cuyas partes son conocidas bien por observación o mediante cálculos previos. Para determinar los arcos desconocidos, Ptolomeo prueba relaciones que son teoremas de trigonometría esférica, algunos de los cuales habían sido probados ya en el libro III de la *Sphaerica* de Menelao. El método básico de Ptolomeo consiste en usar el teorema de Menelao para triángulos esféricos. Así prueba, con nuestra anotación, que en el triángulo esférico con ángulo recto en C y con arco *a* que denota al lado opuesto al ángulo A:

$$sen\ a = sen\ c\ sen\ A \quad tg\ a = sen\ b\ tg\ A \quad cos\ c = cos\ a\ cos\ b \quad tg\ b = tg\ b\ cos\ A$$



Por supuesto, para Ptolomeo las distintas funciones trigonométricas son cuerdas de arcos. Para tratar triángulos oblicuángulos los descompone en triángulos esféricos rectángulos. No hay ninguna presentación sistemática de la trigonometría esférica; demuestra únicamente aquellos teoremas que necesita para resolver problemas astronómicos concretos.

El **"Almagesto"** pone la trigonometría en su forma definitiva, que perdurará alrededor de mil años. Generalmente hablamos de esta trigonometría como esférica, pero la distinción entre trigonometría plana y esférica es muy difusa si se observa lo hecho por Ptolomeo. Ciertamente, Ptolomeo trabaja con triángulos esféricos pero, por haber calculado las cuerdas de arcos, ha puesto realmente las bases de la trigonometría plana. Pues, conociendo sen A y, por tanto, cos A para cualquier A comprendido entre 0º y 90º, se pueden resolver triángulos planos.

Se observa que la trigonometría fue creada para ser usada en astronomía, y como la trigonometría esférica era de mayor utilidad para ese propósito, fue la primera en ser desarrollada. El uso de la trigonometría plana en mediciones indirectas y en agrimensura es ajeno a la matemática griega. Esto puede parecer extraño, pero es históricamente incuestionable, ya que la astronomía era el mayor objetivo de los matemáticos griegos. Los agrimensores hacen su aparición en el periodo alejandrino; pero un matemático como Herón, que estuvo interesado en la agrimensura y habría sido capaz de desarrollar la trigonometría plana, se contento con aplicar la geometría euclídea. Los agrimensores incultos no estaban en situación de crear la trigonometría necesaria.

El Teorema de Ptolomeo.

En este año se conmemora el 475 aniversario de la impresión del primer texto de trigonometría **"Sphericus cum Tabulis Sinuum"** (terminado en 1461 y publicado en 1533) del alemán Johann Müller, también conocido con el nombre de Regiomontano (1436-1476), latinización derivada del nombre de la ciudad de Konigsberg, donde nació.

En este libro se tratan, sistemáticamente, todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos a partir de los elementos dados. Como un dato de interés, podemos decir que Regiomontano utilizó los números irracionales en su trabajo, números que surgían en los casos de inconmensurabilidad geométrica y que no estaban nada en boga en esa época, por otra parte, aplicó el álgebra a la resolución de problemas geométricos. De este modo, fue en esencia suprimida la tradición antigua y descubierta una nueva concepción del objeto de la trigonometría y sus problemas.

Hemos dicho que, sin lugar a dudas, importancia fundamental en la consolidación de la trigonometría lo jugó Ptolomeo, quien organizó y corrigió muchos de los trabajos anteriores en este campo, tal y como nos lo presenta en su **"Almagesto"**, un trabajo sobre el sistema geocéntrico que sirvió de modelo durante más de quince siglos y que es la teoría de epiciclos de Apolonio, en forma más amplia y mejorada. Lo que enseña en detalles trigonométricos, en general no es nuevo, pero está presentado en forma muy hábil y metódicamente.

Una de las necesidades de Ptolomeo era una tabla que diera las longitudes de las cuerdas de un círculo, correspondiente a varios ángulos centrales. Esta tabla, que es la equivalente hoy en día a la de los senos, está calculada por él de medio en medio grado y se basa en la división sexagesimal del radio y prevé interpolaciones para los minutos, tal y como mostrábamos antes.

Para exponer esto con más detalle, veamos primeramente un teorema que, sin lugar a dudas, puede figurar como uno de los teoremas más conocidos de la Geometría Elemental: el Teorema de Ptolomeo, el cual concierne con cuadriláteros inscritos y que es fundamental en la ya mencionada teoría geocéntrica del Universo, que surgió una centuria después del comienzo de nuestra era. El uso que hizo Ptolomeo de este teorema y su aplicación al estudio de los polígonos regulares será también presentado aquí.

Teorema de Ptolomeo. Si un cuadrilátero es inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma del producto de los pares de lados opuestos.

Diversas demostraciones de este teorema pueden encontrarse en múltiples textos, aquí solamente escribiremos la conclusión del teorema, para mejor comprensión, con x, y diagonales y a, b, c, d los lados:

$xy=ac+bd.$ (10)

Volvamos al punto en el cual habíamos hecho mención del uso del teorema por parte de Ptolomeo: la construcción de la tabla de cuerdas. Para construir esta tabla, él usó la relación, la cual en términos modernos es conocida como el teorema de adición para senos:

$sen(a+b)=senacosb+cosasenb.$ (11)

Para mostrar como realizó esto, observemos primero que si un ángulo es inscrito en un círculo cuyo diámetro es la unidad, el seno del ángulo es representado como la cuerda que subtiende el ángulo. Así, sí $senq=AC$; para AB' diámetro $\angle AB'C=q$, $sen\ q= AC/AB' = AC$.
Ahora tomemos un polígono inscrito, una de cuyas diagonales es un diámetro, y por simplicidad, la unidad de longitud se tomará igual al diámetro del círculo. Por el teorema de Ptolomeo se verifica (10). Haciendo $x=1$, $y=sen(a+b)$, $a=sena$, $b=cosa$, $d=senb$, $c=cosb$ en (10) se obtiene (11).
Con ayuda de esto, expresado en términos de los lados del cuadrilátero, Ptolomeo calculó una tabla de longitudes de cuerdas, en vez de los senos y cosenos.

Aplicación del teorema a los polígonos regulares.
I. Caso del rectángulo.
Si el cuadrilátero inscrito es un rectángulo cuyos lados adyacentes son a y b y cuyas diagonales son c, el teorema se reduce al Teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$. Como la prueba del teorema de Ptolomeo es independiente del cuadrilátero inscrito, tenemos, por tanto, una prueba muy simple del Teorema de Pitágoras.
II. El Pentágono regular.
Considere un pentágono regular inscrito en un círculo cuyo radio es r. Sea a la longitud de un lado y b la longitud de una diagonal del pentágono. Aplicando el teorema de Ptolomeo al polígono BCDE tenemos $d^2=ad+a$, la solución de esta ecuación cuadrática, d en término de a es $d= a(1+\sqrt{5})/2$.
Dibujemos ahora la perpendicular AM a la diagonal BE. En el triángulo rectángulo ABM tenemos, de lo anterior y del teorema de Pitágoras que $AB=a$, $BM=a(1+\sqrt{5})/2$, $MA=a(10-2\sqrt{5})^{1/2}/4$ y como $\angle MBA=36°$, $sen36°=cos54°=(10-\sqrt{5})^{1/2}/4$, $cos36°=sen54°=(1+\sqrt{5})/4$.

Para obtener la relación entre el lado del pentágono y su radio, consideremos el triángulo rectángulo OAN. Como el ángulo ∠NOA=36°, AN=rsen36°, y el lado a=r(10 - 2√5)/2, el radio del círculo inscrito es ON=rcos36°=r(1+√5)/4, el área del pentágono es 5 ON AN=5r²(10+2√5)$^{1/2}$/8, en términos del lado a, el área es a²(25+10√5)$^{1/2}$/4.

III. El Hexágono regular.

Si los vértices de un hexágono regular, cuyo lado es a son numerados como 1, 2,... 6 y el teorema es aplicado al cuadrilátero 1346, obtenemos la ecuación x²+a²=4a , donde x es la longitud de una pequeña diagonal del hexágono. Así x=a√3.

IV. El Heptágono regular.

Por comodidad, consideremos que el lado del heptágono tenga longitud unitaria, los vértices sean numerados consecutivamente del 1 al 7 y representemos las diagonales 13 y 14 por x e y, respectivamente. Entonces, de los cuadriláteros 1234 y 1347 obtenemos las ecuaciones y² =xy+1, por eliminación de y de este sistema, se obtiene la ecuación cúbica $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Una inspección muestra que esta ecuación no posee raíces enteras. Por tanto, ella no posee raíces racionales[221]. De aquí seguimos que x no puede ser construida con regla y compás y así, consecuentemente, es imposible construir un polígono regular de siete lados, con regla y compás.

V. El polígono regular de nueve lados.

Designando los vértices del polígono, cuyo lado posee longitud unitaria, por los números del 1 al 9, y las diagonales 13, 14, 15 por x, y, z, respectivamente, obtenemos en sucesión, de los polígonos 1234, 1245 y 1456, las ecuaciones x²=y+1, y² =xz+1, xz=y+z. De este sistema, obtenemos que x satisface la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$. Por un razonamiento similar al del punto anterior, tenemos que este polígono no puede ser construido por medio de regla y compás.

De la primera y tercera ecuación anteriores, se tiene que z=x+1.

Esto ofrece un interesante resultado "Una diagonal principal de un Nonágono es igual a la suma de una diagonal menor y un lado".

VI. El polígono regular de 17 lados.

Este polígono posee diagonales de siete diferentes longitudes. Como antes, la longitud de un lado es tomada igual a la unidad; x, y, z, t, u, v, w representan las longitudes de las diagonales en orden creciente. Los polígonos 1234, 1345, 1456, 1567, 1678, 1789, 189 10 nos llevan al sistema de ecuaciones:

$$x^2 = 1 + y,\ xy = x + z,$$
$$xz = y + t,\ xt = z + u,$$
$$xu = t + v,\ xv = u + w,$$
$$xw = v + w,$$

de las seis primeras de estas, obtenemos los siguientes valores de y, ..., w en términos de x:

$$y = x^2 - 1,\ z = x(x^2 - 2),\ t = x^4 - 3x^2 + 1,\ u = x(x^2 - 1)(x^2 - 3),$$
$$v = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1,\ w = x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2), \qquad (12)$$

[221] Ver I. Vinogradov-**"Fundamentos de la teoría de los números"**, Editorial MIR, Moscú, 1977.

si estas dos últimas son sustituidas en la ecuación xw=v+w, el resultado es $x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1 = 0$, una raíz de la cual es $2\cos(\pi/17)$.
Conociendo la teoría de Gauss del polígono de 17 lados, es claro que la diagonal menor puede ser construida con regla y compás. Aunque aquí no aparece convenientemente deducida, el método de construcción es basado en la ecuación anterior de 8vo grado. El trabajo muestra además, que cada diagonal del polígono es una función racional entera de la menor diagonal.
VII. Otros resultados.
Algunos de estos resultados pueden ser generalizados para los polígonos regulares de n lados. Así, por ejemplo, es fácil ver que todas las diagonales de un n-ágono regular son expresables como polinomios de la menor diagonal. Volviendo al sistema (12), las variables pueden ser consideradas como sigue: x=2cosq, y=1+2cos2q, z=x+2cos3q,.haciendo las eliminaciones necesarias, obtenemos las fórmulas del ángulo múltiple para el coseno:

$$\cos 2q = 2\cos^2 q - 1, \quad \cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q, \ldots$$

Asimismo, si S_n designa la longitud del lado del n-ágono regular inscrito en el círculo unidad, entonces el lado del 2n-ágono regular tiene la longitud $S_{2n} = (2-(4-S^2)^{1/2})^{1/2}$, de esta fórmula y del hecho de que S_4 (lado del cuadrado) sea igual a $\sqrt{2}$ se deduce: $S_8 = (2-\sqrt{2})$, $S_{16} = (2-(2+\sqrt{2})^{1/2})^{1/2}$, $S_{32} = (2-(2+(2+\sqrt{2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}$, etc. Como fórmula general obtenemos, para n>2, una suma que incluye n-1 raíces cuadradas sucesivas. El perímetro del 2^n-ágono regular inscrito será $2^n S_2 n$. Al tender n a infinito, el 2^n-ágono regular tiende a confundirse con la circunferencia y, en consecuencia, $2^n S_2 n$ tiende a la longitud de la circunferencia del círculo unidad, que por definición es 2π.
Obtenemos así, sustituyendo m por n-1 y suprimiendo el factor 2, la fórmula asintótica para π, $2^m (2-(2 + (2 + \ldots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \rightarrow \pi$, que incluye m raíces cuadradas sucesivas. Los resultados obtenidos poseen el siguiente rasgo característico:

Los lados del 2^n-ágono, del 5.2^n-ágono y del 3.2^n-ágono, pueden construirse mediante procesos de sumas, restas, productos, divisiones y extracciones de raíces cuadradas.

Por otra parte, la aplicación del Teorema de Ptolomeo a la construcción de polígonos regulares, puede ser completada, remitiéndonos al trabajo de T. I. Zamfirescu[222], en el que se demuestra que:

"Para que un polígono regular de n lados, se pueda construir con regla y compás, con trisector, es necesario y suficiente que:

$$n = 2^a \ 3^b \ p_3, \ldots p_r,$$

donde a, b, r son enteros positivos y p_3, ..., p_r son números primos de la forma $p_i = 2^{z(i)}.3^{w(i)} + 1$, con z(i) natural y w(i) entero positivo".

[222] **"Construcciones Geométricas con regla, compás con trisector"**, St. si cerc. math., XV, 3 1964, 405-411 (en rumano)

Así, en el caso del heptágono regular, se tiene que n =7=2.3+1 lo que confirma lo dicho en ese punto.

Sobre el Sistema del Mundo.

Para que se tenga una idea de la importancia de la obra de Ptolomeo, al margen de su importancia en la enseñanza de la época, tenemos que Nicolás Copérnico (1473-1543) desde 1524, circula un pequeño manuscrito sobre el sistema del mundo de Ptolomeo y donde aparece la hipótesis de que es el Sol y no la Tierra al centro del sistema solar. Sin embargo, aún a fines del siglo XVI esta teoría no es ni muy conocida y mucho menos aceptada o divulgada (Bruno fue quemado en la hoguera en 1600 y Galileo abjuró de sus ideas, en proceso escandaloso, en 1633), a pesar de que ya había sido hecha la impresión de su obra **"De revolutionibus orbium coelestium"** (1543) y la traducción inglesa de esta (1576)[223].

Aristóteles fue el más grande cosmólogo de la antigüedad y ptolomeo, que aceptó buena parte de la física aristotélica, fue el más grande astrónomo griego. Ambos, como la inmensa mayoría de los griegos cultos, postulaban una cosmología geocéntrica y geoestática que dominaron la astronomía y la cosmología occidental, hasta el siglo XVI. En honor a la verdad, Ptolomeo siguiendo el camino de Hiparco, escogió una de las varias explicaciones del movimiento planetario e interpretó los hechos mediante una ingeniosa combinación de órbitas circulares o epiciclos.

Como es bien sabido, en el mundo griego se propusieron cosmologías alternativas. Por ejemplo, los atomistas afirmaban que el Universo es infinito y está compuesto por infinitos átomos, en este Universo no había centro y la Tierra era un simple cuerpo más. Pero los atomistas no desarrollaron con un mínimo de detalle ni una física que explicara, mínimamente, los movimientos de los cuerpos celestes o los del mundo sublunar, como había hecho Aristóteles. Tampoco elaboraron una astronomía que explicara y fuera capaz de predecir los movimientos de los cuerpos celestes, como había hecho Ptolomeo, por muy engorroso que esta fuera.

No obstante, hubo astrónomos que sí propusieron modelos astronómicos-cosmológicos alternativos. El más importante fue sin duda, el ya mencionado Aristarco de Samos, por ello, cuando Copérnico sustituyó la teoría ptolemaica por su propio y conocido sistema heliocéntrico, estaba restituyendo una teoría muy antigua al lugar que le correspondía, inclusive, en el manuscrito original de Copérnico, se dedica un largo pasaje al filósofo griego, que por consiguiente era bien conocido por el astrónomo polaco.

Incluso antes de Aristarco, hubo pitagóricos que hablaron de un cierto movimiento de la Tierra y parece claro que Heráclides de Ponto[224] afirmó el movimiento de rotación diurno de la Tierra.

No obstante, fue el respeto por los hechos y la argumentación racional lo que llevó a los griegos a rechazar la teoría de Aristarco: en primer lugar, incluso los cálculos más discretos de la distancia de la Tierra al Sol realizados por los griegos, implicaban que si fuera la Tierra la que girara alrededor del Sol fijo, las constelaciones deberían cambiar su aspecto desde puntos opuestos de la órbita,

[223] Una excelente selección de ésta, así como detalles de la vida y obra de Copérnico y Kepler puede ser consultada en **"Copérnico y Kepler. Vida, pensamiento y obra"**, Colección Grandes Pensadores, Planeta DeAgostini, 2008.

[224] (388-315 a.C.) Filósofo griego discípulo de Platón, y quizá de Pitágoras, que sólo conocemos por algunos comentaristas posteriores. Ideó un esquema según el cual los planetas Mercurio y Venus se trasladan alrededor del Sol, y éste, a su vez, junto con los demás planetas, rotan en torno a la Tierra, adjudicándole a ésta cierta rotación sobre un eje.

cosa que no sucede[225], y en segundo lugar, y más serio, es un hecho físico, parecía improbable que pudieran permanecer sobre la superficie terrestre, sin sufrir daños, objetos sometidos a la velocidad de rotación y traslación de la Tierra. No es extraño entonces, que después de analizar estas cuestiones, Ptolomeo afirmara que *"en última instancia todas estas consecuencias son ridículas, incluso imaginarlas es ridículo"*[226].

Por todo lo anterior, no podemos sustraernos a la tentación de dedicarle unas palabras al sistema de Ptolomeo y al sistema heliocéntrico, como justo homenaje, por lo que han representado en la historia de la humanidad.

En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años; su éxito se debía a que concordaba perfectamente con la imagen que el hombre tenía de sí mismo y con la física primitiva de Aristóteles. Cierto es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. Pero, a decir verdad, la astronomía siguió enfrentada después de Copérnico con tantos problemas como antes, ya que el calendario continuó siendo el mismo y las previsiones sobre los planetas apenas mejoraron.

Más aún, los "escépticos", al seguir considerando a la Tierra como punto fijo de referencia, veían en el sistema de Copérnico un hábil modelo matemático, un poco más complicado que el de Ptolomeo, pero que no constituía una verdadera descripción del mundo físico. En verdad, nada probaba la evidencia de una Tierra en movimiento y de un Sol central inmóvil. Galileo observó más tarde, que nunca admiraría bastante a quienes aceptaron el sistema de Copérnico a pesar del testimonio de sus sentidos.

En evidente que Copérnico no tenía la intención de renovar los instrumentos matemáticos de la astronomía tradicional.

Al igual que Hiparco y Ptolomeo, describió los movimientos de los planetas elaborando unos modelos geométrico-cinéticos que simulaban del modo más exacto posible, los fenómenos observables.

A estos modelos geométricos había que darles unos parámetros numéricos derivados de la observación, para ello Copérnico, al igual que muchos astrónomos árabes o latinos, se basó en los datos consignados por Ptolomeo, completándolos con algunas observaciones propias.

En realidad, la astronomía ptolemaica tenía dos dificultades fundamentales. En primer lugar, Ptolomeo tuvo que utilizar toda una gama de modelos geométricos para explicar los movimientos de los distintos planetas y se vio obligado además, a proporcionar a cada modelo un movimiento circular, con una revolución que duraba exactamente un año. En segundo lugar, Ptolomeo no consiguió determinar las distancias absolutas y relativas de los planetas con respecto a la Tierra, por lo que su orden de colocación, no era sino un convencionalismo arbitrario, llamado *La Hipótesis de los Planetas*.

El sistema heliocéntrico, fue el único método que resolvió ambas dificultades. La polémica desatada favoreció, indiscutiblemente, a la propagandización de la astronomía. Este creciente interés por la astronomía, favorece también a la trigonometría. En 1533, como ya dijimos, se edita la **"Trigonometría"** de

[225] En realidad no se percibe a simple vista. De hecho el paralaje no fue detectado hasta el 1838 por el astrónomo y matemático alemán Friedich Wilhelm Bessel (1784-1846).

[226] **"Almagesto"**, I, 7. Recomendamos la edición de G. J. Toomer de Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.

Regiomontano, en 1543 la obra de Copérnico, llegando (en 1596) a la impresión de las tablas grandes de 10 cifras de Rhaeticus.
Este período de consolidación de la trigonometría es indudablemente beneficiado por el trabajo de Francois Viéte (1540-1603) quien en una de sus obras, **"Pseudomesolabium"** (1595), examina las cuerdas que cortan el diámetro en cuatro segmentos que forman una progresión geométrica, puntualizando diversos problemas y haciendo un uso extenso del teorema de Ptolomeo.
Con respecto al estudio del cuadrilátero inscrito, unos años más tarde fue tratado independientemente (1598) por J. Richter (1537-1616), a él debemos un procedimiento general para la construcción de cuadriláteros inscritos que tienen lados y diagonales enteros y en los cuales lo son también el área y el diámetro de la circunferencia inscrita.
Otros trabajos en esta dirección, son los de Bombelli, Benedetti, van Ceulen, .quienes, por caminos propios o prosiguiendo investigaciones anteriores, contribuyeron a la solidificación de la trigonometría y a elevar el teorema de Ptolomeo al lugar que hoy ocupa.

5. La matemática al final de la antigüedad.
En el Imperio Romano alcanzó el estado esclavista su máxima expresión. En el siglo I a.C. se produjeron levantamientos de esclavos, especialmente, el dirigido por Espartaco (74-71 a.C.) puso al Imperio Romano durante un tiempo al borde del abismo.
También el tránsito de la república a la monarquía militar consolidó solo provisionalmente las relaciones sociales. En el siglo V se produjo la destrucción del imperio.
El creciente estancamiento y la descomposición repercutieron sobre las ciencias, entre ellas la matemática. Junto a la reanimación de los criterios místicos de la secta pitagórica por parte de los neoplatónicos y neopitagóricos, se reconocen también otros síntomas. El conocimiento no se perdió directamente, pero a los científicos les resultó cada vez más difícil seguir, desde el punto de vista del contenido, las obras cumbres de etapas anteriores Por eso se hizo habitual redactar comentarios detallados, sobre Euclides Arquímedes, Apolonio, etc. Estos tenían el objetivo de explicar definiciones, representar detalladamente breves demostraciones, ilustrar el nexo recíproco de los teoremas, etc. Algunos de estos comentarios constituyen trabajos científicos serios, muchas veces notables, que contienen incluso resultados recién obtenidos.

6. Hypatía (370-415).

En griego *ιπατία*, nació en Alejandría, y murió en la misma ciudad, en marzo de 415 ó 416. Es la primera mujer matemática de la que se tiene noticia. Llegó a ser directora de la escuela platónica de Alejandría. Su muerte a manos de fanáticos cristianos marca el fin de esta ciudad como centro de Ciencia.
Fue una filósofa y maestra neoplatónica romana, que destacó en los campos de las Matemáticas y la Astronomía[227], miembro y líder de la Escuela neoplatónica de Alejandría a comienzos del siglo V, comentó las obras de Arquímedes,

[227] Toohey, Sue-**"The Important Life & Tragic Death of Hypatia"**, 2003, disponible en el sitio http://www.skyscript.co.uk/hypatia.html

Apolonio y Diofanto. Seguidora de Plotino, desdeñaba el misticismo y se centró en estudios lógicos y ciencias exactas, llevando una vida ascética. Educó a una selecta escuela de aristócratas cristianos y paganos que ocuparon altos cargos, destacándose el Obispo de Ptolemaida, Sinesio de Cirene, que mantuvo una importante correspondencia con su maestra.

Su carácter anómalo de mujer entregada al pensamiento y la enseñanza en plena Tardoantigüedad, su fidelidad al paganismo en el momento de auge del catolicismo teodosiano y su cruel linchamiento a manos de una turba de cristianos, han dado una gran fama a Hypatía, cuya figura ha sido muy mitificada. Desde la época de la Ilustración se la presenta como a una supuesta *"mártir de la ciencia"* y símbolo de la presunta decadencia del mundo clásico frente al Cristianismo y la irracionalidad[228]. Sin embargo, su asesinato fue un caso único y excepcional, y de hecho la escuela neoplatónica alejandrina perduró hasta el siglo VII.

Por su parte, los movimientos feministas la han reivindicado como paradigma de *"mujer liberada"*, aunque al parecer estuvo casada con un tal Isidoro y se mantuvo virgen. También se la ha asociado con la destrucción de la Biblioteca de Alejandría, si bien no hay ninguna referencia literaria que vincule a ambas, según las fuentes, Hypatía enseñaba a sus discípulos en su propia casa.

"Había una mujer en Alejandría que se llamaba Hypatia, hija del filósofo Theón, que logró tales alcances en literatura y ciencia, que sobrepasó en mucho a todos los filósofos de su propio tiempo. Habiendo sucedido a la escuela de Platón y Plotino, explicaba los principios de la filosofía a sus oyentes, muchos de los cuales venían de lejos para recibir su instrucción"[229].

Empezó entonces a correr entre los cristianos de Alejandría el rumor de que la causante de la discordia entre Cirilo y Orestes era la influyente Hypatía, amiga y consejera de su ex alumno Orestes y, presumiblemente, opuesta a los abusos del poder religioso. En plena Cuaresma, un grupo de fanáticos, dirigidos por un lector de nombre Pedro se abalanzó sobre la filósofa mientras regresaba en carruaje a su casa, la golpearon y la arrastraron por toda la ciudad hasta llegar al *Cesáreo*, magno templo edificado por Augusto tras su victoria sobre Marco Antonio y convertido en catedral de Alejandría. Allí, tras desnudarla, la golpearon con tejas hasta descuartizarla, y sus restos fueron paseados en triunfo por la ciudad hasta llegar a un lugar denominado el *Cinareo* (por su nombre, se supone que un crematorio), donde los incineraron. Debía tener unos 60 años en el momento de su muerte[230].

Hesiquio sugería que el vínculo entre la astrología y la adivinación y la magia negra causaron su muerte. Un exaltado obispo copto del siglo VIII, Juan de Nikiû, la consideraba en plena ocupación árabe una bruja peligrosa, responsable del conflicto entre cristianos y judíos, y entre Orestes y Cirilo, concluyendo que tenía bien merecida la muerte.

---

[228] Ver Fernández; Wider, Kathleen-**"Women Philosophers in the Ancient Greek World: Donning the Mantle"**. Indiana University Press, 1985, pp. 49-50; y Mangasarian, Mangasar Mugurditch-**"The Martyrdom of Hypatia"**, discurso pronunciado en el Independent Religious Society at the Majestic Theater in Chicago, Mayo 1915.

[229] Sócrates Escolástico, Hist. Eccl., VII, 15.

[230] Las principales fuentes que se ocupan del asesinato de Hypatía, son: Sócrates Escolástico-**"Historia Ecclesiastica"**, libro VII, capítulos 13 a 15 (Ed. Online); Filostorgio-**"Historia Ecclesiastica"**, libro VIII, capítulo 9; Juan Malalas-**"Chronographia"**, capítulo 14; de Sinesio de Cirene **"Himnos. Tratados"**, Introducción, traducción y notas de F. A. García Romero. Madrid: Editorial Gredos, 1993 y **"Cartas"**, Intr., trad. y notas de F. A. García Romero, Rev.: C. Serrano Aybar, Madrid: Editorial Gredos, 1995 y la enciclopedia **"Suda"**, en la voz correspondiente a Hypatía, (*Ypsilon* 166).

Sócrates Escolástico achacó indirectamente a Cirilo la responsabilidad del asesinato de Hypatía, al manifestar que *"este suceso acarreó no escaso oprobio tanto a Cirilo como a la iglesia de los alejandrinos"*, ya que no hay nada más opuesto al espíritu del cristianismo que el crimen. Las demás fuentes narran el suceso de manera similar. El historiador arriano coetáneo Filostorgio se limitó a echar las culpas a los homousianos, fieles al credo de Nicea. El historiador bizantino del siglo VI Juan Malalas se equivocaba al afirmar que Hypatía fue quemada viva (lo fue después de muerta), pero admitía la inducción de Cirilo y culpaba también a la propia naturaleza de los habitantes de Alejandría, violentos y *"acostumbrados a toda licencia"* Juan de Éfeso, decía en la misma época que eran *"una horda de bárbaros, directamente inspirada por Satán"*, y el propio Cirilo reprochó a los alejandrinos su carácter levantisco y pendenciero en su homilía pascual del año 419. De hecho, pocos años después, en 422, el sucesor de Orestes como prefecto imperial, Calisto, fue muerto en un nuevo tumulto. También se ha llegado a sugerir que la turba estaba enloquecida por los rigores del ayuno de Cuaresma.

Finalmente, la entrada referente a Hypatía en la monumental enciclopedia bizantina del siglo XI conocida como Suda atribuye también la responsabilidad del crimen a la envidia de Cirilo y al carácter levantisco de los alejandrinos, y da la clave para comprender la triste muerte de la filósofa al equipararla a la de dos obispos impuestos a los alejandrinos por la corte imperial de Constantinopla: Jorge de Capadocia (m. 361) y Proterio (m. 457).

Sobre la motivación que Cirilo podría haber tenido para ordenar o inducir la muerte de Hypatía, los historiadores han concluido la confluencia de al menos cinco móviles:

- La propia intolerancia del obispo hacia el paganismo y el neoplatonismo, que tanto había influido en el arrianismo.
- La amistad e influencia de la filósofa sobre el prefecto imperial Orestes y las clases altas de Alejandría.
- Los deseos de vengar la muerte del monje Amonio, ordenada por Orestes, quizá aconsejado por su ex-maestra.
- La hostilidad de Hypatía hacia Teófilo y su sobrino por la destrucción del Serapeo y el saqueo de su biblioteca en 391, que posiblemente la llevara a azuzar el enfrentamiento entre el prefecto imperial y el patriarca.
- El deseo de advertir a Orestes de que no continuara enfrentándose con él, mediante la muerte de alguien tan cercano como Hypatía.

La muerte de Hypatía levantó un gran revuelo. Tras el cruel asesinato, Orestes informó de los hechos y pidió a Constantinopla que interviniera. La *Suda* afirma que el emperador Teodosio II quiso en principio castigar a Cirilo, tanto por justicia como por ser un gran protector de las enseñanzas filosóficas pero, a la postre, la reacción imperial se limitó a retirar al Patriarca los 500 monjes que le servían como guardia de corps, lo que ha llevado a algunos historiadores a suponer que fueron éstos, y no el populacho mencionado en todas las fuentes, los responsables del asesinato de la filósofa. La medida fue sin embargo rescindida al cabo de dos años, permitiéndose además aumentar su número a 600. Que Cirilo saliera tan bien parado fue posiblemente debido a la influencia de la hermana del Emperador, la augusta Pulqueria, cristiana devota de gran ascendente sobre su hermano, en cuyo nombre gobernaba mientras éste se dedicaba a tareas intelectuales.

En sus **"Memoirs pour servir à l'historie ecclésiastique"** (1693), el abate jansenista Le Nain de Tillemont exculpaba a Cirilo considerando que fue un crimen oprobioso para los cristianos y que redujo su influencia política. Tras la muerte de

Hypatía, las relaciones entre el Patriarcado alejandrino y la Corte Imperial se suavizaron y la veneración hacia el monje Amonio desapareció, ya que los mismos alejandrinos reconocían que había merecido la muerte por su atentado y no por haber sido obligado a renegar de Cristo. Cirilo no pudo impedir que su rival doctrinal, Nestorio, gozara del favor imperial y fuera elegido Patriarca de Constantinopla en 428, pero logró finalmente su deposición en el Concilio de Éfeso de 431. Convertido en uno de los personajes más influyentes de la Iglesia, a su muerte en 444 fue santificado, y es considerado uno de los Doctores de la Iglesia debido a su extensa obra doctrinal.

No hubo más actos violentos contra los filósofos paganos de Alejandría, cuya Escuela siguió floreciendo hasta pleno siglo VII, sin que su actividad se viera interrumpida siquiera por el cierre de la Academia de Atenas en tiempos de Justiniano I (529).

Ninguna de sus obras se ha conservado, pero se conocen gracias a sus discípulos, como Sinesio de Cirene o Hesiquio de Alejandría, *el Hebreo*:

1. Comentario a la **"Aritmética"** en 14 libros de Diofanto de Alejandría.
2. "**Canon astronómico"**.
3. Comentario a las **"Secciones cónicas"** de Apolonio de Perga, su obra más importante.
4. Tablas astronómicas: revisión de las del astrónomo Claudio Tolomeo, conocida por su inclusión en el **"Canon astronómico"** de Hesiquio.
5. Edición del comentario de su padre a **"Los Elementos"** de Euclides.

Además de cartografiar cuerpos celestes, confeccionando un planisferio, también se interesó por la mecánica. Se sabe que inventó un destilador, un artefacto para medir el nivel del agua y un hidrómetro graduado para medir la densidad relativa y gravedad de los líquidos, precursor del actual aerómetro, descrito por Sinesio de Cirene *"...es un tubo cilíndrico con la forma y dimensiones de una flauta, que en línea recta lleva unas incisiones para determinar el peso de los líquidos. Por uno de los extremos lo cierra un cono, adaptado en posición idéntica, de manera que sea común la base de ambos, la del cono y la del tubo. Cuando se sumerge en el líquido ese tubo, que es como una flauta, se mantendrá recto, y es posible contar las incisiones, que son las que dan a conocer el peso"*[231].

Sinesio también la defendió como inventora del astrolabio, aunque astrolabios más tempranos precedan el modelo de Hypatía al menos un siglo y su propio padre fue famoso por su tratado sobre ellos.

Queríamos señalar dos detalles adicionales sobre Hypatía.

Carl Sagan, en el capítulo 13 de su serie **"Cosmos"** (1980), llamado **"Un viaje personal"** trataba la muerte de Hypatía y la destrucción de la Biblioteca de Alejandría. Según Sagan *"En el año 415, cuando iba a trabajar, cayó en manos de una turba fanática de feligreses de Cirilo. La arrancaron del carruaje, rompieron sus vestidos y, armados con conchas marinas, la desollaron arrancándole la carne de los huesos. Sus restos fueron quemados, sus obras destruidas, su nombre olvidado"* (*sic*).

Dos importantes revista feministas que deben su nombre a la filósofa alejandrina: **"Hypatia: Feminist Studies"**, publicada en Atenas desde 1984, e **"Hypatia: A Journal of Feminist Philosophy"**, publicada desde 1986 por la Indiana University Press. Esta última publicó en 1989 un artículo de la poetisa y novelista Ursula Molinaro, **"A Christian Martyr in Reverse – Hypatia: 370-415 A.D"**, mezclando

[231] Fitgerald, A.-**"The Letters of Synesius of Cyrene"**, OUP, 1929-30. Carta 15.

realidad y ficción. En el artículo la virgen Hypatía es una mujer sin contención sexual, amante de Orestes, y es su conducta desinhibida la que lleva al envidioso Cirilo a ordenar su muerte. Molinaro afirma que su muerte señaló *"el fin de una época en que todavía se valoraba a las mujeres por su inteligencia"*, y que el Cristianismo limitó la libertad de pensamiento e impuso a las mujeres un modelo de conducta *"basado en la sumisión y desprovisto de placer"*.

7. Los Últimos Comentaristas.

Entre fines del siglo IV e inicios de V se generó de nuevo un ambiente de beligerancia que culminó con el desplome del imperio Romano. Sobre sus ruinas nacieron las primeras estructuras feudales basadas en una economía natural que ni necesitaba ni promovía el intercambio científico. Con el auge del cristianismo los templos paganos, las escuelas asociadas y en general la cultura helenística no fueron bien vistas. Entre los principales comentaristas estuvieron Teón de Alejandría (335-395) y su hija Hypatía, ya presentada. Teón escribió una versión de los **"Elementos"** que es la única conservada hasta nuestros días. Recordemos que la muerte de su hija es tomada, generalmente, como punto final del período de surgimiento de la matemática como ciencia, aunque ciertamente subsistió alguna actividad matemática fundamentalmente en la Academia de Atenas hasta que en el siglo VI fueron prohibidos los comentaristas por considerársele foco de difusión de teorías paganas y corrompidas. Entre estos últimos comentaristas estuvo Proclo (410-485), sus trabajos son la fuente principal, de que se dispone en la actualidad, para la historia de la matemática en la antigua Grecia.

En sus **"Comentarios sobre Euclides"**, Gemino de Rodas (aproximadamente año 75 a.C.) clasificó la "Mathemata" (lo que se enseña o lo que se debe saber) griega en Inteligibles y Sensibles. Entre los primeros se encontraban la Aritmética y la Geometría mientras que las segundas estaban compuestas por la Mecánica, la Astronomía, la Óptica, la Geodesia, la Música (teoría de intervalos musicales) y la Logística (Aritmética comercial, cálculo de magnitudes geométricas, en fin los conocimientos matemáticos necesarios para el diario quehacer). Esta clasificación refleja la concepción que tenían los griegos sobre la matemática como todo un conjunto de conocimientos que comprendía elementos de muchas futuras disciplinas científicas. Como factor unificador este conjunto contaba con el carácter especulativo racional de sus hipótesis y la prueba de su veracidad mediante la lógica de los conceptos, sin apoyarse en la práctica. Se sabe que Pitágoras contaba con lo que pudiéramos llamar un laboratorio de experimentación acústica, donde ensayaba su teoría de intervalos musicales o que Arquímedes, según la **"Carta a Eratóstenes"**, tenía en alta estima el método de experimentación mecánico-geométrico; pero ni ellos ni ningún otro de sus contemporáneos le concedió valor probatorio a este proceder. La experimentación solo era utilizada como recurso heurístico. Tampoco el fin de sus conocimientos fue, por regla general, resolver problemas prácticos concretos. Lógicamente esta concepción teórica no directamente apoyada en la experiencia práctica les condujo a incontables errores pero también les permitió hacer conjeturas geniales como la constitución atómica de la materia.

El modélico pensamiento matemático griego es una de las mayores conquistas intelectuales de la humanidad. A pesar de la rigidez de su forma geométrica y desvinculación directa de la práctica así como el marco socio histórico que limitó su alcance, allí nació y tuvo su época dorada la ciencia matemática contemporánea.

Sus métodos y estructuras marcaron el desarrollo de la matemática posterior más que cualquier otra época.

El ocaso de la matemática antigua.

La tradición científica de épocas anteriores pudo mantenerse cierto tiempo a pesar de la tenaz resistencia.

En Atenas, en la Academia platónica, Dominos escribió una Aritmética. Bajo el mando de Proclos Díadocos, siglos x, la Academia logró incluso cierta importancia. Un extenso comentario sobre el libro I de los **"Elementos"** contiene el famoso **"Catálogo de geómetras"**, una enumeración de matemáticos griego-helenísticos. Entretanto, según el Edicto de Milán del año 313, el cristianismo se convirtió en religión estatal en el Imperio Romano. De esta manera el cultivar de la filosofía de Platón cayó cada vez más en contradicción con la pretensión de que todos practicaran la ideología cristiana; en el año 529 se cerró violentamente la Academia por orden del emperador cristiano Justiniano, por considerarla *"centro de teorías paganas y corrompidas"* como habíamos mencionado.

Anterior a esto se había producido ya el ocaso de la escuela alejandrina. Después de Pappo se destacaron otros dos matemáticos de los que ya hablamos: Teon de Alejandría y su hija Hypatia que escribieron comentarios sobre el **"Almagesto"** y sobre Euclides, así como sobre Apolonio y Diofanto. Lamentablemente sus escritos se perdieron casi en su totalidad. Cuando Hypatia cayó víctima de fanáticos cristianos; se apagó la escuela matemática alejandrina.

La herencia científica de la matemática antigua.

La matemática de la antigüedad no desapareció sin dejar sus huellas, sino que, por el contrario, a través de diferentes vías históricas logró un efecto que ha llegado a nuestros días.

Algunos pocos conocimientos matemáticos se convirtieron en componentes de la instrucción cristiana mediante el neoplatonismo y se incluyeron en el Quadrivium, una especie de manual de enseñanza en las universidades medievales.

Los eruditos bizantinos conservaron algunas cosas que van más allá de lo elemental. Cuando finalmente, después de la conquista de Constantinopla por los pueblos turcos en 1453, los eruditos bizantinos llevaron a Italia las obras matemáticas de la antigüedad en sus textos originales, estos hallaron entusiasta acogida, pues allí el naciente desarrollo capitalista había creado una elevada disposición para recibir los conocimientos científicos y matemáticos.

El mérito principal en la conservación de los conocimientos matemáticos de la antigüedad corresponde, sin embargo, a los eruditos del Islam: muchos representantes de la ciencia griego-helenística emigraron hacia la India y los países árabes a causa de la intolerancia de la iglesia cristiana, continuando en dichos países la tradición matemática griego-helenística. Esta se convirtió particularmente en fundamento de la matemática en los países islámicos. A este rodeo tenemos que agradecer que muchos resultados matemáticos de la antigüedad se salvaran.

Epílogo

A pesar de todo el magnífico viaje que hemos hecho por las Matemáticas Griegas, admirándonos de todos los resultados obtenidos en distintos tiempos y lugares, debemos sopesar con cuidado la aportación real del pensamiento griego al desarrollo de la cultura occidental y calibrar su trascendencia, muchas veces magnificada. Aclaremos de antemano, que la ciencia griega no se produjo de manera aislada, por *generación espontánea*, sino que, por el contrario, es la heredera de una larga tradición cultural de variados pueblos y civilizaciones que le antecedieron.

"Remontándonos más allá del año 600 a.C. tenernos que pasar por la sombra antes de que nuevamente se haga la luz por un momento en el antiguo Egipto. Finalmente, llegamos a la primera gran edad de la Matemática alrededor del año 2000 a.C. en el valle del Eúfrates. Los descendientes de los sumerios, en Babilonia, parecen haber sido los primeros "modernos" en Matemática. Ciertamente, su forma de plantear ecuaciones algebraicas está más en el espíritu del Álgebra que conocemos que cualquier otra cosa hecha por griegos en su Edad de Oro".[232]

Por diversas causas, no todas bien estudiadas, los conocimientos de sus predecesores, fueron tomados por los griegos y sistematizados, formalizados y dotados de rigor, para conformar un *corpus teórico* que no tuvo equivalentes en las civilizaciones pregriegas. Dentro de estos avances debemos destacar la introducción del pensamiento hipotético-deductivo, y el método de demostración clásica que hasta hoy perdura, el uso de técnicas sintéticas en los razonamientos geométricos, la curiosidad científica en las ciencias de la Naturaleza, y a otras variadas aportaciones en el hacer y el pensar en su forma actual; más no todo fue éxito y logro, en concreto, la matemática griega desembocó en una especia de estancamiento, reconocido, en mayor o menor medida, por todos los historiadores de esta ciencia. Según Heath *"…hablando generalmente, los mejores progresos de geometría en líneas generales fueron prácticamente estorbados por las restricciones del método y la forma en la cual fueron inseparables de la geometría clásica griega…los griegos no pudieron avanzar muy lejos… en ausencia de algún sistema de coordenadas y sin medios más libres de manipulación tales como los que son suministrados por el álgebra moderna".*[233]

Más radical es Bell cuando afirma *"Los modos limitados del pensamiento griego no son los nuestros. Al madurar el álgebra elemental en los siglos XVI y XVII de nuestra era, y al introducir los métodos analíticos en el siglo XVII, la Matemática volviendo al número se acercó más a Babilonia, Egipto y la India de lo que nunca estuvo Grecia…Excepto por la insistencia en la demostración, nuestras preferencias en Matemática, como en religión, son más orientales que griegas.*

Aunque sea duro de decir, parece cierto que, vista de lejos, la geometría griega era en parte un gran error de táctica. Nada obligaba a Tales, Pitágoras, Euclides y Apolonio y sus discípulos a desarrollar el método sintético exclusivamente…La geometría sintética de las cónicas señala el fin del viaje".[234]

Pero, ¿cuáles fueron los factores qué determinaron este comportamiento?, creemos que son los siguientes:

1º) Los griegos no supieron asimilar el legado babilónico y, en particular, su sistema de numeración posicional. Ya hablamos de los inconvenientes de los sistemas

[232] Ver Bell, J.-**"Los Grandes Matemáticos"**, Cap.1, p.9.
[233] Heath, T.-**"A History of Greek Mathematics"**, Dover Publications, New York, 1981, p.197.
[234] Bell, J.-**"Historia de la Matemática"**, Fondo de Cultura Económica, México, 1985, p.91

usados por los griegos, inoperantes tanto para el cálculo como para la representación simbólica.
2º) El afán de ciencia desinteresada, lo que condujo en primera instancia a una anómala separación *ciencia pura-ciencia impura* (esta última luego llamada aplicada), privando a las Matemáticas griegas de una fuente inagotable de problemas y situaciones propicias para dar el salto cualitativo necesario.
3º) La propia estructura social de los griegos. En una sociedad esclavista se asentaron prejuicios que, a la larga, se convirtieron en lacras para el desarrollo armonioso de la cultura helénica.
Al respecto dice Boyer *"En la antigüedad griega se hacía una distinción clara no solo entre la teoría y sus aplicaciones prácticas, sino también entre el cálculo rutinario y el estudio teórico de las propiedades de los números: al primero de estos dos aspectos, por el que se dice que los sabios griegos mostraron generalmente desprecio, se le dio el nombre de logística, mientras que se sobreentendía que la aritmética, ocupación filosófica honorable hacia referencia solamente al segundo aspecto. Se ha dicho incluso que esta actitud clásica con respecto al cálculo rutinario venía a reflejar la estructura social de la Antigüedad, en la que los cálculos numéricos quedaban relegados a los esclavos"*[235].
Aunque la civilización greco-alejandrina perduró hasta el año 640 d.C., en el que finalmente fue destruida por los mahometanos, es evidente que, a causa de su productividad decreciente, la civilización había entrado ya en declive durante los primeros siglos de la era cristiana. Antes de entrar a considerar las razones de este declive es importante resumir las realizaciones y las imperfecciones de la matemática griega y tomar nota de los problemas que han dejado para generaciones futuras. Los griegos alcanzaron grandes metas, y la continuación de la matemática, cuando fue retomada por los europeos tras las incursiones a cargo de hindúes y árabes, estuvo tan completamente determinada por el legado de los griegos, que es importante tener claro donde se sitúa su matemática.
Los griegos se caracterizaron por hacer matemática abstracta. Esta contribución principal es de una relevancia y un valor inconmensurable por el hecho que un mismo triángulo abstracto o una misma ecuación algebraica se puede aplicar a cientos de situaciones físicas diferentes, que es donde se ha demostrado que radica el secreto de la potencia de la matemática.
Los griegos insistieron en las demostraciones deductivas. Este fue sin duda un avance extraordinario. De las de civilizaciones que habían existido, alguna había desarrollado algún tipo rudimentario de aritmética y de geometría. Sin embargo, ninguna civilización, aparte de los griegos concibió la idea de establecer conclusiones exclusivamente a través del razonamiento deductivo. La decisión de exigir demostraciones deductivas está en contraposición absoluta con los métodos utilizados por el hombre hasta entonces en los demás campos; es, de hecho, casi irracional, porque casi todo el conocimiento altamente fiable se adquiría a través de la experiencia, la inducción, el razonamiento por analogía y la experimentación. Pero los griegos buscaban verdades y vieron que solamente las obtendrían por los métodos infalibles del razonamiento deductivo. Comprendieron, también, que para llegar a verdades seguras debían partir de verdades y estar seguros de no suponer ningún hecho no garantizado. Por tanto, establecieron todos sus axiomas de forma explícita y además adoptaron la práctica de situarlos muy al principio de sus trabajos para que de esta manera pudieran ser examinados de golpe con sentido critico.

[235] Boyer, C.-**"Historia de la Matemática"**, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1996, p.169.

Después de concebir este plan enormemente importante para asegurar un conocimiento seguro, los griegos introdujeron una sofisticación que difícilmente podía esperarse de los innovadores. Su conciencia de que los conceptos no podían ser contradictorios y que no se puede construir una estructura consistente trabajando con figuras no existentes (tales como un poliedro regular de diez caras) pone de manifiesto una agudeza de pensamiento casi sobrehumana y ciertamente sin precedentes. Como sabemos ahora, su método para establecer la existencia de los conceptos, con lo que podían trabajar con ellos, era demostrar que podían construirse con el uso de regla y compás.

La potencia de los griegos para intuir teoremas y demostraciones queda atestiguada por el hecho que los **"Elementos"** de Euclides contienen 467 proposiciones y las **"Secciones Cónicas"** de Apolonio, 487, obtenidas todas ellas a partir de 10 axiomas y postulados enunciados en los **"Elementos"**. La coherencia que proporcionan las estructuras deductivas no ofrece ninguna duda, ni siquiera secundaria en cuanto a su importancia, ni quizá secundaria en cuanto a atención. Aún la posibilidad de obtener los mismos resultados a partir de numerosos conjuntos de axiomas distintos (si bien igualmente fiables) podría dar una versión del conocimiento menos manejable y asimilable.

La contribución griega al contenido de la matemática (geometría plana y del espacio, trigonometría plana y esférica, los comienzos de la teoría de los números, la ampliación de la aritmética y el álgebra de Egipto y Babilonia) es enorme, especialmente si se tiene en cuenta el reducido número de personas dedicadas a ellas y a los escasos siglos a los que se extendió su actividad. A estas contribuciones debemos añadir el álgebra geométrica, que esperaba solamente el reconocimiento de los números irracionales y la instauración del lenguaje simbólico para convertirse en la base del gran parte del álgebra elemental. Por otra parte, el estudio de figuras curvilíneas por el método exhaustivo, a pesar de que formaba parte de su geometría, merece una mención especial ya que constituye el comienzo del cálculo.

El atractivo estético de la matemática no fue pasado por alto. En la época griega, las matemáticas eran consideradas también como un arte; la belleza, la armonía, la sencillez, la claridad y el orden eran reconocidas en ellas. La aritmética, la geometría y la astronomía se tomaban como el arte de la mente y la música, el del espíritu. Platón se complacía con la geometría; Aristóteles no separaría las matemáticas de la estética, pues el orden y la simetría eran para él elementos importantes de belleza, y estos los encontraba en las matemáticas. Evidentemente, los intereses racionales y estéticos, así como los morales, son difícilmente separables en el pensamiento griego. Leemos una y otra vez que la esfera es el cuerpo con la forma más bella y es, por tanto, divina y buena. El círculo participaba junto con la esfera de esta llamada a la estética; parecía obvio por tanto que el círculo fuera el camino de aquellos cuerpos que representaban lo inmutable, el orden eterno del cielo, mientras que el movimiento lineal prevalecía sobre la tierra imperfecta. No hay duda de que fue la estética de las matemáticas lo que dio lugar a que los matemáticos griegos prosiguieran la exploración de temas concretos una vez utilizados para la comprensión del mundo físico.

Comenzando aproximadamente con el principio de la era cristiana, la vitalidad de la actividad matemática griega declinó rápidamente. Las únicas contribuciones importantes de la nueva era fueron las de Ptolomeo y Diofanto. Los grandes comentaristas Pappo y Proclo merecen también la atención, pero en realidad son los que cierran la nómina. El declive de esta civilización, que durante cinco o seis

siglos aportó contribuciones que sobrepasan en gran medida, tanto en expansión como en brillantez, las de cualquier otra, requiere una explicación.
Desgraciadamente, los matemáticos están sujetos a los designios de la historia, igual que el último labrador. Basta con familiarizarse con los hechos más superficiales de la historia política de Alejandría para darse cuenta de que no solo las matemáticas, sino cualquier tipo de actividad cultural, estaban destinadas a sufrir. Mientras la civilización greco-alejandrina estuvo gobernada por los Ptolomeos, floreció. El primer desastre fue el advenimiento de los romanos, cuyo papel en la Historia de las Matemáticas fue el de agentes de paso y transmisión.
Antes de discutir su impacto sobre la cavilación greco-alejandrina, se deben ver algunos hechos acerca de las matemáticas en Roma y la naturaleza de la civilización romana: las matemáticas romanas apenas si son dignas de mención, en la cultura romana existía una limitada propensión por la matemática pura en particular, y por la ciencia y la especulación abstracta, en general. El período durante el cual los romanos figuran en la historia comprende los años que van desde aproximadamente el 750 a.C. hasta el 476 de nuestra era, más o menos el mismo tiempo durante el cual floreció la civilización griega. Además, a partir del 200 a.C. los romanos estuvieron en estrecho contacto con los griegos. Con todo, en los once siglos no hubo ningún matemático romano a la altura de sus predecesores griegos; además de otros detalles este hecho habla virtualmente por si mismo de toda la historia de las matemáticas en Roma[236].
Volviendo de nuevo al papel que jugaron los romanos en la historia política y militar de Grecia, tras haber asegurado el control del centro y el norte de Italia, conquistaron las ciudades griegas del sur de Italia y Sicilia (recordemos que Arquímedes contribuyó a la defensa de Siracusa cuando los romanos atacaron la ciudad y murió a manos de un soldado romano). Los romanos conquistaron Grecia propiamente dicha el año 146 a.C. y Mesopotamia el 64 a.C. Al intervenir en las luchas internas de Egipto entre Cleopatra, la última de la dinastía Ptolomea, y su hermano, César manipuló para asegurarse un dominio sobre el país. El año 47 a.C., César prendió fuego a la flota Egipcia que navegaba y estaba anclada en el puerto de Alejandría; el fuego se extendió a la ciudad e incendio la Biblioteca. Dos siglos y medio de recolección de libros y medio millón de manuscritos, que representaban el esplendor de la antigua cultura, fueron borrados. Afortunadamente, un excedente de libros que no habían podido ser colocados en la repleta Biblioteca estaban almacenados en el templo de Serapis y estos no fueron incendiados. Asimismo, Atalo III de Pérgamo, que murió en el 133 a.C., había legado a Roma su gran colección de libros. Marco Antonio regaló esta colección a Cleopatra y se sumaron a los libros del templo. La colección resultante volvió a ser enorme de nuevo.
La historia del final del imperio romano es también relevante. El emperador Teodosio (gobernó entre el 379 y el 395) dividió su vasto imperio entre sus dos hijos, Honorio, que fue el que gobernó Italia y Europa Occidental, y Arcadio, que gobernó Grecia, Egipto y el Oriente Próximo. La parte occidental fue conquistada por los godos durante el siglo V y su historia posterior pertenece ya a la de Europa

[236] Severino Boecio (480-525) es considerado el principal exponente de las matemáticas romanas y de las obras matemáticas a él adjudicadas, sólo puede destacarse **"De Istituzioni Aritmetiche"**. Para detalles adicionales de la ciencia romana en general y de la matemática en particular, recomendamos G. Loria-**"Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX"**, Cisalpino-Goliardica, Milano, 1982 y Giorgi T. BAgni-**"Storia delle Matematiche"**, Vol. I, Edizioni Pitagora, Bologna, 1996.

Medieval. La parte oriental, que incluía Egipto (durante un tiempo), Grecia y lo que en la actualidad es Turquía, conservó su independencia hasta que fue conquistada por los turcos en el año 1453. Puesto que el Imperio Romano de Oriente, conocido también como el Imperio Bizantino, incluida Grecia propiamente dicha, la cultura y las obras griegas fueron conservadas en alguna medida.

Desde el punto de vista de la Historia de las Matemáticas, la aparición del cristianismo tuvo consecuencias poco afortunadas. Pese a que los jefes cristianos adoptaron varios mitos y costumbres griegas y orientales con la intención de hacer el cristianismo más aceptable a los conversos, se opusieron a las enseñanzas paganas y ridiculizaron las matemáticas, la astronomía y la física; se prohibió a los cristianos contaminarse con las enseñanzas griegas. A pesar de la persecución cruel de la que fueron objeto por parte de los romanos, el cristianismo se difundió y llegó a tener tal importancia que el emperador Constantino (272-337) se vio obligado a adoptarlo como la religión oficial del Imperio Romano. Así, los cristianos fueron capaces de llevar a cabo una mayor destrucción de la cultura griega. El emperador Teodosio I proscribió a las religiones paganas[237] y, en el 392, dio la orden de que los templos griegos fueran destruidos. Muchos de ellos fueron convertidos en iglesias, a pesar de que a menudo estaban adornados todavía con esculturas griegas. Los paganos fueron atacados y asesinados por todo el Imperio. El destino de Hypatía, simboliza el fin de la era.

Los libros griegos fueron quemados a millares. El año en que Teodosio prohibió las religiones paganas, los cristianos destruyeron el templo de Serapis, que todavía albergaba la única (y última) gran colección de obras griegas. Se estima que fueron destruidos 300.000 manuscritos. Muchos más trabajos escritos en pergaminos fueron requisados por los cristianos y usados para sus propios escritos. El año 529 el emperador romano de Oriente, Justiniano, cerró todas las escuelas griegas de filosofía, incluida la Academia de Platón. Muchos sabios griegos abandonaron el país y algunos (por ejemplo Simplicio) se asentaron en Persia.

El último suspiro para Alejandría fue la conquista de Egipto por los rebeldes mahometanos en el año 640. Los libros que todavía quedaban fueron destruidos basándose en la proclama dada por Omar, el conquistador árabe *"Los libros, o bien contienen lo que ya está en el Corán, en cuyo caso no tenemos que leerlos, o bien contienen lo contrario de los que está en el Corán, en cuyo caso no debemos leerlos"*. Como consecuencia de esto los baños de Alejandría se calentaron con el fuego de los rollos de pergamino.

Tras la captura de Alejandría por los mahometanos, la mayoría de los sabios emigraron a Constantinopla, que se había convertido en la capital del Imperio Romano de Oriente. Pese a que no florecía ninguna actividad respecto de las líneas del pensamiento griego en la atmósfera hostil de Bizancio, este flujo de eruditos y sus trabajos de relativa calidad incrementaron el tesoro del conocimiento que llegó a Europa 800 años después.

Resulta quizá fuera de lugar contemplar lo que podía haber sido. Pero no se puede

[237] Recordemos que en el 394 se celebraron los últimos Juegos Olímpicos de la antigüedad, uno de los factores claves en el *ser griego*, pues éstos no sólo eran un evento atlético, ya que sirvieron de fuente de inspiración en diversos campos, por ejemplo, en la arquitectura, destaca el Templo de Zeus en Olimpia, diseñado por Libon, en la escultura, los juegos inspiraron el famoso "Discóbolo" de Mirón; y en la poesía, se conocen infinidad de odas, como las "Olímpicas" y los "Epinicios", escritas por famosos poetas, como Píndaro y Simónides, para inmortalizar los triunfos de los atletas en las Olimpiadas.

dejar de considerar que la civilización greco-alejandrina terminó su activa vida científica en los umbrales de la Era Moderna, gozaron de libertad de pensamiento, que es también esencial para una cultura floreciente y abordaron y llevaron a cabo avances de gran relevancia en varios campos que fueron los que se convirtieron en primordiales para las matemáticas árabes, que como centro de influencia de las ideas chinas e indias se tradujo, durante el Renacimiento, en lo que fue la geometría cuantitativa plana y del espacio, la trigonometría, el álgebra, el cálculo y la astronomía.

Anexo 1

El alfabeto griego

ALFABETO GRIEGO		TRANSCRIPCIÓN		VOCABLO Y TRANSLITERACIÓN		
signos	nombre	latina	castellana	griego	latino	castellano
α Α	álpha	a	a	ἀρτερία	arteria	arteria
β Β	bêta	b	b	βάσις	basis	base
γ Γ	gámma	g	g	γράμματ-	grammat-	gramát-ica
δ Δ	délta	d	d	δερματ-	dermat-	dermat-itis
ε Ε	epsilón	ĕ (breve)	e	ἔντομον	entomo-	entomo-logía
ζ Ζ	dsêta	z	z	Ζεύς	Zeus	Zeus
η Η	êta	ē (larga)	e	ἤλεκτρον	electron	electrón
θ Θ	zêta	th	t	θεραπεία	therapeia	terapia
ι Ι	iôta	i i	i / y j	ἵππος ἱερός	hipp-icus hiero-	híp-ico jero-glífico
κ Κ	kâppa	c	c	καρπός κύτος	carpos cytos	carpo citología
λ Λ	lámbda	l	l	λίτρα	litra	litro
μ Μ	mý	m	m	μάγμα	magma	magma

ν N	ný	n	n	νεῦρον	neuron	neuron-a
ξ Ξ	xí	x	x j	ξηρός	xeros	xero-fagia jero-fagia
ο Ο	omicrón	ŏ (breve)	o	ὄμβρος	ombros	ombró-metro
π Π	pî	p	p	πάθος	pathos	pato-logía
ρ Ρ	rhô	r	r	ῥυθμός	rhythmos	ritmo
σ- / -σ- / -ς Σ	sîgma	s- -s- / -s	es- -s	σφαῖρα συμβίωσις	sphaera symbiosis	esfera simbiosis
τ Τ	taû	t	t	τέτανος	tetanos	tétanos
υ Υ	ypsilón	y	i	βαρύς	barys	bario
φ Φ	phî	ph	f	φιλοσόφια	philosophia	filosofía
χ Χ	chî	ch	c + a, o qu +e, i, y	χορδή χελώνιον	chorda chelonium	cuerda quelonio
ψ Ψ	psî	ps	ps (s-)	ψυχή ψευδώνυμος	psyche pseudonymos	psique seudónimo
ω Ω	oméga	ō (larga)	o	ὠκεανός	oceanus	océano

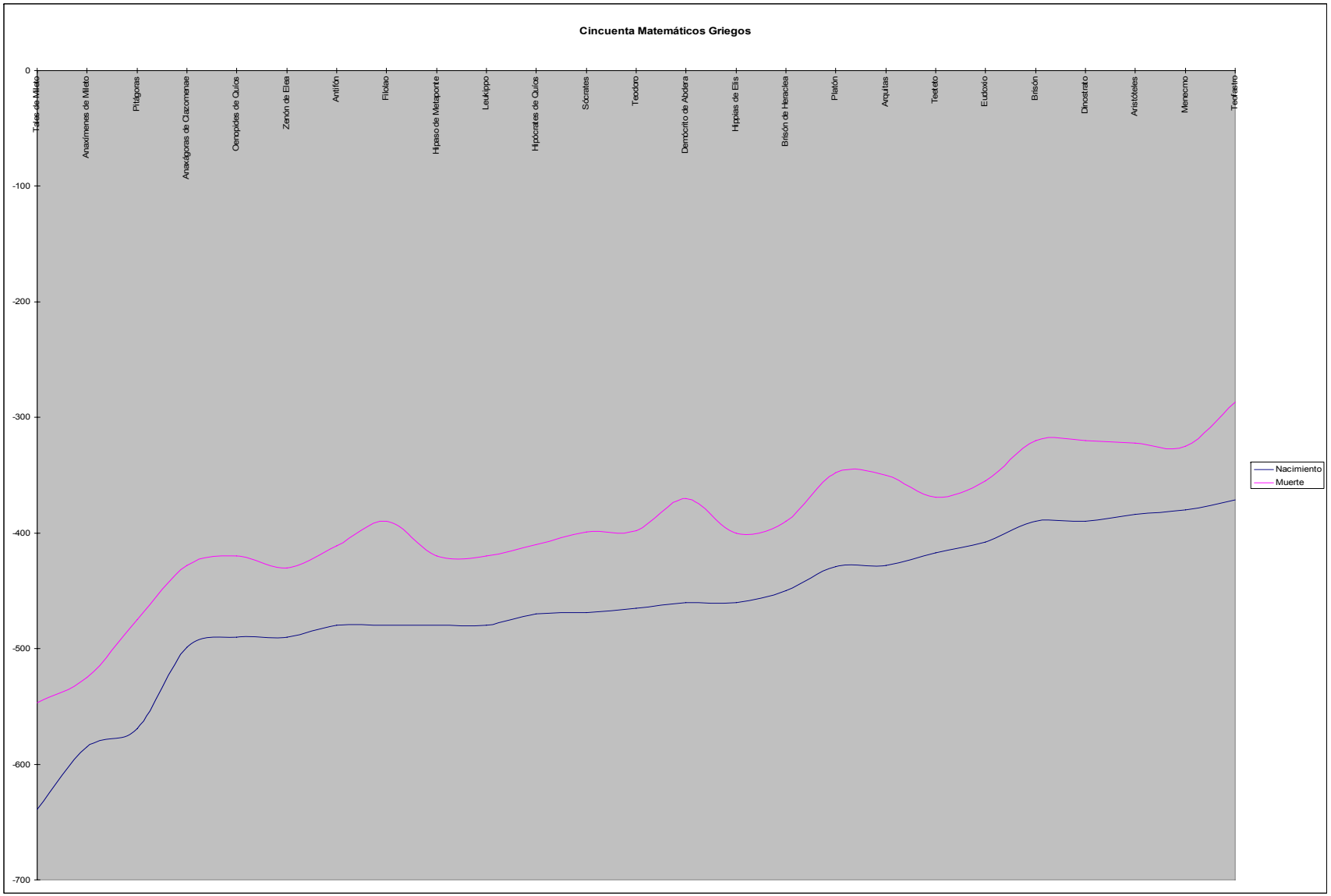
Variantes de los nombres de las letras

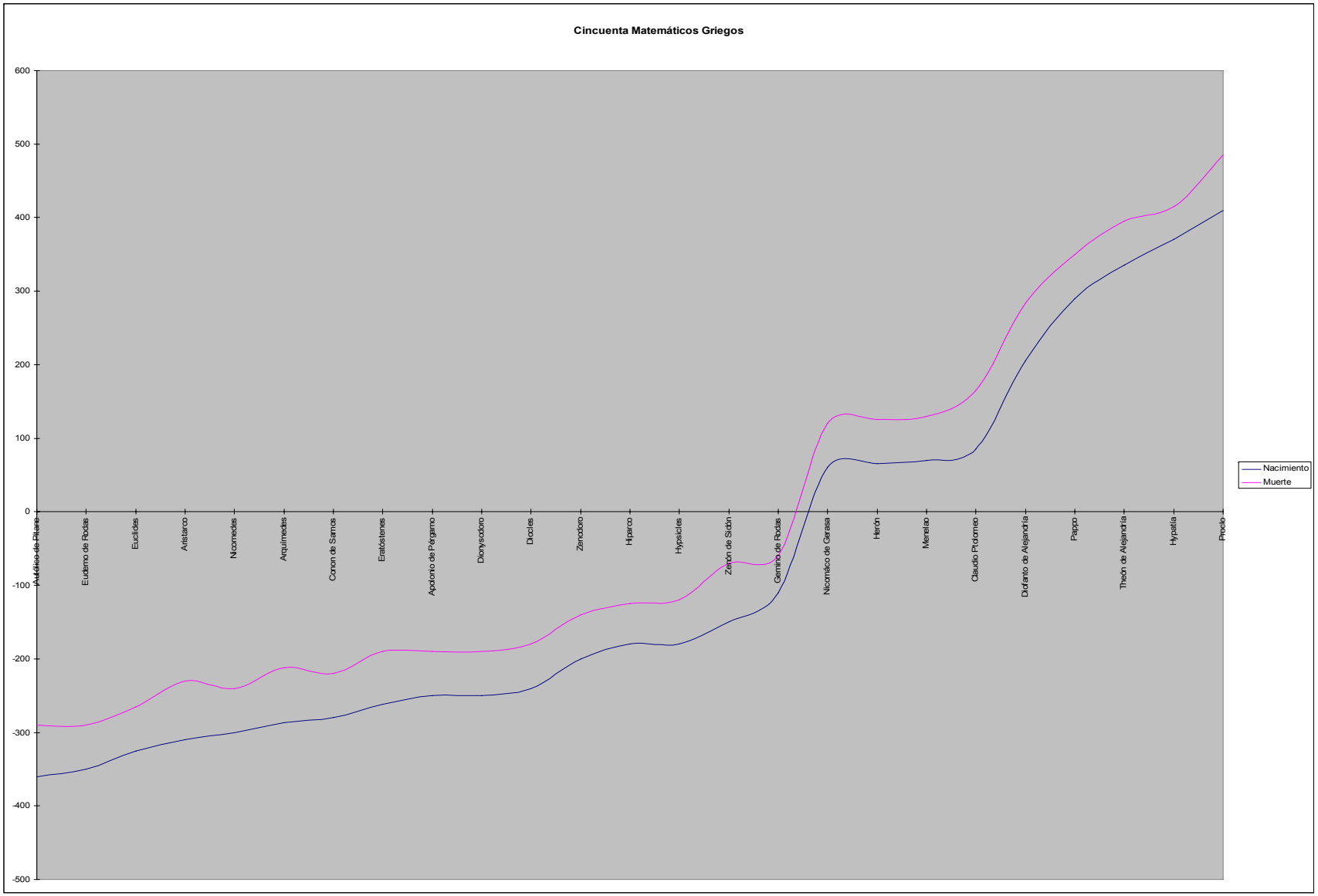
Letra	Variantes
Z, ζ	dseda, zeta*, dseta, dzeta, seta
Θ, θ	zeta, theta*, thita
K, κ	kappa, cappa
M, μ	mi, my*, mu
N, ν	ni, ny*, nu
O, o	ómicron, omicrón
P, ρ	ro, rho
Y, υ	ípsilon, úpsilon
Ω, φ	fi, phi

Códigos Unicode

Mayúsculas	Unicode	Minúsculas	Unicode
Α	0391	α	03B1
Β	0392	β	03B2
Γ	0393	γ	03B3
Δ	0394	δ	03B4
Ε	0395	ε	03B5
Ζ	0396	ζ	03B6
Η	0397	η	03B7
Θ	0398	θ	03B8
Ι	0399	ι	03B9
Κ	039A	κ	03BA
Λ	039B	λ	03BB
Μ	039C	μ	03BC
Ν	039D	ν	03BD
Ξ	039E	ξ	03BE
Ο	039F	ο	03BF
Π	03A0	π	03C0
Ρ	03A1	ϱ	03C1
Σ	03A3	σ, ς	03C3,
Τ	03A4	τ	03C2
ϒ	03A5	υ	03C4
Φ	03A6	ϕ	03C5
Χ	03A7	χ	03C6
Ψ	03A8	ψ	03C7
Ω	03A9	ω	03C8
			03C9

Anexo 2


Cincuenta Matemáticos Griegos
0
-100
-200
-300
-400
-500
-600
-700
Tales de Mileto
Anaxímenes de Mileto
Pitágoras
Anaxágoras de Clazomenae
Oenopides de Quíos
Zenón de Elea
Antifón
Filolao
Hipaso de Metaponte
Leukippo
Hipócrates de Quíos
Sócrates
Teodoro
Demócrito de Abdera
Hippias de Elis
Bisón de Heraclea
Platón
Arquitas
Teeteto
Eudoxio
Bisón
Dinostrato
Aristóteles
Menecmo
Teofrasto
Nacimiento
Muerte


Cincuenta Matemáticos Griegos
600
500
400
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
-500
Autólico de Pitane
Euclides
Aristarco
Nicomedes
Arquímedes
Conon de Samos
Eratóstenes
Apolonio de Pergamo
Dionysodoro
Diocles
Zenodoro
Hiparco
Hypsicles
Zenón de Sidón
Geminio de Rodas
Nicomáco de Gerasa
Herón
Menelao
Claudio Ptolomeo
Diofanto de Alejandría
Pappo
Theón de Alejandría
Hypatia
Proclo
Nacimiento
Muerte

Matemático	Nacimiento	Muerte
Tales de Mileto	-639	-547
Anaxímenes de Mileto	-585	-525
Pitágoras	-569	-475
Anaxágoras de Clazomenae	-499	-428
Oenopides de Quíos	-490	-420
Zenón de Elea	-490	-430
Antifón	-480	-411
Filolao	-480	-390
Hipaso de Metaponte	-480	-420
Leukippo	-480	-420
Hipócrates de Quíos	-470	-410
Sócrates	-469	-399
Teodoro	-465	-398
Demócrito de Abdera	-460	-370
Hippias de Elis	-460	-400
Brisón de Heraclea	-450	-390
Platón	-429	-348
Arquitas	-428	-350
Teeteto	-417	-369
Eudoxio	-408	-355
Brisón	-390	-320
Dinostrato	-390	-320
Aristóteles	-384	-322
Menecmo	-380	-325
Teofastro	-371	-287
Autólico de Pitane	-360	-290
Eudemo de Rodas	-350	-290
Euclides	-325	-265
Aristarco	-310	-230
Nicomedes	-300	-240
Arquímedes	-287	-212
Conon de Samos	-280	-220
Eratóstenes	-262	-190
Apolonio de Pérgamo	-250	-190
Dionysodoro	-250	-190
Diocles	-240	-180
Zenodoro	-200	-140
Hiparco	-180	-125
Hypsicles	-180	-120
Zenón de Sidón	-150	-70
Gemino de Rodas	-110	-60
Nicomáco de Gerasa	60	120
Herón	65	125
Menelao	70	130
Claudio Ptolomeo	85	165
Diofanto de Alejandría	206	284
Pappo	290	350
Theón de Alejandría	335	395
Hypatía	370	415
Proclo	410	485