

Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

De las cavernas a los fractales.

Conferencias de Historia de la Matemática.

Juan Eduardo Nápoles Valdés

(I)

Prólogo

Conferencia 1. *Introductoria. La arqueomatemática. Origen de los primeros conceptos matemáticos. Problemas filosóficos de la matemática. Principales períodos en la Historia de las matemáticas.*

Conferencia 2. *Civilizaciones antiguas: Mesopotamia, Egipto, China y la India.*

Conferencia 3. *La matemática griega. El surgimiento de la matemática griega. Pitágoras. Desarrollo de la Geometría desde Thales hasta Hipócrates de Cios. Los tres problemas clásicos. Tolomeo y la consolidación de la Trigonometría.*

Conferencia 4. *Los Elementos de Euclides. La Geometría Euclidiana. Arquímedes y Diofanto. Los principios fundamentales de la Estática y el Postulado de Euclides.*

Conferencia 5. *Las matemáticas en el medioevo. Los árabes. Solución de las ecuaciones de 3er y 4to grado en radicales. Desarrollo de la simbología algebraica. Cálculo literal de Vieta.*

ir a [\(II\)](#) - [\(III\)](#)

Holguín - Cuba

1996

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N.
edUTecNe

<http://www.edutecne.utn.edu.ar>

PRÓLOGO

Este libro es el resultado de las conferencias impartidas por mí en la asignatura **Historia de la Matemática** en el programa de maestría “**Didáctica de la Matemática**”, del departamento de Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica “José de la Luz y Caballero” de Holguín, Cuba. En 1980 se hizo efectiva la introducción de la Historia de la Matemática también para los estudiantes de esta especialidad en los Institutos Superiores Pedagógicos, luego de muchos años de impartición en las universidades para los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas. De esta forma, he concebido un texto que pueda ser utilizado, indistintamente, en cualquiera de estos cursos, dada la similitud de los programas.

Una simple ojeada al Índice, le permitirá percatarse al lector, que aquí no se pretende ofrecer una imagen completa de la historia de las matemáticas, sino más bien, una visión de conjunto sobre esta, en la que también están tratados, someramente, las irradiaciones sobre las ciencias conexas, consecuencias metodológicas e implicaciones filosóficas de cuarenta siglos de quehacer matemático.

Es universalmente reconocido que el desconocimiento de la experiencia del desarrollo de la ciencia, la incapacidad para analizarla hace al investigador impotente ante los problemas del futuro. Estas consideraciones determinan el objetivo del presente libro: ayudar a los estudiantes de los cursos arriba citados, así como a amplios círculos de amantes de la matemática, profesionales o no, a asimilar la experiencia histórica de la ciencia en cuestión, las fuerzas motrices y vías de su desarrollo.

El material ha sido cuidadosamente seleccionado, sobre cuya base se reflejan más claramente las tendencias históricas de desarrollo de la matemática. La matemática antigua, minuciosamente descrita en otras obras, está aquí tratada concisamente para poder exponer de un modo más extenso el interesante, pero hasta ahora demasiado poco atendido desarrollo de la matemática a fines del siglo XIX y en el presente a punto de expirar. Siete conferencias demuestran, muy a las claras, mis intereses al abordar esta problemática.

Sobre el contenido del libro debo decir que el hilo conductor ha sido la “calidad” del matemático de la época, siguiendo la cadena que exponemos a continuación, si en las civilizaciones pregregias el “matemático” (concepto relativo, pues esta palabra no existía en ningún léxico) era un funcionario del estado; en Grecia surge el matemático “aficionado”, categoría obtenida en el marco de los estudios filosóficos de estos y no en una escuela en el sentido moderno de la palabra; en los siglos XVII y XVIII surgen lo que denominamos el matemático “profesional” en el marco del establecimiento de las universidades y academias subvencionadas por el estado; llegando de este modo a nuestro siglo donde aparece el matemático “industrial”, cuyo perfil e inclinaciones están perfectamente determinados por los intereses de consorcios económicos y/o militares, los que además de subvencionar los estudios de los talentos, atraen a sus campos, jóvenes matemáticos del mundo entero.

En cada una de las 19 conferencias se han incluido algunas preguntas que, o tratan de llenar las inevitables lagunas o sirven para fijar detalles esenciales del contenido. Tal es el tono y espíritu de estas.

Se corre un gran riesgo cuando se hace un intento de dar a la publicidad un libro de texto de Historia de la Matemática en un espacio, necesariamente, tan reducido, más aún cuando la historiografía de la matemática se encuentra en rápido desarrollo y el círculo de investigadores se amplía cada día más.

Merecen mi más profundo agradecimiento por su colaboración en la escritura y revisión numerosos colegas y amigos, la omisión de alguno de ellos en una lista, haría de mi un ingrato, idea que no deseo dejar en ninguno de los que, tan generosamente, me han ayudado.

Toda obra humana es criticable, el autor espera que las críticas y sugerencias hagan de esta, una obra mayor.

El Autor

Conferencia 1. Introductoria. La arqueomatemática. Origen de los principales conceptos matemáticos. Problemas filosóficos de la matemática. Principales Períodos en la Historia de la Matemática.

“Un buen principio hace un buen final”

Proverbio Inglés

Los cimientos de la Civilización han sido determinados entre 8 y 10 mil años a.n.e.. Por lo menos la mitad de la Tierra de los Dos Ríos (Mesopotamia) no existía, al extremo que la Bagdad actual estaba en pleno Golfo Pérsico. Esta región estaba formada por Asiria al norte y Babilonia al sur. Los dos grandes cursos de agua que la atraviesan y le dan nombre: el Tigris y el Eúfrates, la convirtieron en una tierra fértil que mucho admiraron los viajeros antiguos.

Pero si Egipto que todo lo debía a la irrigación, ha podido ser calificado de "don del Nilo", no sucede lo mismo con Mesopotamia. A causa del limo que deposita en la tierra, la inundación nilótica es una bendición, mientras que el Tigris y el Eúfrates desencadenan inundaciones devastadoras si no son detenidas.

Ello se debe a la naturaleza misma de la tierra que atraviesan. Ambos ríos nacen en Armenia, en el macizo del monte Nifates, a poca distancia uno del otro; se abren paso a través de las montañas y su curso tiene la violencia de un torrente. Al llegar la crecida, cuando las nieves se funden, el agua irrumpe en la llanura, devastándolo todo a su paso.

Los habitantes de Mesopotamia hallaron el remedio natural contra esta amenaza periódica: la regularización del caudal de agua mediante una red de canales. Esto por supuesto, cuando la civilización sumeria estaba establecida.

Sin embargo, el comienzo fue muy diferente. Unos 40 ó 50 años atrás, las monografías científicas y las revistas no comunicaban nada sobre la historia anterior a la aparición de la escritura (presumeria) en Iraq. Los trabajos arqueológicos se realizaban en ese país principalmente en la llanura mesopotámica, donde las capas culturales más antiguas estaban enterradas bajo las poderosas sedimentaciones aluviales. Las excavaciones de las capas más bajas en varias colinas-tells proporcionaron a los arqueólogos algunos materiales para la creación del esquema del desarrollo en forma de una serie de culturas agrícolas tempranas, protohistóricas que antecedian a la aparición de la civilización Sumer-Acad alrededor del año 3 mil a.n.e.



Pero todas ellas pertenecían y abarcaban no más de 2500 años. La prehistoria propiamente dicha de Mesopotamia, su siglo de piedra, permanecía prácticamente desconocida.

Entretanto, es evidente que precisamente en este período (entre fines del paleolítico posterior, cerca de 12 a 10 mil años a.n.e. y la aparición de la civilización sumeria a fines del IV milenio a.n.e.) en el Oriente Medio se

operaban importantísimos procesos y cambios que, a fin de cuentas, condujeron a la formación de las bases de la economía "de producción" agrícola y ganadera y de todo el modo de vida sedentaria en la región. Estos procesos constituyeron en la historia de la

humanidad una época de viraje especial, una importante faceta cualitativa que, según la periodización de Engels, corresponde al paso del salvajismo a la barbarie, de la sencilla apropiación de los productos de la naturaleza a la producción de alimentos, o sea, "la primera y gran división social del trabajo" (Engels). Algunos arqueólogos, utilizan el término de "revolución neolítica" (G. Childe), para destacar el punto culminante de los prolongados cambios anteriores en la estructura económica y la organización social de la sociedad.

Las consecuencias de esta revolución son verdaderamente extraordinarias.

Cambió intensamente el número de habitantes en las regiones donde triunfaron las formas nuevas, progresistas, de actividad económica. Según R. Braidwood, en el Oriente Medio se tenía la siguiente distribución:

-en el Pleistoceno tardío (Paleolítico Superior; 25-10 mil años atrás), no más de 3 personas por 160 Km²,

-en el Mesolítico (10 mil años atrás), 12,5 por 160 Km², y

-en las primeras comunidades agrícolas sedentarias, 25 mil por 160 km²,

o sea, en comparación con el período anterior, aumentó 200 veces.

Todo esto permitió (e impulsó) la influencia activa del hombre en el medio natural, cambiándolo y aumentando los recursos vitales necesarios con la difusión artificial de las plantas cultivadas y animales domesticados de las regiones donde existían originalmente a las tierras asimiladas. Este proceso no fue ni rápido ni equitativo en el tiempo. Sin embargo, en una serie de regiones del Oriente Medio, en los milenios VIII-VII a.n.e. surgen los poblados que se diferenciaban radicalmente de los asentamientos anteriores.

Según la tradición aceptada entre los arqueólogos, cada etapa importante en el desarrollo de las culturas agrícolas tempranas de Iraq recibió el nombre de la localidad o del lugar donde fueron realizadas las primeras excavaciones. Así aparecieron las etapas (y las culturas) de Hassuna-Samarra (VI milenio a.n.e.) y Ubaid (fines del V-mediados del IV milenio a.n.e.).

Pero esto fue solamente el principio. La combinación de todas estas circunstancias produjo la especialización y un excedente de productos alimenticios. Por primera vez el hombre pudo sentarse para reflexionar durante cierto tiempo sin preocuparse por buscar de donde provenían las cosas con que elaboraría la siguiente comida. Esto originó una fuerza creadora e inventiva que podría denominarse casi explosiva.

Los siguientes 1500 años -en términos generales el período transcurrido entre los años 4500 y 3000 años a.n.e.- han sido llamados "tal vez los más fértiles" en invenciones y en descubrimientos humanos que cualquier período de la historia del hombre anterior al siglo XVI n.e.

Nuestra especie -Homo sapiens- ha existido por lo menos 100 mil años. Imaginémonos que un día de 24 horas representa esos centenares de siglos. Utilizando esa escala de tiempo, el hombre fue un cazador nómada durante 23 horas y media (desde la media noche hasta las 11:30 de la siguiente noche). Aproximadamente a las 11:30 pm (esto es hacia el año 10 mil a.n.e.), comienzan los cambios antes descritos en el Oriente Medio. Y desde las 11:45 pm a la media noche -apenas 15 minutos de nuestras 24 horas- logró civilizarse.

Pero todavía más notable es el hecho de que durante un breve período de tiempo de aproximadamente 1500 años -representados por cuatro minutos en nuestra escala de 24 horas- nuestros antepasados:

- inventaron la rueda y el transporte con ruedas,
- aprendieron a fabricar telas,

- hicieron barcos para navegar,
- descubrieron el uso del metal,
- aprendieron a calcular por medio de números,
- inventaron la escritura,
- aprendieron a poner en cultivo y bajo riego artificial superficies de tierra,
- aprendieron a construir no sólo casas, sino templos grandes, crearon las primeras ciudades.

Según la Biblia las primeras ciudades son Eridu, Ur, Erec, Lagash y Kish. La tradición judía hace figurar a los hebreos entre los primitivos colonizadores de esa región. Ahora esto es cierto simbólicamente, pero el proceso real de poblamiento transcurrió de forma muy parecida a como la hemos presentado.

Es sabido que las matemáticas y la escritura guardan una estrecha relación simbiótica. Recientes descubrimientos arqueológicos han revelado que los primeros sistemas de escritura surgieron para responder a la necesidad de calcular, dividir y repartir los bienes materiales de la sociedad que surgen en el proceso antes descrito.

Una sociedad que quiera crear unas matemáticas que se limiten al mero cálculo necesita algún tipo de soporte físico. Si no fuera por la escritura, las limitaciones de la memoria humana son tales que no es posible sobrepasar determinado grado de complejidad numérica.

Al observar la evolución que siguieron dos sistemas de escritura, uno al sur de Mesopotamia a mediados del IV milenio a.n.e. y el otro, algo más tarde, en las proximidades de Susa en Irán, los descubrimientos arqueológicos de estos últimos decenios han puesto de manifiesto que la afirmación contraria es igualmente válida: para que una sociedad pueda crear una escritura, las necesidades materiales y, sobre todo, la de llevar un registro documental, son requisitos imprescindibles.

En las sociedades a las que hemos aludido, el soporte físico era arcilla prácticamente indestructible y los primeros documentos eran de tipo contable. La escritura cuneiforme mesopotámica tuvo una gran difusión en los 3 mil años siguientes y fue utilizada, no sólo por los sumerios y acadios, sino también por los hititas, elamitas, hurritas y otras muchas lenguas del Cercano Oriente en la Antigüedad y no desapareció hasta comienzos de nuestra era.

Es a comienzos del tercer milenio que empieza a aparecer gradualmente, en la civilización mesopotámica y egipcia, un concepto abstracto del número, con todas las implicaciones que trae aparejado en el desarrollo de la matemática.

La palabra Matemática es mucho más joven, viene del griego Mathesis, que significa la ciencia por excelencia.

Antiguamente se expresaba este nombre en singular, pero después se ha pluralizado debido a la extraordinaria extensión que alcanzaron sus ramas, llamándose Matemáticas.

En su "**Anti-Duhring**" Engels expresa:

"Pero en las matemáticas puras la inteligencia no se las entiende, de ningún modo, sólo con sus propias creaciones e imaginaciones. Los conceptos de número y figura no tienen otro origen que el mundo real... Para contar no sólo hacen falta objetos contables, sino también la capacidad de prescindir, a la vista de los objetos, de todas las otras cualidades menos la de su número, capacidad que es el fruto de un largo desarrollo histórico, empírico. Y lo mismo que el concepto de número, el de figura está tomado exclusivamente del mundo exterior y no ha brotado en la cabeza por obra del pensamiento puro."

Antes que todo debemos aclarar diversas cuestiones relacionadas con la Historia de la Matemática como ciencia independiente.

La composición de la matemática, como la de otra ciencia, es la siguiente:

- a) **hechos**, acumulados en el transcurso de su desarrollo,
- b) **hipótesis**, esto es, suposiciones científicas, basadas en los hechos, que se someten posteriormente a una verificación experimental,
- c) los resultados de la generalización del material real expresado, en este caso, por **teorías y leyes matemáticas**,
- d) la **metodología** de la matemática, esto es la interpretación teórica general de las leyes y teorías matemáticas, las que caracterizan el enfoque general en el estudio del objeto de las matemáticas.

Todos estos elementos están indisolublemente ligados y se encuentran en constante desarrollo. La aclaración de cómo ocurre y adonde conduce este desarrollo en un período histórico estudiado, constituye el objeto de la Historia de la matemática, una de las disciplinas matemáticas. **La Historia de las Matemáticas es la ciencia acerca de las leyes objetivas del desarrollo de las matemáticas.**

Se denomina Historiografía de la matemática, al arte de escribir su historia. Actualmente existen innumerables obras que estudian y describen cómo se conformó esta ciencia. La historiografía de la matemática busca en los sucesos del pasado, conclusiones que permitan organizar el devenir actual y el porvenir de la ciencia matemática.

La historiografía de la matemática surge aproximadamente con el famoso "**Catálogo de Matemática**", escrito alrededor del 320 a.n.e. por un discípulo de Aristóteles llamado Eudemo de Rodas. Esta obra se perdió, pero se conoce un resumen de la misma recogida por Proclo (410-485) en las primeras páginas de su libro "**Comentarios sobre el Primer Libro de Euclides**".

La importancia de los vínculos internos del desarrollo matemático fue comprendida por muchos destacados matemáticos. Por ejemplo, Lagrange (1736-1813) comenzó algunas de sus obras con excelentes capítulos dedicados totalmente a la historia de esta ciencia.

La Historiografía de la Matemática surge como disciplina matemática independiente con las obras de Kastner (1796- 1800) y la "**Histoire de la Mathématique**" del francés E. Montucla (1799-1802). La obra del alemán M. Cantor (1880-1902) en 4 volúmenes, fue durante mucho tiempo la obra estándar en este campo.

La historia de la matemática se acostumbra a dividirla en períodos. Esta periodización puede hacerse con arreglo a diferentes fundamentos. De esta manera, para ciertos propósitos puede ser útil la división de la historia de la matemática en períodos, según una cronología determinada.

Utilizando como fundamento el desarrollo del lenguaje matemático en la Antigua Grecia, Nesselman (E. Bell- "**Historia de la matemática**", México-Buenos Aires, Fondo de Cultura Económica, 1949) consideró tres etapas de la historia de la matemática en esta civilización:

1. Una etapa retórica de la matemática, en que ésta se expresaba en términos del lenguaje ordinario.
2. Una etapa sincopada, en la que se utilizaban abreviaturas especiales para expresar las operaciones y "objetos" matemáticos.

3. Una etapa simbólica, en que la matemática utilizó para su expresión, signos especiales.

Resulta interesante el hecho que analizando el desarrollo de la simbología matemática a lo largo del desarrollo de la misma, se presentan en la misma, los períodos descritos por Nesselman. Así, la simbología matemática puede considerarse retórica, desde su surgimiento hasta la época del renacimiento aproximadamente; la etapa retórica puede considerarse aquella en que se introducen abreviaturas como "res" y "plus", que dan paso posteriormente a la aparición de los signos de las operaciones y se considera finalizada con la obra de Vieta y la tercera etapa, transcurre hasta la actualidad.

A G. I. Ruzavin se debe una periodización según el nivel de las abstracciones matemáticas. Él considera las siguientes etapas o períodos:

1. Período correspondiente a las abstracciones de los objetos de la realidad.

En este período los objetos matemáticos tienen una réplica sensorial.

2. Período de las abstracciones de abstracciones.

Este período se corresponde con el surgimiento del álgebra elemental.

3. Período de las abstracciones de relaciones.

Este período se corresponde con el surgimiento de la moderna "estructura matemática" y la abstracción no es más que la introducción de axiomas en el proceso de combinación y diferenciación de estructuras prescindiendo de la descripción de las relaciones.

En la literatura marxista, existen otras periodizaciones, entre ellas las de Matute-Soldatov (aún por completar) que se basa en tener en cuenta el grado de penetración de la matemática en otras ciencias, el surgimiento de disciplinas y teorías matemáticas y la relación entre la lógica y la matemática, pero sin lugar a dudas, la más utilizada es la de Kolmogorov que toma en cuenta los métodos más importantes, las ideas y logros de la matemática para situar un determinado período en la historia de la matemática, así se tienen los siguientes 4 períodos:

1. Surgimiento de la matemática (hasta el siglo VI a.n.e.).

2. Matemática elemental (desde el siglo VI a.n.e. hasta el XVI).

3. Matemática de las magnitudes variables (desde el siglo XVII hasta mediados del siglo XIX).

4. Matemática contemporánea (a partir de 1870 aproximadamente).

Esta será la periodización que utilizaremos en nuestro curso, a pesar que no renunciamos al análisis lógico de una teoría o concepto, pero sin llegar nunca a posiciones bourbakianas.

El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la Matemática. Se puede barruntar la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio. Ahí es donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se hace desaparecer en los textos secundarios. Como dice muy acertadamente O. Toeplitz *"Con respecto a todos los temas básicos del cálculo infinitesimal... teorema del valor medio, serie de Taylor,...nunca se suscita la cuestión ¿Por qué así precisamente? o ¿Cómo se llegó a ello? Y sin embargo todas estas cuestiones han tenido que ser en algún tiempo objetivos de una intensa búsqueda, respuestas a preguntas candentes...Si volviéramos a los orígenes de estas ideas, perderían esa apariencia de muerte y de hechos disecados y volverían a tomar una vida fresca y pujante"*.

Tal visión dinámica nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo:

- posibilidad de extrapolación hacia el futuro.
- inmersión creativa en las dificultades del pasado.
- comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusión iniciales, a media luz, esculpiendo torsos inconclusos...

Por otra parte el conocimiento de la Historia de la Matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento,... así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto este último del que los mismos matemáticos enfrascados en su quehacer técnico no suelen ser muy conscientes, por la forma misma en que la matemática suele ser presentada, como si fuera inmune a los avatares de la historia.

A mi parecer sería extraordinariamente conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica, como he dicho arriba, y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara siquiera un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida. Mientras llega una situación razonable yo me atrevería a aconsejar:

- la lectura atenta de algunos de los numerosos y excelentes tratados de historia que van apareciendo en castellano (Boyer, Kline, Colette, Grattan-Guinness...).
- acudir, para los temas del interés particular de cada uno, a las fuentes originales, especialmente de los clásicos.
- leer las biografías de los grandes matemáticos, al menos en la forma sucinta en que aparecen en el Dictionary of Scientific Biography.

El valor del conocimiento histórico no consiste en tener una batería de historietas y anécdotas curiosas para entretener a nuestros alumnos a fin de hacer un alto en el camino.

La historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado. Quien no tenga la más mínima idea de las vueltas y revueltas que el pensamiento matemático ha recorrido hasta dar, pongamos por caso, con la noción rigurosamente formalizada del número complejo, se sentirá tal vez justificado para introducir en su enseñanza los números complejos como "el conjunto de los pares de números reales entre los cuales se establecen las siguientes operaciones...". Quien sepa que ni Euler ni Gauss, con ser quienes eran, llegaron a dar ese rigor a los números complejos y que a pesar de ello pudieron hacer cosas maravillosas relacionadas con ellos, se preguntará muy seriamente acerca de la conveniencia de tratar de introducir los complejos en la estructura cristalizada antinatural y difícil de tragar, que sólo después de varios siglos de trabajo llegaron a tener.

Los diferentes métodos del pensamiento matemático, tales como la inducción, el pensamiento algebraico, la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, la topología, la probabilidad,... han surgido en circunstancias históricas muy interesantes y muy peculiares, frecuentemente en la mente de pensadores muy singulares, cuyos méritos, no ya por justicia, sino por ejemplaridad, es muy útil resaltar.

La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en Matemáticas.
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,...
- señalar los problemas abiertos.

Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas

y no caer en los errores en que caen los matemáticos, profesores o no, que adolecen de una formación histórica, entre otros:

Visión lineal y acumulativa del desarrollo de la Matemática, que ignora las crisis y remodelaciones profundas de las teorías y conceptos.

Visión aproblemática y ahistórica, que transmite conocimientos ya elaborados como hechos asumidos sin mostrar los problemas que generaron su construcción.

Visión individualista, el conocimiento matemático aparece como obra de genios aislados, ignorando el papel del trabajo colectivo de generaciones y de grupos de matemáticos.

Visión elitista, que esconde la significación de los conocimientos tras el aparato matemático y presenta el trabajo científico como un dominio reservado a minorías especialmente dotadas.

Visión descontextualizada socialmente neutra, alejada de los problemas del mundo e ignorando sus complejas interacciones con las otras ciencias, la técnica y la sociedad. Se proporciona una imagen de los matemáticos encerrados en recintos y ajenos a la necesaria toma de decisión.

En estos momentos, han tomado fuerzas posiciones de historiadores de la matemática que defienden entre otros, las siguientes tesis (ver Arrieta, J.-**“La Matemática, su historia y su enseñanza”**, 1997, preprint):

“1.- En la mayor parte de las historias de las matemáticas conocidas podemos comprobar que se oculta o no se fundamenta en absoluto la concepción epistemológica que se tiene de dicha disciplina. ¿Qué se entiende por matemáticas?, ¿qué se entiende por ciencia o ciencias?, ¿y por abstracción? Estas preguntas, desgraciadamente, no se suelen responder con el más mínimo rigor en los libros publicados al respecto, por lo que muchas de las afirmaciones que contienen se deben asumir como dogmas de fé, sin posibilidad de discusión y, en su caso, de refutación.

2.- Los textos de historia de las matemáticas se han escrito con un marcado sesgo eurocéntrico, ignorando, devaluando y distorsionando la actividad matemática realizada al margen del continente europeo. Parece ser que únicamente los habitantes del mismo han sido capaces de aportar algo a la "reina de las ciencias", al espíritu humano creador capaz de construirla y desarrollarla con racionalidad y rigor.

3.- La Educación Matemática, su enseñanza, al no fundamentarse en una adecuada epistemología e historia de la misma, no favorece la concreción de una educación Intercultural, más necesaria que nunca en esta llamada Aldea Global.”

Quizás en el segundo tema, la obra más sólida es la que presenta el sirio-indio-etíope-inglés Georges Gheverghese Joseph, reciente autor de una obra que bajo el sugerente título de **“La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas”** (Gheverghese J., G.-**“La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas”**, Madrid, Pirámide, 1996) plantea una crítica demoledora, crítica que abunda en defensa de la segunda tesis. Como afirma dicho autor (p.26): *“Las matemáticas han desarrollado un lenguaje universal con una clase particular de estructura lógica. Contienen un cuerpo de conocimientos relacionado con el número y el espacio, y prescriben un conjunto de métodos para alcanzar ciertas conclusiones acerca del mundo físico - y para la resolución de infinidad de problemas, diríamos nosotros -. Y es una actividad intelectual que exige intuición e imaginación para deducir demostraciones y alcanzar conclusiones. Con frecuencia recompensa a las mentes creativas con un fuerte sentido de satisfacción estética”*.

En esta dirección, cabe quizás añadir lo siguiente, como objetivos a transmitir con la utilización de recursos históricos en la Educación Matemática:

1. Una concepción dinámica de la Matemática, acuñada en la célebre frase de Philip E. Jourdain, en la introducción a su comentado **“La Naturaleza de la Matemática”**, cuando al declarar el objetivo central de dicho libro apuntaba: *“Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo”*.
2. Que se debe aceptar el significado de los objetos matemáticos en su triple significado: institucional, personal y temporal (ver Díaz G., J. y M.C. Batanero-**“Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”**, Recherches en Didactique des Mathématiques, 1994, Vol.14, no.3, 325-355) y para algunas observaciones, Nápoles, J.E.-**“Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales”**, Memorias COMAT’97, 1997, Universidad de Matanzas.
3. La distinción que debe establecerse entre una argumentación, una prueba y una demostración, y la necesaria dosificación de estas en el curriculum escolar, así como las discusiones en torno a las concepciones clásicas sobre esta última y el rigor de las mismas.

Por otra parte es claro, pero no siempre comprendido, que el objeto matemático en consideración para la enseñanza o el aprendizaje es estructuralmente, pero no cualitativamente, el mismo que en Matemáticas, de aquí que la mayoría de los matemáticos creen que la educación de la matemática sólo está afectada por problemas del tipo ¿Cómo transmitir los hechos matemáticos importantes a los alumnos?. De hecho, nosotros adoptamos la noción de significado de los objetos matemáticos en un triple condicionamiento: institucional, personal y temporal (en el trabajo de Díaz y Batanero que mencionamos arriba), lo que nos lleva considerar el enfoque socio-antropológico de cómo se produce y en qué consiste el conocimiento matemático, que se enmarca dentro de la línea más amplia de Etnomatemática (ver por ejemplo, Oliveras, M.L.-**“Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular”**, Granada, Mathema 7, 1996 y Gerdes, P.-**“Etnomatemática. Cultura, Matemática, Educação”**, Instituto Superior Pedagógico, Maputo, Mozambique, 1991).

Partiendo del hecho que no hay acuerdo universal sobre lo que constituye una “buena enseñanza de la Matemática”, aceptamos que lo que cada cual considera como formas deseables de aprendizaje y enseñanza de la Matemática está influenciado por sus concepciones sobre la Matemática. Es poco probable que los desacuerdos sobre lo que constituye una buena enseñanza de la Matemática, puedan ser resueltos sin dirigirse a importantes asuntos sobre la naturaleza de la Matemática. Por otra parte, existen modelos didácticos dirigidos a qué cambios debe ‘sufrir’ el conocimiento matemático para ser adaptado como objeto de enseñanza, uno de tales modelos es el de “Transposición Didáctica” (Chevallard, Y.-**“La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné”**, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985) que se manifiesta, como ya dijimos, en la diferencia existente entre el funcionamiento académico de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo. Ver el Anexo para una representación esquemática de la realizada en nuestro trabajo, que se manifiesta como ya dijimos, en la diferencia existente entre el funcionamiento académico de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo.

Así como ha crecido el interés por la Historia de la Matemática en relación con su enseñanza, en años recientes también se ha incrementado la búsqueda de relaciones entre la Matemática y su Historia como herramienta didáctica y como campo de investigación.

Como ejemplo de esto, podemos mencionar que el ICMI incluyó este tema en la agenda del International Congress in Mathematics Education realizado en Japón. El documento de discusión previo al Congreso consideró algunas cuestiones tales como:

- ♦ Nivel del sistema educativo en el que adquiere relevancia la Historia de la Matemática como herramienta de enseñanza.
- ♦ Consecuencias de la utilización de la historia para la organización y la práctica de la clase.
- ♦ Utilidad de la Historia de la Matemática para los investigadores en Educación Matemática
- ♦ Incorporación de la Historia de la Matemática en el currículum.
- ♦ La enseñanza de la Matemática puede realizarse desde distintas perspectivas: heurística, lógica y a través del enfoque histórico.

El enfoque histórico es una propuesta metodológica que actúa como motivación para el alumno ya que a través de él descubrirá la génesis de los conceptos y métodos que aprenderá en el aula. En otras palabras permitirá hacer patente el origen de las ideas matemáticas.

En nuestras aulas, es significativo el número de estudiantes que muestran indiferencia y hasta rechazo hacia el aprendizaje de la Matemática, lo que se traduce en un considerable índice de fracaso. Si logramos establecer un lazo entre nuestros alumnos y la época y el personaje relacionado con los conceptos estudiados, si los alumnos conocieran la evolución de los conceptos aprendidos en clase, si conocieran las motivaciones y las dudas que experimentaron los sabios de aquel entonces quizá podrían comprender como se ha descubierto y justificado un problema, un cuerpo conceptual, etc.

No se trata de que el orden lógico deba respetar estrictamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico necesariamente debe coincidir con los demás. Lo que sí se debe resaltar es que es necesario mantener un sentido de proporción al utilizar este enfoque.

Por ejemplo, si al combinar el enfoque histórico con el heurístico, las ideas fundamentales no han quedado claras y por lo tanto el estudiante no las ha incorporado a su acervo de conocimientos, conocer su evolución no lo ayudará en la solución de problemas. Relacionar un nombre y una fecha con una idea, concepto o procedimiento no es suficiente.

Una línea de investigación que no ha sido completamente desarrollada, es la búsqueda de elementos históricos como recurso pedagógico que aproveche nuestros conocimientos acerca de obstáculos didácticos, epistemológicos, ontogénicos y de problemas relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje, entre los que está, la influencia de las creencias y concepciones de los profesores en su labor.

Debemos dejar bien claro, que no afirmamos que este es el único, o mejor, de los métodos a utilizar, es una alternativa de trabajo que ha mostrado su utilidad en múltiples situaciones.

Creemos útil añadir además, que la Historia de las Matemáticas ha devenido en múltiples ocasiones, en situaciones que han hecho más daño que beneficio, tal y como ilustramos en el siguiente cuadro.

<i>Abusos tradicionales</i>	<i>Usos racionales</i>
Hacer “hagiografía” matemática, estableciendo correspondencias entre semidioses y milagros matemáticos.	Humanizar el proceso de aprendizaje, dándole contexto (social, cultural, personal, etc) a la fría osamenta de las estructuras y teorías contemporáneas.
Confección de “protocolos notariales” con nombres, lugares y fechas que “sirvan” para ubicar objetivamente la materia formalizada.	Determinar los problemas ejes o generadores, a partir de los cuales, en dinámica grupal, se realice un programa de actividades como investigación.
Motivar al alumno con un conjunto de chistes y anécdotas, en aras de lograr efectismos.	Estimular la apreciación del arte de la creación matemática y la lucha de ideas dentro del proceso de investigación.
Búsqueda de economía del esfuerzo que el profesor debe hacer para dominar los contenidos, las técnicas de y métodos de enseñanza-aprendizaje.	Facilitar al profesor la formación de las bases motivadora y orientadora de la acción, así como permitirle el ajuste dentro de parámetros más objetivos y manejables racionalmente.
Concentrar el ámbito estrecho de una teoría, concepto o método específico.	Mostrar la interdependencia de las diferentes partes de la Matemática, su unidad indisoluble desde su génesis.
Dar pinceladas culturales que hagan más agradable la exposición.	Favorecer de manera natural, el flujo inevitable entre Cultura, Ciencia y Humanidad.
Aplicación mal digerida de la epistemología genética de Piaget o la reconstrucción racional de Lakatos, dejando fuera, la consideración del contexto social.	Restablecer el cuadro cultural de la génesis de diferentes teorías y metodologías, en la consideración de “lo interno” y “lo externo” en una síntesis dinámica dentro de su proceso de formación.
Investigación arqueológica en un mundo platónico de ideas, sombras de ninguna cosa material o humana.	Búsqueda crítica de regularidades evolutivas, como refuerzo de la comprensión de la necesidad, las consecuencias y las aplicaciones del conocimiento.
Remendar el plan de estudios con un parche ostentoso en un momento concreto de la carrera, tratando de darle fundamento tardío a un conocimiento introducido de manera artificial y prematuramente abstracta.	Incorporarla como componente sistémico del currículo, al servicio del cumplimiento de sus objetivos generales desde los primeros años, progresando sucesivamente en el hallazgo de interacciones entre pensamiento y realidad, abstracción y concreción, teoría y práctica.

CUESTIONARIO

1. Mencione el probable origen de los primeros conceptos matemáticos. ¿Qué condiciones posibilitaron estos?
2. Origen de la civilización. Relación escritura (lenguaje)-matemática.
3. Origen y significado de la palabra **Matemática**.
4. Principales problemas filosóficos de la Matemática.
5. Relación objeto de estudio-objeto de la Matemática.
6. Objetivos fundamentales de la Historia de la Matemática.
7. ¿Qué es la Historiografía de la Matemática? ¿Quién y cuando se inicia esta?.
8. ¿Qué obras de Historia de la Matemática Ud. conoce? Valórelas.
9. ¿Cuáles son los períodos más utilizados en la Historia de la Matemática? ¿Quiénes son sus autores?
10. Ponga ejemplos del carácter dialéctico de la Matemática.
11. Diga qué evidencias existen de los conocimientos matemáticos en las eras Paleolítica y Neolítica.
12. ¿Existió matemática antes que apareciera el Hombre? Fundamente.
13. Comente y ponga ejemplos, de los principales errores que se cometen en la utilización de la Historia de la Matemática.

Conferencia 2. Civilizaciones antiguas: Mesopotamia, Egipto, China y la India.

“Solo aprendemos de aquellos a quienes amamos”

Goethe

MESOPOTAMIA Y EGIPTO

Al tratar el surgimiento de los primeros conceptos matemáticos, en el encuentro anterior, mencionamos la civilización sumeria, como una de las primeras en desarrollarse, pues conocían la rueda, el empleo de los metales y lo que es más importante: sabían escribir, la escritura sumeria, cuneiforme, parece ser la primera forma escrita de comunicación entre los hombres y se realizaba sobre tablillas de arcillas blandas, que luego se cocían en hornos o se endurecían simplemente bajo la luz del Sol.

Durante las excavaciones realizadas desde el siglo pasado, se hallaron más de medio millón de estas tablillas, y entre ellas se han identificado aproximadamente 300, dedicadas por entero a cuestiones matemáticas. En las ruinas de la ciudad de Nippur, al sudeste de Babilonia, se encontraron 50 mil tablillas y se supone escritas por sumerios más avanzados posiblemente entre los siglos XXXI y XXVI a.C.

En el tercer milenio empieza a aparecer gradualmente, tanto en la civilización mesopotámica como en la egipcia, un concepto abstracto de número. En principio cada uno de ellos forma parte de un determinado sistema de unidades, razón por la que el "Cuatro" de cuatro ovejas y el de cuatro medidas de grano, por ejemplo, no se representan con el mismo símbolo. Los distintos sistemas de unidades guardan relación entre sí. No había correlación entre las medidas de superficie y las medidas de longitud y no sabían calcular la superficie a partir de la longitud y de la anchura.

Pero la práctica de anotar datos, que permite llevar un registro permanente de medidas, abre la posibilidad de observar las regularidades, las pautas. Estas dos sociedades aprovecharon esa posibilidad por espacio de unos mil años. Hacia finales del tercer milenio los escribas egipcios y sumerios aprendieron a calcular el área y el volumen a partir de la longitud, a distribuir las provisiones entre los obreros, a calcular el tiempo necesario para llevar a cabo una determinada labor en función de su magnitud, el número de hombres y el ritmo del trabajo. También hay pruebas de que una vez establecidas estas relaciones, se llegó a un grado más alto de abstracción en el que los conceptos numéricos se fueron desprendiendo progresivamente de la unidad a la que se aplicaban.

A comienzo del segundo milenio, ambas civilizaciones habían conseguido crear unos sistemas igualmente abstractos de numeración, si bien habían escogido medios diferentes para representar las cifras. Los egipcios, al igual que la mayoría de las sociedades modernas, tenían un sistema numérico decimal, esto es, en el que se cuenta hasta el nueve de cada unidad antes de pasar a la unidad superior siguiente (después de nueve "unos" aparece el "diez", después de nueve "dieces" aparece la centena, etc.). Pero, contrariamente a los sistemas modernos, su escritura numérica era "aditiva", esto es, había signos distintos para las unidades, las decenas y las centenas y se trazaban tantos como fueran necesarios.

En Mesopotamia se procedía de otra manera, la base de los cálculos matemáticos era sesenta; para expresar cifras superiores a 59 era necesario, como veremos más adelante, repetir los signos correspondientes.

LA EDUCACIÓN DEL ESCRIBA

Aprender a manejar estos sistemas numéricos requería una formación especializada, y la existencia de escuelas se remonta a la misma época que la invención de la escritura. Se sabe, además, que el aprendizaje de la aritmética se iniciaba en una fase temprana de la vida escolar de los niños, al mismo tiempo que la lectura y la escritura, y que las matemáticas eran consideradas, igual que ahora, una de las asignaturas más difíciles.

Hacia el año 2000 a.C. se compuso en honor de Shulgi, uno de los reyes del tercer imperio de Ur en Mesopotamia, un himno literario que se convirtió en texto modelo utilizado como ejercicio escolar en la primera mitad del segundo milenio. En la composición, el soberano se jacta de sus éxitos académicos y proclama orgullosamente: *“Sé sumar y restar a la perfección, soy diestro en cálculo y en contabilidad”*.

Más de mil años después, el rey asirio Asurbanipal repetía prácticamente lo mismo en uno de sus himnos: *“Soy capaz de hallar los números recíprocos y los productos difíciles que no figuraban en las tablillas”*.

¿Cuál sería la trayectoria de un joven escriba destinado a convertirse en “matemático” en el antiguo Egipto o en Mesopotamia? Casi con toda seguridad del sexo masculino (ya que las mujeres, aunque no les estaba prohibido recibir formación como escribas, no aparecen mencionadas en los documentos), empezaría asistiendo a la escuela cuyo ingreso estaba abierto a dos grupos distintos. Del primer grupo integrado por los hijos de los ricos y poderosos surgirían los reyes y los altos funcionarios, mientras que la vasta mayoría de los afortunados que habían logrado acceder a una institución educativa, uno de los medios excepcionales de ascenso social en la antigüedad, se convertirían en meros escribas profesionales.

¿Qué aprendería el escriba durante los diez años de escolaridad como mínimo? De las dos civilizaciones han llegado hasta nosotros textos y ejercicios matemáticos, en particular los llamados “debates de escribas”. Así, en un ejemplo procedente de Mesopotamia, un escriba alardea de sus capacidades ante otros:

“Quiero escribir tablillas:

tablillas [de medidas] desde 1 gur de cebada hasta 600 gur;

tablillas [de peso] desde un siclo hasta 20 minas de plata,

con los contratos de matrimonio que pueden presentarme,

los contratos comerciales,...

la venta de viviendas, campos, clavos,

prendas de plata, contrato de arriendos de

campos,

contratos de cultivos de palmera, [...],

incluso las tablillas de adopción; todo esto sé

escribir”.

En un texto típicamente egipcio, un escriba se mofa de otro en los siguientes términos:

“vienes hacia mí y me abrumas hablándome de tu cargo. Yo desenmascararé tu presuntuosa actitud cuando te encomienden un trabajo. Pondré al descubierto tu fatuidad cuando digas: soy el escriba, capataz de la cuadrilla de obreros...”

Hay que construir un terraplén de 730 codos de largo por 55 codo de ancho, con 120 compartimentos rellenos con

baquetas y vigas; con una altura de 60 codos en su parte más alta, 30 codos en el medio; con una inclinación de 15 codos; con una base de 5 codos. Se pregunta el jefe de la cuadrilla cuál es la cantidad de ladrillo.

Todos los escribas están reunidos pero ninguno sabe como hacerlo. Depositán en ti su confianza y dicen: "¡Amigo tu eres un escriba inteligente!. Decide rápidamente por nosotros, ya que tu nombre es famoso."...Que no se diga: 'Hay algo que ignora' "indícanos la cantidad de ladrillos. Mira, aquí, tienes las medidas; cada unos de los compartimentos tiene 30 codos [de largo] y 7 codos [de ancho]".

Ahora bien, los textos citados son más literarios que matemáticos. Se conocen, de hecho, algunos textos matemáticos escolares de cada una de esas civilizaciones, casi todos ellos de dos períodos diferentes: la primera mitad del segundo milenio y de la época de la dominación griega y romana, a finales del primer milenio. Son de dos tipos, textos de tablillas y de problemas.

Un ejemplo típico de los primeros es una tablilla babilónica de raíces cuadradas que data del segundo milenio. Para componer esas tablillas de cálculo sistemáticas y estructuradas se requiere haber alcanzado un alto grado de abstracción. ¿Qué hacía un escriba cuando necesitaba hacer una raíz cuadrada? Si no figuraba en la tablilla, podía calcularla, mediante una simple interpolación, a partir de los valores próximos que sí aparecían en ella. Este método era el habitual, incluso en Occidente, hasta fechas bastante recientes, y así es como los egipcios y babilonios utilizaban sus tablillas de multiplicación, raíces cuadradas y sumas de fracciones. Incluso los babilonios usaban la fórmula $ab = ((a+b)^2 - a^2 - b^2)/2$ (mucho mejor es $ab = (a+b)^2/4 - (a-b)^2/4$), para hacer la multiplicación más fácil, lo que demuestra que una tabla de cuadrados era todo lo que necesitaba para multiplicar números.

Otra categoría de textos matemáticos propone problemas como, por ejemplo, este problema tipo hallado en un papiro egipcio de mediados del segundo milenio:

“Una pirámide. El lado tiene 140 [codos] y la inclinación es de 5 palmos y un dedo [por codo]. ¿Cuál es su altura?”

Estos textos se inician con una exposición del problema matemático que se trata de resolver, y los datos se presentan como cifras concreta y no como variables abstractas. Sigue a la exposición del problema la forma de irlo solucionando paso por paso, para llegar finalmente al resultado. Cada nuevo paso se basa en el resultado de un paso anterior o bien en unos de los datos facilitados al principio.

No se recurre a ningún argumento para justificar el procedimiento ni se da la menor explicación de la fórmula, pero incluso con los valores numéricos citados, lo esencial de ella resulta perfectamente comprensible. El alumno quedaba así capacitado para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que pudiera presentársele. Además, estos problemas solían reagrupárseles de modo que las técnicas aprendidas pudieran aplicarse inmediatamente en otros casos. El problema mencionado más arriba, por ejemplo, aparecía después de otro en el que se trataba de determinar la inclinación de una pirámide en función de su longitud y su altura, y tras él venía uno nuevo relativo al cálculo de la inclinación de un cono.

Ahora bien, no todos los problemas matemáticos tenían una orientación tan práctica como éste. La finalidad de los ejercicios matemáticos escolares era familiarizar al

futuro escriba con las técnicas matemáticas empleadas para resolver problemas. El objetivo que se trataba de alcanzar era la instrucción técnica y no la aplicación directa, motivo por el que muchos de los problemas aparentemente “prácticos” que figuran en estos textos tenían muy poco que ver con la vida real. Como ejemplo de la prioridad que se daba a la preparación técnica sobre la aplicación realista, cabe citar una tablilla babilónica que plantea un problema en el que se utiliza para medir un terreno una vara de medición rota, o bien el problema egipcio de un escriba al que se pide que calcule las primitivas dimensiones de un rebaño en función de un número de reses con la que el propietario ha pagado sus impuestos.

La finalidad pedagógica de estos ejercicios salta a la vista. Además, la estructura de los textos de los problemas y de las tablillas permite abordar de otro modo la cuestión de la abstracción y la generalización en las matemáticas. En vez de optar por elevar la simbolización, caracterizada por una jerarquía de “grado de generalidad”, el planteamiento de los egipcios y los babilonios consiste en crear una cadena de ejemplos típicos gracias a la cual es posible, por interpolación, establecer una relación entre un problema nuevo y los ya conocidos.

Exactamente este mismo planteamiento fue el que se adoptó en otras ramas del saber antiguo como la medicina, la adivinación y la astronomía, considerada en Egipto y en Mesopotamia, al igual que las matemáticas, como una práctica conceptual particular.

“MATEMÁTICO”, una palabra que no existe.

Es posible seguir la trayectoria de un joven aspirante a escriba una vez concluida su formación gracias a un número considerable de fuentes-textos contables, listas de profesiones y referencias en textos literarios o históricos.

Sin embargo, es infructuosa la búsqueda de una sola mención de un “matemático” en el sentido moderno del término, esto es, un individuo que trabaja en una comunidad reconocida de investigadores con objeto de ampliar nuestros conocimientos de las propiedades de los números y las cifras. En las antiguas lenguas de Egipto y Mesopotamia no existía una palabra para designar a un “matemático”.

Así pues, el joven escriba podía seguir dos rumbos distintos. Unos cuantos se dedicarían a la enseñanza de la matemática y tal vez inventarían nuevos problemas para presentarlos a la próxima generación de alumnos, lo que, con el paso del tiempo, iría ampliando y perfeccionando el acervo de técnicas matemáticas de su tiempo.

Pero lo más probable es que el joven graduado ejerciera como contable, calculando el trabajo, las raciones, los terrenos y los cereales. Estos escribas estaban omnipresentes, y su diligente actividad al servicio de su señor está minuciosamente representada en los frescos murales egipcios y en los relieves asirios. Su posición aparece como subalterna pero privilegiada. Al igual que sus colegas que habían elegido la docencia, no eran ellos los depositarios del poder en aquellas antiguas sociedades, pero estaban al servicio de quienes regían sus destinos y gozaban de suficientes privilegios como para haber sido immortalizados en los muros de sus amos como signo visible de su poder que tanto se esforzaban por contabilizar.

LOS SUMERIOS

Los sumerios, acadios, caldeos, babilonios y otras civilizaciones que sucedieron a estas conservaron el sistema cuneiforme de numeración con su base 60. Esta base se adoptó posiblemente por los intereses de ellos en la metrología, ya que cualquier magnitud de 60 unidades es divisible exactamente por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30.

Es posible que las dificultades que representaba escribir en sus tablillas de barro, en las que después no se podía borrar, o menos probablemente, alguna chispa de clarividencia hizo a los babilonios crear un sistema que sólo requiriese dos símbolos, el de 1 y el de 10, para escribir un número cualquiera por grande que este fuese. De este modo crearon el Sistema de Numeración Posicional 20 siglos a.C.

Para escribir los números hasta el 59 agrupaban sus símbolos como si fuese uno sólo; los siguientes hasta 3599=59.60+59 lo escribían en dos grupos de izquierda a derecha y en cada grupo se podía escribir número hasta el 59.

En forma análoga escribían el tercer grupo de símbolos lo que le permitía escribir hasta 215 999=59(60²)+59(60)+59.

La esencia del sistema posicional hizo que luego se dieran cuenta que podían escribir números fraccionarios con base sexagesimal.

Lo que hicieron fue extender el principio a las fracciones de modo semejante a como nosotros lo hacemos con los decimales. Así por ejemplo, el número $\tau\tau\tau\triangleleft\tau\tau$ podía al mismo tiempo significar:

$$192=3(60)+12 \text{ que } 3,2 = 3 \frac{1}{5} = 3+12(60^{-1}).$$

Para realizar las operaciones fueron también muy habilidosos pues crearon algunos algoritmos para efectuarlas. Se han hallado entre las tablillas algunas dedicadas a desarrollar tablillas de multiplicar, de efectuar potencias y raíces y calcular inversos. Para dividir multiplicaban por el inverso del divisor usando estas tablillas.

Incluso, en ocasiones sus cálculos demostraron una notable aproximación, así en una antigua tablilla de la Colección de Yale (No.7289), se presenta la raíz de dos como 1.414222, que difiere en 0.000008 del valor real.

De estas tablillas-textos babilónicos se pueden inferir que poseían conocimientos algebraicos rudimentarios. Expresando lo que hoy representamos con variable, ellos con su simbolismo y los símbolos de las palabras correspondientes al ente o magnitud con que trataban, tales como longitud, áreas, granos de trigos, etc., planteaban y resolvían problemas mediante ecuaciones hasta de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo en una tablilla estaba el sistema que ilustramos utilizando nuestro simbolismo:

$$\begin{aligned} (1a. longitud)/7 + (2da.longitud)/11 &= 1, \\ 6(1a. longitud)/7 &= 10(2da. longitud /11), \end{aligned}$$

y de modo conciso daban así la respuesta:

$$\begin{aligned} 1ra. longitud &= 7\left(\frac{11}{7+11} + \frac{1}{72}\right), \\ 2da. longitud &= 11\left(\frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}\right). \end{aligned}$$

Con cierta destreza trabajaron también las ecuaciones cuadráticas completas, como lo demostró Neugebauer en 1930, así como las cúbicas sencillas tales como $x^3=a$, y $x^3+x^2=b$. En unas de las tablillas se encuentra propuesto y resuelto un problema cuya solución es equivalente a la de la ecuación $x^2-x-870=0$.

La solución anotada por el escriba en la tablilla de arcilla expresa:

“Toma la mitad de 1, (que es 0.30 en sistema sexagesimal) y multiplícala por sí misma (es decir, $(0.30)(0.30)=0.15$ en el sexagesimal, 0.25 decimal). Se le adiciona 14.30 (que es $14.60+30=870$ en el sistema decimal y la suma es 870.25) pero este es el cuadrado de 29,30 ($870.25=29.5$ en decimal). A 29.30 se le suma 0.30 y nos da la respuesta positiva para la ecuación $29.30+0.30=30$ ”.

Trabajaron también en problemas geométricos de las longitudes, áreas y volúmenes de figuras. Una de las colecciones de tablillas, de mayor significación desde el punto de vista matemático, se ha denominado **“Plimpton”** y se guarda en la Universidad de Columbia en Nueva York. Entre estas tablillas **“Plimpton”**, hay una que representa números en la forma siguiente (la No.322):

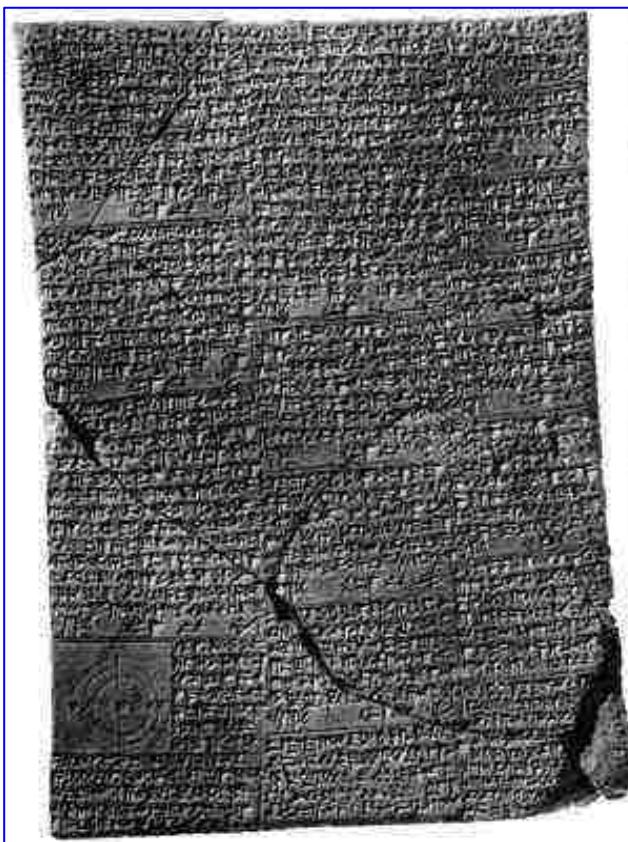
$\begin{array}{ccc} & \triangleleft \triangleleft & \tau \tau \tau \\ \tau & \triangleleft \triangleleft & \tau \tau \tau \\ & \triangleleft & \tau \tau \tau \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & \triangleleft \triangleleft & \tau \tau \tau \\ \tau \tau & \triangleleft & \tau \tau \tau \\ & \triangleleft & \tau \tau \tau \end{array}$
$\begin{array}{ccc} \triangleleft \triangleleft & \tau \tau & \tau \tau \\ & \triangleleft \triangleleft & \tau \tau \tau \\ \triangleleft & \tau \tau & \tau \tau \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & \triangleleft & \triangleleft & \tau \tau \\ \tau & & & \tau \tau \\ & \triangleleft & \triangleleft & \tau \end{array}$

y así sucesivamente, que traducidos a nuestro sistema son los siguientes números:

119	169	10,
3 367	4 825	20,...

Continúa la tablilla así hasta 15 pares de números, que representan un cateto y la hipotenusa de triángulos pitagóricos correspondientes, como se puede deducir, a las ternas: 119, 120 y 169; 3 367, 3 459 y 4 825, etcétera. Este orden no es, aunque lo parece, al azar; si no que obedece a cierta norma que corresponde al decrecimiento del ángulo agudo del triángulo que disminuye desde casi 45 en el 1º hasta aproximadamente 30 en el 15to.

Más al sudoeste de Babilonia se halla la ciudad de Susa y así se encontraron otras tablillas que representan diversos problemas con longitudes y áreas de los polígonos regulares desde el triángulo equilátero hasta el heptágono. Si bien tanto los egipcios como los sumerios, conocían fórmulas correctas, ambos usaban la expresión $(a+c)(b+d)/4$ para



calcular el área de un cuadrilátero con pares de lados opuestos a , c , y b , d . Esta es correcta solo en el caso del rectángulo. Manejaban además las expresiones para calcular el área de los triángulos isósceles rectángulos y de los cuadriláteros rectángulos.

Consideraban, en general, que la longitud de la circunferencia era tres veces el diámetro pero recientemente se han descubierto tablillas que estiman a $\pi=31/8$; calculaban el volumen de cilindro circular recto multiplicando el área de la base por la altura; conocían las propiedades de la altura del triángulo isósceles y del ángulo inscrito en el diámetro. Estaban informados de la propiedad de Pitágoras para los triángulos rectángulos y poseían algunas nociones sobre la proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes.

Algunas veces calculaban el volumen del tronco de conos y pirámides empleando la errónea fórmula $v=h((a+b)/2)^2$ que como luego veremos, conocían también los egipcios.

Las tradiciones matemáticas de los babilonios se extendieron fuera de los límites de los estados del Medio Oriente y pueden ser hallados incluso en la época del helenismo (alrededor de los años 330-30 a.C.).

LOS EGIPCIO

El río Nilo proviene de dos afluentes, el Nilo Blanco y el Nilo Azul, el primero nace en el Sudán y el segundo en Etiopía. Así llega a Egipto, región septentrional del valle en que desemboca. En las orillas del Nilo crecen lotos y papiros. Esta última es una planta que tiene forma de tubito o cánula y posee unas gruesas fibras con las que los egipcios fabricaban embarcaciones y así mismo otras fibras más delgadas con las que trenzaban canastas, cuerdas y muy especialmente por su importancia elaboraban un material en el que escribían y a esta especie de papel, le llamaban también papiro.

La escritura surge en Egipto unos 35 siglos a.n.e y merced a lo que en los papiros quedó impreso han llegado hasta nuestros días muchos documentos de esa civilización que en realidad, pese a la opinión de algunos historiadores, nunca alcanzó en Matemáticas, el nivel de los Sumerios.

Estos documentos pudieron ser rápidamente descifrados gracias al hallazgo de la famosa Piedra Rosetta que fue descubierta en 1799 por la expedición de Napoleón a Egipto. La piedra fue hallada en el Puerto de Rosetta, que está situado muy próximo a la actual ciudad de Alejandría.

El egiptólogo francés Juan Francisco Champollion, valiéndose de la mencionada Piedra, que expresaba el mismo texto en tres escrituras diferentes jeroglífico, demótico y griego antiguo, logró en 1822, decodificar la escritura jeroglífica y así pudo leer las inscripciones de los documentos, tumbas, paredes de templos y más tarde, cuando se descubrieron los 5 famosos papiros matemáticos, a raíz de las distintas expediciones realizadas para estudiar esta antiquísima civilización.

Los cinco papiros son:

- El papiro de Kahun que corresponde al año 1950 a.C.
- El papiro de Rhind (en honor del egiptólogo escocés Henry Rhind, quien lo encontró en Luxor en 1858) o Papiro de Ahmes (escriba que lo copia de otro 200 años más antiguo) y lo transfiere a la numeración demótica, cerca del año 1650 a.C.
- El papiro de Moscú o de Golenischev cerca del año 1890 a.C. (es otro de suma importancia matemática), fue encontrado en Egipto en 1893.
- El papiro de Rollm procedente del año 1350 a.C.

- El papiro de Harris cuya escritura fue ordenada por Ramses IV en el año 1167 a.C. (expone las obras de su padre Ramses III).

El papiro de Ahmes y el de Moscú, tienen entre ambos unos 110 problemas, 84 y 25 respectivamente; en su mayor parte, estos problemas son de índole puramente numéricos y por lo común, son de soluciones muy simples.

La aritmética de los antiguos egipcios era muy rudimentaria, su sistema aditivo de numeración facilitaba las operaciones de suma y resta. Por ejemplo para sumar 43 y 128 lo hacían aplicando el principio del ábaco:

que equivale a

$$\begin{array}{r} 43 \\ + 128 \\ \hline 171 \end{array}$$

Un detalle que debemos apuntar, es que los egipcios escribían los números, usualmente, de derecha a izquierda así, para el número 121 escribían 𐀓𐀓𐀕 .

Esto ilustra que la posición del símbolo, no tenía particular importancia.

Para multiplicar y dividir empleaban el proceso de duplicación (con lo que en realidad aplicaban en cierto modo el sistema binario de numeración).

Para multiplicar 26 por 33 lo hacían como ilustramos con nuestra numeración actual:

1	33
2	66
4	132
8	264
16	528

Buscaban los componentes de 26 en el sistema binario y sumaban los correspondientes múltiplos del 33 para obtener el producto. Lo hacían realmente:

$$33(2^4+2^2+2^1)=66+264+528=858.$$

El mismo principio aplicaban para efectuar la división. Para dividir, digamos 753:26, lo indicaban así:

1	26
2	52
4	104
8	208
16	416 y sobran 25

Es decir $26(2^4+2^3+2^2)+25=753$ y esto nos dice que $2^4+2^3+2^2=16+8+4=28$ es el cociente y el residuo es 25.

Tienen una notación característica para las fracciones pues todas las representaban con fracciones de numerador unidad aunque exceptuaban a la fracción $2/3$ que tenía su símbolo propio.

En realidad lo que hacían era escribir las fracciones expresadas mediante los inversos de los números naturales colocando el símbolo $\bullet$ encima del número que representaba el denominador. Por ejemplo:

$$\overset{\bullet}{2} = \frac{1}{2} \text{ y } \overset{\bullet}{3} = \frac{1}{3},$$

y para el $2/3$ empleaban el símbolo Π .

Una fracción cualquiera se expresaba entonces a partir de fracciones unitarias. Por ejemplo, la suma $\overset{\bullet}{4} + \overset{\bullet}{28}$ equivalía a $2/7 = 1/4 + 1/28$, asimismo $2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$; $2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$. Unos de los procesos que se seguían para obtener las fracciones eran usando la fórmula $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p}$; si

buscaban, digamos, las fracciones unitarias para $2/15$, usando la expresión anterior obtenían:

$$2/15 = 2/3 \cdot 1/5 = 1/10 + 1/30.$$

La reducción de una fracción a suma de fracciones unitarias se efectuaba en general mediante tablillas que ofrecían la descomposición de las fracciones con la forma $2/n$, así para facilitar la reducción de las fracciones a fracciones unitarias, el Papiro Rhind comienza con una tablilla expresando $2/n$ como suma de fracciones unitarias para los valores impares de n desde 5 hasta 101. En algunas ocasiones ha sido sugerido que algunas de estas expresiones fueron calculadas usando el equivalente de las fórmulas:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}, \text{ o bien } \frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}}.$$

En dicho papiro de Ahmés, éste también utilizaba otra fórmula pues escribe:

$$2/5 = 1/3 + 1/15.$$

Ahmes tiene en su papiro una tablilla que ofrece la equivalencia de fracciones de denominador unidad, para todos los denominadores impares desde 5 hasta 331. No hay duda que este cálculo de las fracciones es algo notable de la aritmética egipcia. Incluso hay una pequeña tablilla para $n/10$ para n desde 1 hasta 9.

La operación aritmética fundamental en Egipto fue la adición, y la multiplicación y división la efectuaban mediante el método de duplicación, como ya dijimos antes, por ejemplo, el Problema 13 del Papiro de Ahmes, pide calcular el producto de $1/16 + 1/112$ por $1 + 1/2 + 1/4$, el resultado es el correcto: $1/8$.

Muchos de los problemas del Papiro de Ahmes, muestran un conocimiento de manipulaciones equivalentes a “la regla del tres”. Los Problemas 72 y 63 son un claro ejemplo de esto.

Si bien los egipcios desarrollaron la aritmética comercial, no llegaron al nivel que alcanzaron los sumerios, en sus resultados matemáticos.

Los problemas egipcios descritos hasta ahora son clasificados como aritméticos, sin embargo existen clases de otros problemas que pueden ser llamados algebraicos. Estos no concernían a objetos específicos, tales como trigo o cerveza. La mayoría de los problemas propuestos (ver, por ejemplo, el Problema 24) pueden resolverse mediante la regla de falsa posición (**regula falsi**), problemas que hoy resolvemos mediante sencillas ecuaciones lineales o cuadráticas. Puede ilustrarse esto con el siguiente problema:

“Tenía cierto número de ovejas y compré un séptimo más de las que tenía, si ahora poseo 24 ovejas, ¿cuántas ovejas tenía?”

Hay en el papiro de Ahmes un problema muy curioso que revela que conocían las progresiones, pues este presenta una progresión geométrica. El enunciado expresa:

*“En cada una de 7 casas vivían 7 gatos
cada gato cazó 7 ratones
cada ratón tenía 7 espigas de trigo.
De cada espiga sembrada
se obtuvieron siete medidas (hekat) de cereal
¿cuántas medidas se cosecharon en total?”*

La respuesta de 19607 hekat de trigo que tiene el problema, coincide con el cálculo que hacemos nosotros.

Otra clase de problemas abordados por los egipcios son los problemas geométricos. El Papiro de Moscú, recoge problemas muy semejantes a los del Papiro de Ahmes; entre los 26 problemas de geometría que presentan estos dos papiros, el de Moscú ilustra una figura (Problema 14) que por los cálculos que se realizan, hace inferir que corresponde a un tronco de pirámide truncada y en las instrucciones que trasmite el escriba, se deduce empleando la misma fórmula actual:

$$V = h(a^2 + ab + b^2)/3.$$

A pesar que se afirma que los antiguos egipcios conocían el Teorema de Pitágoras, no existen elementos que confirmen esto. El estudio de los papiros revela, asimismo, que conocían el área de un triángulo isósceles como la mitad de la base por la altura (Problema 51 del Papiro de Ahmes). El trapecio isósceles es tratado similarmente en el Problema 52, en el cual la base mayor es 6, la menor 4 y la distancia entre ellos 20. Tomando la mitad de la suma de las bases “como en el rectángulo”, Ahmes multiplica esta por 20 para encontrar el área. En estas transformaciones, vemos el comienzo de la idea de congruencia y la idea de demostración. Una seria deficiencia de la “geometría” egipcia, fue la ausencia de una clara distinción entre relaciones exactas y aproximadas. El uso de π como $19/6$ (en el Problema 50 del Papiro de Ahmes, donde se asume que el área de un sector circular con un diámetro de 9 unidades es la misma que el área de un cuadrado con 8 unidades de lado) revela una aceptable aproximación, sin embargo no se dispone de ninguna indicación en la que se plantee que el área de un círculo y la de un cuadrado, no son *exactamente* iguales. Es posible que el Problema 48 nos brinde alguna información sobre cómo los egipcios calculaban el área de un círculo. En dicho problema, el escriba forma un octágono de un cuadrado de lado 9, trisectando los lados y cortando los triángulos isósceles que se forman. El área de octágono, que no difiere mucho de la del círculo inscrito en el cuadrado, es 63 unidades, lo cual no es mayor que el área de un cuadrado de 8 unidades de lado. Que el número $4(8/9)^2$ juega un papel

comparable al de nuestro π , parece ser confirmado por la regla egipcia para la circunferencia de un círculo, acorde a la cual el radio del área de un círculo es a la circunferencia, como el radio del área del cuadrado circunscrito, es a su perímetro. Esto representa una observación de mayor precisión y significado matemático, que la relativamente buena aproximación de π .

El Problema 56 del Papiro de Moscú es de especial interés, pues contiene rudimentos de trigonometría y de una teoría de triángulos similares.

Por otra parte, el estudio de los papiros, permite afirmar que 20 siglos a.C. en Egipto, comenzaron a formarse elementos de la matemática como ciencia. Estos elementos apenas comenzaban a separarse de los problemas prácticos y estaban enteramente subordinados a su contenido. La técnica de cálculo era aún primitiva, los métodos de solución de problemas no eran uniformes.

En general, las deficiencias de la matemática pre-griega son obvias. Sin embargo, como detalle general, quisiéramos resumir algunos de ellos. En primer lugar, los papiros y tablillas contienen solo casos y problemas específicos, no formulaciones generales. Más serio, quizás, es la ausencia de una distinción clara entre resultados exactos y aproximados, así, ni los egipcios ni los babilonios, parece que se detuvieron en la cuestión de cuando el área de un cuadrilátero o de un círculo, es encontrada exactamente y cuando es aproximada. Cuestiones sobre la solubilidad o no de un problema, tampoco parece haber sido considerado y la noción de demostración, debido a sus múltiples acepciones actuales, hace difícil la afirmación que los matemáticos pre-griegos, no tenían el concepto de demostración y que no sentían la necesidad de una demostración. Esto último, está muy relacionado con la crítica dirigida a la ausencia de abstracción en esta matemática. Sin embargo, los materiales que permitirían determinar exactamente sobre el desarrollo de la matemática pre-griega, aún son insuficientes y cualquier afirmación categórica en este campo, es controversial.

CHINA Y LA INDIA

El desarrollo de la Matemática en China se considera que se inicia en un período un poco posterior a la de sumerios y egipcios, aunque antes de los primeros logros de la antigua Grecia.

Tradicionalmente se estima que esta civilización surge con el primer imperio chino aproximadamente hace unos 32 siglos. Entonces se piensa que fue escrita la más antigua de las obras de matemática chinas, el libro conocido por **“Chon Pei Suang Ching”**.

Básicamente este libro está dedicado a presentar ejercicios numéricos de Aritmética y Álgebra aplicados a la solución de problemas de agrimensura. En algunos casos aplican la expresión analítica del teorema de Pitágoras.

A pesar de lo anterior, según el historiador chino Ling Wang, los conocimientos matemáticos de los chinos se remontan al S. XIV a.C. En la historia de las matemáticas en la antigua china se tienen noticias sobre el sistema decimal de cálculo, una simbólica especial de números en jeroglíficos, sobre operaciones con números grandes, etc.

Bastante después del Chon Pei se escribe el tratado más importante de la antigua China, la famosa obra en nueve libros **Ching-Chang Suang-Shu** conocida como **“La Matemática de los Nueve Capítulos”** (se le llama también **“Los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático”**) que se asigna al matemático Chuan Tsanon y se le supone escrito en el año 152 a.C. Esta obra sufrió posteriormente numerosas modificaciones.

Los capítulos contienen los aspectos matemáticos siguientes:

Primero: Trata de las mediciones en general y emplea fracciones simples y las operaciones básicas con estas. Calcula las áreas usando $\pi=3$.

Segundo: Dedicado a la relación entre las distintas clases de cereales. Plantea cálculo de volumen empleando en su solución la regla de tres y la proporcionalidad.

Tercero: Estudia problemas de Reparto Proporcional directo e inverso, la Regla de tres simple y compuesta.

Cuarto: Presenta problemas respecto a lados y áreas de figuras planas. Expone las reglas para extraer raíces cuadradas y cúbicas. Usa generalmente $\pi=3$, excepto en un problema en el que se quiere encontrar el diámetro de una esfera y en este caso hace $d=(16V/9)^{1/3}$ para lo cual toma $\pi=27/8$.

Quinto: Este capítulo presenta problemas que contiene cálculos para la construcción de murallas, pozos, paredes de presa, etc.

Sexto: Contiene también problemas análogos a los del Tercer Capítulo relativos a la distribución proporcional de impuestos e ingresos. Ofrece algunos problemas respecto a las sucesiones aritmética y su suma.

Séptimo: Dedicado a la solución de problemas de ecuaciones lineales y de sistemas usando al igual que los egipcios el método de "Falsa Posición". El capítulo, seguramente resultado de modificaciones posteriores al original, presenta un algoritmo para la solución del sistema basado en el trabajo con matrices. Para todos los sistemas tratados en este libro, se establece un algoritmo único de cálculo de las raíces. Por ejemplo resuelve el sistema:

$$3x+2y+z = 39, 2x+3y+z = 34, x+2y+3z = 26.$$

Trabaja la matriz inicial y la transforma en:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 24 & 1 & 1 \\ 66 & 24 & 39 \end{array}$$

matriz que conduce a las ecuaciones:

$$24z = 66, 5y+z = 24, 3x+2y+z = 39,$$

cuyo conjunto solución es:

$$9 \frac{1}{4}; 4 \frac{1}{4}; 2 \frac{3}{4}$$

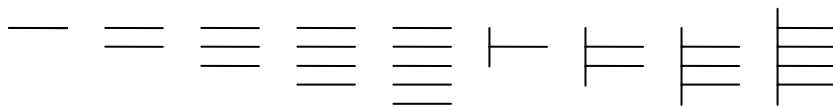
Octavo: En el capítulo se resuelven problemas que conducen a sistemas de ecuaciones solubles por el método del Séptimo (mejorado) que es denominado fan-chen. Además, en la transformación de la matriz del sistema, los chinos introdujeron los números negativos, para su adición y sustracción fue introducida una regla especial cheng-fu, cual puede traducirse como regla más-menos.

Aquí debemos señalar, que la prioridad de los matemáticos chinos, con respecto a la regla fan-chen es indiscutible. Es suficiente señalar, que en Europa, la idea de un determinante semejante, fue emitida sólo por Leibniz en el S.XVII. Los números negativos aparecieron, en forma explícita, algo antes, a finales del S. XV en las obras de N. Chuquet.

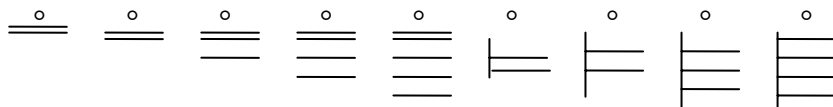
Noveno: Propone y resuelve problemas cuya solución conduce a la determinación de distancias y alturas inaccesibles. En la solución usa la semejanza de triángulos y el Teorema de Pitágoras.

La obra consta en total de 246 problemas que son en su gran mayoría de orden práctico, agrimensura, comercio, agricultura, construcciones, etc. Estudia también las propiedades de los triángulos rectángulos.

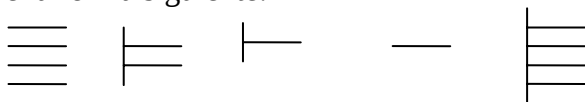
Además de la numeración multiplicativa, los chinos usaron una escritura para las cifras a base de varillas que se ha dado en llamar números o cifras de bambú. Esta representaba los dígitos del 1 al 9 por los símbolos:



y los nueve primeros múltiplos del 10 por:



Con estos 18 símbolos, alternándoles en los lugares se escribían los números tales como 47 619 de la forma siguiente:



Son también muy notables en la matemática china los Cuadrados Mágicos que se atribuyen al Emperador Yu que gobernó en el año 2200 a.C.

“Un cuadrado mágico normal de orden n , es un arreglo en forma de cuadrado de los primeros enteros dispuestos de modo que la suma de los números que lo integran, a lo largo de una fila, columna o diagonal es la misma y a esta suma se le denomina constante mágica del cuadrado”.

Más de 3 milenios después se destaca el matemático Chu Shi-Chieh, quien en 1299 d.n.e. escribe su obra **“Introducción a los estudios matemáticos”**, en el que adelanta, casi 5 siglos, al método de solución que hoy conocemos como el “Método de Horner”. Todo lo anterior muestra que en el transcurso de muchos siglos, la matemática en china se desarrolló preferentemente con una orientación de cálculo-algorítmica y creó los elementos esenciales del camino algebraico para la resolución de los problemas.

La historia de la civilización que se origina entre los ríos Ganges e Indo se estima que proviene de unos 3 mil años a.C. Lo que antecede se deduce de las ruinas encontradas en una ciudad que se halla en Mohenjo Daro.

Estos primitivos pobladores de la India poseían su sistema propio de escritura, sabían contar, pesar, medir y construían canales de riego.

Se concluye que esta primera civilización tenía rudimentarios conocimientos matemáticos. No obstante, todo rastro matemático se ha perdido totalmente.

Un milenio más tarde, las tribus de un pueblo que procedía del Asia Central, atravesaron la cordillera del Himalaya y penetraron en la península indostánica. Tales tribus eran los arios, palabra que en Sánscrito significa nobles o poseedores de la tierra. Esta es precisamente la tribu que pobló Europa. El sánscrito era el lenguaje y la escritura de los arios y con ellos llegó a la India el sistema de castas y más tarde la religión de Buda. Adviene entonces la dinastía Maurya y con ella el más famoso de sus reyes Asoka (272-232 a.C.). Este gobernó después de la retirada de las tropas de Alejandro Magno en el año 326 a.C. En la época de este rey, ya se conocían los famosos libros matemáticos, escritos en verso, Sulvasutras que se supone datan de los siglos VIII y VII a.C., estos contenían algunos elementos de Geometría, métodos de cuadratura del círculo, aplicaciones del Teorema de Pitágoras y construcciones geométricas básicamente para aplicarlas en la construcción de obras religiosas, altares, templos, etc. En los Vedas, libros sagrados, se establecen asimismo, referencias a progresiones aritméticas y geométricas que se pretende fueron escritas en el siglo XX a.C.

Desde antes del período de los Sulvasutras, se utilizaba en la India, el sistema numérico de base 10 y los hindúes siempre tuvieron una marcada inclinación a realizar operaciones con números muy grandes.

La dinastía Maurya fue después asolada por diferentes invasiones y en este período no existió prácticamente, progreso matemático alguno.

Siglos más tarde, la India vuelve a ser gobernada por reyes nativos con la dinastía Gupta. Este es el período que se denomina Edad de Oro del Sánscrito. En esta época las ciudades se convierten en destacados centros de arte, medicina y enseñanza. Se fundan Universidades y se inician los primeros trabajos astronómicos importantes.

En realidad el desarrollo de la matemática hindú, es a partir del siglo IV hasta el siglo XII, por lo que lo abordaremos más adelante.

Además de los símbolos numéricos para los dígitos, el sistema de numeración posicional y el cero, constituyen el legado más importante de la civilización hindú a nuestro presente sistema de numeración.

Merece mencionarse, finalmente, la trigonometría hindú. Esta básicamente consistió en la introducción de las funciones seno y seno verso. En los Siddhanta y el Arijabharya se presenta el seno de ángulos menores o iguales que 90° y lo hace para intervalos de amplitudes angulares de $3\frac{3}{4}$. Considera el seno de $3\frac{3}{4}$ igual a la magnitud del arco correspondiente. En nuestra actual trigonometría equivale a decir que el seno de un ángulo menor de $3\frac{3}{4}$ es casi igual a la medida del arco en radianes. Las tablillas dan también los valores del seno-verso, es decir, los valores de uno menos el coseno del ángulo.

Es posible que el sistema de numeración de los hindúes, tuviese origen en los contactos con China y su sistema pseudo-posicional de varillas o de bambú, o bien que fuese una modificación del sistema alfabético griego, propagado desde Alejandría hasta la India.

Además, en la historia de la India se encuentran suficientes hechos que ponen de manifiesto la existencia de relaciones políticas y económicas con los estados griegos, egipcios, árabes y con China. Pero esto aún no está suficientemente claro.

LOS MAYAS

Desde el comienzo de la civilización Maya, pudo apreciarse la separación de un grupo de sacerdotes y astrónomos, cuya función inicial era la de estudiar y custodiar el calendario. Particular importancia parecía tener la predicción de eclipses solares y la determinación con una precisión increíble de las fases de la luna y la duración del año. Especial interés despertó en los Mayas el estudio de las apariciones del lucero del alba (Venus), como testimonio de esto ha llegado hasta nuestros días la Tablilla de Dressden, uno de los pocos manuscritos mayas que logró sobrevivir a la barbarie de los conquistadores, en él se plasman efemérides del planeta Venus calculadas con una precisión de hasta una hora de error para 500 años, además en él se especifican las fechas de aparición y desaparición del planeta en los distintos calendarios usados por los Mayas: El Calendario Solar, constituido por un año de 365 días de duración, compartidos en 18 meses de 20 días a los que se agregan 5 días funestos; El calendario sagrado, con un año de 260 días y el calendario largo, el cual cuenta los días desde la creación del mundo, según los Mayas fijada alrededor del 13 de Agosto del año 3113 a.C.

Los Mayas desarrollaron su escritura numérica jeroglífica hace más de 2000 años. Primeramente utilizaron un sistema numérico no decimal, no posicional que tuvo poca trascendencia. En él emplearon "un cero", pero no el principio del valor de los números por su posición usando símbolos especiales para denotar las diferentes unidades. Era como si nosotros fuéramos a escribir en nuestro sistema el número 460 como 4 centenas, 6 decenas y 0 unidades; que por supuesto es equivalente a decir 6 decenas, 0 unidades y 4 centenas; sin que el cambio de posición influya en el resultado final.

El segundo sistema numérico, desarrollado por los calculadores del Calendario de la antigua civilización Maya de América Central poseía base 20 por lo que tampoco fue un sistema decimal; pero sí emplearon el principio de la posición y el cero, para el cual utilizaron un símbolo parecido a una concha de mar. Además tenían 6 órdenes de unidades. Los Mayas no fueron a veces consecuentes con la base 20, pues en tal caso los órdenes sucesivos serían 1, 20, 400 (20 a la 2), 8 000 (20 a la 3), etc. y no 1, 20, 360 (20.18), 7 200 (20.360), etc., como ocurrió en realidad. La inconsistencia del tercer orden de unidades revela el origen social de esta escritura numérica, estrechamente vinculada al calendario, ya que el número de meses (18) por el número de días de cada mes (20) es igual al número de días de cada año solar (360) sin incluir los días funestos. En el código Maya existían símbolos para los números del 1 al 19 con puntos y segmentos, cada punto valía una unidad del primer orden o kins y cada segmento valía 5 kins, de modo que:

.	..	...		—
1	2	3	4	5
			.	
.	..	—	—	—
6	7	10	16	19

Los restantes números se escribían en alineación vertical por bloques de acuerdo a los órdenes de unidades, en la parte inferior de la columna se situaban los kins, encima las uinals, después los tun, etc.

La necesidad de utilizar un símbolo que denotara la nada, o sea, un símbolo para el cero, surge de la propia representación numérica, pues por ejemplo ni los Mayas para escribir 366 hubiesen puesto $_:_$ no lo habrían podido diferenciar de 26, 420, 7260, 9360, etc. ¿De qué manera podemos entonces distinguir este número de los restantes?. Existe una forma muy sencilla de resolver el problema, que consiste en utilizar algún símbolo para denotar el lugar que queda vacío en la columna, y para ello los Mayas usaron la notación , entonces quedarían:

.	.	.
.	.	.
—	—	—
26	366	420

.	.	.
.	.	.
—	—	—
7 206	7 260	9 360

Los cuales son perfectamente diferenciables unos de otros.

Existen evidencias de que los Mayas dominaron otras esferas del conocimiento matemático, baste mencionar la perfecta geometría de sus construcciones o la asombrosa precisión de sus cálculos astronómicos. Pero sobre qué problemas de geometría se plantearon, cómo los resolvieron y de qué forma realizaron sus cálculos, podemos afirmar muy poco. Desdichadamente, en el siglo XV los colonizadores, en nombre de la civilización y el progreso, llevaron a cabo una quema masiva de los testimonios de las culturas precolombinas; de la que sólo pudieron sobrevivir unos cuatro o cinco manuscritos, hoy dispersos por el mundo. Como es obvio, esto impidió que llegara plenamente hasta nuestros días la riqueza cultural de nuestros antepasados. Actualmente se realiza una intensa labor en pos del rescate de estos valores del patrimonio universal y esperamos que las investigaciones que con este fin se llevan a cabo, arrojen a la luz nuevos datos.

A partir de todo lo anterior, quisiéramos apuntar por último que “*cada cultura trae consigo su propia `cultura a priori`: de índole peculiar a sí mismo y, por tanto, característica y exclusiva de ella*” (W.G. Engel-“**Esbozo de una sociología cultural del conocimiento**”, S.P. Matese, 1966).

Hemos visto como con el largo desarrollo histórico de la actividad diaria práctica de los hombres se formaron otros conceptos matemáticos: área, volumen, y otras propiedades espaciales de los objetos.

La acumulación de conocimientos, tanto de carácter numérico-alfabético, como geométrico creó las siguientes premisas para la formación de teoría matemáticas:

a) la posibilidad de sustituir las operaciones directas con los objetos por su representación y denominación esquemática simplificada (símbolos). En etapas posteriores, esto llevó al desarrollo de los sistemas numéricos y de las construcciones geométricas;

b) la posibilidad de sustituir un problema concreto por un problema canónico de tipo más general, que se resuelve por leyes determinadas y que abarca un conjunto entero de casos particulares. Se trata de las formas primarias de creación de algoritmos generales y de cálculos matemáticos relacionados con ellas.

Cuando estas premisas actúan en gran escala y en la sociedad se forma una capa de individuos, que pueden utilizar una determinada colección de métodos matemáticos, entonces surgen las bases para hablar del inicio de la existencia de la matemática como ciencia, de la presencia de sus elementos.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

¿Cuándo y cómo aparecen los sistemas de numeración?

El transcurrir de los siglos y el progreso de las comunidades primitivas (que ya hemos hablado), requiere que haya que contar cantidades cada vez mayores y el intercambio entre las tribus próximas entre sí, crea la necesidad de que se adopten, desarrollen y sistematicen procesos de conteo comunes.

Tales procesos se logran mediante la disposición de los números en grupos básicos, la cantidad de números de estos grupos es lo que conocemos como base del sistema de numeración. La forma en que se disponían definió después, cómo usarlos y cómo operar con estos números. Así estos sistemas numéricos, se clasifican del modo siguiente:

- Aditivos (Jeroglífico egipcio con base 10 y 8 símbolos, cuneiforme primitivo, Herodiano o ático y el Romano).
- Multiplicativos (Sistema Chino-Japonés).
- Codificados o cifrados (Sistema Jónico o alfabético griego y el Hierático egipcio).
- Posicionales (Cuneiforme babilónico, hindú, el binario actual y el sistema maya).

Nuestro sistema de numeración actual parece que siguió el siguiente camino: el árabe Al-koritmí aprendió de los indios las cifras y las dio a conocer en su patria en el libro **“Algoritmi de numero indorum”**, en el siglo IX. Los árabes las introdujeron en España en el siglo X y de aquí, pasaron al resto de Europa.

CUESTIONARIO

1. Mencione, según su criterio, los aportes más importantes de la civilización sumeria a la matemática.
2. ¿Cuáles, cree Ud., son los defectos más notables de la matemática babilónica?
3. Compare ventajas y desventajas entre los sistemas de numeración babilónico y egipcio.
4. Escriba 20 000 y 0,023 en notación cuneiforme babilónica.

5. ¿Qué factor influyó más, en el desarrollo de la matemática del Antiguo Egipto, la astronomía o la agricultura?
6. Mencione algunas de las limitaciones de la matemática de los antiguos egipcios.
7. Escriba el número 12,833 en escritura jeroglífica egipcia.
8. Expresé $\frac{2}{99}$ como suma de dos fracciones con denominador unidad, en notación jeroglífica egipcia.
9. Ahmes propone en su problema 25, resolver la ecuación $x + \frac{x}{2} = 16$. Resuélvala por el método de falsa posición.
10. Emplee el procedimiento egipcio de división para hallar el cociente de $101/16$ y exprese el resultado mediante notación jeroglífica.
11. El problema 56 de Ahmes pide calcular el seqt de una pirámide de 250 codos de altura y 360 codos de lado de la base. ¿Es la respuesta $5 \frac{1}{25}$, que da Ahmes, correcta?
12. En el Papiro de Rhind se utiliza, reiteradamente, el área del círculo como igual al cuadrado de $\frac{8}{9}$ de su diámetro. ¿Qué valor de π es el que usaban para este cálculo?
13. Establezca analogías y diferencias entre las matemáticas china e hindú.
14. ¿Cuál de las matemáticas, la China o la Hindú, influyó más en el pensamiento matemático presente y por qué?
15. Empleando el método matricial de la Antigua China, resuelva el sistema:

$$2x - y - z = 12, \quad x + 2y + 3z = -3, \quad 4x - 3y + 2z = 6.$$
16. Escriba con números de bambú 13723769.
17. Usando la notación del Triángulo de Chu Sheh-Ghieh represente los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio.
18. Mencione los beneficios y dificultades que motivaron al hombre, para que eligiese como base de sistemas de numeración a los números 2, 5, 10, 20 y 60.
19. Si tuviera que escoger una base de numeración, ¿cuál escogería Ud.?, ¿Por qué?
20. ¿Qué se ideó primero, el nombre de los números o los símbolos para representarlos?, ¿Por qué motivo?
21. Escriba los números 378 y 563, usando los símbolos de los sistemas de numeración siguientes:
 - a) Herodiano o griego ático.
 - b) Romano.
 - c) Maya.

22. Cuántos símbolos diferentes son necesarios memorizar, para escribir cualquier número menor de 1000 en los sistemas de numeración siguientes:

- a) Jeroglífico egipcio.
- b) Cuneiforme babilónico.
- c) Maya.
- d) Romano.

23. ¿Puede Ud. definir un sistema numérico posicional literal?

Conferencia 3. La matemática griega. El surgimiento de la matemática griega. Pitágoras. Desarrollo de la Geometría desde Thales de Mileto hasta Hipócrates de Chios. Los tres problemas clásicos. Ptolomeo y la consolidación de la trigonometría.

“El ejemplo no es el elemento primordial para influir a los demás; es el único elemento”

Albert Schweitzer

Los griegos consideraron siempre a los egipcios como sus maestros, atribuyendo la invención de la geometría egipcia, a la solución del problema de medir los campos después de las famosas inundaciones del Nilo. Actualmente, se reconoce a los escribas como los conocedores egipcios de la geometría y de la restante matemática práctica egipcia. Hemos visto, como la matemática babilónica y la egipcia fueron elaboradas, aproximadamente, en la misma fecha (Medio Imperio Egipcio), pero además podemos concluir, que tanto la matemática egipcia como la babilónica, tuvieron su crecimiento, florecimiento y decadencia, por lo menos 1000 años antes que Pitágoras.

La sola mención de Pitágoras nos lleva a la matemática griega, cuyo surgimiento no puede vincularse con el propio Pitágoras, sino mucho antes y cuando las matemáticas egipcias y babilónicas *“ya estaban extintas hacía mucho tiempo”* (O. Spengler-**“Der Untergang des Abendlandes”**, Munchen, 1918-1922). Usualmente, el comienzo de la matemática griega es asociado con el nombre de Thales de Mileto (624-546 a.C.), pues los conocimientos matemáticos elementales eran necesarios para todas las empresas comerciales o expediciones militares (entre ellas la Guerra de Troya) y eran conocidos en épocas anteriores a la de Thales. Con este se inicia lo que pudiéramos llamar “la matemática superior griega”, con una evolución de apenas 4 siglos (600-200 a.C.).

En el período que estamos analizando, Grecia estaba constituida por un conjunto de ciudades-estados que llevaban a cabo un intenso comercio, entre sí y con otros estados de la cuenca del Mediterráneo. Existen innumerables ejemplos que permiten ilustrar el desarrollo alcanzado en esta época, baste citar los magníficos monumentos y sus legados filosóficos. El lugar principal entre las escuelas griegas de filosofía natural lo ocupan sucesivamente: la jónica (siglos VII-VI a.C.), la pitagórica (siglos VI-V a.C.) y la ateniense (desde la segunda mitad del siglo V hasta nuestra era).

Un hecho fundamental es que parece que el concepto de ángulo ya era conocido por Thales, más aún *“la elaboración de este concepto parece haber sido una nueva conquista de los griegos”* (A. Szabo-**“Anfänge der Griechischen Mathematik”**, Munchen y Viena. Oldenbourg, 1969). Así, en la época de Thales con este y otros detalles, podemos decir que es el período de florecimiento de lo que vendría a ser después “la matemática superior griega”. Ellos no podían prescindir de tan importante noción, uno de sus dos presupuestos fundamentales.

Lo que es conocido de la vida y obra de Thales, el primero entre los Siete Sabios, es muy poco, Proclo, el último gran filósofo griego que vivió alrededor del 485 a.C., escribió de éste en su **“Comentarios sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides”** que *“estuvo primero en Egipto y entonces introdujo este estudio [de la Geometría] en Grecia”*. Incluso su origen es incierto, a pesar que la mayoría de los historiadores se inclina por situar su lugar de nacimiento en Mileto, otros dicen que sus padres fueron fenicios. Ciertamente Thales fue una figura de enorme prestigio (ver T.L. Heath-**“A history of**

greek mathematics", I, Oxford, 1921), se le adjudica incluso, aunque no está debidamente confirmado, la predicción del eclipse solar del 28 de mayo del 585 a.C. Comúnmente, se le asocian las siguientes demostraciones:

- Un círculo es bisectado por un diámetro.
- Los ángulos bases de un triángulo isósceles son iguales.
- Los ángulos opuestos entre dos rectas intersectadas son iguales.
- Dos triángulos son congruentes, si ellos tienen dos ángulos y un lado iguales.
- Un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

Esto está basado en la afirmación de Proclo sobre los cuatro primeros, el tercero y cuarto se mencionan en **"La historia de la geometría"** de Eudemo de Rodas. El quinto se apoya en una afirmación de Diógenes Laercio en su libro **"Vidas de eminentes filósofos"**, escrito en la segunda centuria de nuestra era.

De ser cierto o no las anteriores afirmaciones, lo que sí es indudable es que Thales es el primer hombre en la Historia de la Matemática, a quien se le adjudican descubrimientos específicos.

Después de Thales aparece Anaximandro de Mileto (610-545 a.C.), cuya importancia Burke resalta más que otros autores anteriores. Ocurre que tradicionalmente se consideraba que toda la matemática griega se había iniciado con los pitagóricos, más que con el propio Pitágoras, ahora se sabe que este no fue nunca un matemático o físico en el siglo IV cuando las demostraciones ya existían en la matemática griega. En verdad, mucha matemática fue elaborada por los no-pitagóricos contemporáneos de los primeros pitagóricos. Entre estos, Hipaso de Metaponte (?-480? a.C.), el primer pitagórico verdaderamente matemático, discípulo directo de Pitágoras. El hecho es que la demostración, en ropaje geométrico, aparece en los **"Elementos"** de Euclides, sin referencia a Pitágoras.

Los griegos evidentemente no usaron el término de origen árabe álgebra. Más, conforme a la opinión del historiador dinamarqués H. G. Zeuthen (1839-1920), mucha matemática griega se constituía de una especie de "álgebra-geométrica", tomemos como ejemplo la demostración de la fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Una cuestión fundamental en la matemática griega es con respecto a la "demostración", pues en las grandes culturas pregregias estudiadas, ésta estaba ausente. Consta que el primero en intentar la "cuadratura del círculo" fue Anaxágoras de Clazomenae (499-428 a.C.). Sin embargo, donde se constata por primera vez de manera documentada el uso de la "demostración" en la matemática griega, y por tanto, en toda la matemática, es en el neo-pitagórico Hipócrates de Chios (470-410 a.C.), que trabajaba en Atenas, de él proviene el más antiguo libro de "Elementos" de geometría, desgraciadamente fragmentado; se trataba en esencia de una tentativa de resolución de la cuadratura del círculo a través de sus lúnulas (meniskoi), donde está presente el método deductivo ampliamente sistematizado. Proclo escribió de Hipócrates de Chios: *"el descubridor de la cuadratura de la lúnula, ... fue el primero de quien se recuerda que compiló unos Elementos"*. El libro de Hipócrates también incluía soluciones geométricas a ecuaciones cuadráticas e incluía antiguos métodos de integración. Heath, en la obra antes citada, escribió que: *"él deseó mostrar que, si el círculo no puede ser cuadrado por estos métodos, ellos pueden ser empleados para encontrar el área de algunas figuras acotadas por arcos de círculos, ciertas lúnulas, y la suma de un cierto círculo y cierta lúnula"*.

La invención griega de la idea de la demostración no consiste en el uso ocasional de pruebas efectivamente convincentes. En este sentido, la matemática griega no habría sido

muy singular: otras matemáticas anteriores o coetáneas -como la de los escribas egipcios, los sacerdotes babilonios o los ritualistas hindúes- también disponían de procedimientos de cálculo y de reglas para la comprobación de resultados. La invención griega tiene tres desarrollos característicos (L. Vega-“**Los elementos de geometría y el desarrollo de la idea de la demostración**”, Mathesis 8(1992) 403-423):

1. La distinción expresa entre una demostración estrictamente concluyente y cualquier otro tipo de argumentación o de prueba más o menos eficaz y convincente.
2. La reflexión metadiscursiva sobre los supuestos y las condiciones que distinguen tal demostración, así como el análisis de sus aspectos lógicos, epistemológicos y metodológicos.
3. La proyección de sus virtudes sistemáticas con miras a la organización de un conjunto de resultados demostrados, bien al calor de una filosofía de la “ciencia demostrativa” o bien en el curso efectivo de construcción de ciertos cuerpos deductivos, “axiomatiformes”, de conocimientos matemáticos.

Todo esto contribuyó, a la creación de un cuerpo matemático con “vida propia”, en el cual se sustentaba su desarrollo independiente, prueba de esa independencia son los conocidos problemas clásicos de esta matemática.

Los problemas clásicos de la matemática griega son: el ya mencionado de **la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo**.

El problema de la duplicación del cubo, también llamado délico, fue atacado también por Hipócrates a través de dos medias proporcionales, que ahora representamos en la forma $a:x = x:y = y:b$, donde obtenemos (si ponemos $b=2a$) que $x^3 = 2a^3$, o sea, aparece el número irracional $\sqrt[3]{2}$, no reconocido como número en aquella época. Así el problema permanece sin solución satisfactoria.

Con respecto al tercer problema, debemos mencionar al sofista Hípias de Elis (460-400 a.C.) que concibió lo que Dinostrato (390-320 a.C.) llamó “quadratriz”, es decir, la curva

$$\frac{y}{a} = \frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}$$

340, éste es una colección de escritos matemáticos en ocho libros. El Libro IV contiene una amplia descripción de la cuadratriz de Hippias.

La resolución de los 3 problemas clásicos con regla y compás se mostró, en definitiva, como aporética, más esto fue constatado solamente mucho después por la matemática occidental.

Debemos decir además, que en las construcciones geométricas desempeñan gran papel, además de la regla y el compás, la introducción de los movimientos que, seguramente, desempeñó un rol importante en la construcción primitiva del pentágono estrellado regular, símbolo de los pitagóricos.

Es un lugar común poner de relieve la contribución fundamental de las matemáticas griegas al desarrollo de esta ciencia en Occidente. La designación misma de “matemáticas” y “matemáticos” o sus equivalentes en la mayoría de las lenguas europeas modernas son de origen griego, derivados del verbo “conocer, aprender”; mathema

significa en griego “lo que se enseña”, esto es, toda las formas de conocimiento, antes de que esta palabra, en plural, adquiriera en la época clásica el sentido mas especializado que nosotros le damos: “ciencias matemáticas”.

Se sabe poco sobre la enseñanza de la matemática en la Antigua Grecia. Al parecer, algunas escuelas filosóficas, en una época en la que la especialización intelectual no era todavía habitual, tuvieron un importante cometido en la formación de los matemáticos. En la época clásica se habla incluso de escuelas llamadas “científicas” como la de Chios o la de Cízico, pero ignoramos si impartían una formación general o especializada y si eran algo más que un grupo de discípulos en torno a un maestro prestigioso. Al igual que con la medicina, de la que se tienen pruebas más sólidas y antiguas de la existencia de escuelas, hay indicios de que el medio familiar pudo influir en la formación del sabio. Tenemos pocos datos biográficos de los matemáticos, pero se sabe, sin embargo, que Arquímedes (280-220 a.C.) era hijo de un astrónomo, Hipsicles (160-100 a.C.) de un matemático, y que los geómetras Menecmos (380-320 a.C.) y Dinostratos (384-322 a.C.) eran hermanos; en cuanto a la única mujer griega de la que se sabe que se dedicó a las matemáticas, Hipatía (370-415), era hija del matemático Teón de Alejandría (335-395).

En la Grecia de la época clásica no existía un estado centralizado como los del Cercano Oriente de la antigüedad, en los que muy pronto se hizo sentir la necesidad de escribas “funcionarios”. Existen tan sólo pequeñas ciudades independientes, permanentemente enfrentadas u organizaciones gentilicias cuyas estructuras estatales poco consistentes, no originaban necesidades de formación comparables a las que se observan en Egipto, Babilonia o China.

Si bien el comercio, la agrimensura o la navegación exigen un mínimo de conocimientos matemáticos y aunque el cálculo se enseña en la escuela elemental, la ciudad griega se interesa poco por la formación intelectual y técnica de los niños y jóvenes. La aparición de escuelas, algunas de las cuales llegarían a ser famosas, se debe a la iniciativa privada; así, los dos grandes pedagogos atenienses de principios de siglo IV a.C., Sócrates y Platón (428-347 a.C.), fundan cada uno su propia escuela, el primero de retórica y el segundo de filosofía.

Los dos consideraban las matemáticas como un instrumento indispensable de la formación intelectual, y ambos reconocen la dificultad de esos estudios, la “gimnasia” y la concentración intelectual que requieren. Pero sus enfoques respectivos son muy distintos: según Sócrates, las matemáticas, al igual que los debates contradictorios que tanto atraen a la juventud, deben formar mentes “bien hechas”, aunque su contenido resulte inútil para el ciudadano cuyo ideal consiste en dedicarse a la vida política. Para Platón, si las matemáticas cumplen también una función propedéutica, ésta es de muy distinta magnitud, pues deben servir de introducción al estudio de la filosofía, esto es, del idealismo platónico y también como medio de selección, pues esas matemáticas y esa filosofía, convertida en una auténtica ascesis intelectual, forman parte de un proyecto de reforma política.

En los siglos III a II a.C. las ciencias matemáticas experimentan un auge considerable. La mayoría de las obras que se conservan en esta época pertenecen a matemáticos relacionados de algún modo con Alejandría, capital de la dinastía griega de los lágidas que gobiernan a Egipto desde el 306 al 31 a.C. Es sabido que esos reyes fomentaron considerablemente una política de mecenazgo, que antes se practicaba, en ocasiones, solo en beneficio de individuos aislados, muchas veces poetas. Se crearon instituciones, las

más conocidas de las cuales son el Museo y la Biblioteca de Alejandría. No cabe poner en tela de juicio el impulso que dieron esas instituciones a los estudios literarios. Salta menos a la vista, tal vez, la correlación con el desarrollo científico, pero tampoco puede desecharse, ya que el clima que así se había creado sólo podía ser favorable.

Ignoramos, sin embargo, si los grandes sabios de la época (Herófilo de Calcedonia, Euclides (365-300 a.C.), Stracton de Lámpsaco, Aristarco de Samos (310-230 a.C.), Eratóstenes de Cirene (262-190 a.C.), Apolonio de Perga (250-190 a.C.)), cuya presencia en Alejandría está documentada o es probable, formaron discípulos, impartieron enseñanzas o dieron simples conferencias en el Museo mismo o con carácter privado; así, no hay ninguna seguridad de la existencia de una escuela como tal en Alejandría. De hecho, el Museo sólo funcionó como una universidad en la época del Imperio Romano, siendo emulado entonces en Efeso, Atenas, Esmirna y Egina.

LOS TEXTOS MATEMÁTICOS

Junto a las matemáticas puras, propias de la tradición griega, existe también un corpus de textos matemáticos que denominaremos “calculatorios”, bastantes parecidos a los de las matemáticas egipcias, babilónicas o chinas. Así, un corpus de textos matemáticos bastantes tardíos, atribuidos a Herón de Alejandría (65-125), compiló y utilizó la época bizantina probablemente para dar formación matemática a los técnicos. Al igual que en los textos babilónicos o egipcios, los problemas planteados se refieren explícitamente a una situación concreta, incluso si ésta no es muchas veces más que un artificio con fines pedagógicos.

Nada similar existe en los tratados clásicos de Euclides, Arquímedes o Apolonio, quienes no prestan la menor atención a las aplicaciones prácticas. La exposición euclidiana de la teoría de los números no recurre para nada a ejemplos numéricos; las obras que se han conservado parecen obedecer a las exigencias de una clara delimitación entre la investigación abstracta y las aplicaciones prácticas. No obstante, si hay una perfecta separación de los temas, los mismos autores llevan a cabo trabajos tanto de matemáticas puras como aplicadas.

Cuatro son los rasgos fundamentales que caracterizan esta parte de las matemáticas griegas que por convención hemos llamados “puras”.

- **La organización deductiva:** los tratados clásicos como los elementos están organizados deductivamente; se llega a los resultados por una demostración, bien partiendo de resultados demostrados previamente, bien de principios expuestos al comienzo; cabe decir que se trata de un procedimiento axiomático parcial, este procedimiento destaca el aspecto lógico y necesario de las matemáticas. Hay que señalar, sin embargo, que no siempre es fácil dissociar el aspecto retórico, que permite conseguir la aquiescencia del lector o del alumno y percibe una eficacia psicológica y pedagógica, del aspecto lógico que se concentra en la arquitectura necesaria y objetiva del razonamiento.
- **La orientación geométrica:** incluso en la teoría de los números, la estática o la astronomía, la orientación de los tratados demostrativos es fundamentalmente geométrica. Las matemáticas antiguas recurrieron a simbolismos varios para anotar los números y las fracciones, y también utilizaron abreviaturas. Pero fue en el empleo de

las figuras geométricas donde más lejos llevaron los griegos sus investigaciones sobre las “representaciones simbólicas”: la posibilidad de descomponerlas en elementos, de determinar las reglas de construcción autorizadas y el descubrimiento de propiedades que parecen estar ya “presentes” en ellas son aspectos todos ellos que se combinaban ya a la perfección con la exposición deductiva.

- **El ideal de ciencia desinteresada:** las matemáticas deben estudiarse por afición al saber en sí.
- **Matemáticas y Filosofía:** este desarrollo de las matemáticas puras es contemporáneo del de la filosofía.

LOS FILÓSOFOS Y LAS MATEMÁTICAS

De hecho, al mismo tiempo que van cobrando auge las matemáticas, surge una especulación a la vez metodológica e ideológica sobre las ciencias. La clasificación de Gemino (130-70 a.C.), astrónomo y matemático griego del siglo I a.C., constituye un buen ejemplo de ello. Esta clasificación, supone la existencia de un corpus considerablemente desarrollado y muy diversificado, retoma y hace suya una diferenciación de sus posibles aplicaciones.

Según Aristóteles (384-322 a.C.), las matemáticas estudian propiedades que pueden ser abstractas de los objetos del mundo físico. Además las matemáticas al igual que todas las ciencias demostrativas, se basan en principios, de modo que una ciencia puede presuponer otra o, en palabras de Aristóteles “estar subordinada a otra” a la geometría. Existe, pues, una jerarquía de las ciencias que es de orden lógico. Es preciso distinguirla de una oposición, que por lo general recalcan todos los autores griegos, entre las matemáticas “utilitarias” y las matemáticas “desinteresadas”. Sólo estas últimas son dignas, a juicio de Aristóteles, de una educación liberal: “ser libre” significa ser su propia causa.

El conocimiento “de adorno” tiene, pues, la primacía sobre las técnicas necesarias; la ciencia desinteresada, que tiene su propio fin en sí misma, es la actividad suprema. Para Platón, las matemáticas de los Bárbaros, por muy prestigiosas que sean sus civilizaciones, no son arte, porque no están libres de las coacciones de la necesidad. Así pues, la filosofía griega entremezcla consideraciones de dos enfoques distintos, el metodológico y el ideológico.

Si los tratados de ópticas y astronomía adoptan la forma de la exposición geométrica, a saber la deducción, que se presta particularmente bien a la eliminación de cuanto pertenece al mundo de lo “sensible” y lo “práctico”, no por ello resulta fácil saber cómo los matemáticos integraban esta manera de concebir sus actividades. Por otra parte, no hay que caer en la tentación de superponer la distinción moderna “puras”/“aplicadas” a la distinción antigua “inteligible”/“sensible”, ya que no existe ninguna coincidencia entre ellas.

La referencia al ideal de ciencia “desinteresada” obliga a plantear el problema de la motivación del desarrollo de las matemáticas. Hay que distinguir los fenómenos que han podido actuar como causas externas y los que se podrían considerar causas internas. Entre los primeros, destaquemos la importante función que han desempeñado la óptica y la astronomía que, para nosotros, forman parte de la Física y que en la antigüedad se

clasificaban dentro de las Matemáticas. Debe sumárseles la estática o ciencia de los equilibrios.

¿Qué sabemos de las motivaciones internas? Es posible tratar de descubrirlas en los prefacios con lo que los autores matemáticos, al parecer desde Arquímedes, inician sus tratados; se observa que, lejos de ser producto de características psicológicas propia de la mentalidad griega, la investigación desinteresada presupone la existencia de una comunidad de matemáticos sometidas a ciertas reglas.

Téngase en cuenta, en primer lugar, que esos matemáticos no estiman que tengan que justificar su práctica de la ciencia por sí misma; es algo que no requiere ninguna explicación. A lo sumo precisan por qué se dedican a las matemáticas y no a la Física o a la Teología; evidentemente porque son seguras y rigurosas, en la medida en que se ocupan de un objeto “estable” (a diferencia de la Física) pero, no obstante, “accesible “ (a diferencia de la Teología).

En la época helenística se observa que esos matemáticos constituyen una comunidad “internacional” cuyos miembros están diseminados en el perímetro de la cuenca mediterránea (Grecia, Asia Menor, Egipto, Sicilia...). Con todo, mantienen relaciones personales, bien porque se visiten unos a otros, bien gracias a la circulación de sus obras. Se trata ante todo de plantear problemas a los colegas, de resolver lo que ellos mismos han planteado, de criticar incluso las soluciones imperfectas que otros han propuesto. Así, algunos matemáticos adquieren una autoridad reconocida; las publicaciones se someten a dictámenes y ellos se encargan de darlas a conocer a quienes estiman dignos. Otros son impostores a los que se desenmascarará en su momento planteándoles un problema imposible que pretenderán, empero, resolver. Desde luego, todo ello sucede en el marco de relaciones establecidas entre individuos y no en el de una institución en el sentido moderno de la palabra.

En definitiva el ideal de las matemáticas “desinteresadas” parece depender de la existencia de un grupo dentro del cual los problemas de rivalidad y competencia recuerdan bastante algunas características de la comunidad científica actual.

Ahora bien, no conviene exagerar demasiado esta comparación, ya que la diferencia de escala entre una y otra comunidad es muy perceptible: el número de eruditos de la época helenística, sobre todo de matemáticos, no era superior a algunos centenares. Tampoco caben dudas acerca de la precariedad de la comunidad que forma, a falta de una auténtica institución: así, a partir de la época romana los mejores autores (Claudio Ptolomeo (85-165), Pappus (290-350)) parecen preocuparse esencialmente por perfeccionar los resultados ya obtenidos; aparentemente, la emulación y la búsqueda de la novedad que caracterizan al período anterior han desaparecido.

GÉNESIS DE LAS DISCUSIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

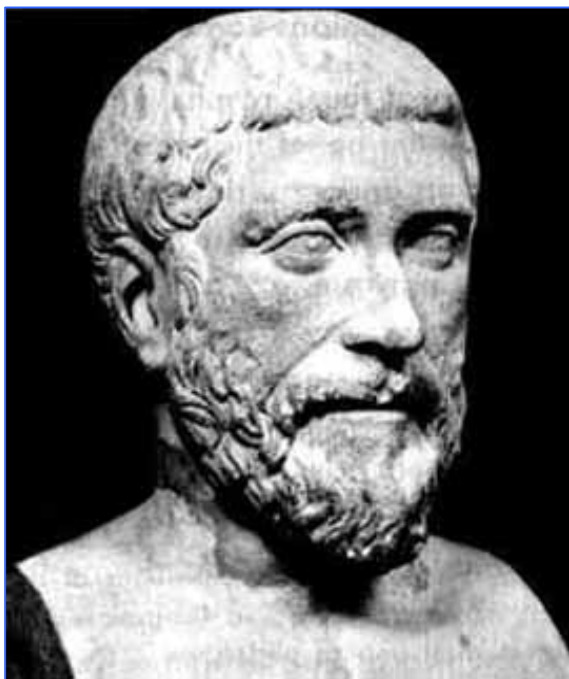
Acerca de las causas de transformación de la matemática en ciencia existen varias hipótesis. Al parecer no hay duda en que las primeras teorías surgen en la antigua Grecia entre los siglos VI y III a.C.

Para unos, la invención de la moneda que influiría directamente en el incremento del comercio fue uno de los impulsos principales para la formación de un nuevo tipo de hombre, el comerciante-navegante con espíritu independiente, con riquezas, esclavos y

suficiente tiempo para reflexionar sobre el ¿por qué? de los hechos. La situación geográfica de la civilización helena, su origen étnico, su personalidad curiosa, inteligente, sensible, racionalista; la ausencia de religión completamente establecida y sin instituciones dogmáticas; todo esto -y quizás más-, logró crear condiciones objetivas y subjetivas propicias para el salto cualitativo necesario en la conformación de la matemática como ciencia.

No es asombroso que en la matemática los griegos vieran, no sólo un medio práctico útil, sino ante todo, la expresión de la verdad y la naturaleza de las cosas. En el contexto de concepciones antropomórficas y mitológicas donde lo real estaba muy cerca de lo fantástico, la matemática aparece como un conocimiento de una naturaleza completamente distinta, cuya veracidad no promovía ninguna duda, cuyos hechos primarios eran claros y las conclusiones eran irrevocables, absolutas.

Así se cosmologizó y mistificó la matemática, haciendo de ella el punto de partida para todas las reflexiones en la descripción de la realidad. Esta mistificación de la matemática, encuentra su expresión en la escuela de Pitágoras de Samos (580-520). La escuela de Pitágoras fue a la vez un partido político, que dominó sobre todo la ciudad de Crotona (al sur de Italia), cuya base social era la aristocracia esclavista, y una escuela filosófico-científica y además, una hermandad ó secta secreta. Analizaremos sólo los aportes y errores de los pitagóricos en relación con el desarrollo del contenido y los fundamentos de la matemática.



La tesis fundamental del pitagoreísmo consiste en que “todas las cosas son números”. El sentido de esta aseveración no se reduce a la consideración natural que pudiera hacer cualquier científico contemporáneo de que en todo pueden observarse relaciones cuantitativas y que cada ley puede ser expresada por medio de relaciones matemáticas. La filosofía griega de este período se orientaba a la búsqueda del primer fundamento del mundo, la base con la cual se podía explicar todo lo acontecido o por suceder. Si Thales consideró tal principio en el agua, Heráclito en el fuego y Anaximandro en las partículas indivisibles llamadas “apeironas”, entonces para los pitagóricos precisamente los números jugaban tal papel, determinando, de cierta manera, los fenómenos y procesos naturales. Las propiedades de las cosas se

consideraban en correspondencia con las propiedades de tal o más cual número o relación numérica, como un reflejo de la armonía numérica.

La filosofía en los pitagóricos se convirtió en “la mística de los números”, y las figuras geométricas sobre el mundo se reducían a su “armonía numérica”. Todo lo que para el científico contemporáneo no sería más que una simple casualidad, los pitagóricos lo

representaban como repleto de profundo sentido y expresión del “dios del ritmo y la armonía”.

Así, las formas matemáticas (número y figura) se transformaron en herramienta universal para la comprensión de todas las cosas. Citemos a Filolaos (?-390 a.C.) que vivió en Tebas hacia el año 400 a.C. y que es el primer pitagórico del que nos han quedado algunos fragmentos importantes:

“Todas las cosas accesibles al conocimiento poseen un número, puesto que sin el no podemos comprender ni conocer nada”.

El criterio de veracidad en los pitagóricos no está en la demostración lógica de unas proposiciones por otras, ni está en la comparación de ellas con la experiencia práctica, ni tampoco en la reducción a cuestiones evidentes, sino en la construcción de cierto isomorfismo determinado por relaciones matemáticas en su estructura esencial.

En lo que concierne a la naturaleza de las leyes matemáticas, a las raíces de su veracidad incondicional los pitagóricos del período arcano no reflexionaron sobre estos problemas. Sin embargo, en Platón ya encontramos cierta teoría en este sentido.

Las verdades matemáticas para Platón representan impresiones sobre la verdad en sí misma, las cuales el alma obtiene al pasar al mundo más perfecto, el mundo de las ideas. El conocimiento matemático es por esto simplemente recuerdo, necesita, no experiencia sino contemplación de la naturaleza, sólo “visión con la inteligencia”.

El matemático, según Platón, estudia esencias singulares e ideales, a diferencia de las esencias dadas en la experiencia que son empíricas. “Cuando los geómetras, dice Platón, utilizan dibujos y hacen de ellos conclusiones, su pensamiento se refiere no al dibujo sino a aquellas figuras semejantes a las cuales hizo el dibujo... Las figuras geométricas en sí mismas (a diferencia de los dibujos) se pueden ver sólo con una “vista pensante”.

En estas reflexiones de Platón, por primera vez, se considera el problema sobre la especificidad del objeto de la matemática, el cual como sabemos es aún hoy unos de los fundamentales de la filosofía de la matemática.

Junto con las concepciones pitagóricas, considerando los objetos matemáticos como las últimas esencias de la estructura del mundo, existió, aunque en forma insuficientemente expresada, pero materialista, otra filosofía de las matemáticas, surgida en el atomismo de Leucipo (480-420 a.C.) y Demócrito (460-370 a.C.).

La idea de los atomistas tenía en sí misma un valioso principio heurístico. Es sabido que partiendo de ellas el matemático griego Antifonte (470-410 a.C.) elaboró un método de cálculo de áreas de figuras curvilíneas que fue el primer reflejo de cálculo infinitesimal. Este método consistía en lo siguiente: en una figura curvilínea se escribía una figura rectilínea con relación a la cual era suficientemente evidente que en el aumento del número de lados, su área se aproximaba al área de las figuras curvilíneas. Si el área de las figuras rectilíneas se podía calcular en cada etapa del cálculo, entonces se suponía que el área de la figura original era igual al área de la figura rectilínea en su última división, esto es cuando sus lados eran tan pequeños que coincidían con las partículas que constituían el contorno de las figuras curvilíneas. Para la verificación de tal método era suficiente suponer que la cantidad de pasos necesarios para la aproximación era finita. Esto permitía superar las paradojas, relacionadas con la suposición de la división infinita del segmento.

El método de Antifonte fue posteriormente perfeccionado en el sentido lógico por Eudoxio de Cnido (408-355 a.C.) y Arquímedes de Siracusa y pasó a la historia bajo el nombre de Método de Exhaución. En el Método de Exhaución, una parte importante del razonamiento la constituye la demostración rigurosa de que el área (volumen) de la figura inscrita al elevar el número de lados (aristas) difiere del área (volumen) de la figura circunscrita en una cantidad tan pequeña como se quiera, esto es, la demostración de lo que Antifonte consideraba evidente.

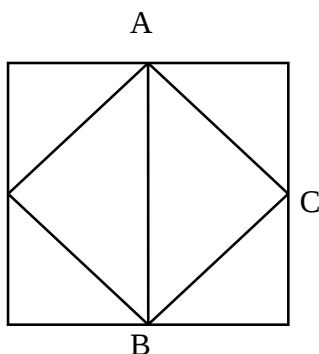
La mayoría de los matemáticos de la época del platonismo refutaron los razonamientos atomistas en la geometría, por no considerar a la esencia de la Matemática, sino de la Física. Las ideas atomista aparecieron sólo en el siglo XVII, en los trabajos de Kepler, Cavalieri y Vieta.

Hemos dicho que es con Pitágoras y su escuela cuando se puede hablar, por primera vez, de una ciencia de los números enteros y fraccionarios. ¿Qué puede hacer ese pensamiento pitagoriano después de haber especulado sobre los números? Todo pensamiento abstracto, negación de lo real, no puede más que negar esta negación en una síntesis explicativa del mundo. Como escribe Aristóteles: *“Los pitagóricos pensaron que sus principios eran los principios de todas las cosas”*.

La doctrina pitagórica se resume en la máxima: *“Las cosas son números”*. Los pitagóricos conocían tres medias a las que se denominan aritmética, geometría y armónica. Atribuyeron un valor de perfección a esas relaciones numéricas que introdujeron en música, en el dominio moral, en sus teorías de la justicia y de la ocasión.

Sus ideas simples quedaron sin desarrollo, en primer término, a causa de su propio carácter de perfección, puesto que si se ha descubierto la verdad absoluta no susceptible de corrección, todo desarrollo ulterior no tiene razón de ser, es decir, es imposible y, además, porque esas ideas no eran susceptibles de verificaciones positivas: esta síntesis pitagórica es una síntesis idealista.

Por el contrario, la teoría pitagórica de las mónadas puede ser considerada como la primera teoría de física matemática. El punto, según Pitágoras, es una unidad que tiene una posición, es decir, que es análogo a un pequeño grano de arena. Todos los puntos son idénticos. Un segmento AB es una sucesión de puntos y encierra un número entero de mónadas. La medición de un segmento cualquiera AB se efectúa comparándole a un segmento unidad. Al contener esos dos segmentos cada uno un número entero de mónadas, la medida del segmento AB es número fraccionario. Todo cuerpo sólido contiene igualmente un número entero de mónadas, y es por eso que las propiedades aritméticas de los números van a explicar el universo.



Más, aunque la Geometría no sea aún, en la época de Pitágoras, una ciencia deductiva, está no obstante, lo suficientemente avanzada para arruinar la concepción misma de las mónadas. Eso será una consecuencia del teorema de geometría que lleva el nombre de Pitágoras, aunque no sepamos exactamente si Pitágoras lo demostraba en el caso general. Consideremos un cuadrado y el cuadrado construido sobre la diagonal del primero. El examen de la figura muestra que la superficie del cuadrado grande es dos veces la del pequeño. Sabemos que la superficie de un cuadrado tiene por medida el cuadrado del número que mide su lado, es decir, el producto de ese número multiplicado por sí mismo:

$$a \times a = a^2.$$

Sea P el número de mónadas que contiene AB, Q el número de mónadas que AC. Se tiene, de acuerdo con lo que se ha dicho acerca de las superficies:

$$Q^2=2P^2.$$

Lo que viene decir que el cuadrado de la fracción Q/P es el número 2.

Simplifiquemos la fracción Q/P si eso es posible y sea q/p la fracción irreducible igual q/p=Q/P. Debemos tener $q^2=2p^2$.

Desde ahora, si q es impar, su cuadrado lo será también y la igualdad precedente es imposible. Es necesario, pues, que q sea par, es decir, que $q=2q'$. Tenemos:

$$4q'^2=2p^2.$$

Y dividiendo por 2:

$$2q'^2=p^2.$$

Pero si p es impar, su cuadrado también lo es. Es necesario, por tanto, que p sea par: $p=2p'$. De ello resulta que 0p y q son ambos pares, lo que es imposible, puesto que la fracción q/p es irreducible. Nos vemos así llevados a una contradicción: la diagonal de un cuadrado no puede estar en relación racional con su lado.

Es, por otra parte, fácil mostrar que la teoría de las mónadas está en contradicción con la experiencia: esa será una consecuencia de la obra de Zenón de Elea (490-430 a.C.) y de los eleatas.

Zenón va, como lo ha señalado Paul Tannery el primero, a reducir al absurdo las ideas de Pitágoras, valiéndose de dos argumentos que se han hecho célebres.

Zenón observa, en su primer argumento, que para ir de A a B es necesario pasar por el medio C del segmento AB, para ir de C a B por el medio D del segmento CB y así sucesivamente. No llegamos jamás a B, puesto que hay que pasar por una serie de medios que no tiene fin, puesto que todo segmento tiene un medio y todo punto una anchura, posiblemente muy pequeña, pero existente en todo caso, es decir, no nula, según la teoría de mónadas.

El segundo argumento de Zenón estudia la persecución de Aquiles que corre muy rápido detrás de una tortuga, que tiene sobre él una ventaja AB. Mientras que Aquiles liquida esa ventaja AB corriendo de A a B, la tortuga ha llegado a C. Mientras que Aquiles liquida su

nuevo retardo BC, la tortuga llega a D y así sucesivamente: por pequeña que sea la distancia que separa Aquiles de la tortuga, es al menos igual, en la teoría de las mónadas, a la anchura de un punto. Mientras que Aquiles recorre la distancia la tortuga se ha desplazado, se decir, ha ido de un punto a otro. Está, en consecuencia, separada aún de Aquiles por lo menos por la anchura de un punto. Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga.

Pero nosotros sabemos por experiencia que podemos ir de A a B.

Sabemos que Aquiles atrapará a la tortuga.

La teoría de las mónadas está en contradicción con los datos inmediatos de la información.

Ya hemos dicho más arriba, que con Tales de Mileto, empieza la historia de la matemática como un cuerpo de conocimientos deducibles a partir de ciertas suposiciones básicas por medio de la lógica corriente (el buen sentido), que según Descartes *“es la cosa mejor repartida del mundo, puesto que cada uno piensa estar tan bien provisto de el, que incluso aquellos que no son más difíciles de contentar en otra cosa cualquiera no acostumbran a desear más del que tienen”* (**“Discurso del Método”**, Sarpe, Madrid, 1984). Sin embargo, como acabamos de apuntar, al comienzo mismo de este período, en el siglo VI a.C., aparece la primera gran crisis en el desarrollo de la disciplina, al descubrir la existencia de los números irracionales, es decir, no expresables por medio de una fórmula **finita** en la que entran ciertos números enteros. La armonía de los números enteros y de las relaciones entre ellos, en el estudio de la cual tanto avanzaron los pitagóricos y que parecía regir todo el Universo, se estrelló contra la diagonal del cuadrado de lado unitario, que resultó inconmensurable, como ellos mismos lo demostraron. Todo esto será retomado en la próxima conferencia.

ACERCA DEL TEOREMA DE PTOLOMEO.

En 1998 se conmemoró el 465 aniversario de la impresión del primer texto de trigonometría **“Sphericus cum Tabulis Sinuum”** (terminado en 1461 y publicado en 1533) del alemán Johann Müller, también conocido con el nombre de Regiomontano (1436-1476), latinización derivada del nombre de la ciudad de Königsberg, donde nació.

En este libro se tratan, sistemáticamente, todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos a partir de los elementos dados. Como un dato de interés, podemos decir que Regiomontano utilizó los números irracionales en su trabajo, números que surgían en los casos de inconmensurabilidad geométrica y que no estaban nada en boga en esa época, por otra parte, aplicó el álgebra a la resolución de problemas geométricos. De este modo, fue en esencia suprimida la tradición antigua y descubierta una nueva concepción del objeto de la trigonometría y sus problemas.

Sin lugar a dudas, importancia fundamental en la consolidación de la trigonometría lo jugó Claudio Ptolomeo de Alejandría, quien organizó y corrigió muchos de los trabajos anteriores en este campo, tal y como nos lo presenta en su **“Almagesto”** (así llamado por los árabes y que significa **“La gran recopilación”**), un trabajo sobre el sistema geocéntrico que sirvió de modelo durante más de quince siglos y que es la teoría de epiciclos de Apolonio (262-190 a.C.), en forma más amplia y mejorada. Lo que enseña en detalles trigonométricos, en general no es nuevo, pero está presentado en forma muy hábil y metódicamente.

Una de las necesidades de Ptolomeo era una tabla que diera las longitudes de las cuerdas de un círculo, correspondiente a varios ángulos centrales. Esta tabla, que es la

equivalente hoy en día a la de los senos, está calculada por él de medio en medio grado y se basa en la división sexagesimal del radio y prevé interpolaciones para los minutos. Para pasar a exponer esto con más detalle, veamos primeramente un teorema que, sin lugar a dudas, puede figurar como uno de los teoremas más conocidos de la Geometría Elemental: el Teorema de Ptolomeo, el cual concierne con cuadriláteros inscritos y que es fundamental en la ya mencionada teoría geocéntrica del Universo, que surgió una centuria después del comienzo de nuestra era. El uso que hizo Ptolomeo de este teorema y su aplicación al estudio de los polígonos regulares será también presentado aquí.

Teorema de Ptolomeo. Si un cuadrilátero es inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma del producto de los pares de lados opuestos.

Diversas demostraciones de este teorema pueden encontrarse en múltiples textos, aquí solamente escribiremos la conclusión del teorema, para mejor comprensión, con x , y diagonales y a , b , c , d los lados:

$$xy = ac + bd. \quad (1)$$

Volvamos al punto en el cual habíamos hecho mención del uso del teorema por parte de Ptolomeo: la construcción de la tabla de cuerdas. Para construir esta tabla, él usó la relación, la cual en términos modernos es conocida como el teorema de adición para senos:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}a \cos b + \cos a \text{sen} b. \quad (2)$$

Para mostrar como esto fue efectuado, observemos primero que si un ángulo es inscrito en un círculo cuyo diámetro es la unidad, el seno del ángulo es representado como la cuerda que subtiende el ángulo. Así, si $\text{sen} q = AC$; para AB' diámetro:

$$\angle AB'C = q, \text{ sen } q = AC/AB' = AC.$$

Ahora tomemos un polígono inscrito, una de cuyas diagonales es un diámetro, y por simplicidad, la unidad de longitud se tomará igual al diámetro del círculo. Por el teorema de Ptolomeo se verifica (1).

Haciendo $x=1$, $y=\text{sen}(a+b)$, $a=\text{sen}a$, $b=\text{sen}b$, $c=\cos b$ en (1) se obtiene (2).

Con ayuda de esto, expresado en términos de los lados del cuadrilátero, Ptolomeo calculó una tabla de longitudes de cuerdas, en vez de los senos y cosenos.

APLICACIÓN DEL TEOREMA A LOS POLÍGONOS REGULARES

1. Caso del rectángulo.

Si el cuadrilátero inscrito es un rectángulo cuyos lados adyacentes son a y b y cuyas diagonales son c , el teorema se reduce al teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Como la prueba

del teorema de Ptolomeo es independiente del cuadrilátero inscrito, tenemos, por tanto, una prueba muy simple del teorema de Pitágoras.

II. El Pentágono regular.

Considere un pentágono regular inscrito en un círculo cuyo radio es r . Sea a la longitud de un lado y b la longitud de una diagonal del pentágono. Aplicando el teorema de Ptolomeo al polígono BCDE tenemos:

$$d^2 = ad + a,$$

la solución de esta ecuación cuadrática, d en término de a es:

$$d = a(1 + \sqrt{5})/2.$$

Dibujemos ahora la perpendicular AM a la diagonal BE . En el triángulo rectángulo ABM tenemos, de lo anterior y del teorema de Pitágoras que $AB = a$,

$$BM = a(1 + \sqrt{5})/2, \quad MA = a(10 - 2\sqrt{5})^{1/2}/4$$

y como $\angle MBA = 36^\circ$, $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = (10 - \sqrt{5})^{1/2}/4$, $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = (1 + \sqrt{5})/4$.

Para obtener la relación entre el lado del pentágono y su radio, consideremos el triángulo rectángulo OAN . Como el ángulo $\angle NOA = 36^\circ$, $\angle AN = r \sin 36^\circ$, y el lado:

$$a = r(10 - 2\sqrt{5})/2,$$

el radio del círculo inscrito es:

$$ON = r \cos 36^\circ = r(1 + \sqrt{5})/4,$$

el área del pentágono es:

$$5 ON AN = 5r^2(10 + 2\sqrt{5})^{1/2}/8,$$

en términos del lado a , el área es:

$$a^2(25 + 10\sqrt{5})^{1/2}/4.$$

III. El Hexágono regular.

Si los vértices de un hexágono regular, cuyo lado es a son numerados como 1, 2, ..., 6 y el teorema es aplicado al cuadrilátero 1346, obtenemos la ecuación $x^2 + a^2 = 4a$, donde x es la longitud de una pequeña diagonal del hexágono. Así $x = a\sqrt{3}$.

IV. El Heptágono regular.

Por comodidad, consideremos que el lado del heptágono tenga longitud unitaria, los vértices sean numerados consecutivamente del 1 al 7 y representemos las diagonales 13 y 14 por x e y , respectivamente. Entonces, de los cuadriláteros 1234 y 1347 obtenemos las ecuaciones:

$$y^2 = xy + 1,$$

por eliminación de y de este sistema, se obtiene la ecuación

$$\text{cúbica } x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Una inspección muestra que esta ecuación no posee raíces enteras. Por tanto, ella no posee raíces racionales (ver I. Vinogradov-**“Fundamentos de la teoría de los números”**, Editorial MIR, Moscú, 1977). De aquí seguimos que x no puede ser construida con regla y compás y así, consecuentemente, es imposible construir un polígono regular de siete lados, con regla y compás.

V. El polígono regular de nueve lados.

Designando los vértices del polígono, cuyo lado posee longitud unitaria, por los números del 1 al 9, y las diagonales 13, 14, 15 por x , y , z , respectivamente, obtenemos en sucesión, de los polígonos 1234, 1245 y 1456, las ecuaciones:

$$x^2 = y + 1, y^2 = xz + 1, xz = y + z.$$

De este sistema, obtenemos que x satisface la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$. Por un razonamiento similar al del punto anterior, tenemos que este polígono no puede ser construido por medio de regla y compás.

De la primera y tercera ecuación de (3), se tiene que $z = x + 1$.

Esto ofrece un interesante resultado: “Una diagonal principal de un Nonágono es igual a la suma de una diagonal menor y un lado”.

VI. El polígono regular de 17 lados.

Este polígono posee diagonales de siete diferentes longitudes. Como antes, la longitud de un lado es tomada igual a la unidad; x, y, z, t, u, v, w representan las longitudes de las diagonales en orden creciente. Los polígonos 1234, 1345, 1456, 1567, 1678, 1789, 189 10 nos llevan al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + y, xy = x + z, \\ xz &= y + t, xt = z + u, \\ xu &= t + v, xv = u + w, \\ xw &= v + w, \end{aligned}$$

de las seis primeras de estas, obtenemos los siguientes valores de $y, \dots, w$ en términos de x :

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 1, z = x(x^2 - 2), t = x^4 - 3x^2 + 1, u = x(x^2 - 1)(x^2 - 3), \\
 v &= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1, w = x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2),
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

si estas dos últimas son sustituidas en la ecuación $xw=v+w$, el resultado es

$$x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1 = 0,$$

una raíz de la cual es $2\cos(\pi/17)$.

Conociendo la teoría de Gauss del polígono de 17 lados, es claro que la diagonal menor puede ser construida con regla y compás. Aunque aquí no aparece convenientemente deducida, el método de construcción es basado en la ecuación anterior de 8vo grado. El trabajo muestra además, que cada diagonal del polígono es una función racional entera de la menor diagonal.

VII. Otros resultados.

Algunos de estos resultados pueden ser generalizados para los polígonos regulares de n lados. Así, por ejemplo, es fácil ver que todas las diagonales de un n -ágono regular son expresables como polinomios de la menor diagonal. Volviendo al sistema (3), las variables pueden ser consideradas como sigue: $x=2\cos q$, $y=1+2\cos 2q$, $z=x+2\cos 3q$,... haciendo las eliminaciones necesarias, obtenemos las fórmulas del ángulo múltiple para el coseno:

$$\cos 2q = 2\cos^2 q - 1, \cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q, \dots$$

Asimismo, si S_n designa la longitud del lado del n -ágono regular inscrito en el círculo unidad, entonces el lado del $2n$ -ágono regular tiene la longitud:

$$S_{2n} = (2 - (4 - S_n^2)^{1/2})^{1/2},$$

de esta fórmula y del hecho de que S_4 (lado del cuadrado) sea igual a $\sqrt{2}$ se deduce:

$$S_8 = (2 - \sqrt{2}), S_{16} = (2 - (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2}, S_{32} = (2 - (2 + (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2})^{1/2},$$

etc. Como fórmula general obtenemos, para $n > 2$, una suma que incluye $n-1$ raíces cuadradas sucesivas. El perímetro del 2^n -ágono regular inscrito será $2^n S_{2^n}$. Al tender n a infinito, el 2^n -ágono regular tiende a confundirse con la circunferencia y, en consecuencia, $2^n S_{2^n}$ tiende a la longitud de la circunferencia del círculo unidad, que por definición es 2π .

Obtenemos así, sustituyendo m por $n-1$ y suprimiendo el factor 2, la fórmula asintótica para π :

$$2^m (2 - (2 + (2 + \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \rightarrow \pi,$$

que incluye m raíces cuadradas sucesivas. Los resultados obtenidos poseen el siguiente rasgo característico:

Los lados del 2^n -ágono, del $5 \cdot 2^n$ -ágono y del $3 \cdot 2^n$ -ágono, pueden construirse mediante procesos de sumas, restas, productos, divisiones y extracciones de raíces cuadradas.

Por otra parte, la aplicación del Teorema de Ptolomeo a la construcción de polígonos regulares, puede ser completada, remitiéndonos al trabajo de T. I. Zamfirescu-**“Construcciones Geométricas con regla, compás con trisector”**, St. si cerc. math., XV, 3 1964, 405-411 (en rumano), en el que se demuestra que:

“Para que un polígono regular de n lados, se pueda construir con regla y compás, con trisector, es necesario y suficiente que:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r,$$

donde a, b, r son enteros positivos y $p_3, \dots, p_r$ son números primos de la forma $p_i = 2^{z(i)} \cdot 3^{w(i)} + 1$, con $z(i)$ natural y $w(i)$ entero positivo”.

Así, en el caso del heptágono regular, se tiene que $n = 7 = 2 \cdot 3 + 1$ lo que confirma lo dicho en ese punto.

SOBRE EL SISTEMA DEL MUNDO

Para que se tenga una idea de la importancia de la obra de Ptolomeo, al margen de su importancia en la enseñanza de la época, tenemos que Nicolás Copérnico (1473-1543) desde 1524, circula un pequeño manuscrito sobre el sistema del mundo de Ptolomeo y donde aparece la hipótesis de que es el Sol y no la Tierra al centro del sistema solar. Sin embargo, aún a fines del siglo XVI esta teoría no es ni muy conocida y mucho menos aceptada o divulgada (Bruno fue quemado en la hoguera en 1600 y Galileo abjuró de sus ideas, en proceso escandaloso, en 1633, ver Conferencia 6), a pesar de que ya había sido hecha la impresión de su obra **“De revolutionibus orbium coelestium”** (1543) y la traducción inglesa de esta (1576).

En honor a la verdad, Ptolomeo siguiendo el camino de Hiparco, escogió una de las varias explicaciones del movimiento planetario e interpretó los hechos mediante una ingeniosa combinación de órbitas circulares o epiciclos.

Pero había otras explicaciones, como la de Aristarco de Samos (siglo III a.C.), el amigo de Arquímedes, que suponía que la Tierra giraba alrededor del Sol. Por ello, cuando Copérnico sustituyó la teoría ptolemaica por su propio y conocido sistema heliocéntrico, estaba restando una teoría muy antigua al lugar que le correspondía, inclusive, en el manuscrito original de Copérnico, se dedica un largo pasaje al filósofo griego, que por consiguiente era bien conocido por el astrónomo polaco.

Por todo lo anterior, no podemos sustraernos a la tentación de dedicarle unas palabras al sistema de Ptolomeo y al sistema heliocéntrico, como justo homenaje, por lo que han representado en la historia de la humanidad.

En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años; su éxito se debía a que concordaba perfectamente con la imagen que el hombre tenía de sí mismo y con la física primitiva de Aristóteles. Ciertamente es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. Pero, a decir verdad, la astronomía siguió enfrentada después de Copérnico con tantos problemas como antes, ya que el calendario continuó siendo el mismo y las previsiones sobre los planetas apenas mejoraron. Más aún, los “escépticos”, al seguir considerando a la Tierra como punto fijo de referencia, veían en el sistema de Copérnico un hábil modelo matemático, un poco más complicado que el de Ptolomeo, pero que no constituía una verdadera descripción del mundo físico. En verdad, nada probaba la evidencia de una Tierra en movimiento y de un Sol central inmóvil. Galileo observó más tarde, que nunca admiraría bastante a quienes aceptaron el sistema de Copérnico a pesar del testimonio de sus sentidos.

En evidente que Copérnico no tenía la intención de renovar los instrumentos matemáticos de la astronomía tradicional.

Al igual que Hiparco y Ptolomeo, describió los movimientos de los planetas elaborando unos modelos geométrico-cinéticos que simulaban del modo más exacto posible, los fenómenos observables.

A estos modelos geométricos había que darles unos parámetros numéricos derivados de la observación, para ello Copérnico, al igual que muchos astrónomos árabes o latinos, se basó en los datos consignados por Ptolomeo, completándolos con algunas observaciones propias. En realidad, la astronomía ptolemaica tenía dos dificultades fundamentales. En primer lugar, Ptolomeo tuvo que utilizar toda una gama de modelos geométricos para explicar los movimientos de los distintos planetas y se vio obligado además, a proporcionar a cada modelo un movimiento circular, con una revolución que duraba exactamente un año. En segundo lugar, Ptolomeo no consiguió determinar las distancias absolutas y relativas de los planetas con respecto a la Tierra, por lo que su orden de colocación, no era sino un convencionalismo arbitrario.

El sistema heliocéntrico, fue el único método que resolvió ambas dificultades. La polémica desatada favoreció, indiscutiblemente, a la propagandización de la astronomía. El interés creciente por la astronomía, favorece también a la trigonometría. En 1533, como ya dijimos, se edita la “**Trigonometría**” de Regiomontano, en 1543 la obra de Copérnico, llegando (en 1596) a la impresión de las tablas grandes de 10 cifras de Rheticus.

Este período de consolidación de la trigonometría es indudablemente beneficiado por el trabajo de Francois Viète (1540-1603) quien en una de sus obras, “**Pseudomesolabium**” (1595), examina las cuerdas que cortan el diámetro en cuatro segmentos que forman una progresión geométrica, puntualizando diversos problemas y haciendo un uso extenso del teorema de Ptolomeo.

Con respecto al estudio del cuadrilátero inscrito, unos años más tarde fue tratado independientemente (1598) por J. Richter (1537-1616), a él debemos un procedimiento general para la construcción de cuadriláteros inscritos que tienen lados y diagonales enteros y en los cuales lo son también el área y el diámetro de la circunferencia inscrita.

Otros trabajos en esta dirección, son los de Bombelli, Benedetti, van Ceulen, ... quienes, por caminos propios o prosiguiendo investigaciones anteriores, contribuyeron a

la solidificación de la trigonometría y a elevar el teorema de Ptolomeo al lugar que hoy ocupa.

CUESTIONARIO

1. ¿Cuáles son los soportes fundamentales de la matemática griega?
2. ¿Cuál es la periodización más adecuada para el estudio de la matemática griega?
3. ¿Qué elementos caracterizan el Período Jónico y la figura de Pitágoras? ¿Qué método utilizó Teodoro de Cirene (465-398 a.C.) para demostrar la irracionalidad de las raíces cuadradas de los cuadrados no enteros del 3 al 17? ¿Por qué Ud. cree que se detuvo en $\sqrt{17}$?
4. Destaque el papel jugado por la noción de irracionalidad en la Historia de la Matemática.
5. ¿Qué papel jugó Zenón y su escuela en el desarrollo matemático actual?
6. ¿Cuáles son los 3 problemas clásicos de la matemática griega? Explique los principales intentos efectuados para resolverlos. ¿Dónde radicaba la imposibilidad de resolverlo?
7. ¿Qué elementos caracterizan el Período Ateniense?
8. Destaque los 4 rasgos característicos de la matemática griega.
9. Destaque los principales elementos y representantes de la relación Filosofía-Matemática en la matemática griega.
10. ¿Cuáles son los sólidos platónicos? ¿Por qué no pueden existir otros?
11. ¿En qué consistió la 1era Crisis en los Fundamentos de la Matemática?
12. ¿Qué elementos caracterizan el Período Alejandrino?
13. Destaque el papel jugado por Ptolomeo en la consolidación de la Geometría.
14. ¿Cómo se definía cuerda en la matemática griega? ¿En qué consistían las Tablas de Ptolomeo?
15. Enuncie el Teorema de Ptolomeo y analice algunos casos particulares.
16. ¿Cómo obtener, basado en los trabajos pitagóricos, la sección áurea?

Conferencia 4. Los “Elementos” de Euclides. La geometría euclidiana. Arquímedes y Diofanto. Los principios fundamentales de la Estática y el V Postulado.

“Tenemos que obedecer a la más grande de las leyes, la del cambio. Esa es la ley más poderosa de la naturaleza”

Edmund Burke

En los documentos históricos contentivos de conocimientos matemáticos que se encontraron en Egipto y en otras civilizaciones antiguas, aparecen tanto conocimientos aritméticos como geométricos; sin embargo, en la antigua Grecia, primero se desarrolló la aritmética como ciencia y posteriormente se sistematizó con métodos propios, la Geometría.

Al investigar el asunto encontramos diversas opiniones, que se manifiestan a veces por la geometría de Eudoxio (408-355 a.C.) y otras por la geometría de Euclides (365-300 a.C.), con la introducción de la presentación axiomática.

Otros criterios se refieren al aumento del volumen de los conocimientos y al hecho innegable de la aparición de una metodología propia de la metodología aritmética.

Naturalmente, es estrictamente cierto que en el transcurso de investigaciones matemáticas que va de Eudoxio a Euclides, se formó la geometría como una nueva disciplina matemática.

Nuestra investigación está encaminada a buscar en este proceso la posibilidad de cumplimiento de la relación entre disciplinas matemáticas que dan lugar actualmente a lo que Bourbaki denominó **“método de modelo”**. De ser así, debía aparecer en la aritmética de aquel entonces, la huella numérica correspondiente a la nueva disciplina, que permitiera darle una solución aritmética a los problemas geométricos.

Ya la teoría de las proporciones de Eudoxio y su posterior evolución, nos fueron mostrando esta posibilidad, mientras que la **“Teoría de los Irracionales”** de Euclides, nos mostró la realidad de esta suposición.

A pesar de que el sistema de numeración griego, existía la posibilidad de expresar los números irracionales como series infinitas de quebrados, no fue en los marcos exclusivos de la aritmética donde se arribó a este resultado, sino que requirió de tres siglos y del concurso de los conocimientos geométricos, para que Euclides adquiriera conciencia de ello y aún en forma limitada.

La aparición de la huella de una disciplina matemática en el resto de las ya existentes, marca el inicio de ella como tal. Pero si escogemos, de entre todas las disciplinas, aquellas que nos brindan la huella más abstracta, ello nos conduce a la Aritmética teórica o Teoría de los números.

La aparición de la huella anteriormente mencionada, nos habla de la forma de relación de las disciplinas matemáticas. Esta forma de relación, es siempre de influencias recíprocas; es decir, tiene un carácter de retroalimentación.

El hecho que la geometría se constituyera en una disciplina matemática, significó la matematización de conocimientos que hoy se corresponderían con la agrimensura, la arquitectura, la astronomía y diversas artes constructivas.

La investigación de esta “matematización” trajo por consecuencia la aparición de un elemento mediador entre los conocimientos iniciales y la Matemática de aquel entonces.

Este elemento mediador estuvo constituido por los conocimientos geométricos, que en sí no pertenecían unilateralmente a los conocimientos originarios.

Mientras los conocimientos geométricos no se integraron en forma de conocimientos teóricos, con un determinado grado de sistematicidad y relación entre ellos, no apareció un vínculo entre ellos y los conocimientos aritméticos.

Este vínculo que hemos utilizado para determinar el carácter de la geometría como disciplina, no se presenta, de forma general en ninguna de las disciplinas o teorías matemáticas, hasta tanto no alcanzan el nivel teórico correspondiente.

Este hecho es comprendido como un abismo entre la matemática pura y la matemática aplicada, de esta manera encontramos que Bertrand Russell incluía a la Matemática Aplicada de su definición de la matemática como rama de la lógica (B. Russell, “Obras Completas”, T.2, pp. 393-398).

En el desarrollo de la Matemática en este primer período, puede observarse como diversos conocimientos que comenzaron a desarrollarse en el seno de la matemática aplicada, pasaron después a la denominada matemática pura.

Hechas estas aclaraciones, vamos a referirnos al sistema euclidiano.

El contenido de la matemática euclidiana aparece en trece libros (Euclides, “Elementos de Geometría”, Universidad Nacional Autónoma de México, 1944), dedicados los seis primeros a la planimetría, los tres siguientes a la teoría elemental de los números, el décimo a la teoría de los irracionales y los tres restantes a la estereometría.

La Matemática euclidiana sintetiza a la Matemática anterior, particularmente a la geometría de Eudoxio. Es digno de observarse que Euclides dedica cuatro de sus tres libros a la teoría de los números y que además sus planteamientos están encaminados a lo que posteriormente habría de constituir el teorema fundamental de la Aritmética, es decir, la univocidad de la descomposición de números en sus factores primos.

El libro X merece especial atención, por estudiarse aquí las nuevas expresiones numéricas que le dieron a la geometría el rango de disciplina Matemática.

El propósito de Euclides, en este libro, es determinar el tipo de las irracionalidades que se encuentran en el cálculo de los cuerpos regulares, para determinar las condiciones bajo las cuales se puede prescindir del uso de raíces de la forma:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

Como se ve en el comentario de Pappus (320 a.C.), no parece haber adelantado Apolonio (262-190 a.C.) investigando en la forma:

$$\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Entre los teoremas generales de Euclides reviste particular importancia, el que expresa que las magnitudes inconmensurables tienen un número infinito de términos. Este teorema es el X2 y



puede enunciarse así: *“Las magnitudes son inconmensurables cuando al aplicarse el algoritmo de Euclides, el número de términos de éste resulta infinito”*.

La presentación axiomática de la Geometría, en la obra de Euclides, aumentó el caudal metodológico de la matemática. Analizada la axiomática de Euclides a la luz de posteriores avances y sobre todo a la luz de la moderna teoría de la demostración, presenta determinados defectos. Ella, sin embargo, se mantuvo como suprema expresión de la matemática antigua, hasta hace relativamente poco tiempo.

Con la matemática euclidiana terminó el período históricamente analítico de la Matemática griega y comenzó la etapa sintética, lo cual significó que todo nuevo conocimiento del período podía explicarse a partir de la Matemática euclidiana.

En el campo de la Matemática aplicada se desarrollaron diversos conocimientos en la antigua Grecia, que después se integraron a los conocimientos teóricos y fueron la fuente de nuevas disciplinas matemáticas.

Esta posibilidad se contenía en los trabajos de Arquímedes (287-212 a.C.), Apolonio y Diofanto (200-284). Este último desarrolló la Aritmética siguiendo la tradición Egipto-Babilónica, en oposición al método griego.

Algunas particularidades características del método de razonamiento matemático y formas de exposición de Euclides son evidentes ya del primer libro:

- a) El método de razonamiento de Euclides es siempre sintético. Para la demostración de cualquier teorema él parte de la afirmación válida a ciencia cierta, la cual se apoya en última instancia en el sistema de condiciones iniciales. A partir de esta última él desarrolla sucesivamente consecuencias que conducen a la afirmación buscada. El camino inverso de razonamiento es: tomando el teorema buscado como demostrado, el deducir de él una sucesión de consecuencias, hasta que sea obtenida a ciencia cierta una afirmación verdadera, en los **“Elementos”** en calidad de demostración no se utiliza. En contraposición a la síntesis los antiguos denominaron a este método análisis.
- b) Las demostraciones se construyen según un esquema único que consta de las siguientes partes: formulación del problema y del teorema (esto es, exposición); formulación según el dibujo de lo que se busca (o sea, determinación); introducción de líneas auxiliares (esto es, construcción); demostración propiamente dicha (es decir, demostración); declaración de lo que se demostró y de que lo demostrado resuelve el problema o el teorema adecuadamente propuesto (o sea, conclusión). En forma algo simplificada, este esquema se convirtió en tradicional y llegó hasta nuestros días como modelo clásico de razonamiento matemático, en cierto sentido obligatorio para los matemáticos.
- c) Los medios de construcción geométrica, la regla y el compás, en esencia no se utilizaban como medios de medición. La regla no tiene subdivisión. Por esto en los **“Elementos”** no se trata de la medición de las longitudes de los segmentos, de las áreas de las figuras y los volúmenes de los cuerpos, sino sólo sus relaciones.

El examen del contenido de los **“Elementos”** de Euclides, muestra que esta obra constituye un sistema de los fundamentos de la matemática antigua. En ella están incluidos: la geometría elemental, los fundamentos de la teoría de los números racionales, la teoría general de las relaciones entre magnitudes y basadas en ellas, la teoría de las proposiciones y la teoría de las cuadráticas y bicuadráticas, elementos del álgebra en forma geométrica y el método de exhaustión. Lo más característico de los **“Elementos”** es que está dado un sistema que permite ver en él, el predecesor antiguo de la actual construcción axiomática de las teorías matemáticas. Al mismo tiempo la estructura lógica de los **“Elementos”** refleja el camino

histórico de la formación de las teorías matemáticas desde las más simples, tipo de álgebra geométrica, hasta las más complejas: teoría de las relaciones, método de exhaustión y clasificación de las irracionalidades.

Ya mencionamos que los **“Elementos”** de Euclides dejaron una huella imborrable en la historia de la matemática y en el transcurso de muchos siglos sirvieron de prototipo clásico de la rigurosidad y secuencia matemática. Sin embargo, algunas particularidades de los **“Elementos”** reflejan una serie de condiciones favorables al desarrollo subsiguiente de las matemáticas, las cuales se formaban en la época de su redacción. La exposición es geométrica, incluso los números están representados como segmentos. Los medios de construcción geométrica, en esencia, estaban limitados a la regla y el compás. Por eso en los **“Elementos”** no aparecen la teoría de las secciones cónicas, ni curvas trascendentes y algebraicas. Finalmente en los **“Elementos”** están completamente ausentes los métodos de cálculos.

Todas estas insuficiencias de los **“Elementos”** podrían, hasta cierto punto, justificarse por los objetivos específicos de su autor. Sin embargo, en las condiciones de la antigüedad, este primer experimento de exposición axiomática de las Matemáticas podía tener una tendencia limitadora tan fuertemente expresada sólo bajo la influencia de las tendencias limitadoras generales de la filosofía idealista. Por esto, puede decirse que los **“Elementos”** de Euclides reflejan tanto el alto nivel teórico de las Matemáticas como la situación socioeconómica e ideológica desfavorable para el posterior desarrollo al final de la antigüedad griega.

En el transcurso de toda la multiseular historia de las matemáticas, los **“Elementos”** constituyen el fundamento de todas las investigaciones geométricas. Incluso el cambio decisivo de todo el sistema de la geometría, provocado por la introducción a principio del siglo XIX, en los trabajos de Lobatchevsky, de la geometría no Euclidiana, en gran medida está vinculado con los esfuerzos de perfeccionamiento de los **“Elementos”**.

Los **“Elementos”** de Euclides aún en nuestra época constituyen la base de los textos escolares de geometría, el número de sus ediciones es enorme.

Un dato que puede ilustrar lo anterior es el siguiente: las versiones españolas correspondientes al período 1574-1774 ascienden a ¡18 obras!, once impresas y siete manuscritas (L.Vega-**“Las versiones de los Elementos como signos de los tiempos (1574-1774)”**, en *Contra los Titanes de la rutina*, Encuentro hispano- francés sobre Historia de la Matemática, Madrid, C.S.I.C., 1994).

En fin, los **“Elementos”** de Euclides vienen a ser la culminación de una aparente tradición de tratados en cuyo seno se habría ido gestando y desarrollando la organización deductiva de unos resultados y teoremas básicos hasta tomar la forma de unos cuerpos relativamente sistemáticos de conocimientos: la geometría plana en los libros I-IV de los propios **“Elementos”**, la teoría generalizada de la proporción en V-VI, la aritmética en VII-IX o la geometría sólida en XI-XIII.

Lo anterior es reafirmado si utilizamos a Proclo en sus Comentarios al libro I, donde nombra los siguientes pasos anteriores a Euclides:

“Hipócrates [de Chios] fue, de entre aquellos de quienes se tiene noticia, el primero en haber compuesto (protos ... synégrapsen) unos elementos (stóikheía)” (66.6-70).

Entre la segunda mitad del siglo V a.C. y principios del siglo IV, Leodamas, Arquitas (428-350 a.C.) y Teeteto (415-369 a.C.) avanzaron hacia una construcción más científica de la geometría. Tras ellos, un tal León: *“... pudo compilar (suntheinai) elementos con más cuidado en la cantidad y utilidad de lo demostrado” (66.19-21).*

Luego Eudoxio de Cnido, algo más joven que León, fue el primero en aumentar el número de los llamados “teoremas generales”.

Otro autor que tuvo relación con la Academia platónica y se distinguió tanto en Matemática como en el “resto de la filosofía”, fue Teudio de Magnesia: *“También él, por cierto, sistematizó (synétaxen) de modo excelente los elementos y convirtió en más generales muchas propiedades particulares” (67.14-16).*

Poco después, Hermótimo de Colofón no sólo hizo progresos en la línea de investigación abierta por Eudoxio y Teeteto, sino que *“descubrió muchos elementos” (67.22)*. En fin, tras hacerse eco de Filipo (mediados del siglo IV), continúa Proclo por su cuenta:

“No mucho más reciente que ellos es Euclides, quien ha compilado (synagagón) los elementos sistematizando muchas proposiciones de Eudoxio y perfeccionando muchas de Teeteto, amén de conducir a unas demostraciones incontestables teoremas de los que sus predecesores sólo habían dado pruebas endebles” (68.6-10).

Proclo no deja lugar a dudas sobre la culminación de este camino de perfeccionamiento en los **“Elementos”** de Euclides, ni sobre sus virtudes: la riqueza de recursos metódicos, el orden selectivo que preside su sistematización científica, el rigor de sus pruebas e incluso sus calidades didácticas y disciplinarias. En suma: *“Los **“Elementos”** contienen una guía incontestable y perfecta de la investigación científica en geometría” (70.16-18).*

Hay además, según es bien sabido por tratarse del aspecto más comentado a partir del mismo Proclo, secuelas metodológicas. En este sentido, los **“Elementos”** de Euclides fijan una especie de nivel característico de exigencia tanto en lo que se refiere a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos y a la explicación de sus asunciones básicas, como en lo referente al rigor informal de la demostración matemática. Bien es verdad que, antes del tratado de Euclides, ya había señales claras de la explicitación de definiciones -sobre todo-, y del repuntar de un patrón informal de prueba deductiva.

Quisiéramos apuntar por último, algunos temas historiográficos sobre los que debiera trabajarse (L. Vega-**“Los elementos de geometría y el desarrollo de la idea de la demostración”**, Mathesis 8(1992) 403-423):

1. la recepción y difusión de los **“Elementos”** de Euclides hasta el punto de constituir algo así como la geometría natural de nuestro espacio físico;
2. la suerte y diversidad de los programas acogidos al llamado more geométrico desde sus primeros rastros (ya en el siglo XII) hasta su confusión con la que llamaría “axiomática clásica” de los siglos XVII-XVIII;
3. las relaciones entre la propia geometría euclídea propiamente dicha, la de los **“Elementos”**, y la geometría euclidiana, i.e., la elaborada modernamente -e.g. a partir de la geometría analítica cartesiana- sobre la base de ciertas asunciones características compartidas como el postulado de las paralelas.

LOS NÚMEROS IRRACIONALES Y LAS PARADOJAS DE ZENON

Las paradojas de Zenón de Elea (490-430 a.C.) demostraron convincentemente que si se buscan demostraciones exactas y soluciones lógicamente exhaustivas a los problemas, es imposible utilizar el infinito apoyándose en las consideraciones atomísticas ingenuas. Para

semejantes objetivos es necesario elaborar y valerse de métodos que contienen, junto a las variedades de los criterios sobre los infinitésimos, elementos del paso al límite.

A pesar que en la anterior conferencia tratamos este punto, creemos que debemos profundizar en algunos aspectos, teniendo en mente siempre las palabras de Russell (**“The Principles of Mathematics”**, Second Edition, George Allen & Unwin Ltd, London, 1937):

“En este mundo caprichoso nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las más notables víctimas de la falta de juicio de la posteridad es Zenón, el eleático. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inmensamente sutiles y profundos, la tosquedad de filósofos posteriores lo declaró a él un mero prestidigitador ingenioso y todos y cada uno de sus argumentos sofismas. Después de dos mil años de continuas refutaciones, esos sofismas fueron restablecidos y constituyeron la base de un renacimiento matemático”

Trataremos con la que es, quizás, la más conocida -y espectacular- de sus aporías, la de Aquiles y la tortuga, propuesta por Zenón hace ya más de 24 siglos: si el veloz Aquiles concede alguna ventaja a la lenta tortuga, jamás podrá darle alcance por rápido que corra, el Périda puede acercarse al quelonio cada vez más, pero sin alcanzarla.

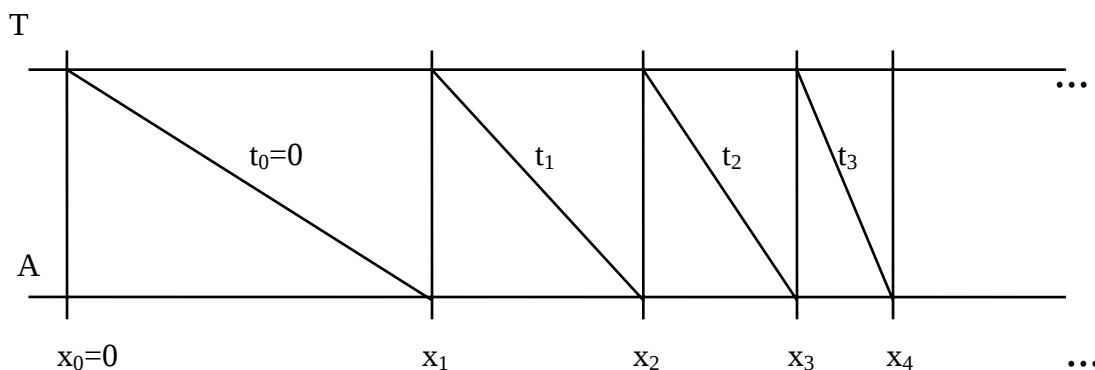
Puesto que en la “vida real” no se necesita ser el alígero guerrero tesalio para alcanzar cualquier tortuga, el razonamiento de Zenón era demasiado chocante para ser aceptado. Aristóteles (384-322 a.C.), por ejemplo, impugnaba las paradojas de Zenón afirmando que si bien el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles en potencia, no lo son en acto; que la esencia del movimiento es precisamente “franquear el límite”, ser la identidad entre un lugar y otro lugar, así como el devenir tiene por esencia ser la identidad entre el ser y el no-ser, entre lo mismo y lo otro (Aristóteles-**“Metafísica”**, Sarpe, Madrid, 1985). “Refutaciones” de este tipo seguían siendo consideradas válidas hasta el siglo pasado por filósofos como Hegel (1770-1831).

La verdadera refutación matemática de las paradojas del eleático, sólo es posible desde 1872, año en el cual Dedekind y Cantor publican, independientemente, sus construcciones de los números reales a partir de los racionales (en esencia, de los naturales). Esa construcción es la culminación de la llamada aritmetización del análisis (iniciada por Gauss y continuada por Bolzano, Cauchy y Weierstrass), que desterró de las matemáticas los misteriosos infinitesimales, a los que dedicaron muchas elucubraciones matemáticos aficionados y filósofos (ver por ejemplo K. Marx-**“Manuscritos Matemáticos”**, Edición bilingüe (alemán-ruso), Naúka, Moscú, 1968). Podemos recalcar, que estas magnitudes infinitamente pequeñas volvieron a nacer en 1961 al inventar Abraham Robinson el Análisis no estándar (ver **“Non-standard analysis”**, Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A, v. 64, No.4 (1961), 432-440). Pero estos infinitesimales de Robinson son objetos matemáticos perfectamente determinados, que no admiten especulaciones de diletantes.

Hay que decir que en estudios muy profundos y detallados como el de Russell en **“The Principles of Mathematics”**, que ocupa buena parte de los capítulos XLII y XLIII, pero está más que todo dedicado a explicar la causa de la paradoja; pero Russell no se toma el trabajo de poner a Aquiles a alcanzar a la tortuga, suponiendo que el lector de su obra no debe tener ninguna dificultad en hacerlo por su cuenta. Russell cita dos artículos (N. Noel-**“Le mouvement et les arguments de Zénon d'Elée”**, Revue de Métaphysique et de Morale, Vol.I, 107-125 y C. D. Broad-**“Note on Achilles and the Tortoise”**, Mind, N.S., Vol.XXII, 318-319) en los cuales, es posible, aunque no muy probable, que los autores se hayan tomado la molestia de hacer cálculos. Para comprobarlo habría que efectuar una visita a la London Library, así que mientras los lectores curiosos esperan una oportunidad para hacerlo, les

presentamos la elegante solución dada por B. Mayorga (“Sopa de Tortuga”, Rev. Integración, UIS-Colombia, Vol.4, No.1, 1986, 23-34).

Supondremos, para evitar problemas de aceleración, que la carrera se realiza con partida lanzada, de modo que el cronometraje se iniciará en el momento en que los dos corredores hayan alcanzado velocidad constante y la tortuga se encuentre L unidades de longitud delante del Périda en una pista recta con dos carriles paralelos.



Sea $t_0 = 0$ el instante inicial, estando Aquiles en el punto $x_0 = 0$ y la tortuga en $x_0 = L$; t_1 el momento en que el héroe pasa por el punto x_1 y el quelonio por el punto x_2 , etc. El instante t_n estará dado para Aquiles por la fórmula:

$$t_n = x_n/v, \quad (1)$$

y para la tortuga por:

$$t_n = (x_{n+1} - x_1)av; \quad (2)$$

igualando (1) y (2) obtenemos:

$$x_{n+1} = L + ax_n. \quad (3)$$

Evidentemente las sucesiones $\{t_n\}$ y $\{x_n\}$ son estrictamente crecientes. Si podemos demostrar su acotamiento superior, tendremos su convergencia; es claro según (1), que el acotamiento de una es equivalente al de la otra. Luego si logramos demostrar que $\{x_n\}$ converge, eso significará que Aquiles alcanza la tortuga en el punto $x' = \lim x_n < \infty$ y en el instante $t' = \lim t_n < \infty$.

Señalaremos los pasos más importantes, dejando al lector el resto de la tarea.

Lema 1. En cualquier momento t_k la ventaja que la tortuga conserva sobre Aquiles está dada por la fórmula:

$$x_{k+1} - x_k = a^k L. \quad (4)$$

Lema 2. La sucesión $\{x_n\}$ es fundamental (o de Cauchy).

Como se sabe, los espacios métricos en los cuales toda sucesión fundamental converge a un punto del mismo espacio se denominan completos. Uno de ellos es el conjunto de los números

reales. La completitud de este se demuestra con base -otra vez- en las construcciones de Dedekind y Cantor de 1872. Con Cauchy hemos podido llegar hasta el Lema 2, pero sólo después de Dedekind y Cantor podemos afirmar que $\{x_n\}$ converge. Más exactamente, tenemos el siguiente:

Teorema. Aquiles alcanza la tortuga en el instante $t=L/(1-a)v$ y el lugar dado por $x=L/(1-a)$.

Estos valores están dados por un razonamiento elemental, se obtienen además, tomando límites en (3) y en (1).

EL METODO DE EXHAUCIÓN

Dentro de los métodos infinitesimales utilizados en la antigüedad por los griegos, uno de los más antiguos es el método de exhaustión. Su creación se le atribuye a Eudoxio.

Ejemplos de su utilización están expuestos en el libro duodécimo de los “**Elementos**” de Euclides y en una serie de obras de Arquímedes. El método de exhaustión se aplicaba al cálculo de las áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitud de curvas, búsqueda de las subtangentes a las curvas, etc.

El método de exhaustión fue uno de los métodos más difundidos de la Matemática antigua. Fue utilizado por Arquímedes. Antes, este método lo incluyó Euclides en los “**Elementos**”, haciéndolo el fundamento del duodécimo libro. Los pasos al límite, que antes se realizaban, frecuentemente, en virtud de consideraciones intuitivas y prácticas, obtuvieron en el método de exhaustión la primera formalización teórica; históricamente es la primera forma del método de límites.

El rigor lógico del método de exhaustión resultó insuperable en el transcurso de muchos siglos. En esencia, sólo en el siglo XIX fueron propuestos y comenzaron a recibir solución los problemas que surgen directamente de la esencia lógica del antiguo método de exhaustión. Sin embargo, la forma de este último era muy imperfecta. El método se desarrollaba sólo en relación con problemas concretos: no se convirtió en un método abstracto con un sistema desarrollado de conceptos iniciales y con algoritmos únicos. La unicidad del límite se demostraba para cada problema de nuevo. Esta insuficiencia no era casual, particular. La cuestión es que cada intento de introducir esta demostración de una vez por todas para una determinada suficientemente amplia, clase de problemas, inevitablemente traía consigo la necesidad de precisar una serie de conceptos de la naturaleza infinitesimal. Sería necesario dar una explicación racional al concepto de aproximación infinitamente próxima, de magnitud infinitamente pequeña, etc. Los matemáticos antiguos no pudieron superar las dificultades relacionadas con esto.

No obstante el método de exhaustión yace en la base de muchos métodos infinitesimales y de logros notables concretos de los matemáticos antiguos, en primer lugar de Arquímedes (alrededor de los años 287-212 a.n.e), al cual le pertenece el parabólico. Este sabio notable era oriundo de Siracusa (la parte sur de Sicilia), hijo del astrónomo y matemático Fidias. Para el perfeccionamiento de sus conocimientos durante algún tiempo trabajó en Alejandría en colaboración con otros de los más grandes matemáticos. Después de regresar a Siracusa, Arquímedes continuó un intenso trabajo científico. En el último periodo de su vida participó en la defensa de su ciudad natal de los conquistadores romanos, dirigiendo la construcción de complejas instalaciones técnicas e inventando armas. Durante el ataque y toma de Siracusa, Arquímedes fue asesinado y su biblioteca e instrumentos saqueados.

Las obras de Arquímedes fueron escritas fundamentalmente en forma de cartas. Hasta nosotros han llegado diez obras grandes y algunas más pequeñas de carácter matemático. La

característica fundamental de las obras matemáticas de Arquímedes es la aplicación de métodos matemáticos rigurosos en la mecánica y la física.

Esta particularidad hace de los trabajos de Arquímedes el más brillante modelo del desarrollo de los conocimientos matemáticos aplicados, de la técnica del cálculo y de nuevos métodos matemáticos, en especial los infinitesimales, en la época final de la antigüedad.



Nosotros no nos proponemos la tarea de dar una caracterización completa de la obra de Arquímedes. Aquí consideramos la cuestión sobre la interpenetración de los métodos de las matemáticas y la mecánica de los trabajos de Arquímedes, sobre la elaboración por él del método de las sumas integrales y sobre sus así denominados métodos diferenciales.

Numerosos inventos y descubrimientos mecánicos de Arquímedes son ampliamente conocidos. A él pertenece el tornillo Arquimediiano, los sistemas de palanca, bloques y tornillos para el levantamiento y movimiento de grandes pesos, determinación del contenido de las aleaciones mediante su sumersión en agua, el planetario, catapultas, etc. Son conocidos también los trabajos teóricos de Arquímedes en la mecánica **“Sobre el equilibrio de las figuras planas”**, donde se expone la ley de las palancas,

“Sobre los cuerpos que flotan”, **“El libro de los soportes”**, etc.

En la obra de Arquímedes, los trabajos sobre mecánica ocuparon un lugar tan importante que los métodos de la mecánica y análogos penetraron incluso en los métodos matemáticos. Hasta hace poco tiempo era imposible juzgar a ciencia cierta sobre tales penetraciones. La cuestión se aclaró definitivamente después que en el año 1906 se encontró la obra de Arquímedes **“Epístola a Eratóstenes”** sobre el método mecánico de resolución de problemas geométricos.

Este mismo método de analogía mecánica lo utilizó Arquímedes en la obra **“Sobre la cuadratura de la parábola”**. Una lámina parabólica se representa colgada de uno de los brazos de una palanca de brazos desiguales y divididos en elementos, cada uno de los cuales está equilibrado por la correspondiente carga en el otro brazo.

En concordancia con la tradición científica de su época Arquímedes tradujo las demostraciones, obtenidas por el método de la analogía mecánica, al lenguaje de uso general del método de exhaución con la obligatoria culminación de este último, con la demostración por reducción al absurdo para cada caso particular.

La siguiente variedad de los métodos infinitesimales de la remota antigüedad es el método que puede caracterizarse como el método de las sumas integrales. Los más brillantes ejemplos de aplicación de este método se encuentran en las obras de

Arquímedes **“Sobre la esfera y el cilindro”**, **“Sobre las espirales”**, **“Sobre los conoides y esferoides”**. La esencia de este método en su aplicación, por ejemplo, al cálculo de los volúmenes de los cuerpos en revolución consiste en lo siguiente: Un cuerpo en revolución se divide en partes y cada parte se aproxima por cuerpos inscritos y circunscritos, cuyos volúmenes pueden ser calculados. La suma de los volúmenes de los cuerpos circunscritos será mayor y la suma de los cuerpos inscritos, menor que el volumen del cuerpo en revolución.

Ahora queda escoger los cuerpos que se aproximan inferior y superiormente de tal manera que la diferencia de sus volúmenes pueda hacerse tan pequeña como se quiera.

Como ejemplo de método de las sumas integrales citemos el de la resolución de Arquímedes del problema del cálculo del volumen de un Elipsoide en revolución en las obras **“Sobre los conoides y esferoides”**. Así él denomina los cuerpos formados el giro de las secciones cónicas alrededor del eje mayor: los conocidos son los paraboloides e hiperboloides en revolución y los esferoides son los elipsoides en revolución. A la resolución concreta del problema se antepone el lema: si está dado un segmento de esferoide, seccionado de la misma manera, entonces pueden ser inscrito en él y circunscrito alrededor de él figuras que constan de cilindros de igual altura y de tal forma que la figura circunscrita supere a la inscrita en menos que cualquier magnitud sólida (volumétrica).

Parecería que la analogía del método de las sumas integrales de los antiguos y la integración definida es total. Tal impresión se refuerza porque nosotros modernizamos la forma de exposición. Por eso, es necesario señalar también sus diferencias. La cuestión está en que el método de las sumas integrales de los antiguos se apoya en un concepto de área intuitivo, no rigurosamente definido y no utiliza el aparato aritmético-algebraico. En él no se introducen y no se definen los conceptos generales necesarios: límite, integral, suma infinita, etc. y no se estudian las condiciones de aplicabilidad de los teoremas enunciados. El método se aplica para cada problema concreto sin la extracción y formalización de sus fundamentos teóricos generales.

Junto al método de las sumas integrales, en las matemáticas antiguas fueron elaborados métodos, los cuales pueden ser retrospectivamente valorados como diferenciales. Como ejemplo de semejantes métodos puede servir el método para encontrar la tangente a la espiral en la obra de Arquímedes **“Sobre espirales”**.

Finalmente, en las matemáticas antiguas se consideraban también los denominados problemas variacionales. En las obras de Arquímedes semejante problema se encuentra sólo una vez en la proposición final de la obra **“Sobre esfera y el cilindro”**. Aquí se consideran segmentos con igual superficie de diferentes esferas y se demuestra que el segmento que tiene forma de semiesfera tiene el mayor volumen. Algo después, apareció la obra de Zenodoro, en la cual la teoría de las figuras isoperimétricas fue desarrollada rigurosa y completamente para los polígonos, círculos y en cierta medida para los poliedros, los cuerpos simples en revolución y la esfera. Las proposiciones de carácter extremal estaban ampliamente difundidas en aquella época, algunas veces teniendo un carácter no puramente matemático, sino mecánico e incluso de filosofía natural.

Los métodos infinitesimales de la Grecia Antigua sirvieron de punto de partida para muchas investigaciones de los científico-matemáticos de los siglos XVI y XVII. Particularmente con igual frecuencia se estudiaban los métodos de Arquímedes. Leibniz, uno de los fundadores del análisis matemático escribió sobre esto que, estudiando los trabajos de Arquímedes cesas de admirarte de los éxitos de los matemáticos actuales.

Los métodos infinitesimales constituyen aquella parte de las matemáticas antiguas, la cual se formaba bajo la presión directa de las exigencias científico-prácticas. Ellos salían de los límites de sistemas matemáticos cerrados formados en aquella época, contruidos sobre la base de un número mínimo de condiciones iniciales. En los métodos infinitesimales obtuvieron la primera manifestación los elementos de los nuevos recursos matemáticos, los cuales condujeron a la creación de un análisis infinitesimal. La relación de contradicción entre el conjunto de semejantes métodos y los sistemas lógico-matemáticos cerrados en la Grecia Antigua constituyen uno de los ejemplos históricos de contradicciones, las cuales han sido la fuerza motriz del desarrollo de las ciencias matemáticas.

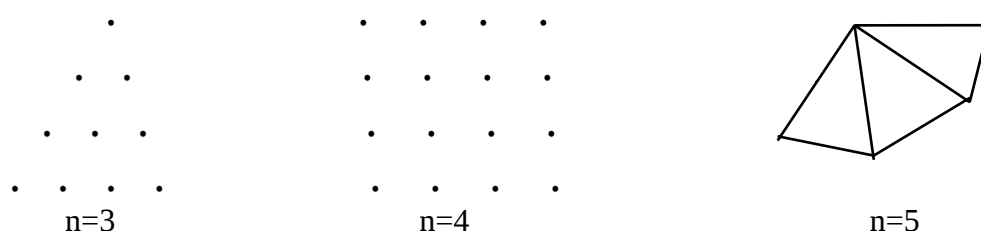
En Grecia también hubo un desarrollo considerable de la parte “cuantitativa” de la matemática. Sobre la base del crecimiento de esta parte de las matemáticas de cómputo, y

posiblemente bajo otras influencias complementarias se engendraron elementos de álgebra y formas elementales de la simbología algebraica. Sobre estas circunstancias testimonian los métodos y resultados de Diofanto (siglo III n.e.).

La edad de oro de las matemáticas griegas llegó a su fin con la muerte de Apolonio (250-190 a.C.). A partir de Tales había habido una cadena casi continua de matemáticos importantes. Hasta el siglo III n.e. cuando Herón (65-125), Pappus (290-350) y Diofanto (200-284) dieron fama una vez más a la escuela alejandrina, parece no haber habido ningún matemático de preeminencia. Durante ese intervalo de medio milenio, la presión de la cultura romana había desalentado a los matemáticos griegos, si bien se mantuvo un cierto interés por la mecánica y la astronomía; la época produjo al gran astrónomo Hiparco (180-125 a.C.) y dos notables comentaristas: Menelao (70-130) y Ptolomeo (ver Conferencia anterior).

De las obras matemáticas de Diofanto, el cual vivió y trabajó en Alejandría, se conservan 6 libros de la **“Aritmética”** y fragmentos del libro **“Números Poligonales y Porismas”**. Estos libros comenzaron a atraer la atención en Europa sólo 1200 años después de ser escritos. Como observó Regionmontano en 1463; *“En estos libros antiguos se halla oculta la flor y nata del conjunto de la aritmética, el ars rei et census que actualmente conocemos bajo el nombre árabe de álgebra”*. El concepto de números poligonales surgió en la matemática pitagórica como consecuencia de la interpretación geométrica de las relaciones teórico-numéricas. Si se designan los números por puntos y se distribuyen en forma de cualquier figura, entonces las sumas parciales de las progresiones aritméticas (de la forma $a_1=1$, $d=n-2$) pueden ser representadas en forma de familias de polígonos semejantes (ver figura para $n=3,4,5$) y los correspondientes valores numéricos se llaman poligonales. En la época de Diofanto, tal idea también se extendía al espacio.

Con ello se obtenían los números espaciales, representados por familias de paralelepípedos semejantes, números piramidales, etc.



Las operaciones con los números racionales, se investigan en la **“Aritmética”**. En el primer libro él introduce los conceptos fundamentales de la aritmética, las reglas de los signos de multiplicación, las reglas de las operaciones con polinomios, resuelve ecuaciones lineales. En los libros siguientes están contenidos numerosos problemas que conducen a ecuaciones con coeficientes racionales, que tienen raíces racionales.

Diofanto en todos los problemas utiliza valores numéricos especiales y realiza sólo operaciones con números, no mencionando en ninguna parte teoremas generales. Para la designación de la cantidad incógnita en la ecuación y para la escritura de las funciones de ella estuvo obligado a elaborar un sistema de símbolos.

La simbólica de Diofanto está basada en la abreviatura de palabras. En la historia del desarrollo de la simbología algebraica ésta marca el paso de las expresiones con palabras de las dependencias algebraicas (álgebra **“retórica”**) a las abreviaturas de estas expresiones (álgebra **“sincopada”**). La siguiente etapa de desarrollo ya es el álgebra puramente simbólica, que comenzará con Vieta dentro de 13 siglos. Para tener una idea más clara de esto, tomemos la siguiente expresión simbólica:

$$(250x^2 + 2,520): (x^4 + 900 - 60x^2),$$

sus sínkopas le permitieron escribir, y trabajar, con ecuaciones que implicaban éstas u otras expresiones parecidas. Por $250x^2$ escribió $\Delta^v\sigma v$: aquí la letra v significaba 50 y σ , 200 de acuerdo con la práctica griega corriente. Pero Δ^v era una abreviación de la palabra griega que significa potencia (es nuestra palabra dinámica); y potencia representaba el cuadrado del número desconocido. Diofanto empleó la letra ς para la primera potencia de la incógnita y la abreviación de la palabra cubo para la tercera potencia. No empleó ningún signo más, pero sí una especie de ψ para menos, la letra ι para igual y una frase especial para designar la división de una expresión por otra. Es interesante que su idea de adición y sustracción fuera “venidero” y “deficiente” y que la palabra griega para deficiente se halle relacionada con el término pitagórico elipse.

Con ayuda de semejante simbólica, en los libros 2-6 de la “**Aritmética**” Diofanto resuelve (encuentra una de sus soluciones racionales) numerosos problemas que conducen en su mayoría a ecuaciones indeterminadas de segundo grado. Encuentra soluciones racionales de alrededor de 130 ecuaciones indeterminadas, las cuales pertenecen a más de 50 clases diferentes. En cada caso Diofanto se limita a encontrar una sola raíz. Un método general de solución de estas ecuaciones o su clasificación, no aparece en la obra de Diofanto. No hay tampoco demostraciones; la veracidad del resultado obtenido se confirma sólo porque al efectuar la sustitución satisface las condiciones del problema.

La teoría general de las ecuaciones diofánticas de primer grado $ax + by = 1$, donde a y b son enteros primos entre sí, fue construida en el siglo XVII por el matemático francés Bachet de Méziriac (1587-1638), quien también editó en el año 1621 las obras de Diofanto en griego y latín con sus comentarios. Sobre la teoría general de las ecuaciones diofánticas de 2do grado trabajaron muchos matemáticos notables: Fermat, J. Wallis, Euler, Lagrange y Gauss. Como resultado de sus esfuerzos a comienzos del siglo XIX estaba en lo fundamental investigada la ecuación general no homogénea de 2do grado con dos incógnitas y coeficientes enteros $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Las ecuaciones diofánticas son objeto de estudio en la matemática contemporánea. Así se denominan las ecuaciones algebraicas indeterminadas o sus sistemas con coeficientes enteros, a los que se les busca soluciones enteras o racionales. Un punto de vista más general sobre las ecuaciones diofánticas consiste en que las soluciones de estas ecuaciones se buscan entre los números algebraicos. Investigaciones fundamentales en la teoría de las ecuaciones diofánticas han sido llevadas a cabo por los matemáticos de la antigua URSS: A. O. Guelfond, B. N. Delone, D. K. Faddev y V. A. Tartakovsky.

El nombre de Diofanto se afianzó sólidamente también en la parte de la teoría de los números que estudia la aproximación de los números reales por números racionales. Estas aproximaciones se denominan diofánticas. Con esta teoría también se relacionan las cuestiones relativas a la solución en números enteros de desigualdades (o sus sistemas) con coeficientes reales y las cuestiones sobre la teoría de los números trascendentes.

Un lugar central de la teoría de las aproximaciones diofánticas lo ocupan los métodos y resultados del académico I. M. Vinogradov.

Todo esto sirviera para situar a Diofanto como un algebrista respetado, pero llegó más lejos. Pongamos el caso de la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$, halló 4 números enteros para los cuales la afirmación es cierta. Siglos más tarde, Fermat se preguntaba: “*¿Por qué Diofanto no buscó dos cuartas potencias tales que su suma fuese un cuadrado? De hecho este problema es imposible, como puedo demostrar con todo rigor mediante mi método*”. Sin duda, Diofanto había experimentado lo suficiente con dicha ecuación, para demostrar que no había solución.

De esta forma, las obras de Diofanto sirvieron en esencia de punto de partida a muchas investigaciones teórico-numéricas y algebraicas. Con relación a las matemáticas antiguas, ellas caracterizaron el reforzamiento de las tendencias algebraicas, el florecimiento de las cuales fue entorpecido (como también el desarrollo de todas las ramas de las matemáticas) por las condiciones socio-económicas desfavorables de los siglos siguientes, sobre todo en Europa.

Entre los rasgos característicos de las matemáticas de esta época, se encuentra además la gran difusión de obras que son comentarios a las obras clásicas. El predominio de los comentarios constituye, indudablemente, un criterio de descenso en la creatividad matemática. Sin embargo, las obras de los comentaristas fueron muy útiles para la historia de las matemáticas, conservando en fragmentos o en recuentos muchas obras clásicas importantes. A veces los comentarios son la única fuente de información sobre obras perdidas o logros olvidados de los matemáticos antiguos.

LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA Y EL POSTULADO DE EUCLIDES.

Para demostrar el principio de la palanca, Arquímedes se apoya en ciertas hipótesis: algunas enunciadas; otras, sobreentendidas. Entre las hipótesis pasadas en silencio, además de la que con lenguaje moderno se llama hipótesis del refuerzo de las ligaduras, hay uno de los mismos casos de la palanca, que pudiera enunciarse así:

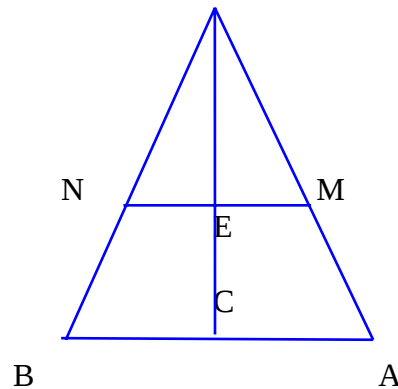
“Una palanca, suspendida por su punto medio, está en equilibrio cuando a un extremo se aplica el peso $2P$ y al otro extremo se cuelga, por el punto medio, una nueva palanca, llevando en cada extremo un peso igual a P ”.

Sin entrar en la historia de las críticas hechas a Arquímedes por el uso de tal hipótesis y de las varias tentativas hechas para demostrarla, refiramos a este propósito las argumentaciones de Lagrange, porque de ellas puede hacerse derivar de un modo sencillo y claro una importantísima conexión entre la hipótesis en cuestión y el postulado de las paralelas.

Sea ABD un triángulo isósceles ($AD=BD$), cuyos vértices A y B soportan dos pesos iguales a P , y el vértice D un peso igual a $2P$. Este triángulo estará en equilibrio alrededor de la recta MN , que une los puntos medios de los lados iguales del triángulo, porque cada uno de estos lados puede mirarse como una palanca cuyos extremos soportan pesos iguales.

Pero el equilibrio de la figura se puede obtener también apoyando el triángulo sobre una recta que pase por el vértice D y por el punto medio C del lado AB , por lo cual, llamando E al punto del encuentro de los dos ejes MN y CD , nuestro triángulo estará en equilibrio si se le suspende por el punto E . Con palabras de Lagrange tendremos (**“Euvres de Lagrange”**, t.XI, pp. 4-5):

“Or comme l'axe (MN) passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passera aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu (C) de sa base; donc le levier transversal (CD) aura le point d'appui (E) dans le milieu et devra, par conséquent, être chargé également aux deux bouts (C,D): donc la charge que supporte le point d'appui du levier, qui fait la base du triangle, et qui est chargé, à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids”.



El razonamiento de Lagrange, además de contener algunas hipótesis de índole estática, relativas a las simetrías, al refuerzo de las ligaduras, etc., utiliza una propiedad geométrica del triángulo euclídeo. Pero si se quiere prescindir de ésta, lo que, bajo cierto aspecto, parece natural, las anteriores conclusiones vienen modificadas.

En efecto, subsistiendo como verdadero el principio de que el triángulo ABD esté en equilibrio alrededor del punto E, en que se encuentran los dos ejes MN y CD, no se puede asegurar que sea E el punto medio de CD, porque esto equivaldría a admitir el postulado de Euclides.

Por consiguiente, no se podrá asegurar que los dos pesos aplicados en A y B puedan sustituirse con el único peso $2P$, aplicado en C, puesto que, si tal sustitución pudiese tener lugar, debería subsistir el equilibrio de una palanca con pesos iguales en los extremos, alrededor de un punto que puede no ser su punto medio.

Recíprocamente, si se admite con Arquímedes, que a dos pesos iguales pueda sustituirse un peso único aplicado al punto medio de la palanca, se deduce fácilmente que E es el punto medio de CD y, sucesivamente, que ABD es un triángulo euclídeo.

Con esto queda establecida la **equivalencia** entre el V Postulado de Euclides y la susodicha hipótesis de Arquímedes. Tal equivalencia, bien entendido, es relativa al sistema de hipótesis formado por las hipótesis estáticas antes indicadas y por las hipótesis geométricas ordinarias.

Por último debemos decir, que el otro principio fundamental de la estática, esto es, la ley del paralelogramo de las fuerzas, en la usual interpretación geométrica que a él se acompaña, está en estrecha conexión con la naturaleza euclídea del espacio.

CUESTIONARIO

1. Describa el contenido matemático de los “**Elementos**” de Euclides.
2. Destaque el papel que jugaron los “**Elementos**” en la Historia de la Matemática.
3. ¿Cuáles son las particularidades del método de razonamiento matemático y las formas de exposición de Euclides?
4. Analice la Proposición 47 del Libro I y el V Postulado.
5. Describa el Método de Exhaución utilizado por los antiguos griegos. ¿Cuál es su principal insuficiencia?
6. Explique las tres Aporías de Zenón. ¿Cuál es su base matemática? ¿Cómo resolver la contradicción presentada?

7. Obtenga una solución general (matemática) para estas paradojas, por ejemplo, la de Aquiles y la Tortuga.
8. Expón los principales elementos del trabajo matemático de Arquímedes.
9. Expón los principales elementos del trabajo matemático de Diofanto. Destaque los rasgos de su álgebra sincopada.
10. Presente, mediante ejemplos convenientes, la teoría de las ecuaciones diofánticas.
11. Demuestre la equivalencia entre el Principio de la Palanca de Arquímedes y el V Postulado de Euclides.
12. Explique en qué consistió la 1era crisis en los fundamentos de la matemática. Presente un método general de obtención de irracionalidades del tipo $\sqrt{a}$. ¿Existe algún resultado general en este sentido, con a natural?

Conferencia 5. Las matemáticas en el medioevo. Los árabes. Solución de las ecuaciones de 3er y 4to grado en radicales. Desarrollo de la simbología algebraica. Cálculo literal de Viete.

“El arte de progresar consiste en preservar el orden durante el cambio y preservar el cambio en medio del orden”

Alfred North Whitehead

Los antiguos chinos definían sus matemáticas como “el arte del cálculo”, que consiste en realidad en un vasto conjunto de prácticas y de corrientes que se desarrollaron en el mundo chino entre el primer milenio antes de nuestra era y la caída de la dinastía manchú, en 1911. Ulteriormente, las matemáticas chinas se occidentalizaron y el saber matemático tradicional se tornó casi impenetrable sin una información clásica.

ADIVINACIÓN, ASTRONOMÍA Y MATEMÁTICAS

Aunque las escrituras chinas cumplían una importante función ya en la época remota en la que se constituyeron los grandes textos canónicos chinos (los “clásicos”, elemento esencial de la formación de las elites intelectuales de todas las épocas), las matemáticas no se consideraban un saber que valiera la pena preservar en textos autónomos.

No obstante, las matemáticas aparecen ya al surgir lo que el sinólogo L. Vandermeersch califica de “**racionalidad divinatoria**”, organizada en sus comienzos en torno a la adivinación mediante el carey de tortuga, los huesos de diversos cuadrúpedos o la aquilea. Esta adivinación fundaba sus pronósticos en la interpretación de los signos naturales más variados, especialmente meteorológicos y astronómicos (arco iris, etc.). Sin embargo, esta estructuración mágica del mundo no excluía los medios de investigación puramente racionales; los adivinos intentaron, con cierto éxito, incorporar todo lo que observaban en esquemas numéricos y aritméticos, destinados al registro de los signos memorables del pasado y a la predicción de ciertos acontecimientos recurrentes. Algunas predicciones relativas a fenómenos celestes periódicos y regulares comenzaron a verificarse claramente, lo que dio origen al calendario y a la astronomía-matemática.

Ahora bien, cada dinastía solía afirmar su legitimidad mediante el establecimiento de un nuevo sistema de cálculo cuyas técnicas debían servir tanto para apreciar los acontecimientos del pasado, consignados por los redactores de anales, como para predecir los acontecimientos futuros. Por lo tanto, la clase dirigente necesitaba personas competentes en la práctica de los cálculos astronómicos y de calendarios. Así nació, poco a poco, un cuerpo especializado de cronólogos imperiales que cumplían simultáneamente funciones de historiadores-analistas y de astrólogos-calendaristas.

La persistencia de la exigencia de quienes estaban en el poder explica que en China la escena matemática haya estado dominada por la búsqueda de procedimientos adecuados para predecir los grandes acontecimientos celestes (conjunciones, ocultaciones, eclipses).

Sin embargo, como los astrónomos calendaristas de la China imperial tenían generalmente una situación social modesta y sus conocimientos se transmitían de generación en generación, a menudo se denigraba su actividad y no se veía en ella más que estancamiento y respeto obtuso de la tradición.

En realidad, se advierte más bien una extraordinaria permanencia de los conflictos que oponían a las escuelas rivales. Desde el comienzo de nuestra era hasta el siglo XVI el calendario fue reformado por lo menos cincuenta veces. Esos conflictos, empero, resultaron

más constructivos que destructivos, pues llevaron a una adecuación progresiva entre la realidad observada y los cálculos previos.

Lamentablemente sólo han llegado hasta nosotros unas pocas obras dedicadas exclusivamente a la astronomía-matemática; a menudo sólo existen monografías redactadas por letrados no especialistas e insertadas en forma abreviada en los sucesivos anales dinásticos.

LOS FUNCIONARIOS MATEMÁTICOS DEL CELESTE IMPERIO

Bajo la dinastía Han (206 a.C.-220 n.e.) aparece otra clase de matemáticas, consignadas ahora en manuales autónomos e independientes compuestos por colecciones de problemas acompañados de recetas para resolverlos y agrupados en capítulos en función de centros de interés determinados. Con frecuencia, los datos son tan precisos y los enunciados tan realistas que casi permiten reconstituir cabalmente la vida socioeconómica de la China en determinadas épocas. No se deja de lado ningún detalle concreto, trátase ya de la recaudación de los impuestos, de las prestaciones personales, de los pesos y medidas, de la moneda, de la construcción de diques o de canales, ya de gestión de la mano de obra o de los transportes terrestres o fluviales, de asuntos policiales o de logística militar. Con estos manuales se formaron las generaciones de “funcionarios-matemáticos” que requería la burocracia imperial.

La dinastía Tang (618-907) había establecido un sistema de exámenes que sancionaban ciclos de estudios relativos tanto a las letras como a las matemáticas. Aunque en los programas de estudios las matemáticas figuraban en último lugar, los estudios de estas disciplinas en el “colegio de los hijos de Estado”, duraban siete años y comprendían las “Diez obras canónicas de matemáticas”. Bajo los Song del sur, en 1084, las autoridades centrales consideraron conveniente hacer imprimir todos los manuales de matemáticas, pero después del 1230 se excluyeron definitivamente las matemáticas de estos programas de exámenes que pasaron a abarcar solamente las materias literarias.

Paradójicamente, los breves períodos de institucionalización de la enseñanza de las matemáticas no fueron aquellas en las que éstas alcanzaron su apogeo. Por el contrario, los progresos más sobresalientes coincidieron en fases de división del Imperio, de guerras y de descomposición de la burocracia. En la época de los Reinos Combatientes (453-222 a.C.) una secta de monjes predicadores, los Mohistas (discípulos de Mozi), elaboró los rudimentos de una lógica que cayó rápidamente en el olvido. En la época de la división de la China en tres reinos (220-265) apareció el matemático de la China antigua Liu Hui, autor de verdaderas demostraciones matemáticas, y de cuya vida lamentablemente nada se sabe. En tiempos de las conquistas de los mongoles se ven surgir repetidamente soluciones inéditas que se olvidan con la misma rapidez.

En la misma época aparece Zhu Shijie, original profesor itinerante que, hacia el año 1300, recorría China enseñando los resultados de sus investigaciones. También en esos años turbulentos el ermitaño Li Zhi (1192-1279) organiza un círculo privado dedicado al estudio de los misterios del mundo y del número, que dio origen al álgebra china. Finalmente, en el siglo XIX, poco después de la guerra del opio, cuando el Imperio chino se encontraba en una situación desastrosa, Lin Shanlan (1811-1882), habiendo fracasado en los exámenes literarios, se entregó a las delicias del arte y descubrió asombrosas fórmulas sumatorias acabadas, perfectamente correctas, que un siglo más tarde iban a sumir en la mayor perplejidad a matemáticos de tanta envergadura como el húngaro Paul Turan.

Las razones por las cuales las matemáticas florecían de esta manera tan súbita como efímera son oscuras. Es posible que la anarquía política liberara a la elite intelectual de la obligación de preparar los esterilizantes concursos que daban acceso a los cargos de mandarín. Como el confucionismo, ideología dominante, atribuía a las matemáticas un lugar subalterno, quienes

se sentían atraídos por esa disciplina podían dar libre curso a sus inclinaciones sin correr ningún peligro.

A partir del siglo XVIII, algunos amantes de la filosofía y especializados en crítica de textos concibieron la idea de recurrir a las matemáticas como ciencia auxiliar de la historia. Hubo quienes procuraron utilizar la astronomía matemática para verificar la autenticidad de los clásicos, tratando, por ejemplo, de determinar mediante el cálculo la realidad histórica de ciertos acontecimientos naturales mencionados en documentos antiguos (sobre todo, eclipses lunares o solares). Otros se apasionaron por el estudio de las “ciencias concretas”: economía monetaria, hidráulica, ingeniería civil, arquitectura, etc. Estas incursiones por senderos solitarios y escarpados engendraron a veces el gusto por las matemáticas puras, independiente de sus aplicaciones.

También podríamos destacar el papel que desempeñaron los contactos con los extranjeros: con los hindúes en la época de la difusión del budismo durante el primer milenio de nuestra era, con los pueblos árabes y persas durante la expansión mongol, o con los misioneros europeos a partir de fines del siglo I.

Antes de 1600 se observan coincidencias con matemáticas de otras culturas, sin que se pueda decidir si son una muestra de influencias recíprocas o simplemente de una evolución paralela.

Por ejemplo, el cero chino, que aparece por primera vez hacia 1200 en tablas astronómicas y que se representa por escrito en forma de un pequeño círculo, como se hace actualmente, podría ser de origen hindú. Numerosas representaciones matemáticas, antiguas o medievales, helénicas, indias, árabes, europeas o chinas, presentan semejanzas sorprendentes. En China y en Grecia existían técnicas matemáticas muy similares: la determinación del volumen de la pirámide, primero por Euclides y más tarde por Liu Hui (siglo III de nuestra era); el cálculo del volumen de un sólido mediante la intersección de dos cilindros ortogonales, efectuado por Arquímedes y por el mismo Liu Hui; y podrían citarse muchos otros ejemplos.

Aunque estas coincidencias expresen esencialmente verdaderas influencias, las matemáticas chinas poseen una coherencia interna y su propio modo de desarrollo.

LA ORIGINALIDAD DE LAS MATEMÁTICAS CHINAS

No se hallarán en las matemáticas chinas los razonamientos geométricos insertados en tramas lógicas y discursivas basados en axiomas, de postulados, de definiciones o de teoremas, ni las verdades absolutas al estilo euclidiano, sino solamente verdades relativas y provisionales. En geometría no hay ángulos ni paralelas, sino únicamente longitudes, áreas y volúmenes. Tampoco existe un álgebra semejante a la árabe, ni la búsqueda de raíces de ecuaciones mediante radicales o por intersección de curvas algebraicas, ni el álgebra “retórica”, es decir, expuesta por escrito en frases largas y verbosas.

No obstante, las matemáticas chinas no se fundan en procedimientos puramente empíricos. En realidad, se basan en razonamientos o en procedimientos operatorios contruidos en torno a principios heurísticos; se trata de poner de relieve el proceso de descubrimiento antes que presentar los detalles del razonamiento de lo ya adquirido. Por ejemplo, unos de los principios cardinales de la geometría china estipula que el área o el volumen de una figura no experimenta variación alguna después de fragmentarla y de volver a ensamblar los trozos, incluso si el número de éstos se torna potencialmente infinito. Este tipo de principio no excluye de ningún modo el empleo de un sistema axiomático pero, en realidad, las figuras chinas no son generalmente objetos ideales abstractos, sino más bien piezas de un rompecabezas, perfectamente tangible, que es posible distinguir gracias a su color y manipular a voluntad. La geometría china se basa esencialmente en ingeniosas disecciones que permiten mostrar ciertos resultados. Un procedimiento de esta naturaleza desempeña un importante papel, pues sirve no sólo para calcular áreas y volúmenes, sino también para poner

de manifiesto algunas propiedades relativas al triángulo rectángulo, para el cálculo de la suma de series, la resolución de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones, y para demostrar en forma visual el equivalente de las “identidades extraordinarias”.

Es más, la geometría china no considera escandaloso (como lo hizo Euclides) recurrir al cálculo o a cualquier arbitrio que pueda ser útil en una situación determinada. En una palabra, no repara en medios. Este rasgo proviene sin dudas del taoísmo; en efecto, se sabe que los matemáticos chinos de los siglos III a V de nuestra era admiraban incondicionalmente a Zhuangzi, padre del taoísmo filosófico, que negaba que el lenguaje fuera un medio fundamental de acceso a la realidad.

Sosteniendo que sus límites quedaban demostrados por sus razonamientos falaces de los sofistas, había llegado a la conclusión de que el razonamiento discursivo, capaz de engendrar conclusiones a todas luces falsas, no era un medio seguro de aprehender la realidad. De ahí que los matemáticos chinos, bajo la influencia del taoísmo, confiaran muy poco en el lenguaje. En cambio, se observan en ellos una tendencia a emplear todos los medios a su alcance, sin menospreciar jamás el testimonio concreto de los sentidos. Esto explica que fueran propensos a los cálculos y a toda clase de manipulaciones que les permitieran evitar la verbalización, y que sólo recurrieran en última instancia al razonamiento discursivo.

Cabe preguntarse cómo es posible que una matemática tan invadida por lo concreto haya producido resultados tan complejos. En realidad, el carácter concreto de las manipulaciones chinas no se supone en lo absoluto una falta de abstracción; muy por el contrario, algunos resultados obtenidos mediante la manipulación de piezas de rompecabezas suponen un gran ingenio y una extraordinaria capacidad de abstracción.

Además, los matemáticos chinos se vieron a menudo obligados a deformar a sabiendas la realidad, pues les era muy difícil enseñar su disciplina respetando escrupulosamente la profusión y la complejidad de las experiencias vividas. Por esta razón muchos problemas chinos ocultan, bajo una apariencia concreta, situaciones puramente ficticias: valores muy grandes o muy pequeños, imposibles en la realidad, o desprovistos de sentidos, como por ejemplo un número de hombres no entero; datos combinados entre sí de manera arbitraria con respecto a la realidad, especialmente cuando se añaden aritméticamente áreas a volúmenes y a precios; inversión del papel de los datos y de las incógnitas, cuando se pide calcular las dimensiones de los objetos a partir de los intereses devengados, o la cantidad de mercancías sobre la base de la parte recibida por cada uno. Claro está, estos procedimientos permiten el acceso a situaciones muchos más interesantes desde el punto de vista matemático que desde el de la vida cotidiana.

Sobre ese terreno “ficticio” se desarrolló el álgebra china. En los manuales más antiguos se observa la acumulación de recetas de cálculo útiles para solucionar tipos limitados de problemas. En el caso extremo, cada problema constituye un caso particular, aunque más tarde aparecieron procedimientos uniformes capaces de resolver tipos cada vez más amplios de problemas. En este nuevo marco, la fantasía concreta ya no sirve como guía en la búsqueda de soluciones.

Empero, nada de todo esto tendría importancia sin la intervención del cálculo. La originalidad china consiste en este caso en una práctica basada en el uso de los instrumentos para calcular. Sin duda, el más conocido de estos instrumentos es el ábaco, que apareció tardíamente (hacia el siglo XV). La práctica de los matemáticos chinos se basa ante todo en la manipulación de varillas de calcular Chosuan, cuya posición relativa permitía distinguir los diversos coeficientes numéricos de las ecuaciones. Expresados en forma de configuraciones de la posición de las varillas de calcular, los problemas chinos quedan en cierto modo depurado de su contexto concreto y pasan a depender únicamente de procedimientos de cálculo establecidos.

Se trata del método conocido por el nombre genérico de Fangcheng (en esta palabra, Fang significa “cuadrado” o “rectángulo” y Cheng significa “repartir”; es pues un método que consiste en distribuir números distinguiendo dos direcciones principales y formando un cuadrado o un rectángulo, o sea, como diríamos ahora, una “matriz”). Además, había dos clases de varillas, las rojas y las negras, es decir, las positivas y las negativas, que representan las fuerzas complementarias que organizan el inverso chino, el Yin y el Yeng.

Estamos pues ante el álgebra “instrumental”, que elude todo razonamiento discursivo. De allí procede su vigor, pero también su debilidad; en sus procedimientos manipulatorios, los cálculos desaparecen a medida que se efectúan. Este “arte de las varillas” se asemeja al arte del virtuoso que ejecuta una partitura sin mirarla; no es casual que algunos matemáticos chinos comparen explícitamente las matemáticas con la música.

Cálculo y manipulación, tales son los ingredientes básicos de una matemática que nunca se sintió limitada por ningún sistema dogmático, y que integró sincréticamente, en diversos momentos de su historia, numerosos elementos venidos de otros lugares.

Los sabios árabes, presentes en la India desde el siglo VIII de nuestra era, hicieron en los textos sánscritos dos descubrimientos capitales que desarrollaron posteriormente por su cuenta y transmitieron a Occidente: la escritura de los números en el decimal, con la noción de cero por una parte y, por otra, la trigonometría de los senos. Estas incursiones de los matemáticos de la India antigua en el ámbito de la escritura, del cálculo y de la triangulación no era producto de la casualidad sino que respondía a las preocupaciones tradicionales de la India, cuyos sabios han mostrado siempre un gusto y un talento particular en relación con la gramática.

MATEMÁTICAS Y ESCRITURA

Las matemáticas comparten, en efecto, con todas las demás disciplinas científicas de la India antigua ciertas limitaciones y estilos ligados a la lengua sánscrita y a la versificación.

Los grandes textos matemáticos están en sánscrito; en principio, son la obra de un Brahmán. Un texto básico a menudo elíptico -aforismos (es el significado de la palabra Sutra) o bien estrofas que se aprenden de memoria - es objeto de una sucesión ininterrumpida de comentarios en prosa. Estos esclarecen el sentido junto con confirmar el carácter aforístico de los textos antiguos, concebidos manifiestamente como resúmenes de la enseñanza de un maestro deseoso de dejar su impronta en la memoria de sus discípulos.

CIFRAS Y SIMBOLISMO NUMÉRICO

Existen testimonios antiguos del empleo de cifras, en sentido de símbolos gráficos, en las inscripciones en piedra o en cobre que estudian los arqueólogos. Así, las cifras 4 y 6 se han encontrado en las inscripciones de Asoka que datan del siglo III a.C.; pero están pocos presentes en los textos matemáticos propiamente dichos. Los denominados números “arábigos”, porque fueron transmitidos por autores árabes, dieron origen a los números indios; pero por lo general se emplean poco en los textos sánscritos, en los que los números se indican en letras o se simbolizan mediante ordenaciones alfabéticas.

Los números se disponían verticalmente en varias líneas; por lo menos es lo que se desprende del comentario del Aryabhatiya compuesto por Bhaskara el antiguo en 629. Ahora bien, que estén hechos en papel o en hojas de palmera, los manuscritos indios por lo general no duran más de tres siglos; transcurrido este lapso, son destruidos por los insectos o por el moho. Los manuscritos de ese comentario que han llegado hasta nosotros son copias modernas y no pueden constituir un testimonio de la forma de escribir en una época anterior. El manuscrito de Bakhsali (siglo XII) es sin duda en ese sentido el documento más antiguo: ilustra

operaciones en números arábigos dispuestas en varias líneas, en una especie de cartuchos o recuadros.

En cuanto a los textos matemáticos clásicos, la ausencia de símbolos gráficos, de cifras, en los aforismos a las estrofas no impide que se recurra a un simbolismo. Simplemente, ese simbolismo es de carácter gramatical o retórico. Las cifras se representan mediante clichés literarios y metáforas, gracias a un juego ilimitado de sinonimias que caracteriza la lengua sánscrita. Así, *Nayana* (ojo) o *babu* (brazo) son nombres del número dos. *Agni* (el fuego) designa el 3 (hay tres fuegos rituales védicos) y *Adri* (montaña) designa el 7 (las siete montañas de la India en la geografía religiosa). Los vocablos sánscritos para “cielo” o “espacio” designan el cero. El orden del enunciado de las cifras en el interior del número es el inverso del nuestro: 23 se dice *Agni-nayana*.

Este simbolismo es útil para escribir en verso series de números que hoy día se presentarían en forma tabulada. En los almanaques, en la India como en otras partes desde hace siglos, los datos astronómicos se disponen en columnas de cifras, pero esta forma de presentación, inventada por los árabes, es relativamente reciente. Las series de cifras en los textos sánscritos antiguos aparecían en forma de verso o de estrofas.

Otro tipo de simbolismo numérico utilizado frecuentemente en los textos astronómicos y matemáticos se basa en el alfabeto sánscrito. Varios son los sistemas empleados, y en particular el sistema *Katapayadi*, muy difundido en el sur de la India, que permite expresar los grandes números y las tablas trigonométricas en forma de juegos de palabras, aforismos o estrofas mnemónicos. El sistema es suficientemente flexible como para permitir escribir números recurriendo a expresiones que admiten una doble interpretación. Por ejemplo, *Acaryabag abhedya*, exhortación brahmánica que significa literalmente “no debe traicionarse la palabra del amo”, es la escritura en clave del número 1434160, cronograma que designa el día 1434160 de la *Kali*, día en que el filósofo *Sankaracarya* introdujo ciertas reformas.

¿Tuvo en este caso la escritura poética una influencia sobre el razonamiento? ¿Existía acaso un carácter específico, algo especial en el pensamiento y en la posición social de los matemáticos hindúes que los movía a colocar su enseñanza en el molde de un discurso literario?

ESPECIALISTAS EN ASTROS

Nunca hubo en la India una casta de matemáticos, ni verdaderamente una escuela. Los matemáticos, si denominamos así a los autores y a los usuarios de los textos sánscritos que tratan de geometría, de aritmética y del álgebra, trabajan en relación más o menos estrecha con los especialistas en el ritual védico o brahmánico. *Brahmanes* o miembros de castas elevadas, de cultura sánscrita, eran, en la clasificación de los hombres de ciencia, *JYOTIRVID*, “**especialistas en astros**”. La mayoría de los textos matemáticos figuran en tratados de astronomía; la trigonometría, por lo demás, no adquiere todo su sentido sino en el estudio de las distancias angulares entre los astros.

Como todas las ciencias (las *sastras*) brahmánicas, las matemáticas se cultivaron en principio con fines religiosos: contribuían a la ejecución adecuada de los ritos. Nada sabemos de la vida de los grandes matemáticos, pero podemos imaginar sin temor a equivocarnos el marco ritualista y escolástico en el que trabajan pues impregna el estilo de los textos sánscritos, apoyándose en un texto que los alumnos aprendían repitiéndolo palabra por palabra hasta que “se les pegara en la garganta” (lo supieran de memoria), la enseñanza oral del maestro proporciona las ilustraciones, las demostraciones y las operaciones que explica el texto. Este es una llave que abre el campo del saber, un instrumento de realización espiritual.

El “*Lilavati*” de *Bhaskara* (siglo XII) desempeña tradicionalmente este papel para la aritmética y por ello concluye con una estrofa con doble significado en la que *Bhaskara*

compara su “**Lilavati**”, su “graciosa” (palabra que también designa la aritmética), con una mujer adornada de todas las bellezas de la Jati (término que significa a la vez un noble “linaje” y, en sentido técnico, la reducción de las fracciones al “común denominador”): *“júbilo y felicidad no cesarán de aumentar en este mundo para los que la tienen Kanthasakta, estrechamente enlazadas o pegada en la garganta (repitiéndola hasta saberla de memoria)”*.

DE LA GEOMETRÍA RITUAL AL TRATADO DE BHASKARA

Los textos más antiguos que han llegado hasta nosotros son los Sulbasutra, “aforismo sobre los cordales”, que fueron compuestos probablemente entre los siglos V y I a.C. Consisten en textos que establecen las reglas de construcción de los altares, hechos de ladrillos amontonados en forma simbólica, para el ritual de los sacrificios védicos. Las construcciones geométricas que en ellos se enseñan se basan en el conocimiento de numerosos casos particulares de triángulos rectángulos (lados 3-4-5, por ejemplo, 5-12-13, 7-24-25, etc.) y en la regla general de “la cuerda diagonal de un rectángulo produce (al construirse sobre ella un cuadrado) a la vez lo que producen separadamente el largo y el ancho, y la cuerda diagonal de un cuadrado produce (al construirse sobre ella otro cuadrado) el doble de su área”. Es la fórmula India del Teorema de Pitágoras. Aquí esta regla, no se formula como un teorema, sino como un aforismo, una disposición para la buena marcha del ritual, una regla de construcción. La propia palabra sutra, que en principio designa un estilo, el aforismo, llegó a significar una “regla”, y en sentido técnico, en los tratados ulteriores, una regla de construcción.

No hay teoremas en las matemáticas indias sino reglas que son objeto de una intuición en el punto de partida del razonamiento. Las reglas, los aforismos y los mnemónicos de los textos básicos no son el resultado de una demostración, sino, por el contrario, disposiciones con miras a un trabajo de construcción geométrica que efectuará el lector o el comentarista. Incluso en álgebra, la forma de razonamiento más crítica asocia áreas a los productos de factores e implica la construcción de una figura.

Se sostiene a menudo que los indios no fueron geómetras sino algebristas. En realidad, en los comentarios sobre los textos de Aryabhata (476-550), Brahmagupta (598-670) y Bhaskara (siglo XII), la geometría permite la aplicación de las reglas aritméticas y el álgebra. Se tratan al mismo tiempo, como dos aspectos de una misma realidad, una magnitud geométrica y un conjunto numérico. La solución algebraica viene a incorporarse en la construcción geométrica. Demostrar es exhibir la solución, hacerla intuitivamente manifiesta y, como dice el comentarista: *“La demostración por las cantidades debe exhibirse a lo que no comprenden la que se obtiene por las áreas”*. Así, en las matemáticas indias, razonar es aclarar una intuición.

LOS ÁRABES

¿Cómo pueden describirse los comienzos de las matemáticas redactadas en árabe?

La investigación matemática árabe parece haber comenzado a principios del siglo IX. En esa época, en Bagdad, el movimiento de traducción de las grandes obras helenísticas llega a su apogeo. Así, al-Hajjaj Ibn Matar traduce dos veces los “**Elementos**” de Euclides, y el “**Almagesto**” de Ptolomeo; Hilal ibn- Hilal al-Himsi vierte al árabe los cuatro primeros libros de las “**Cónicas**” de Apolonio. En el mismo siglo se traducen al árabe varias obras de Arquímedes, Pappus y Diofanto de Alejandría.

La empresa presenta dos características primordiales: las traducciones las realizan matemáticos de primer orden y se basan a su vez en investigaciones más avanzadas de la época. Así, quien tradujo los libros V a VII de las **“Cónicas”** de Apolonio fue el gran matemático Thabit ibn Qurra (826-901). Por otra parte, todo indica que la traducción por Qusta ibn Luga de las **“Aritméticas”** de Diofanto, hacia 870, se debió a una investigación ya iniciada sobre el análisis indeterminado o el análisis diofántico racional.

Son múltiples los ejemplos que muestran la estrecha relación existente entre la traducción, por una parte, y la innovación matemática, por otra. En suma, la traducción representa un gran momento de expansión en árabe de las matemáticas helenísticas.

Al-Khwarizmi (790-850) es el más conocido de los matemáticos árabes y su nombre está ligado a la aparición del álgebra. ¿Cómo caracterizar esta empresa?

Precisamente en esta época, en el siglo IX, y en ese lugar, la Academia (Casa de la sabiduría) de Bagdad, Al-Khwarizmi redacta un libro que se caracteriza por la novedad del tema y del estilo. En esas páginas, tituladas **“El Libro del álgebra y de almugabala”**, surge por primera vez el álgebra como disciplina matemática diferente e independiente. El acontecimiento fue crucial y considerado como tal por sus contemporáneos, tanto por el estilo de esta matemática como por la analogía de su objeto y, sobre todo, las extraordinarias posibilidades

que ofrecía para el futuro.

Lo que se había concebido era un ente matemático suficientemente general para recibir determinaciones de géneros diferentes, pero dotado a la vez de una existencia independiente de esas determinaciones. En Al-Khwarizmi el objeto algebraico remite tanto a un número como a una cantidad irracional o a una magnitud geométrica. Esta nueva ontología, así como la combinación de los dos procedimientos, el demostrativo y el aplicado, impresionaron a los filósofos de la época.

Nunca podrá insistirse demasiado en la novedad de la concepción y del estilo de Al-Khwarizmi, que no se basan en ninguna tradición anterior conocida. Con esta álgebra se captan ya las inmensas posibilidades que se abrirán a las matemáticas a partir de ese momento: la aplicación de las disciplinas matemáticas de unas a las otras. Dicho de otro modo, si el álgebra, a causa de la generalidad de su objeto y

de la nueva ontología así introducida, hizo posible esas aplicaciones, éstas, a su vez, por su número y su diversidad, modificarán si cesar la configuración de las matemáticas después del siglo IX.

Los sucesores de Al-Khwarizmi emprenden progresivamente la aplicación de la aritmética al álgebra, del álgebra a la aritmética, de una y otra a la trigonometría, del álgebra a la teoría euclidiana de los números, del álgebra a la geometría, de la geometría al álgebra. Esas aplicaciones entrañaron la creación de nuevas disciplinas o, al menos, de nuevos capítulos de la ciencia matemática.

En esta perspectiva, se podría comentar un ejemplo significativo de este encuentro entre la aritmética y el álgebra.

Es posible mencionar, a este respecto, la contribución matemática árabe en el ámbito de la teoría clásica de los números.



A fines del siglo IX se tradujeron los textos griegos más importantes, en particular los libros aritméticos de Euclides, la **“Introducción Aritmética”** de Nicómaco de Gerasa (60-120) y las **“Aritméticas”** de Diofanto de Alejandría. A raíz de esas traducciones se constituyen varios capítulos de la teoría de los números. Tomemos el ejemplo de la teoría de los números amigos. Su evolución comprende dos etapas significativas. La primera etapa conduce, en el marco de la geometría euclidiana, a resultados nuevos. La segunda etapa da lugar, algunos siglos más tarde, gracias a la aplicación del álgebra a la teoría elemental de los números, a la creación de una región no helenística en lo referente a la teoría de los números. Precisemos ambos aspectos.

Si bien al final del libro IX de sus **“Elementos”**, Euclides formula una teoría de los números perfectos, ni él ni Nicómaco de Gerasa enunciaron la teoría de los números amigos. Thabit ibn Qurra, traductor del libro de Nicómaco, revisor de una traducción de los **“Elementos”** y él mismo, eminente matemático, decidió elaborar esa teoría. Enuncia y demuestra, en el más puro estilo euclidiano, el más importante teorema aplicable a esos números y que hoy día lleva su nombre.

Si se descarta aquí la mística de los números que tenía vigencia desde la antigüedad para considerar a las matemáticas, no cabe sino constatar que, hasta fines del siglo XVII por lo menos, la historia de los números amigos se limita a una evocación de ese teorema de ibn Qurra y de su transmisión por los matemáticos tardíos. Entre estos últimos, cabe citar a los matemáticos de lengua árabe como al-Antaki, al-Bagdadi, ibn al-Banna, al-Umawi y al-Kashi. Estos nombres prueban suficientemente, tanto por su diversidad cronológica como geográfica, la gran difusión del teorema de ibn Qurra, que retoman en 1636 Pierre de Fermat y en 1638 René Descartes.

La segunda etapa se expresa en el hecho siguiente. El célebre físico y matemático Kamal al-Din al-Farisi, elaboró una relación en la que intenta demostrar el teorema de ibn Qurra, pero por una vía diferente: basa su demostración en un conocimiento sistemático de los divisores de un entero y de las operaciones que es posible aplicarles. Al hacerlo procede en realidad a una reorganización que conduce no sólo a modificar, por lo menos localmente, la perspectiva de la aritmética euclidiana, sino también a impulsar nuevos teoremas sobre la teoría de los números. Cabe hablar entonces de una región no helenística de la teoría de los números.

Para que este nuevo estudio de los divisores fuese posible, era necesario que el matemático estableciera explícitamente lo que sólo existía de manera latente en los Elementos de Euclides; por otra parte, tenía que recurrir a los resultados del álgebra desde al-Karaji (siglo X-XI) y en particular a los métodos de combinación. El procedimiento de al-Farisi, lejos de limitarse por consiguiente a la demostración del teorema de ibn Qurra, permite emprender un nuevo estudio: el de las dos primeras funciones aritméticas, la suma de los divisores de un entero y el número de esos divisores.

Un estilo de este tipo, que aplica el álgebra y el análisis de combinación a la aritmética euclidiana, se encuentra aún en vigor en Europa en el siglo XVII, por lo menos hasta 1640. El análisis de las conclusiones de al-Farisi y de los métodos aplicados muestra que ya en el siglo XIII se había llegado a un conjunto de proposiciones, de resultados y de técnicas que equivocadamente se habían atribuido a los matemáticos del siglo XVII.

Habría que hablar también de las nuevas relaciones que se establecen entre el álgebra y la geometría

Ya se ha visto que a partir del siglo IX el panorama de las matemáticas se transforma y que sus horizontes se amplían. Se observa, en primer lugar, una expansión de la aritmética y de la geometría helenística. Por otro lado, en el seno de esas matemáticas helenísticas se crean regiones no helenísticas; ocurre que las relaciones entre las antiguas disciplinas ya no son las mismas y se han producidos muchas otras agrupaciones. Esta modificación de las relaciones es capital si se quiere entender la historia de las matemáticas. Así, las nuevas relaciones que

se establecen entre el álgebra y la geometría dan origen a nuevas técnicas de gran importancia.

Sin ninguna justificación teórica, las matemáticas del siglo X inician una doble traducción inconcebible anteriormente: la de los problemas geométricos en la lengua del álgebra y la de los problemas algebraicos en la lengua de la geometría. Es así como expresa algebraicamente problemas concretos, que no pueden resolverse con una regla y un compás, como la trisección del ángulo, las dos medias, el heptágono regular. Por otra parte, ante la dificultad que plantea la resolución por radicales de la ecuación de tercer grado, algunos algebristas, pero también geómetras como Abu al-jud ibn al Leith, proceden a traducir esa ecuación en la lengua de la geometría, lo que le permite aplicar al estudio de la ecuación la técnica de intersección de las curvas.

El primer intento de fundar esta doble traducción surge con al-Khayyam (1048-1122). Procurando superar la investigación ligada a una determinada forma de ecuación cúbica, al-Khayyam elabora una teoría de las ecuaciones algebraicas de grado inferior o igual a tres y, al mismo tiempo, propone un nuevo modelo de redacción. Estudia las ecuaciones de tercer grado con ayuda de las curvas cónicas. Para elaborar esta nueva teoría se ve obligado a concebir mejor y a formular las nuevas relaciones entre el álgebra y la geometría. La teoría de las ecuaciones parece, en adelante, aunque todavía con timidez, superar las diferencias entre ambas disciplinas.

En su célebre tratado de álgebra al-Khayyam logra obtener dos resultados trascendentes atribuidos equivocadamente a Descartes: por una parte, una solución general de todas las ecuaciones de tercer grado por la intersección de dos cónicas y, por otra, un cálculo geométrico que resulta posible gracias a la elección de una longitud unidad, concepto que es fundamental.

Medio siglo después que al-Khayyam, su sucesor, Sharaf al-Din al-Tusi, da un nuevo paso. Para demostrar la existencia del punto de intersección de dos curvas, este matemático planteó los problemas de localización y de separación de las raíces de la ecuación y estudio de las condiciones de su existencia; problemas para cuya solución tuvo que definir la noción de máximo de una expresión algebraica y esforzarse por encontrar conceptos y métodos para la definición de los máximos. Este enfoque no sólo



condujo a al-Tusi a inventar nociones y métodos que sólo fueron bautizados más tarde -como la derivada- sino que lo obligó a cambiar de procedimiento: por primera vez, que se sepa, descubre la necesidad de proceder localmente, en circunstancias que sus predecesores sólo consideraban las propiedades globales de los objetos estudiados. Todos estos resultados obtenidos por al-Tusi, así como la teoría que los abarca, son de suma importancia y a menudo se atribuyen a matemáticos posteriores a él en varios siglos.

Tales son los principales aspectos de los que se puede llamar la dialéctica entre el álgebra y la geometría. Para completar el análisis, habría que mencionar los dos obstáculos que han entorpecido la progresión de esas nuevas matemáticas: la falta de audacia en el empleo de números negativos como tales, en circunstancias que aún no estaban definidos, y la debilidad del simbolismo.

La historiografía política distingue entre Antigüedad, Edad Media, Renacimiento y Tiempos Modernos. ¿Esta clasificación es aplicable a la historia efectiva de las matemáticas y en particular la contribución árabe?

Es cierto que se han opuesto a las matemáticas “medievales” a las matemáticas “modernas”. La primera entidad, bizantinas, Árabes, incluso indias y chinas, se distinguiría de otra entidad histórica nacida en el Renacimiento. Esta dicotomía no es pertinente ni desde un punto de vista histórico ni epistemológico. Está claro que las matemáticas árabes son una prolongación y un desarrollo de las matemáticas helenísticas, que efectivamente las alimentaron. Lo mismo ocurre con las matemáticas que se desarrollan en el mundo latino a partir del siglo XII. Para ajustarnos a los análisis que hemos esbozado, me parece que los trabajos realizados tanto en árabe como en latín (o en italiano) entre el siglo IX y comienzos del siglo XVII no pueden separarse en eras diferentes.

Todo indica que se trata de la misma matemática. Para convencernos de ello, hoy en día podemos comparar los escritos de al-Samaw'al (siglo XII), por ejemplo, en álgebra y en cálculo numérico, con los de Simon Stevin (siglo XVI); los resultados de al-Farisi en teoría de los números con los de Descartes; los métodos de al-Tusi para la resolución numérica de las ecuaciones con el de Viete (siglo XVI), o su investigación de los máximos con los de Fermat; los trabajos de al-Jazin (siglo X) sobre el análisis diofántico entero con los de Bachet de Meziriac (siglo XVII), etc. Si, por otra parte, hacemos abstracción de los trabajos de al-Khwarizmi, de Abu Kamil, de al-Karaji, entre otros, ¿Cómo comprender la obra de Leonardo de Pisa (siglo XII-XIII) y la de los matemáticos italianos, así como las matemáticas más tardías del siglo XVII?

Existe ciertamente una ruptura con esa matemática; en efecto, las postrimerías del siglo XVII se caracterizan por la aparición de nuevos métodos y de nuevas regiones matemáticas en Europa. Sin embargo, la ruptura no fue necesariamente repentina y no se produjo simultáneamente en todas las disciplinas, por otra parte, rara vez las líneas de separación esquivan a los autores, pero a menudo atraviesan las obras. En el ámbito de la teoría de los números, por ejemplo, la novedad no se traduce, como se ha sostenido, en el empleo de métodos algebraicos por Descartes y Fermat, los cuales, procediendo así, no hacían más que volver a los resultados de al-Farisi. Es más bien dentro de la obra de Fermat donde puede observarse una ruptura, con la invención del método de “descenso infinito” y el estudio de ciertas formas cuadráticas, hacia 1640, algo muy distinto ocurre con los capítulos sobre la construcción geométrica de las ecuaciones, iniciado por al-Khayyam, proseguido por al-Tusi, enriquecido por Descartes y retomados por muchos otros matemáticos hasta fines del siglo XVII, incluso mediados del siglo siguiente.

Es realmente a partir del final de la primera parte del siglo XVII cuando se producen los entrelazamientos y se localizan las principales rupturas. La contribución de los matemáticos árabes se inserta en una configuración coherente, llamémosla matemáticas clásicas, que se desarrolla entre el siglo IX y la primera mitad del siglo XVII.

La enseñanza de las matemáticas que las universidades europeas impartían en sus comienzos (fines del siglo XII y principios de siglo XIII) era, en lo esencial, heredera de la tradición antigua. En París, Oxford o Bolonia los programas de estudios comprendían las materias del Quadrivium pitagórico: aritmética, geometría, música (elementos de teoría musical) y astronomía. Pero se consideraba que la ciencia de las cosas divinas era más importante pues permitía acceder a los textos fundamentales de la fe cristiana; y la Facultad de Artes, en la que se dictaban los recursos de matemática, gozaba de mucho menor prestigio que las facultades de Derecho, Medicina y, sobre todo, de Teología. El contenido de la enseñanza se limitaba a los principios elementales del cálculo y a los primeros libros de los Elementos de Euclides. Se estudiaban, no obstante, los principios del movimiento a partir de las obras de

Aristóteles y, en las escuelas de Oxford y de París, Nicole Oresme trató de representar gráficamente la relación entre tiempo y velocidad en ciertos tipos de movimientos.

LOS MATEMÁTICOS PRÁCTICOS

De la agrimensura al comercio

A fines de la Edad Media, dos grupos distintos, aún cuando a veces hubieran egresado de las mismas universidades, compartían el ejercicio de las matemáticas: por un lado, los agrimensores, ingenieros y contables que pertenecían a la categoría de los artesanos y, por otro, los médicos astrólogos que gozaban de una situación social superior.

En el siglo XIV los cambios económicos, así como el desarrollo de las ciudades y del comercio van a favorecer el ascenso social de los matemáticos prácticos. Los intercambios comerciales cada vez más complejos exigían técnicas idóneas de cálculo y de contabilidad. Los matemáticos ofrecían sus servicios en las “tiendas de ábaco” y redactaban en las lenguas vernáculas tratados donde las explicaciones teóricas sobre el cálculo aparecían junto a la solución de cuestiones financieras relativas a las tasas de interés, los cambios, la circulación y el peso de las monedas, o la repartición de beneficios.

Para poder subsistir, estos artesanos no sólo debían competir con los otros miembros de su profesión, sino también convencer a sus empleadores o a sus clientes de la utilidad de sus conocimientos y de su competencia personal. Así, por ejemplo, el dominio de las técnicas algebraicas, tomadas del mundo árabe, consolidaba el prestigio profesional.

Al principio, esta técnica algebraica no se formulaba de la manera simbólica que hoy en día nos resulta familiar. Consistía más bien en la clasificación de los tipos de relaciones posibles entre diferentes dimensiones y en la descripción de los métodos generales que permitían determinarlos. En los tratados, estos métodos solían presentarse en forma de casos concretos, integrándose en un contexto totalmente práctico. La introducción en Europa de los números decimales acompañó y facilitó el progreso del cálculo: las aproximaciones de raíces y las fracciones complicadas abundaban en los escritos que circulaban por entonces y a los que el desarrollo de la imprenta daría amplia difusión.

En suma, la constitución de una profesión matemática con un radio de competencia más vasto, cuyo prestigio estaba vinculado al de sus usuarios preferentes, los mercaderes, respondió al surgimiento de nuevas prioridades económicas y sociales.

EL MOVIMIENTO HUMANISTA

Esas transformaciones no sólo afectaron a las transacciones bancarias. Desde fines de la Edad Media empezaron a llegar a Occidente muchos inventos prácticos, como el compás y los gemelos. Además, las obras del álgebra solían estar acompañadas de tratados en los que se describían los instrumentos de medición, su funcionamiento y características. Los viajes de descubrimiento, así como el simple tráfico comercial, favorecieron una mayor utilización del astrolabio y del cuadrante. Los tratados de perspectiva, en parte práctico y en parte teóricos, eran obra de pintores, cartógrafos y arquitectos. El conjunto de esas preocupaciones estaba también vinculado a lo que hoy en día llamaríamos óptica geométrica. Así pues, coexistían hasta llegar incluso a confundirse los creadores auténticos y los matemáticos prácticos más interesados por las aplicaciones concretas de su ciencia.

Esta época fue también la de la aparición del movimiento humanista, que se consagró al estudio y la difusión de las obras de la antigüedad clásica. En sus comienzos este movimiento no fue favorable a las matemáticas prácticas. Si hacia fines del siglo XV los humanistas mostraron un cierto interés por la aritmética lo hicieron bajo la influencia platónica y pitagórica y continuaron menospreciando las prácticas de cálculo.

La vida intelectual, de la que la Reforma fue sólo una de las manifestaciones más espectaculares, se orientó más hacia el estudio de los textos que hacia el contacto con los artesanos, esos eruditos realizaron una nueva serie de traducciones de las obras maestras de la antigüedad, primero a partir del árabe y después directamente del griego, y al asimilar gradualmente los trabajos de los geómetras griegos, suscitaron un renacimiento de la ciencia matemática.

EL ARTE DE LA GUERRA

Si el legado matemático de la antigüedad dio frutos fue porque el terreno ya estaba abonado. En efecto, los príncipes recurrían cada vez con más frecuencia a los servicios de los sabios, como los astrónomos Tycho Brahe (1546-1601) y Johannes Kepler (1571-1630), matemáticos imperiales de la corte de Rodolfo II en Praga, no sólo para construir fortificaciones o para resolver problemas de balística. La aplicación de las matemáticas al arte militar suscitaba un interés creciente. Así, la educación profundamente humanista que recibían los aristócratas comenzó a conceder mayor importancia a las matemáticas, y a algunos ingenieros militares se le otorgaron títulos de nobleza a cambio de sus servicios. Así, en el siglo XVI aparecen consejeros en navegación apasionados por la alquimia como John Dee (1527-1608), que prologó una edición de Euclides, médicos algebristas como Cardan, y juristas expertos en criptografía como Francois Viète (1540-1603).

La indiferencia e incluso la hostilidad hacia las matemáticas aplicadas comenzó a desvanecerse, al punto que ciertos reformadores del sistema educativo se mostraron favorables a ellas. Pierre de la Ramée, por ejemplo, consagró su cátedra en el Colegio Real a las matemáticas y sus aplicaciones concretas. Unos de sus discípulos, Snellius, contribuyó activamente a la introducción de las matemáticas universitarias en los Países Bajos, y su acción se vio favorecida por la creación de una escuela de ingenieros militares en Leyden. En las universidades europeas las matemáticas, la geografía y la hidráulica compartieron primero con la astrología hasta llegar gradualmente a reemplazarla.



Entre tanto, el profesor boloñés Sc. del Ferro (1465-1526) ha encontrado hacia 1500 la resolución algorítmica de la ecuación de tercer grado - probablemente haciendo pruebas con irracionalidades cúbicas- pero sin duplicarla y comunicándolo sólo confidencialmente a unos amigos y discípulos suyos, entre otros, el profesor de cálculo A.M. Fior (cerca de 1510) y sus suegros y sucesor en el puesto Ann de la Nave (1500-1558). Fior entra (1535) en un certamen público con el notable profesor de cálculo N. Tartaglia (1500-1557), en el cual propone 30 ecuaciones cúbicas que resolver. Tartaglia tiene éxito antes de terminar el plazo y entrega sus métodos en forma de versos oscuros a G. Cardano, que había insistido cada vez

más y se había comprometido a respetar el secreto bajo juramento (1539). En 1542 comprueba Cardano, junto con su discípulo L. Ferrari (1522-1565), en una visita a Nave, que las soluciones de Tartaglia y Ferro coinciden. Supone que Tartaglia se había enterado deslealmente del método, por tanto, cree tener el derecho de hacer imprimir su propio método (que difiere muy poco del de Ferro) en la “**Ars Magna**” (1545) (obra también importante en lo demás). Esta obra, cuyos pliegos de imprenta están al alcance de Stifel antes

de publicar su **“Arithmetica Integra”** (1544), contiene también entre otras cosas, el método de Ferrari de tratar las ecuaciones de 4to grado $x^4 + p x^2 + q x + r = 0$: Hay que encontrar una magnitud t tal que $(2t-p)x^2 - qx + (t^2 - r) = (x^2 + t)^2$. Entonces resulta un cuadrado perfecto. El procedimiento de Ferrari está ligado a métodos que nos son ya bien conocidos por Diofanto. Vemos que ahora se vuelven a usar (desde Regiomontano) éstos, desarrollándolos más independientes.

Tartaglia protesta enseguida, fuertemente, contra la violación de la palabra dada y las suposiciones de Cardano, exponiendo su punto de vista en los **“Quesiti”** (1546), una aritmética cuidadosamente elaborada, sin ocuparse ni aquí ni en su **“General Tratado”** (1556/60) -el cual nos da en forma hábil un resumen de los conocimientos de la época en Aritmética y Geometría- de las ecuaciones de 3er grado. Las disputas en torno a la primacía de haber resuelto las ecuaciones de 3er grado originan querellas públicas con Ferrari, que degeneran en un altercado indigno. Entre los problemas presentados y resueltos aquí, son notable solamente unas construcciones originales, empleando abertura fija del compás. Se resuelven, además, en el **“General Tratado”** unos pocos problemas de máximos y mínimos; por ejemplo, se busca el máximo de $x(a^2 - x^2)$, el cual se determina en forma de receta.

Cardano, que no toma parte personalmente en las disputas, ha avanzado mucho en todo lo referente a ecuaciones. Ya en su **“Aritmética Práctica”** (1539) se ocupa de la racionalización de denominadores con irracionalidades cúbicas; en su **“Ars Magna”** (1545) reduce ecuaciones cúbicas en su forma normal y examina también cuando las ecuaciones de tercer y cuarto grado tendrán soluciones reales. Cardano sabe qué relaciones existen entre los coeficientes de la ecuación cúbica y la suma de sus raíces, y ya se acerca a la regla de signos de Cartesius, en su



“Serno de Plus Etminus” (impreso en 1663) se ocupa de la existencia de números imaginarios en ecuaciones cúbicas. Esta investigación está relacionada con los trabajos de ingeniero R. Bombelli de Babilonia, cuya **“Algebra”** (1572) se dedica, en primer lugar, expresiones complejas de la forma $((a + (-b)^{1/2})^{1/3})$. Aquí se encuentran ya las reglas de multiplicación de magnitudes imaginarias, transformaciones algebraicas en el caso irreducible; y, sobre todo, conoce ya que aplicando la fórmula de Cardano, las partes imaginarias se eliminan, apareciendo raíces cúbicas que se pueden ya extraer.

Punto de partida ha sido, probablemente, para Ferro la cuestión de saber cuando se podía reducir $(a + (b)^{1/2})^{1/3}$ a $u + v^{1/2}$. Una indicación a este problema está al final del **“Coss”** de Rudolf (1525). Stifel investiga este asunto más detalladamente en sus **“Comentarios de Coss”** (1553/54) y trabajos semejantes se encuentran (probablemente sin conocer a su antecesor) en el Algebra de Bombelli (1572). Las ecuaciones de tercer grado, resolubles mediante trucos especiales, que nos presentan P. Núñez (1502-1578) en su **“Algebra”** (1564) y N. Pieterszoon en su **“Arithmetica”** (1567), son todavía independientes en la teoría del italiano, la cual es recogida primeramente por S. Stevin (1548-1620) en su **“Arithmetique”** (1585) y por Fr. Viète (1540- 1603) en **“Aequationum recognitio et emendatio”** (1591) y en su **“Supplementum geometriae”** (1593). Ambos tienen importantes mejoras formales. Viète se ocupa, entre otras cosas, del caso irreducible, el cual resuelve evitando los imaginarios, mediante métodos trigonométricos. Este método sufre variaciones interesantes en la edición de la **“Recognitio et emendatio”** (1615) de A.

Anderson (1582-1620), en la **“Invention Nouvelle”** (1629) de A. Girard (1595- 1632) y en el apéndice de la **“Organica Descriptio”** (1646) de Fr. Von Schooten (1615-1660), el **“Lustgarten”** (1604) de J. Faulhaber (1580-1635) contiene numerosos problemas cúbicos y sus soluciones, pero sin reducción. Las demostraciones provienen de P. Rothe (+ 1617) en su **“Arithmetica”** (1608) con una descripción detallada de las teorías de Cardano.

Viete empieza su carrera científica como preceptor de Catalina Parthenay (1554-1631), para quien escribe una astronomía extensa cuya introducción se imprime en 1637. Conoce el **“Informe Preliminar”** (impreso en 1540) y la **“Obra Principal”** (impreso en 1543/1566) de Copérnico, rechaza la nueva teoría de los planetas por coincidir demasiado con los hechos de observación, pero trata de corregir el sistema de Ptolomeo debidamente. Desde 1571 trabajó de abogado, ascendiendo al rango de jurista de la corte. Por haber sido destituido temporalmente por adversarios políticos, se dedicó totalmente a sus estudios preferidos, en los años 1584-89.

El **“Canon”** (impreso en 1571/79) está fuertemente influido por la **“Trigonometria”** de Regiomontano (impresa en 1533) y las **“Tablas”** de Rheticus (1551), pero que es más exacta que ambas. Viete nos da en unas tablas hábilmente dispuestas las seis razones trigonométricas de minuto en minuto con una precisión de cinco decimales respecto a los minutos y de diez decimales respecto a los grados enteros, añadiendo también sus valores sexagesimales hasta $k: 60^3$; hace con ello resaltar eficazmente las ventajas de las tablas decimales. Mediante biparticiones continuadas del ángulo, en dos partes iguales, obtiene, partiendo de las funciones del ángulo de 30 grados, las del ángulo $30^\circ:2^{16}=225:8192$ con diez decimales y así el valor de π con nueve decimales; resultando entonces mediante:

$$m \sin (180^\circ/n) < n \sin (180^\circ/m), 3 < m < n,$$

el valor de $\sin 1'$ con 13 decimales. Empieza también a desarrollar $\cos nt$ y $\sin nt/\sin t$ en función de $\cos t$ llevándolos a cabo posteriormente más exactamente (1593-1615); desarrolla la trigonometría esférica mediante el teorema de los senos y el teorema algo modificado del coseno. Aparecen entonces las reglas para el cálculo del rectángulo esférico que hoy se conoce por el nombre de Neper. Para el triángulo oblicuángulo, Viete tiene todavía que distinguir 28 casos distintos, reduciéndolos más tarde (en la **“Varia Responsa”**, VII, 19) a 6 casos. La aproximación excelente de $2^{1/3}$ por $2^{1/4}+2^{1/2}/20$ y otras semejantes, hace suponer que también conoce el método de aproximación todavía torpe, pero en el fondo importante, para resolver numéricamente ecuaciones (determinación sistemática de los decimales siguientes a un valor dado de aproximación) (impreso en 1600) pertenece al principio de la época.

En el exilio, Viete estudia las ediciones matemáticas clásicas de Commandino (impresas desde 1558) y de los franceses; además a Cardano (1545-1570), Tartaglia (1546-1556), Bombelli (1572), Holtzmann Diophant (1575) y Stevin (1585). El formalismo algorítmico repitiéndose siempre en Diofanto y sus interpretadores, le induce, al tratarse de transformaciones generales, a la introducción de magnitudes algebraicas numéricamente indeterminadas, a saber, de las letras en vez de los números. Así se origina la **“Logistica Speciosa”**, en la cual las magnitudes conocidas se designan por consonantes y las desconocidas por vocales.

En la **“Isogoge”** (impresa en 1591) las potencias de magnitudes conocidas y desconocidas se expresan por palabras; además de + y -, indica solamente la división simbólica (raya de fracción); la multiplicación y la igualdad verbalmente. El atenerse tan rigurosamente al principio de la homogeneidad, indica el origen geométrico del método, y el gran número de expresiones griegas, el origen antiguo. En la **“Notae Priorae”** (impresas 1631) se construyen

y transforman expresiones algebraicas, y se recogen teoremas sobre los triángulos rectángulos, que corresponden al teorema de adición y sustracción de las razones trigonométricas del seno. En el **“Recognitio Aequationum”** (impreso en 1615) se eliminan fracciones y raíces y se sacan factores fácilmente reconocibles. Así se transforma $x^3 + 3ax = 2b$ mediante $y^2 + xy = a$ en $y^6 + 2by^2 = a^3$; y se resuelve la ecuación de cuarto grado siguiendo a Ferrari. El ejemplo hasta quinto grado se ve que Viete sabe determinar los coeficientes de una ecuación mediante las soluciones de las ecuaciones.



Otros aspectos de Viete apenas han superado a sus maestros italianos. Por limitar el empleo de las letras a magnitudes positivas, tiene que distinguir muchos casos superfluos. Los conocedores del **“Coss”** alemán, que han adelantado mucho en lo formal, como, por ejemplo, Clavius, sienten repugnancia del sinnúmero de expresiones especiales y no ven las posibilidades prometedoras de la **“Logistica Speciosa”**. Los franceses, ingleses y holandeses tienen opinión diferente: Th. Harriot (1610, edición de 1631), A. Girard (1629), W. Oughtred (1631) y P. Herigone (1634) hacen el nuevo método más elástico. El desarrollo moderno no se inicia sino más tarde con R. Descartes (1637).

Viete quiere recuperar y restaurar el método geoméricamente oculto de los antiguos, el cual se puede reconocer bien, según su opinión, en Diofanto.

Por eso se empeña en hacer estas extensas investigaciones de la aritmética usando medios auxiliares algebraicos. Es interesante el tratamiento de expresiones indeterminadas que se eleven al cuadrado y la transformación de una suma o diferencia de cubos en otra mediante $a^3 + b^3 = (a - b^2/t)^3 - (b - a^2/t)^3$, siendo $3ab/t = a^3 + b^3$. El álgebra de letras empleadas algorítmicamente y reducida a ejemplos numéricos, explica el sentido y contenido de la colección de Diofanto, y usada como medio auxiliar en geometría explicará el libro VII de las **“Colecciones”** de Pappo. Al análisis geométrico general corresponde la solución indeterminada de un problema de aritmética. Así, mediante la **“Logistica Speciosa”** es asequible todo lo que se pueda tratar algebraicamente.

Análogamente, la **“Canonica Recencio”** (1591) contiene la versión geométrica de las operaciones elementales y la solución de las ecuaciones $x^4 + a^2x^2 = b^4$ mediante compás y regla. Por otro lado, no se pueden tratar con compás y regla sino las irracionalidades cuadráticas y sus superposiciones. Pero admitiendo además, como medio de construcción el empleo de un segmento dado $AB = c$ que pase por el punto dado p , de modo que A, B estén sobre las rectas g, h respectivamente, se pueden introducir dos medias geométricas (ecuación: $x=x:y=y:b$), dividir ángulos en partes iguales ($x^3 - 3x = y$, siendo $x=2\text{sent}$, $y=2\text{sen } 3t$) y construir el heptágono regular, resolviendo la ecuación $x^3 + x^2 - 2x = 1$ (forma normal: $u^3 - 7u = 7$). Se pueden resolver ecuaciones de tercero y cuarto grado usando dos medias geométricas y mediante la trisección de un ángulo.

La publicación del tomo de la **“Responsa”** (a principios de 1593) coincide con una disputa que el enciclopédico J. J. Escalígeros (1540-1609), quien se vanagloriaba de haber resuelto los problemas de la cuadratura del círculo ($\pi = \sqrt{10}$), de la trisección del ángulo, y de la duplicación del cubo mediante compás y regla, y que a sus críticos llamaba sin más ni más “ignorantes”. Por no poder competir con la crítica de Viete, sale de Francia (1594) para hacerse cargo de una cátedra de Leiden. Su **“Cyclometrica Elementa”** y el **“Mesolabium”**

publicados allí (1594), fueron rebatidos por los matemáticos más capaces de su época. Las dos refutaciones más interesantes son las de Viete.

En su **“Menimen Adversus Cyclometrica Nova”** (1594), Viete calcula aproximadamente un segmento circular mediante el segmento de un espiral de Arquímedes inscrita y tangente en unos de los extremos del segmento circular obteniendo un resultado equivalente a $3\text{sent}/(2+\text{cost}) < t$; con lo cual se ha demostrado que la regla arriba mencionada de Nicolás de Cusa, es una aproximación.

Quizás Viete no conocía entonces estas relaciones; sin embargo, conoce una aproximación análoga que se puede lograr también mediante el segmento de una parábola. La fórmula según la cual el segmento circular es mayor que $4/3$ del triángulo isósceles inscrito, tiene como resultado la expresión $\text{sent}(4-\text{cost})/3 < t$, que es solamente un poco menos exacta que el resultado anterior. Este método de aproximación ha sido más tarde ampliado por Chr. Huygens (1629-1695) de un modo sorprendente (1654).

En su **“Pseudomesolabium”** (1595) Viete examina las cuerdas que cortan al diámetro en cuatro segmentos que forman una progresión geométrica. En un apéndice refuta la afirmación de Escalígero de que el diámetro sea media aritmética de las dos diagonales de un cuadrilátero inscrito. Obtiene -quizás influido por cálculos que se hallan en una correspondencia entre Regiomontano y G. Bianchini (1464) y que estaban entonces circulando (siendo a,b,c,d, los cuatro lados) mediante el teorema de Ptolomeo $ef=ac+bd$ y de la fórmula $e:f=(ad+bc):(ab+cd)$ siendo e y f las diagonales. Su construcción se basa en que, por ejemplo, la relación existente entre los ángulos comprendidos entre los lados d,a y a,b (x,y respectivamente) es $\text{sen}x:\text{sen}y:\text{sen}(x+y)=(ab+cd):(ad+bc):(a+c)(a-c)$. No es probable que Viete haya conocido el cuadrilátero inscrito siendo los lados y diagonales números enteros, a saber: $a=25$, $b=33$, $c=60$, $d=16$ y las diagonales $e=52$, $f=39$ y el diámetro de la circunferencia circunscrita $2r = 65$ en el libro de **“Cálculos”** de S. Jacobo (1565). Según parece, tampoco ha sabido nada del interesante trabajo realizado por G.B.Benedetti (1530-1590), en sus **“Speculationes diversae”** (1585), ni de las construcciones de los **“Problemas geometricum”** (1586) de Fr. Barozzi (1538 -1590).

Viete adquirió fama Europea al impugnar a A. Van. Roomen (1561-1615), quien en sus **“Ideae Mathematicae”** (1590 terminadas, 1593 impresas) había hecho un resumen de los más importantes matemáticos que entonces vivían, sin nombrar a ningún Francés, ni siquiera a Viete. Refiriéndose a este resumen, el embajador Holandés en la corte de Enrique IV, en Fontaienebleau, se expresaba desdeñosamente sobre los méritos científicos de los Franceses de quienes aseguraba ninguno podría tomar parte en el certamen propuesto en las **“Ideae”** y el cual exigía la solución de una ecuación de grado 45 bajo ciertas condiciones. Al ser llamado Viete encontró enseguida una solución y al día siguiente las otras 22 soluciones que se pedían. En su **“Responsum”** 1595 hizo un resumen de sus métodos de resolución, corrigiendo, además, una falta en el texto del certamen y añadiendo las relaciones existentes entre el problema y las ecuaciones generales referentes a trisección y división en 5 partes iguales de un ángulo. Repitió las observaciones hechas en su **“Varias responsa”** sobre secciones de ángulos; añadió, además, las fórmulas para la cuerda $y_n = 2\cos nt$ en el círculo trigonométrico, partiendo de la cuerda fundamental $x = 2\cos t$. Las fórmulas generadas de recursión para calcular las cuerdas $y_{m+1} = xy_m - y_{m-1}$ no se encuentran sino en la edición póstuma de las **“Sectiones angulares”** (1615) hechas por A. Anderson (1582-1620) añadiendo también demostraciones. Allí se indican exactamente el parentesco del esquema del coeficiente con los del triángulo aritmético.

Al final de su **“Responsum”** Viete refiriéndose a las **“Tactiones”** de Apolonio (perdidas) exige que sus desafiadores resuelvan el problema de construir aquellas circunferencias tangentes a tres círculos dados. Van Roomen conoció una expresión de Regimontano, que

había de resolver el problema mediante compás y regla por ello determinó los puntos medios de la circunferencias buscadas como secciones de dos hipérbolas (1596). Ya en 1597 indica Viete, refiriéndose a Pappo una posibilidad de solución elemental. En 1600 publica un procedimiento que se encuentra en escritos antiguos (libro VI de la “**Varias responsa**”).

Los últimos años de Viete están llenos de ataques infructuosos contra la reforma calendaria de Gregorio XIII (Papa, 1572/85), acompañado de insultos groseros contra Clavius, unos de los consejeros del Papa en este asunto. El punto de vista de Viete es falso. La violencia de sus discusiones exaspera a sus contrincantes, induciéndolos a rechazar, demasiado precipitadamente, su “**Logistica Speciosa**”, despreciada sin razón alguna.

Una pequeña colección de las obras de Viete, provista en parte de comentario excelente de Anderson, se publicó en 1615. M. Mersenne (1588-1648) se esforzó, durante muchos años, en hacer una edición de lo más completa posible de los escritos de Viete; en 1637/38 creía poder obtener una edición por medio de los activos editores de Leiden, Elizeviere, e hizo examinar unos trabajos dejados por P. de Fermat (1601-1665) para saber si merecían ser impresos. En 1641 encontró en Schooten un editor que tomó interés y editó todo el material puesto a su disposición, después de haberlo repasado bien (en el sentido de la escritura cartesiana y simplificada la simbología). Esta edición hizo conocer los trabajos y escritos de Viete a un amplio círculo. Mucho ya estaba anticuado en 1646, otras cosas no fueron entendidas bien, sobre todo sus trabajos sobre análisis. Lo de más valor, los primeros 7 libros de la “**Varias responsa**”, parece haberse perdido. Unos trabajos algebraicos, a los cuales ya Fermat dio poca importancia con razón, se han conservado hasta hoy manuscritos.

CUESTIONARIO

1. Destaque algunos rasgos característicos de la matemática china.
2. Explique algunos elementos del álgebra “instrumental” china.
3. Explique la relación matemática-ritual en la India Antigua.
4. ¿Qué aspecto de la cultura hindú, influyó más en el desarrollo de la matemática de la India Antigua?
5. Dentro del desarrollo de la civilización árabe, señale las principales figuras en el ámbito matemático.
6. ¿Qué papel jugó Al-Khwarizmi dentro del surgimiento del álgebra moderna?
7. ¿Cuál es el método empleado por Omar Khayyam en la resolución de ecuaciones cúbicas?
8. Explique el método de Kashi para el cálculo aproximado de raíces de ecuaciones cúbicas del tipo $x^3 + Q = Px$.
9. Detalle el resultado de ibn Qurra relativo a los números amigos.
10. ¿Es efectiva la división matemáticas medievales-matemáticas modernas, en el caso de los árabes?
11. ¿Cuáles transformaciones socio-económicas, posibilitaron el ascenso del papel de la matemática en la vida práctica de la Edad Media?

12. Detalle los métodos de solución de las ecuaciones de 3er y 4to grado, obtenidos por los matemáticos italianos. Compárelos con los actuales.

13. Destaque la obra de Viete en el desarrollo y consolidación de la matemática moderna.