Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional

De las cavernas a los fractales.

Conferencias de Historia de la Matemática.

Juan Eduardo Nápoles Valdés

(III)

Conferencia 13. *El concepto de número en el siglo XIX.*
Conferencia 14. *Las Paradojas de la Teoría de Conjuntos.*
Conferencia 15. *Logicismo, Formalismo e Intuicionismo.*
Conferencia 16. *Las Matemáticas del siglo XX.*
Conferencia 17. *Cien Años de Teoría Cualitativa.*
Conferencia 18. *Los Fractales, el Caos y la Teoría de las Catástrofes.*
Conferencia 19. *Un Bosquejo de la Matemática Actual.*
Apéndice. *La Historia de la Matemática como Herramienta Didáctica.*
Referencias Adicionales.

ir a (I) - (II)

Holguín - Cuba

1996

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N.
edUTecNe
http://www.edutecne.utn.edu.ar

Conferencia 13. El concepto de número en el siglo XIX.

"Ser original es un mérito, querer ser es un defecto"

A. Cahuvilliers

Extensión gradual de los dominios numéricos.

El empleo de los números naturales y de las fracciones se remonta a la antigüedad; a pesar del aporte de Eudoxio, los antiguos no pudieron llegar al reconocimiento de lo irracional como número. El empleo consciente de los números negativos tuvo lugar ya dentro de la matemática china, india y, ocasionalmente, en la islámica.
Los números negativos enteros y los fraccionarios alcanzaron en Europa pleno reconocimiento en la época del capitalismo naciente entre los comerciantes y maestros de cálculo. Durante mucho tiempo se discutió la cuestión de si los valores numéricos que se obtienen como longitudes, mediante la radicación o en las construcciones geométricas son números verdaderos. Por ejemplo, en un trabajo de Stifel del año 1544 se puede encontrar la siguiente consideración:

> *"Con mucha razón se discute en relación con los números irracionales el hecho de si son números verdaderos o solamente fingidos. Pues en las demostraciones en figuras geométricas, los números irracionales tienen éxito donde los racionales fracasan...Nos vemos motivados, mejor dicho, obligados, a admitir que ellos existen en realidad, precisamente a causa de sus efectos, los cuales percibimos como reales, ciertos y firmes...Pero no se puede llamar número verdadero a algo para lo cual no hay exactitud y que no tiene relación conocida con los números verdaderos"*.

En Europa puede encontrarse un pleno reconocimiento de los números irracionales como número en la obra de Stevin; desde el punto de vista de su sistema de posición decimal, esto tenía que ser hasta cierto punto obligatorio para todos los números (ver del autor **"El punto decimal"**, revista Alfa, I.S.P.H., v.2, pp.21-25). Sin embargo, fue el desarrollo de los métodos de la geometría analítica por parte de Fermat y Descartes lo que proporcionó la premisa para el reconocimiento general de los números irracionales: el establecimiento de un isomorfismo entre todo punto de la recta numérica y los números. Finalmente planteó Newton en su **"Arithmetica universalis"** (1673-1683, impreso en 1707) lo siguiente:

> *"Por número entendemos no tanto un conjunto de unidades, sino más bien la relación abstracta de alguna magnitud respecto a otra magnitud del mismo género, que se acepta como unidad. Esta tiene un carácter triple: entero, fraccionario e irracional..."*.

Mucho más trabajosa fue la vía del reconocimiento de los números complejos. A pesar de que los matemáticos del Renacimiento tuvieron los primeros contactos, bastante menos intensos incluso, con los números complejos, y de que estos alcanzaron amplia difusión en los siglos XVII y XVIII, no fue posible llegar a obtener claridad conceptual sobre su esencia. Por ejemplo, Girard estaba consciente que solamente mediante el empleo de los números complejos podía exponerse el teorema fundamental del álgebra con plena generalidad, o sea, que una ecuación algebraica de grado n posee exactamente n raíces, mientras que Bombelli

aún consciente de esta situación los llamó "números sofísticos". En el mismo contexto empleó Descartes el concepto número "imaginario", donde admite que aún no se tiene una idea justa de tales "números". En **"La géometrie"**, se expresa:

> *"Finalmente observamos que tanto las raíces verdaderas como las falsas [positivas y negativas] de una ecuación no siempre son reales, sino que a veces son solamente imaginarias, o sea que para una ecuación cualquiera uno puede imaginarse tantas raíces como he indicado, pero algunas veces no existen magnitudes que se correspondan con las así representadas".*

Leibniz en 1675, halló la siguiente relación $(1+\sqrt{-3}) + (1-\sqrt{-3}) = \sqrt{6}$, que de forma poco común entrelazaba lo complejo con lo real y que destacaba las "particularidades" en el trabajo con los números imaginarios. Así se explica su estimación casi mística de los números imaginarios como "un milagro del análisis, el monstruo del mundo ideal, un recurso delicado y maravilloso del espíritu divino, prácticamente un híbrido entre el ser y no ser".
Euler introdujo en 1777 el símbolo **i** como $i^2=-1$, este símbolo y la designación "número complejo" no se impusieron hasta que Gauss hizo uso de ellos. Euler definió el número imaginario -hasta cierto punto indeterminado- de la siguiente manera:

> *"Una magnitud se denomina imaginaria cuando no es mayor que cero, ni menor que cero, ni igual a cero. Esto es algo imposible, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ o en general $a+b\sqrt{-1}$".*

Euler pudo mostrar que el conjunto de los número complejos a+bi es cerrado respecto a las cuatro operaciones básicas así como a la potenciación y la radicación y con una asignación adecuada, todas las operaciones trascendentes conocidas, entre ellas la logaritmización, no conducen fuera de este dominio.
La vía hacia el reconocimiento pleno de los números complejos condujo hacia su interpretación geométrica. Ya en 1685 Wallis reflexionó sobre una representación geométrica, pero fue el noruego Wessel el que indicó la vía adecuada al someter los segmentos orientados a operaciones aritméticas y al aplicar estos razonamientos totalmente generales, en números de la forma a+jb con $j=\sqrt{-1}$.
Sin embargo, un tratado elaborado por Wessel en 1796 e impreso en 1799 quedó sin repercusión directa. Algo similar ocurrió con las consideraciones correspondientes de Carnot en su **"Geométrie de position"** (1803) y en el tratado **"Essai sur uno maniére de representar las quantités imaginaires les constructions geométriques"** (1806) del suizo Argand.
Ya Cauchy había tenido la idea de concebir los números complejos como pares de números reales. Sin embargo, fue el matemático irlándes Hamilton quien dio este paso de forma explícita, creando una teoría de los números complejos sobre la base de operaciones de cálculo determinadas por definición y utilizando los pares en la representaciones de estos (tal y como procedemos actualmente). Sobre este principio Hamilton pudo demostrar que los pares numéricos forman un cuerpo, en relación con las operaciones definidas así, el cual es isomorfo al dominio de los números definidos geométricamente por Gauss y que se denomina cuerpo de los números complejos. Hamilton presentó estos resultados a la Irish Academy en 1833 y se publicaron en 1837 bajo el título **"Theory of conjugate functions or algebraic couples:..."**. Tal como se conoce, con la definición anterior de multiplicación surge un cuerpo conmutativo. Al parecer Gauss había reconocido esta relación, la cual resulta del hecho de

que el cuerpo de los números complejos es el cuerpo de aplicación finito conmutativo mayor de los números reales. Frobenius dio en 1878 una demostración completa de esta relación.
Las investigaciones de Hamilton, las que retomaremos más adelante, desembocaron en los **cuaterniones** (números hipercomplejos con cuatro unidades), estudios que posteriores matemáticos: De Boole, Cayley, B. Pierce y su hijo C. S. Pierce, Grassmann y Hankel, desarrollaron y los llevaron al inicio del álgebra estructural (mediados del siglo XIX), así como a la formación de la lógica matemática y el método axiomático, pero también a la fundamentación lógica del sistema numérico.
Con la interpretación geométrica y aritmética de los números complejos, la estructura del sistema numérico se redujo a la fundamentación de la teoría de los números reales. Lógicamente, el siguiente paso teórico debía ser la fundamentación de los números irracionales con ayuda de los números racionales.
Eso ocurrió por dos vías diferentes. Una fue recorrida por Dedekind hasta el final: mediante "las cortaduras" denominadas por él en el dominio de los números de los números racionales se generan los números irracionales.
Dedekind concibió sus ideas en 1858 y publicó su realización en el libro **"Continuidad y números irracionales"** (1872), el cual marca un punto culminante en el proceso de fundamentación del análisis. Esta noción de corte produjo innumerables controversias. Weyl (**"Das Kontinuum"**, Berlín, 1932, pp.22-23) hace a esta teoría la objeción siguiente: un corte define un número por el conjunto de los racionales inmediatamente inferiores, de los que dicho número constituye el límite superior.
Así, para demostrar que toda sucesión monótona creciente, acotada superiormente, admite un límite, se hace un corte entre los racionales superiores a todos los números de la sucesión y aquellos que no tienen esta propiedad. Hay, dice Weyl, un círculo vicioso. ¿Cuál es el significado de esta observación.
Para Brouwer, es necesario revisar la lógica y no aplicar el principio del tercero excluido a una categoría infinita.
Para Gonseth (**"Les Fondements des mathématiques"**), la contradicción indicada por Weyl significa solamente que la noción de irracional no puede deducirse de la de entero.
Para Borel (**"Lecons sur la théorie des fonctions"**, pág. 14 y pág. 45) el teorema sobre las sucesiones *"es una consecuencia de la definición del irracional y postula, en cualquier punto de vista en que nos coloquemos, la noción de contenido"*. Ese continuo es el conjunto de números comprendidos entre el 0 y el 1. Nos es dado, dice Borel. Pero no sabemos cómo. Además, eso no es una noción simple y debemos desconfiar de "creer que se sabe lo que significa el continuo" y de "razonar sobre él como una noción intuitiva y perfectamente clara". Sólo la consideración del carácter dialéctico del proceso de creación, nos permitirá superar estas y otras dificultades.
Cantor el fundador de la teoría de conjuntos (ver próxima conferencia), e independiente de él, el francés Meray, recorrieron una vía distinta a la de Dedekind. Esto ocurría alrededor de 1872. Tomando como referencia distintas consideraciones detalladas expuestas por Weierstrass en sus conferencias. Cantor introdujo las ahora llamadas "sucesiones fundamentales" en el dominio de los números racionales. Las sucesiones fundamentales con valor límite racional pueden identificarse con los números racionales; las sucesiones fundamentales sin valor límite racional proporcionan los números irracionales (uno de los ejemplos más usados es $(1 +1/n)^n$). Estas consideraciones las presentó Cantor en 1883 como parte de sus **"Fundamentos de una teoría general de la diversidad"**. La definición rigurosa de los números irracionales dada por Cantor, se modificó en 1892 por el teórico Backmann en sus **"Conferencias sobre la teoría de los números irracionales"**; de modo que se utilizan los encajes de intervalos en lugar de las sucesiones fundamentales. Las fracciones decimales

pueden concebirse como encajes especiales de intervalos o también como sucesiones fundamentales.
Naturalmente, las tres definiciones de los números irracionales son equivalentes.
Por otra parte, después de la reducción de los números irracionales a los racionales, estos tenían que haberse fundamentado en los números naturales; sin embargo, el curso histórico de las cosas se alejó temporalmente un poco de las necesidades internas de la ciencia.
Después del pequeño escrito de Dedekind **"Qué son y qué hacen los números"** (1888), Peano expone en una corta obra **"Arithmetices principia, nova methodo exposita"**, un sistema de axiomas para los números naturales, el cual coincide en lo esencial con el utilizado en la actualidad (ver por ejemplo C. Sánchez-**"Análisis Matemático"**, tomo I, Pueblo y Educación, La Habana, 1982). La definición de los números racionales mediante la formación de pares de números naturales la brindó Weber en 1895 en su **"Libro de texto de álgebra"**.

Versión abstracta del concepto número.

Con el desarrollo del pensamiento estructural en el álgebra, el concepto número obtuvo una caracterización más abstracta y general. Kronecker y Dedekind dieron al concepto cuerpo su lugar central en el álgebra y Steinitz desarrolló una teoría del cuerpo abstracto en su **"Teoría algebraica de los cuerpos"** (1910). Aquí se demuestra, entre otras cosas, que todo dominio de integridad puede incluirse en un cuerpo; el tránsito de los números enteros (positivos y negativos) a los números racionales es solamente un caso especial.
Steinitz hizo referencia Hilbert quien realizó en el 1900, en el tratado **"Sobre el concepto número"**, una estructuración axiomática del sistema numérico.
A principios del siglo XX, precisamente en relación con el desarrollo de la teoría de conjuntos y las dificultades dadas en las cuestiones fundamentales de la matemática, se demostró la existencia de objeciones fundamentales en contra de esta estructuración formal del concepto número. Nuestro siglo dio nuevas respuestas a las complejas interrogantes planteadas, especialmente en relación con la demostración de la carencia de contradicciones en el sistema de axiomas de Hilbert; todo esto se relacionaba estrechamente con difíciles problemas de la teoría del conocimiento.
En este siglo, variados temas relacionados con la representación de los números reales son considerados, así se ha demostrado (ver Yu Takeuchi-**"Una representación del número real"**, Revista Integración, UIS-Colombia, Vol.12, No.2, 139-147, 1994) que los números reales pueden ser representados por medio de sucesiones crecientes de números naturales. La idea es la siguiente: dado un número real $a\in(0,1)$, se definen una sucesión creciente de números naturales $(n(1),n(2),n(3),...)$ y una sucesión decreciente de números positivos $(a(0),a(1),a(2),...)$ como sigue:

- $a(0)=a$,
- $n(1)$ es el número natural determinado por $1 < n(1)a(0) \leq 1+a(0)$ y $a(1)=n(1)a(0)-1$.

Después de esto se demuestran las siguientes propiedades:

Proposición 1. El número a es **racional** si y sólo si las sucesiones $(n(k))$, $(a(k))$, con $k = 1, 2, 3 ...$, son constantes a partir de algún término.

Proposición 2. a es **irracional** sí y sólo sí

$$\text{Lim } n(k)=+\infty \text{ y } \text{Lim } a(k)=0, \text{ cuando } n\to\infty.$$

De esta manera se tiene que 3/7=(3,4,8,...,8,...), $\sqrt{2}/2$=(2,3,5,5,16,18,78,103,179,856, 4569,15944,...), π= 3 + (8,8,17,19,300,1768,3793,7234,35512,...), senh 1 = 1 + (6,20,42,..., 2k(2k+1),...), etc.
Paralelamente a la precisión de los fundamentos de la aritmética y el análisis en el siglo XIX y a la definición de conceptos tales como convergencia, continuidad y diferenciabilidad, se hizo necesario construir un cálculo lógico más desarrollado que permitiera formalizar proposiciones de una mayor complejidad. A esto contribuyó la introducción de las variables y los cuantificadores de forma independiente por Charles Sanders Peirce (1839-1914) y Gottlob Frege (1848-1925).
La obra de Frege de formalizar la aritmética mediante una "escritura conceptual" es un ejemplo de la aplicación de un lenguaje predicativo a una teoría concreta y su lógica constituye parte de los basamentos de los actuales lenguajes formalizados. Asimismo, sus precisiones conceptuales han sido de gran valor en todo el desarrollo ulterior "por ejemplo es el primero en distinguir el enunciado de una proposición y la afirmación de que dicha proposición es verdadera, entre la relación de pertenencia y de inclusión, entre un objeto x y el conjunto {x} formado por este único objeto, etc." (ver N. Bourbaki-**"Elementos de historia de las matemáticas"**, p.23). Sin embargo, su obra en sentido general no logró imponerse debido a la inconveniencia de la simbología adaptada (ver próxima conferencia para otros detalles).

Los sistemas numéricos hipercomplejos.

En 1831, Gauss reflexionaba de la siguiente manera: *"las relaciones entre entes que representan una multiplicidad de más de dos dimensiones ¿no nos darán también clases permisibles de números en la aritmética general?"*. Esta pregunta posee un significado histórico y metodológico, que vas más allá de lo que hablamos anteriormente. Podemos resumirlas en las siguientes cuestiones:

- ¿Es posible ampliar el campo numérico más allá de los números complejos?,
- ¿Cómo comprender el concepto "clase permisible" de números?,
- ¿Qué utilidad puede tener un sistema numérico que represente el espacio de más de tres dimensiones?

Para responder estas preguntas, debemos hacer algo de historia.
La consideración de los números complejos, comenzó con la resolución de ecuaciones (exactamente $x^3 = px + q$), pues la aparición de la expresión $(q/2)^2 - (p/3)^3$ dentro de una raíz cuadrada, impide obtener la solución x de tal ecuación en el caso que esta expresión sea negativa. Este caso recibió el nombre de caso irreducible.
¿Por qué aparece la aritmética de los números complejos en la resolución de ecuaciones cúbicas en el Renacimiento y no en el tratamiento de las ecuaciones de 2do grado que ya se resolvían por los antiguos babilonios? La respuesta es sencilla: porque el caso irreducible para las ecuaciones de 2do grado representa la no existencia de raíces reales, mientras que cuando el caso anterior ocurre (o sea, la fórmula no es aplicable al caso real) pueden existir hasta tres raíces reales.
La historia posterior se desarrolló según hemos narrado anteriormente, aunque debemos detenernos en los descubrimientos de Hamilton, uno de los matemáticos más integrales del siglo XIX. Se distinguió en óptica y astronomía, en dinámica y álgebra, en lingüística y geometría. A los 13 años dominaba 13 idiomas y a los 16, estudiando la **"Mecánica Celeste"** de Laplace, encontró un error en una demostración. Tenía además una gran cultura y amaba el deporte. Fue un magnífico profesor en la Universidad de Dublín y varios años Presidente de la

Academia de Ciencias de Irlanda. Sus últimos 22 años de vida, los dedicó al estudio de los cuaterniones y sus aplicaciones.

Inicialmente, Hamilton muestra un gran interés en la multiplicación de tripletas, él escribe sus tripletas (a,b,c) como a+bi+cj y visualiza sus unidades 1, i, j como "segmentos dirigidos" de longitud unidad y mutuamente perpendiculares. Más tarde, introduce la actual palabra "vector".
Al multiplicar las tripletas con esta representación vectorial, Hamilton, siguiendo el enfoque axiomático, va a exigir:

1ro. que sea posible sumar y multiplicar término a término y extender las reglas operatorias de los números complejos (principio de permanencia),
2do. que la longitud del vector producto sea igual que el producto de las longitudes de los factores (ley de los módulos).

Por analogía, considera $i^2=-1$, $j^2=-1$ de aquí se tiene la primera dificultad ¿cómo definir ij? Es fácil comprobar que si la define como 0, 1 ó -1, se obtiene una contradicción con la ley de los módulos. Tomemos el caso ij=0, entonces en el producto (a+bi+cj)(p+qi+rj) debe cumplirse que:

$$(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)=(ap-bq-cr)^2+(ar+cp)^2+(aq+bp)^2,$$

después de un largo proceso de maduración, comprende que siendo este exceso, justamente el cuadrado del coeficiente de ij, pero con la condición ij=-ji, la solución del problema está en considerar:

1ro. considerar una nueva unidad imaginaria k=ij,
2do. prescindir de la propiedad conmutativa.

Está claro que esta segunda consideración es realmente revolucionaria. Fácilmente se tiene entonces:

$$ik=i(ij)=i^2j=-j,\ ki=j,$$
$$kj=(ij)j=ij^2=-i,\ jk=i,$$
$$k^2=k(ij)=(ki)j=j^2=-1.$$

Pero Hamilton no se detiene aquí y continúa buscando la interpretación de los nuevos números.
Todo cuaternión $q = a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ posee una parte escalar, $Scal(q)=a_0$ y una parte vectorial $Vect(q)= a_1i+a_2j+a_3k$. A los cuaterniones de la forma xi+yj+zk Hamilton los llamó vectores y el conjunto de todos los vectores puede interpretarse como el espacio tridimensional. Hamilton introduce el concepto de campo vectorial como la ley que hace corresponder a cada punto del espacio un vector. Define también el producto escalar y vectorial de vectores tridimensionales construyendo las primeras operaciones no-aritméticas del álgebra.
En realidad, la solución del problema de definir ij, Hamilton la obtuvo en su análisis de las tripletas. Un día de 1843, él paseaba con su esposa por el Canal Real, cuando tuvo una súbita

inspiración: su dificultad desaparecerá si usa cuadruplas en lugar de tripletas y si abandona la ley conmutativa para la multiplicación.
Si Lobatchevski creó una nueva geometría abandonando el postulado de las paralelas, Hamilton creó una nueva álgebra, también consistente, desechando el postulado conmutativo para la multiplicación.
Estos nuevos conceptos no sólo influyeron en el enfoque de la nueva álgebra que se estaba gestando a comienzos del siglo XIX, sino que penetraron en toda la metodología de la matemática.
El mismo Hamilton, dada su experiencia y talento como físico, rápidamente encontró nuevas aplicaciones del lenguaje de los cuaterniones.
En 1846 Hamilton introdujo un nuevo símbolo determinado por la expresión $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}$, donde $\partial/\partial\times$ significa la derivada parcial respecto a x. Cuando se aplica este operador a una función escalar r(x,y,z) se obtiene el vector $\vec{\nabla}\mathrm{r} = \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial z}\mathrm{k}$ llamado gradiente de r, al que Hamilton le encontró múltiples interpretaciones tanto físicas como geométricas. Para el caso de una función vectorial $v=v_1i+v_2j+v_3k$, donde las v_i (i=1,2,3) son funciones de (x,y,z), Hamilton, operando de una manera formal como si fueran cuaterniones, obtiene que Scal(∇v)=-div v y Vect(∇v)=rot v (los nombres se introdujeron posteriormente, a partir de su interpretación en la dinámica de los fluidos).
Estos nuevos conceptos pronto encontraron aplicación, sobre todo gracias a los trabajos de James C. Maxwell (1831-1879), quien no solo tradujo al lenguaje de los cuaterniones los resultados de Faraday en Electricidad y Magnetismo sino que usando las ideas principales de la teoría de Hamilton creó un instrumento imprescindible para la física: el cálculo vectorial.
Tal fue el entusiasmo de Hamilton y de su discípulo Peter Guthrie Tait (1831-1901) que fundaron una sociedad para la difusión de los cuaterniones. A pesar de las esperanzas de Hamilton los cuaterniones pasaron prácticamente inadvertidos y sólo a fines del siglo XIX se aceptó el cálculo vectorial, sin prestarle atención a los cuaterniones.
Los últimos 20 años de su vida los dedicó Hamilton a su álgebra favorita, la cual creía que tenía implicaciones cósmicas, incluso algunos matemáticos británicos, la consideraban un tipo de *arithmetica universalis leibniziana*. En 1853 apareció su **"Lectures on Quaternions"**, obra en la que Hamilton estuvo trabajando hasta su muerte. Esta versión aumentada y corregida (que él no pudo terminar) fue publicada por su hijo al año siguiente de su muerte (**"Elements of Quaternions"**). Es de señalar que el impacto de la obra de Hamilton fue grande, sobre todo en los países anglófonos, por ejemplo, la National Academy of Sciences de los Estados Unidos, nombró a Hamilton su primer socio extranjero.
Lo que Hamilton no consideraba tan importante resultó lo más trascendente. Era la primera vez en la historia de las matemáticas que un sistema de números, estructurado lógicamente y con amplias aplicaciones no verificaba la ley de conmutatividad poseída por todos los otros sistemas numéricos conocidos. La aceptación de tales sistemas significaba un salto cualitativo trascendental en la concepción del número. Este salto, a su vez, abría nuevas perspectivas en la creación de nuevos sistemas hipercomplejos y de nuevos enfoques. Con razón decía Poincaré que el descubrimiento de tales sistemas significó para el álgebra lo mismo que las geometrías no-euclidianas para la geometría.
Después del descubrimiento de Hamilton se fue haciendo más notorio que la construcción de nuevos sistemas numéricos hipercomplejos imponía sacrificar algunas de las propiedades fundamentales. Como propiedades fundamentales se entendían las conocidas por asociatividad, conmutatividad y distributividad, y también la llamada "ley de los módulos": a cada elemento le corresponde un único número real positivo n(a), denominado norma de a, tal que n(a)=0, ssí, a=0 y n(b)=n(a)n(b). En el caso de los cuaterniones, la norma se define por

$n(q)=a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, donde a, b, c y d son las componentes de q. La "ley de los módulos" aseguraba, entre otras cosas, la no existencia de divisores de cero. Es decir, si se cumple la "ley de los módulos" entonces del hecho que ab=0 se deduce a=0 ó b=0. Esta exigencia se consideraba natural y no fue cuestionada hasta que aparecieron las siguientes estructuras algebraicas. Veremos más adelante, sin ánimo de ser exhaustivos, algunos de los casos más notables de sistemas numéricos hipercomplejos que motivaron una teoría general de las estructuras algebraicas.

Debemos decir, en honor a la verdad, que no solo fue Hamilton el que desarrolló el álgebra en esta dirección, hay que hablar también de los trabajos de Hermann Grassman (1809-1877). Sobre Hamilton se acumularon todos los honores; a Grassman, menos afortunado, no se le concedieron.

En realidad, el concepto de espacio n-dimensional había recibido tratamiento detallado en el trabajo de Grassman **"Ausdehnungslehre"**, publicado en alemán en 1844 y que recibió la aprobación (y bendición) del propio Gauss. Seguía la dirección, dijo, que ya había tomado él mismo casi medio siglo antes. Pero era demasiado filosófica con su peculiar terminología, incluso para Gauss, que era bastante aficionado a la filosofía.

Grassman continuó esforzándose en que se reconociera su teoría más general. En 1862, publicó una versión revisada por completo (**"Die Ausdehnungslehre, vollstanding und in strenger Form bearbeitet"**), muy ampliada y menos incomprensible, pero que, al igual que la primera, se sumió en un olvido temporal hasta el siglo XX. La obra de Grassman incluía como detalle implícito el álgebra del cálculo tensorial que solo fue ampliamente conocida después de su aplicación (1915-1916) a la relatividad general.

El punto de vista de Grassman era mucho más amplio que el de Hamilton. Para apreciar esto, recordemos que en 1844, cuando aparece la primera obra de Grassman, el espacio (excepto para Cayley) seguía siendo el tridimensional euclidiano. El esquema de Cayley de una geometría de n dimensiones data de 1843, no pudo haber influido sobre la teoría de Grassman de la *magnitud ampliada*. Más aún, la teoría de Grassman se reveló como una fuente prácticamente inagotable de desarrollos por especializaciones en diferentes direcciones (teoría de determinantes, las matrices, el álgebra tensorial, ...). En resumen, la teoría de Grassman de 1844-1862 se adelantó, en mucho, a su época.

De los cuaterniones a las álgebras.

> *"Para definir una estructura, se dan una o varias relaciones en las cuales se encuentran sus elementos y después se postula que las relaciones dadas cumplen ciertas propiedades, las cuales constituyen los axiomas de la estructura considerada".*
>
> N. Bourbaki (1948)

Unas semanas después del descubrimiento de Hamilton, en diciembre de 1843, su amigo John Graves (1806-1870) descubrió el cálculo para elementos con ocho unidades básicas.

Comencemos definiendo una "conjugación" para los cuaterniones: si q=a+bi+cj+dk se define su conjugado $\bar{q}$=a-bi-cj-dk. Se observa que $n(q)=q\bar{q}$ al igual que sucede con los números complejos.

Los octoniones se definen como pares de cuaterniones $\theta=(q_1,q_2)$ con las operaciones siguientes:

$\theta+ \theta'=(q_1,q_2) + (q'_1,q'_2) = (q_1+q'_1,q_2+q'_2)$,

$\theta\,\theta' = (q_1,q_2)(q'_1,q'_2) = (q_1q'_1 - q_2q'_2, q_1q'_2 + q_2q'_1)$.

En este cálculo no sólo se pierde la conmutatividad sino, también, la asociatividad del producto. Si se define el conjugado de $\theta=(q_1,q_2)$ por $\bar{\theta}=(q_1,q_2)$, entonces $n(\theta)=\theta\bar{\theta}$ es una norma que cumple la ley de los módulos.
Graves trató de construir un cálculo similar con 16 elementos de base y en el cual se cumpliera la ley de los módulos, pero no tuvo éxito. Como veremos más adelante, tal pretensión era absurda.
Paralelamente, Arthur Cayley (1821-1895) abogado inglés, apasionado por las investigaciones algebraicas, redescubrió los octoniones (por lo cual hoy también se conocen como números de Cayley) y da un paso adelante en un famoso y trascendental trabajo publicado en 1858, en el cual introduce el cálculo con matrices cuadradas. Cayley mismo relató a Tait en 1894 qué fue lo que le condujo a las matrices. *"Desde luego que no llegué al concepto de matriz a través de los cuaterniones: fue directamente a partir del de los determinantes; o bien como un modo conveniente de expresar las ecuaciones x'=ax+by, y'=cx+dy"*
Una matriz cuadrada A no es más que una tabla numérica constituida por el mismo número de filas que de columnas:

$$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n},$$

Cayley define el cálculo de matrices cuadradas de la forma siguiente:

$$A + B =(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} +b_{ij}),$$

$$AB = C = (c_{ij}) = (a_{ij})\,(b_{ij}),$$

$$kA=k(a_{ij}) = (ka_{ij}),\ k\in\mathbf{R}.$$

Este cálculo cumple las propiedades fundamentales con excepción de la conmutatividad y, lo más importante, posee divisores de cero, es decir, la relación AB =0 puede tener lugar aunque sean $A\neq 0$ y $B\neq 0$. En particular, existen matrices no nulas tales que para algún $k\in N$ se tiene AK=0. estas matrices son denominadas NILPOTENTES .
Pero ¿en qué sentido el cálculo de matrices se puede considerar una generalización de los cálculos numéricos conocidos? La respuesta la dio el mismo Cayley. Los números reales se representan como las matrices de orden 1. Los números complejos se pueden interpretar como las matrices cuadradas diagonales de orden 2. Es decir, al número complejo (a,b) se le hace corresponder una matriz cuya traza es a + b y el resto de los elementos es cero.
Cada cuaternión $q = a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ se puede representar matricialmente (lo que obtuvo en 1858) por:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1+a_4i & a_2+a_3i \\ -a_2+a_3i & a_1-a_4i \end{pmatrix}$$

y la norma $n(q)=|\det q|$.
El descubrimiento de Cayley pronto fue altamente valorado, no sólo por ser un nuevo tratamiento de los sistemas algebraicos, sino, sobre todo, por establecer un puente entre dos vías aparentemente diferentes del álgebra en el siglo XIX: el álgebra lineal y la teoría de los números hipercomplejos; lo cual influyó fructíferamente en el desarrollo de ambas ramas.

El concepto general de álgebra asociativa del cual son casos particulares el campo de los números complejos, los cuaterniones de Hamilton y las matrices cuadradas de Cayley, fue definido por el algebrista norteamericano Benjamín Peirce (1809-1880), profesor de la Universidad de Harvard, en su libro **"Algebras Lineales Asociativas"** (publicado en 1872 de forma limitada, y en el American Journal of Mathematics en 1881 con una tirada amplia). Los Peirce (pues también su hijo Charles S. Peirce (1839-1914) trabajó en esta dirección) jugaron en los estados Unidos, el papel que Hamilton, Grassman y Cayley habían jugado en Europa. Peirce (Benjamín) definió álgebra como una estructura n-dimensional (con n unidades básicas) en la cual existen una adición y un producto a los que se les exige cumplan las propiedades fundamentales de la suma, la asociatividad del producto con relación a la suma. Para Peirce no eran necesarias ni la conmutatividad del producto, ni la existencia de una norma, ni de divisores de cero. De los sistemas hipercomplejos considerados anteriormente sólo los octoniones no satisfacen estas exigencias, pero realmente aparecieron otros sistemas interesantes no asociativos. Así, se abrieron dos líneas de investigación que se desarrollaron paralelamente: las estructuras algebraicas asociativas y las estructuras algebraicas no asociativas. A las asociativas pronto se le encontraron aplicaciones en la física (fundamentalmente en el álgebra de Dirac de la mecánica cuántica; así por ejemplo, para la teoría cuántica del electrón es imprescindible utilizar las álgebras asociativas para obtener representaciones matriciales del grupo de las rotaciones en n-dimensiones; dada la relación con la teoría del "spin", los matemáticos Richard Brauer y Herman Weyl (1885-1955) llaman a estas cantidades "spinors" (**"Spinors in n dimensions"**, American J. of Math. 57, 1935, pp.425-449)), mientras que las no asociativas tuvieron que esperar al siglo XX para lograr su aplicación en la biología (estas álgebras no asociativas se relacionan con los problemas de la dinámica de la distribución de genotipos en poblaciones consideradas infinitas; de esta forma, las álgebras no asociativas permiten estudiar con amplitud los efectos poblacionales de los mecanismos genéticos fundamentales (Y. I. Liubitch-**"Estructuras matemáticas en genética poblacional"**, Naukova Dumka, Kíev, 1983 (en ruso)).

La respuesta a Gauss.

Tratemos de desentrañar el misterio que envuelve al problema señalado por Gauss enfocándolo desde diferentes puntos de vista matemáticos.

1ro. Desde un enfoque puramente aritmético. La exigencia del cumplimiento de la ley de los módulos representa una razón aritmética de la no-existencia de sistemas permisibles de números hipercomplejos.
En el caso de las tripletas (a,b,c) que tanto entusiasmó a Hamilton había sido tratado por Adrien Marie Legendre (1752-1833) en su famosa "teoría de los números" (1830). Legendre notó que los números 3 y 21 podían expresarse como sumas de tres cuadrados de números enteros $3=1+1+1$ y $21=16+4+1$, pero que $3x21=63$ no puede ser representado de esta forma puesto que 63 es un entero de la forma $8n + 7$.
De lo anterior se desprende que la ley de los módulos no se cumple para las tripletas. Como bien apunta van der Waerden (ver B. L. van der Waerden-**"A History of Algebra"**, part three, Springer, Berlín, 1985, pág. 185) afortunadamente Hamilton no había leído a Legendre pues posiblemente no hubiera encontrado los cuaterniones.
El problema general fue resuelto por Adolf Hurwitz en 1898. Hurwitz con la ayuda de la representación matricial probó que la identidad:

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)=c_1^2+c_2^2+...+c_n^2,$$

con c_i combinación bilineal de los a_j y los b_j, sólo es posible para n=1, 2, 4, y 8. Es decir, la ley de los módulos se cumple sólo con el cálculo numérico definido en **R, C, H, O.**
En esta dirección, son varios los acontecimientos que debemos destacar. En primer lugar, la definición por Gauss, Kummer (1810-1893) y Dedekind de los enteros algebraicos; la restricción del teorema fundamental de la aritmética a los campos de números algebraicos, debida a la introducción de los ideales por parte de Dedekind; la obra definitiva de Galois sobre la solución de las ecuaciones algebraicas por medio de radicales y la teoría de campos que le siguieron; y por último, la aplicación parcial de los conceptos aritméticos a ciertas lagebras lineales por parte de Lipschitz (1831-1903), Hurwitz (1856-1919), Emmy Noether (1882-1935) y otros.

2do. Desde un enfoque puramente geométrico. Como es conocido, al multiplicar dos números complejos $z=\rho\exp(i\varphi)$ y $w=r\exp(i\o)$ el módulo del número w se dilata p veces y rota en un ángulo φ.
Para la construcción de álgebras más generales que la de los números complejos, debe mantenerse un cuadro geométrico análogo: la operación de multiplicación debe corresponder a la rotación del vector en el espacio (alrededor de un eje fijo) y a una dilatación de su módulo. Tal transformación se determina por los parámetros siguientes:

a) coeficiente de dilatación,
b) ángulo de rotación alrededor de un eje fijo,
c) determinación del eje de rotación fijo.

Esto último se puede realizar, por ejemplo, con los cosenos directores, es decir, con dos cantidades, ya que $\cos^2\alpha + \cos^2\ß + \cos^2\gamma = 1$.
En total los parámetros deben ser 4 y esto significa que el número no puede ser una tripleta. Este razonamiento de Félix Klein (1849-1925) muestra que por tal camino deben obligatoriamente aparecer los cuaterniones. Exactamente, en 1885, Cayley probó que las rotaciones tridimensionales pueden representarse por cuaterniones. Esta representación fue utilizada por Klein y el físico Arnold Sommerfel (1868-1951) en su estudio sobre la estructura del átomo en 1897.
En este caso es bueno apuntar que este método tensorial atrajo poco la atención. A invitación de Klein, Ricci (1853-1925) y su antiguo discípulo Levi-Civita (1873-1942), prepararon un artículo sobre el cálculo tensorial y sus aplicaciones a la física-matemática para publicarlo en una revista que leían los matemáticos del mundo entero. El artículo apareció en francés en 1901 y produjo pocos efectos: Sin embargo, algunos geómetras curiosos fuera de Italia se percataron del nuevo cálculo y por lo menos uno, Grossman (1878-1936), de Zurich, lo dominó y se lo enseñó a Einstein. Este cálculo tensorial era una clase particular del álgebra vectorial generalizada, muy apropiada para expresar las ecuaciones diferenciales de la relatividad en forma covariante, como se exige en dicha teoría.

3ro. Desde un punto de vista puramente algebraico. Las exigencias relacionadas con la ley de permanencia, es decir, buscar que se mantenga las propiedades de asociatividad, conmutatividad y no existencia de divisores de cero, fueron tempranamente investigadas por el berlinés Karl Weiertrass (1815-1897) a partir de 1860 y concretamente en unas de sus cartas de 1883 aparece probado que un sistema hipercomplejo conmutativo de dimensión n>2 siempre tiene divisores de cero.
En 1878 Georg Frobenius (1849-1917) probó que los únicos sistemas hipercomplejos (sobre R) permisibles son:

a) El mismo R (dimensión 1),
b) el campo de los números complejos (dimensión 2),
c) el cuerpo no conmutativo de los cuaterniones H (dimensión 4),
d) el cuerpo no conmutativo y no asociativo de los octoniones (dimensión 8).

Al introducirse poco después de 1830 los grupos en la mecánica cuántica, el algoritmo de Frobenius, algo olvidado, adquirió una posible importancia científica, y se emprendió la tarea de aplicarlo en detalle a los grupos de permutaciones que se presentan en la física.
En definitiva, queda claro que Hamilton rompió con las tradiciones en el álgebra, así como Bolyai y Lobatchevsky lo hicieron en la geometría. A través de la aceptación de la posibilidad de asistencia de sistemas numéricos no conmutativos se abrió la brecha hacia la concepción axiomática estructural de álgebra moderna. Con los sistemas hipercomplejos se pasó a un nuevo nivel de abstracción gnoseológica sobre las operaciones algebraicas y como frecuentemente ocurre, las estructuras más generales resultaron más útiles.
Las ampliaciones del concepto de números siguieron tres direcciones principales:

1a- Las álgebras vectoriales que encontraron rápida aplicación en la mecánica clásica y, posteriormente, motivaron el álgebra tensorial de la física relativista, así como la representación matricial de la teoría del electrón en mecánica cuántica.

2a- La aritmetización del álgebra impulsando el enfoque estructural que más tarde invadiría toda la matemática. Esta dirección está de acuerdo con el espíritu aritmético de Gauss y con el abstracto de Galois

3a- Las álgebras no asociativas, que sirven de modelo para sistemas más complejos, inexplorados anteriormente con métodos matemáticos; como es la genética poblacional.

Otros detalles sobre lo aquí tratado, puede encontrarlo ampliado el lector en C. Sánchez-**"La fascinante historia de los sistemas numéricos hipercomplejos",** (I y II) Bol. Soc. Mat. Comp. , No.12, 1990, 16-26 y No.13, 1991, 3-10.

LOS NÚMEROS TRASCENDENTES.

El desarrollo del concepto de número, tuvo ampliaciones en otras direcciones que pretendemos resumir ahora.
En el período comprendido entre los años 287 y 212 a.C., Arquímedes intentó calcular el área del círculo, pero no pudo hacerlo de forma exacta, pues debía ser capaz de determinar el valor exacto de π, número irracional obtenido de manera diferente a los ya conocidos (la primera demostración incompleta de la irracionalidad de π fue hecha en 1761 por J. H. Lambert).
En el año 1882, F. Lindeman pudo demostrar que no existe polinomio p(x) con coeficientes enteros, tal que $p(\pi)=0$ y por consiguiente se tiene no sólo que no se puede construir con regla y compás un segmento de longitud π (ver, entre otros los siguientes trabajos A. Alves-**"Construçoes por meio de régua e compasso"**, Cuadernos de Matemática y Estadística, Serie C, No.13, UFRGS, Brasil, 1990; H. Baravalle-**"The number π"**, The Mathematics Teacher, Vol.XLV, No.5, 1952; L. Davidson-**"El número π"**, Bol. El Orientador, No.3, MINED, La Habana, 1966, 16-17 y J. Estrada-**"Los números trascendentes"**, Bol. SCMC, Nos 2 y 4, 28-32 y 50-54, 1985) y que el problema de la cuadratura del círculo es insoluble, sino también que el número π se diferencia de los otros números irracionales obtenidos hasta la época: mientras los números irracionales de la forma $\sqrt[n]{a}$ (a entero positivo) son soluciones de la ecuación polinómica $x^n-a=0$, no existe ecuación polinómica con coeficientes enteros

p(x), tal que p(π)=0. Por otra parte, no todas las soluciones de polinomios con coeficientes enteros son números racionales o raíces de números racionales ($(2-\sqrt{2})^{1/2}$ es solución de la ecuación $x^4-4x^2+2=0$).

El conjunto de todos los números reales que son soluciones de algún polinomio con coeficientes enteros juega un papel muy importante dentro del campo de los números reales y recibe el nombre de "conjunto de los números algebraicos" y los números reales que no son algebraicos son denominados "números trascendentes". El caso del número π nos muestra cuanto tiempo fue necesario para poder establecer la existencia de números trascendentes, requiriéndose para esto métodos que como dijera Euler *"superan las fuerzas del álgebra"* (**quod algebrae vires trascendit**).

A mediados del siglo XIX, J. Liouville (1809-1882) pudo demostrar por primera vez la existencia de números trascendentes. En primer lugar, él demostró que los números algebraicos tienen ciertas propiedades de aproximación por números racionales que son específicos de ellos y que existen números reales que no las poseen (y por tanto, no son algebraicos). Concretamente, Liouville demostró el siguiente teorema de aproximación:

> *"Si τ es un número algebraico y si P(x) es un polinomio de grado m con coeficientes enteros con P(τ)=0, entonces para todos los números racionales diferentes de τ del tipo p/q, con q suficientemente grande, que cumplen que su distancia a τ es menor o igual a 1/q, p/q no puede aproximarse a τ más que en $1/q^{m+1}$. Si se logra construir un número real τ, tal que para cada número natural m existen números racionales p_m/q_m cuya distancia a τ es menor que $1/q_m^{m+1}$, este número τ es entonces no algebraico y obtenemos así un ejemplo de número trascendente".*

Por ejemplo, sea $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ tiene una expresión decimal infinita y no periódica y es por tanto irracional. Para cada número natural n, definiremos el número racional $x_n=\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} = p_n/10$ si **τ** es un número algebraico, existe entonces un polinomio p(x) de grado m con coeficientes enteros, tal que p(**τ**)=0 y si para n>m+1 consideramos a x_n como aproximación racional de **τ**,

$$\left|\tau - x_n\right| = \tau - \frac{p_n}{10^{n!}} \le 10^{-n!}$$

y del Teorema de Liouville se tiene que:

$$\left|\tau - x_n\right| = \left|\tau - \frac{p_n}{10^{n!}}\right| \geq \left(10^{-n!}\right)^{m+1},$$

lo que es falso, ya que si n>m+1 entonces n!(m+1)<(n+1)! y por tanto:

$$\left|\tau - \frac{p_n}{10^{n!}}\right| < \left(10^{-n!}\right)^{m+1},$$

de esta contradicción se infiere que nuestra hipótesis "τ es un número algebraico" es falsa y consecuentemente hemos demostrado que τ=0,1100010...010...010... es trascendente.
Los primeros ejemplos de números trascendentes fueron construidos a partir de la desigualdad de Liouville:

$$|\alpha - p/q| \geq c/q^n,$$

donde α es un número algebraico raíz de un polinomio irreducible de grado n y con coeficientes enteros y c es independiente de q. Sin embargo, la existencia de los números trascendentes puede ser probada sin tener que utilizar nuestros conocimientos sobre las propiedades de aproximación de los números algebraicos.
La demostración de Cantor (1874) de la existencia de los números trascendentes se basa en probar que el conjunto A de los números algebraicos es numerable y que existe un conjunto de números reales B que no es numerable, luego el conjunto diferencia B-A no puede ser por consiguiente vacío y por tanto B contiene elementos no pertenecientes a A, es decir, B contiene números trascendentes (ver J. Estrada-Ob. cit. (II)).
De lo anterior se deduce no sólo esto, sino que hay "una cantidad mayor de números trascendentes que algebraicos", ya que el conjunto de los números trascendentes tiene la potencia del continuo y el de los números algebraicos es numerable, o sea, está en correspondencia biunívoca con los números naturales. Sin embargo, la demostración de la trascendencia de π, e, ... es un problema muy difícil que ha requerido la acumulación de los trabajos de diferentes matemáticos durante varios años.
Los problemas correspondientes a la naturaleza aritmética de e y π fueron planteados muchos años antes de los trabajos de Liouville sobre trascendencia.
En la segunda mitad del siglo pasado, en 1873, Hermite pudo obtener relaciones entre la naturaleza aritmética de los valores de una función en un punto algebraico, sus propiedades analíticas y la naturaleza aritmética de sus coeficientes, lo que le permitió demostrar la trascendencia del número e.
Algún tiempo después, en 1882, Lindemann pudo establecer un resultado más general sobre la naturaleza de los valores de la función exp(x) para un número algebraico x. Utilizando los trabajos de Hermite, obtuvo el siguiente resultado:

"Teorema de Lindemann. Si α_1, α_2, …, α_n son números algebraicos diferentes entre sí, cualquiera que sean $A_1, A_2, ..., A_n$ números algebraicos diferentes de cero se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \exp(\alpha_i) \neq 0".$$

De este teorema se deriva fácilmente que el número π es trascendente, ya que si suponemos lo contrario, entonces 2πi es también algebraico y tomando en el teorema de Lindemann n=1, $\alpha_1=2\pi i$, $\alpha_2=0$, $A_1=1$, $A_2=-1$, obtendríamos (por la fórmula de Euler):

$$A_1 \exp(\alpha_1) + A_2 \exp(\alpha_1) = \exp(2\pi i) - 1 = 0,$$

o sea, una contradicción (otros trabajos que pueden consultarse en esta dirección son J. Hancl-**"Two proofs of trascendency of π and e"**, Czechoslovak Math. J., 35 (110), Praha, 1985 y Ju. V. Nesterenko-**"Sobre el número π"**, Vestnik MGU, Serie 1, Matemática y Mecánica, No.3, 1987 (en ruso)).

Euler fue el primer matemático que propuso estudiar la naturaleza aritmética de clases generales de expresiones numéricas. En su **"Introduction ..."** (1748), formula la conjetura de que el número log b es un número racional o un número trascendente, para a y b números algebraicos.

Casi un siglo después, Liouville (1844) obtuvo la primera condición suficiente para que un número sea trascendente (con la desigualdad de Liouville) y medio siglo después, en 1900, este problema fue señalado por Hilbert en el II Congreso Internacional de Matemática, como uno de los 23 problemas fundamentales para el desarrollo futuro de la matemática. Citando al propio Hilbert en su intervención en este congreso:

> *"Como es conocido, Fermat afirmó que la ecuación diofántica (excepto en ciertos casos triviales) $x^n+y^n=z^n$ no tiene soluciones enteras x, y, z; el problema de demostrar esta afirmación nos ofrece un buen ejemplo de cuan significativa puede ser la influencia en las ciencias de un problema tan especial y aparentemente sin importancia como este. Motivado por el Teorema de Fermat, Kummer introdujo los números ideales y demostró el teorema de la descomposición única en producto de factores primos para los cuerpos ciclotómicos, teorema que al ser generalizado por Dedekind y Kronecker para los cuerpos de números algebraicos, se convirtió en el punto central de la teoría de números moderna y sobrepasando las fronteras de esta teoría, influyó en el álgebra y en la teoría de funciones.*
> *...frecuentemente ocurre que un problema muy especial interviene en diversas disciplinas matemáticas. Así tenemos como el problema de la línea de distancia mínima (geodésica) ha jugado un papel histórico importante y principal en la fundamentación de la geometría, en la teoría de curvas y superficies, en la mecánica y en el cálculo variacional..."*,

podemos ratificar la importancia y el interés que tienen estas investigaciones sobre la trascendencia.

El séptimo problema planteado por Hilbert: **Investigar si el número $2^{\sqrt{2}}$ (o en general, si el número a^b con a y b algebraicos) es algebraico o trascendente**, implica hallar una respuesta a la conjetura de Euler.

Este problema fue resuelto de forma independiente por A. O. Gelfand y T. Schneider en 1936, quienes obtuvieron el siguiente resultado: **"si a es un número algebraico diferente de 0 y 1 y si b es un número algebraico irracional, entonces a^b es un número trascendente"**.

Existen muchos resultados que podríamos mencionar para ilustrar cuan interesantes y variadas son las investigaciones sobre la trascendencia realizadas más recientemente así, K. Mahler, K. F. Roth y T. Schneider generalizaron el Teorema de Liouville, lo que permitió demostrar la trascendencia de otros números, por ejemplo la de 0,1234567891011...; A. Baker demostró que para los números algebraicos $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ que satisfacen ciertas condiciones, el número $\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}$, es trascendente (el producto de números trascendentes no es en general trascendente); los trabajos de C. L. Siegel y A. Shidlovsky, entre otros, sobre E-funciones

generalizan el Teorema de Lindemann y permiten demostrar la trascendencia de los valores de diferentes clases de funciones enteras, etc.
Para terminar, queremos reportar una de las aplicaciones más recientes de la teoría de aproximación de los números algebraicos y trascendentes: utilizando los resultados y métodos de la estimación de sumas trigonométricas, de las aproximaciones diofantinas simultáneas y de la teoría algebraica de los números, se ha logrado construir redes de puntos "uniformemente" distribuidos en una región G de espacio n-dimensional, lo que permite calcular aproximaciones (por cuadraturas) para las integrales definidas sobre G con el menor error posible, mejorando significativamente los resultados obtenidos por los métodos de aproximación existentes. Además, estos métodos pueden utilizarse en la construcción de polinomios de aproximación para funciones de varias variables y en la solución numérica de ciertas ecuaciones integrales y en derivadas parciales.

CUESTIONARIO

1. Sea la ecuación $x^3 = 15x + 4$, muestre que este caso es irreducible y sin embargo x=4 es una raíz. Halle las otras dos raíces.

2. Dada la ecuación $x^3 - 6x - 9 = 0$, obtenga las tres raíces de esta ecuación.

3. Demuestre que $(20 + 14\sqrt{2})^{1/3} + (20 - 14\sqrt{2})^{1/3} = 4$, utilizando una apropiada ecuación cúbica.

4. Demuestre que las tres raíces de una ecuación cúbica con coeficientes (1,0,3,2) son:

$$r = (-1 + \sqrt{2})^{1/3} - (1 + \sqrt{2})^{1/3}$$

y las raíces de $x^2+ax+b=0$, donde a=r y $b=r^2+3$.

5. Las tres raíces de la ecuación $x^3 - 6x - 4 = 0$, son -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$. Si por fórmula sabemos que $x=(2+2i)^{1/3} + (2-2i)^{1/3}$, una de las raíces debe ser igual a $(2+2i)^{1/3} + (2-2i)^{1/3}$. ¿Cuál es?

6. Pruebe que la multiplicación de los octoniones no es asociativa ni conmutativa, pero cumple la ley de los módulos.

7. Pruebe que el producto de matrices cuadradas es asociativo y distributivo con relación a la suma, pero no es conmutativo. Halle ejemplos de matrices nilpotentes.

8. Pruebe que ningún entero de la forma 8n+7 puede representarse como suma de tres cuadrados de números enteros.

Conferencia 14. Las paradojas de la Teoría de Conjuntos.

"Por una muestra pequeña podemos juzgar la pieza entera"

Cervantes

Para saber lo que debemos entender por "conjunto" hojeemos las obras de los matemáticos que son, a título diverso, teóricos de los conjuntos. Según el artículo de la **Encyclopédie des sciences mathématiques** (tomo I, vol.1, f.4) redactada por M. Baire, según el artículo alemán de A. Schönflies, *la palabra conjunto, a causa precisamente de su simplicidad y generalidad, no parece susceptible de una definición precisa; todo lo más, se puede reemplazar por sinónimos tales como colección, ...* punto de vista que es mantenido por Borel en sus **"Lecons sur la théorie des fonctions"**.

Estos teóricos de los conjuntos se clasifican entre los matemáticos **empiristas** (o realistas), por oposición a los idealistas.

La noción de conjunto puede obtenerse por medio del denominado **axioma de comprensión**.

También puede conservarse la noción intuitiva de conjunto tal y como lo han considerado A. Schonflies, Borel, Sierpinski y otros.

El axioma de comprensión puede expresarse del siguiente modo:

1. Los conjuntos son entidades matemáticas que tienen una cierta propiedad en común, la definición de la cual determina si un cierto ente es o no, elemento de un conjunto.
2. Los conjuntos son entes matemáticos y por ende, ellos pueden ser elementos de un conjunto.
3. Los conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos; por lo tanto, un conjunto está unívocamente determinado por sus elementos.

Este axioma permite que se puedan introducir las nociones de conjunto vacío, subconjunto, potencia de un conjunto, etc. y las operaciones con conjuntos.

Ya vimos en la conferencia anterior, cómo la moderna teoría de conjuntos está indisolublemente ligada a los problemas de la fundamentación de la aritmética de los números reales y la demostración de los teoremas fundamentales del Análisis y de la teoría de las series trigonométricas. En todos estos problemas era necesario distinguir distintos conjuntos de puntos, de estructura singulares, para los cuales era necesario hallar un principio de clasificación único. Antecedentes a estos resultados, pueden encontrarse en diversas épocas. En la antigüedad, Proclo Diadocos señaló la siguiente paradoja: el círculo se divide mediante el diámetro en dos partes iguales. El número infinitamente grande de diámetros posibles corresponde entonces quasi una cantidad doblemente infinita de semicírculos.

Un ejemplo particularmente bello del tratamiento de lo infinito-actual, puede apreciarse en los **"Discorsi"** de Galileo (1638); según la terminología actual él estableció una asociación biunívoca entre los números naturales y sus cuadrados y señaló al respecto que el conjunto de los números naturales y sus cuadrados, y señaló al respecto que el conjunto de los números naturales es "equivalente" a uno de sus subconjuntos verdaderos (ahora equipotentes).

Antes que George Cantor (1845-1918), fue Bolzano el que más avanzó por la vía de la verdadera teoría de conjuntos. En su obra póstuma **"Paradojas de lo infinito"** (1851), cuya importancia exaltó particularmente Cantor, Bolzano avanzó hacia un claro conocimiento del concepto "equipotencia" y de los diferentes rangos del infinito.

Merece destacarse que Cantor partió de problemas matemáticos concretos. Mucho más tarde, cuando con su teoría de conjuntos tropezó con mucha falta de comprensión, fue que él llegó a argumentaciones filosóficas -más bien idealistas objetivas- y ocasionalmente metafísicas e incluso teológicas, en favor del infinito actual.

Desde su época de estudiante en Berlín con Weierstrass, Cantor se familiarizó con la

concepción estricta acerca de los fundamentos del análisis. Posteriormente, en Halle, su colega Heine llamó su atención acerca de algunas interrogantes difíciles de la teoría de las series trigonométricas; esto lo condujo a la teoría de los conjuntos de puntos. En los inicios de la actividad matemática de Cantor se ubica también la fundamentación de la teoría de los números irracionales mediante sucesiones fundamentales. A partir de 1873 Cantor penetró paso a paso en los secretos del infinito actual, o como él dice, de lo "verdaderamente infinito". Cantor expresó con las palabras siguientes la diferencia, decisiva para la teoría de conjuntos, entre lo infinito potencial y lo infinito actual (1886):

> *"Si se quiere conocer el origen del prejuicio muy difundido en contra del infinito actual, el "horror infiniti", en la matemática, hay que centrar la atención ante todo en la oposición que existe entre el infinito potencial y el actual. Mientras que el infinito potencial no significa otra cosa que una magnitud indeterminada, variable, que siempre permanece dentro de lo finito, que tiene que asumir valores que o bien son menores que todo límite finito más pequeño o mayores que que todo límite finito mayor, lo infinito actual se refiere siempre a un cuanto fijo, constante, que es mayor que toda magnitud finita del mismo tipo."*

Consideremos las siguientes sucesiones 1, 2, ..., n, ... y 2, 4, ..., 2n, ... el número de términos de ambas sucesiones es infinito. Observamos que a todo número de la primera sucesión se puede hacer corresponder un número de la segunda, es así que al 1 le corresponde el 2, al 2 el 4, y así sucesivamente, a n se le puede hacer corresponder 2n. Análoga idea se puede presentar de la segunda sucesión con respecto a la primera.

Se concibe, de una parte, que hay "tantos" números en la primera sucesión como en la segunda, en la medida en que esta afirmación tiene sentido, puesto que no se trata de conjuntos finitos. Se observa, de otra parte, que los números pares no son otra cosa que una parte de los números enteros, la "mitad" si se quiere, lo que contradice la afirmación precedente. Contradicciones que hay que superar para permitir el desarrollo de la matemática.

¿De donde vienen estas contradicciones? Manifiestamente del hecho que admitimos implícitamente para los conjuntos infinitos, el axioma **El todo es más que la parte**, que se verifica para conjuntos finitos.

Para superar esta contradicción tendremos que introducir, en primer término, la noción de número infinito, como una generalización de la noción de entero definida para conjuntos finitos de objetos. Es necesario ahora definir una aritmética para estos números, lo que completaría la formalización de estos "nuevos" números. Es a G. Cantor a quien corresponde el mérito de la definición de igualdad de dos conjuntos infinitos.

Dos conjuntos infinitos corresponden al mismo número infinito (mejor aún, el número cardinal transfinito se define como caracterizando un conjunto, independientemente del orden y de la naturaleza de sus elementos), o se dice que tienen la misma **potencia**, cuando se puede hacer corresponder a un elemento cualquiera del primero un elemento del segundo y, viceversa, a un elemento cualquiera del segundo un elemento del primero.

Se dice que se ha realizado una **correspondencia biunívoca** entre los elementos de los dos conjuntos. Dos conjuntos finitos que tienen la misma potencia tienen el mismo número entero de elementos y recíprocamente. Esta definición comprende bien la definición de igualdad de los números enteros como caso particular.

Todo conjunto que tiene la misma potencia que el conjunto de los enteros positivos (los naturales) se llama **numerable**. Los teóricos de los conjuntos representan esta potencia por la letra hebrea álef, que afectan del índice cero. Así un conjunto numerable unido a otro conjunto numerable hacen un conjunto numerable y no dos.

Tomemos todos los números reales comprendidos entre 0 y 1. Es conocido que este conjunto es no numerable, no existe, pues, correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento (0,1) y los naturales. De otro lado: toda parte infinita de un conjunto numerable es numerable y, por consiguiente, igual a todo el conjunto. En conjuntos infinitos admitiremos incluso que una parte infinita de un conjunto infinito puede ser más pequeña que todo el conjunto infinito, es decir, que existen conjunto infinitos con distintas potencias.

Sea el continuo la potencia de los números comprendidos entre 0 y 1. Una parte de este conjunto, por ejemplo, los racionales, son numerable, sin embargo, ninguna parte de estos racionales, puede tener la potencia del continuo. Así pues, $\mathbf{c}>\aleph_0$.

Observemos que si se plantea y = x/(1+x), se hace corresponder a todo x comprendido entre 0 y +∞ un y comprendido entre 0 y 1 y recíprocamente. El conjunto de los números reales positivos tiene la misma potencia que el conjunto de los reales del (0,1). Resulta de esta observación que $\mathbf{c}+\mathbf{c} = \mathbf{c}$, o aún, $\mathbf{c}x\aleph_0 = \mathbf{c}$.

Cantor demostró además que la potencia de los números trascendentes -los no algebraicos- es la misma que la del continuo, con lo cual quedaba claro que números como π y e son de los más comunes entre los números reales. Cualquier número algebraico diferente de 0 y 1 elevado a una potencia de irracional es ya un número trascendente (Kuzmin, 1930).

El 15 de enero de 1874 Cantor se hace la pregunta ¿Tiene el conjunto de puntos del plano la misma potencia que el conjunto de puntos de una recta, es decir, se puede coordinar de forma biunívoca una superficie y una línea?

"Pregunta absurda", declaran inmediatamente los matemáticos de Berlín, puesto que se sobreentiende que dos variables independientes no pueden dejarse conducir a una. Cantor responde a esta observación demostrando que hay tantos puntos en un plano como en una recta, anulando la antigua concepción de "dimensión", más aún cuando el resultado de Cantor podía ampliarse a dimensiones arbitrarias (*"Je le vois, mais je ne le crois pas"*, escribe a Dedekind).

Muy pronto pasó Cantor a la exposición y representación coherente de sus resultados. De 1879 a 1884 se publicaron seis trabajos en las Mathematishe Annalen bajo el título común **"Sobre las diversidades de puntos lineales e infinitos"**. Aquí se plantean, entre otras, las definiciones de conjunto cerrado, denso, denso en sí, perfecto y conexo. En las dos partes de los **"Artículos sobre teoría de conjuntos transfinitos"**, publicados en 1895-1897, tuvo lugar una representación sistemática de la teoría de los números transfinitos.

Surge ahora la pregunta ¿ existen conjuntos con potencia superior a la del continuo?

Tomemos un conjunto de potencia n. A un elemento x del conjunto hacemos corresponder el número 0 o el número 1. Definimos de esa forma una función f(x) que depende de n elecciones arbitrarias entre dos números 0 y 1. Hay, pues, 2^n de esas funciones. Tenemos $2^n>n$. En efecto, hagamos corresponder a un elemento a de E la función f(x) tal que f(a)=1 y f(x)=0 para x≠a. Ella pertenece al conjunto de las funciones, cuyo conjunto E tiene la misma potencia que una parte del conjunto de esas funciones. Supongamos ahora que una parte de E tenga la misma potencia que el conjunto de las funciones. Sea a un elemento de esta parte. Le correspondería una función f(x) por la sola condición $f(a) \neq f_a(a)$.

Se ve que f(a) está bien definida y que f(x) no puede formar parte del conjunto, puesto que

ella difiere de toda función f(x), al menos en el punto x=a. Por consiguiente, el conjunto de las funciones según la definición de la desigualdad de potencias, tiene una potencia superior a n.
Si, en particular, se considera las funciones f(x)=0 ó 1 y definidas por un valor real cualquiera de x, se obtiene un conjunto de potencia 2^c que es superior al continuo.
La noción de **número transfinito** parece haberse introducido por primera vez a propósito de la teoría de los conjuntos de puntos. Se llama punto de acumulación o punto límite de un conjunto infinito de puntos sobre un segmento, un punto tal - si existe- que haya puntos del conjunto tan "cerca" de él como se quiera. El conjunto de puntos límites de un conjunto P es llamado el conjunto derivado de orden 1 y se denota P'. Este conjunto puede ser infinito. Posee, pues, un conjunto derivado P" formado de sus puntos de acumulación y así sucesivamente. De una forma general, puede existir un conjunto derivado P(v) cualquiera que sea v entero y si resulta que todos los P(v) poseen puntos comunes, cualquiera que sea el entero v, se concibe que ese conjunto de puntos comunes forma un derivado de un nuevo género. Se denomina derivado w de P y se le designa por P(w). Todo sucede como si después de los enteros 1, 2, ..., v, ... existiese un número de género nuevo w superior a todos los enteros. Este mismo conjunto puede tener un derivado P(w+1) y así sucesivamente. Los nuevos símbolos w, w+1, ... que van a permitirnos notar los enteros más allá de su sucesión natural, son llamados números ordinarios transfinitos.
He aquí como Cantor, que es el primero en considerarlos, expone su formación (Acta Mathematica, t.II, 385-399).
La sucesión natural de los enteros reposa sobre la operación de adición de la unidad a un entero ya formado. Llamaremos a ese principio de formación de la sucesión de los enteros, **primer principio de formación**. La aplicación de este principio no conoce fin. Sin embargo, esta aplicación no puede hacernos salir de la sucesión natural de los enteros 1, 2, ..., v, ... o número de clase.
Para superar esta sucesión natural de los enteros tenemos que desarrollar ese primer principio de formación. Es precisamente lo que hace Cantor, valiéndose del **segundo principio de formación**, considerando que existe un número w inmediatamente superior a todos los enteros de la sucesión. Aplicando a ese número w el primer principio de formación, obtendremos w+1, w+2, ..., ... y con una nueva aplicación del segundo principio, 2w. Combinando de esa forma la aplicación del primer y del segundo principio de formación, obtenemos la sucesión de enteros: 1, 2, ..., v, ..., w, w+1, ..., w+v, ..., 2w, 2w+1, ..., 3w, ..., w^2, ..., w^v , ...w^w y así sucesivamente, pero en un orden perfectamente determinado. Los números que obtenemos de esta forma a partir de w se llaman **números de la clase (II)**.

> *"Se podría creer,* añade Cantor, *que vamos a perdernos al infinito en esta formación de nuevos números infinitos, determinados y que no estamos en condiciones de frenar provisionalmente ese proceso sin fin, para llegar por él a una limitación semejante a la que hemos encontrado, de hecho, en cierto sentido, respecto a la antigua clase de números finitos: allí se empleaba solamente el primer principio de formación y no podíamos salir de la sucesión natural de los enteros".*

Así, partiendo de un número de la clase (II), todos los números que le preceden forman un conjunto evidentemente numerable, puesto que están definidos los unos después de los otros por un número numerable de pasos al límite; de la misma forma que todos los números de la clase (I) que preceden a un número necesariamente finito de esta clase, forman un conjunto finito.
Si, por consecuencia, admitimos -y he aquí el desarrollo obtenido- lo que Cantor llama un **principio de detención o limitación**, a saber, que todos los números de la clase (II) que

preceden a uno de entre ellos forman un conjunto numerable, concebimos un número α, inmediatamente superior a todos los números de la clase (II), pero que pertenece a la clase siguiente (III) y que denota un conjunto de potencia superior al numerable, de la misma forma que el número w inmediatamente superior a todos los enteros finitos, denota un conjunto infinito de potencia numerable, inmediatamente superior a todas las potencias finitas.
Esta generación de los números transfinitos no conocerá fin. Esos números transfinitos se suceden en un orden bien determinado. Van a encontrar una aplicación inmediata en el estudio de los conjuntos ordenados.
Se dice que un conjunto dado U es **ordenado** si siendo a y b dos elementos de U, uno de esos elementos se considera como precedente al otro, lo que se escribe: a precede a b. La convención que permite la ordenación puede ser cualquiera. Es suficiente que a precede a b sea incompatible con b precede a a y que a precede a b y b precede a c lleven a que a precede a c.
Es de esta forma que el conjunto de los racionales puede ser ordenado. Es suficiente de convenir que a precede a b si a<b.
Se dice que dos conjuntos son semejantes si entre sus elementos existe una correspondencia biunívoca que conserve las relaciones de orden. De dos conjuntos semejantes se dice que tienen el mismo tipo de orden.
La noción de orden está precisada por la noción de buen orden de un conjunto. Se dice que un conjunto está **bien ordenado** cuando todo subconjunto no vacío tiene un primer elemento. Así pues, el conjunto formado por la sucesión de los enteros está bien ordenado. Se demuestra que un conjunto bien ordenado no es semejante a ninguno de sus segmentos (secciones iniciales).
Todo conjunto de números ordinales está bien ordenado puesto que todo subconjunto de números ordinales contiene un ordinal inferior a todos los demás, que puede ser, por tanto, considerado como el primer elemento.
Recíprocamente, un conjunto bien ordenado tiene por tipo de orden un número ordinal ø. Este conjunto es semejante a todos los ordinales inferiores a ø, ordenados de acuerdo con su magnitud.
Se designan por álefs afectados de índices las potencias sucesivas de los ordinales de cada clase.
Alef cero denota un conjunto ordenado numerable.
Alef uno denota el conjunto de los números de la clase (II) que no es numerable y cuya potencia es inmediatamente superior a la del numerable.
Podemos preguntarnos si se podrá ordenar un conjunto dado. Ciertos teóricos como Zermelo, responden afirmativamente y apoyan su razonamiento sobre un axioma, llamado **axioma de elección** o **axioma de Zermelo**, que se enuncia así:

> **para todo conjunto M cuyos elementos son conjuntos P, no vacíos y sin elementos comunes dos a dos, existe, al menos, un conjunto N que contiene un elemento, uno solo, de cada conjunto P que pertenece a M.**

Demos un ejemplo como aplicación. Dividamos los números reales en clases, alineando en una misma clase dos números reales, cuya diferencia es racional, y en dos clases diferentes dos números reales cuya diferencia sea irracional. Todo número real pertenece de esa forma, a una sola clase. Según el axioma de elección, existe un conjunto N que contiene un número, uno sólo, de cada una de nuestras clases. Sin embargo, no sabemos determinar tal conjunto. La elección que implica el axioma es, pues, una elección teórica, que existe sin que sea efectivamente posible indicar en todos los casos un medio de realizarla.
Con ayuda de este axioma, Zermelo muestra que todo conjunto tiene la misma potencia que

un conjunto bien ordenado. Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre un conjunto cualquiera y un conjunto bien ordenado, convenientemente escogido, sin que podamos explicar siempre de qué forma se puede realizar efectivamente esa correspondencia. Por otra parte, el axioma de elección produjo una agudización de las dificultades en la cimentación de la matemática, como cuando se demostró con su ayuda la existencia de objetos para los cuales no se ha podido indicar ni un sólo ejemplo, este es el caso de la demostración de la existencia de los conjuntos no medibles (ver A.N Kolmogorov y S.V. Fomin-**"Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional",** E. Mir, Moscú, 1982, pp.305-306), aunque hasta ahora no se ha logrado construir al menos un ejemplo de un conjunto que no sea medible.
Otra consecuencia muy importante del axioma y que le es equivalente, es la posibilidad de comparar las potencias de dos conjuntos cualesquiera. Sin el axioma de elección no podemos demostrar que dos conjuntos cualesquiera tienen potencias a y b tales que a=b, a<b o bien a>b. Esta posibilidad de comparar las potencias de dos conjuntos se llama la **tricotomía**. Como todo conjunto, según Zermelo, tiene la misma potencia de un conjunto bien ordenado, es suficiente probar la tricotomía para los conjuntos bien ordenados, es decir, para los álefs.
El axioma de elección conlleva, pues, la tricotomía. Recíprocamente, se demuestra que la tricotomía conlleva el axioma de elección. Se ve de esta forma qué simplificaciones nos da el axioma de elección para la teoría general de los conjuntos.
Observemos, no obstante, que incluso con el axioma de elección no podemos demostrar que la potencia inmediatamente superior al numerable es la del conjunto de los números transfinitos de la segunda clase. Siendo la potencia del continuo, como hemos dicho $2^{\aleph_0}$, la igualdad:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0},$$

es conocida bajo el nombre de **hipótesis del continuo**, que aparece en el sexto trabajo de 1884 y la respuesta a esta se encontró sólo en 1963, como veremos más abajo.
La solución que da el axioma de Zermelo a diversos problemas de la teoría de conjuntos, es de naturaleza teórica. Por ello entre los matemáticos no existe un absoluto consensus con respecto a la teoría de conjuntos infinitos.
La misma existencia del número infinito ha sido cuestionada. Leibniz, por ejemplo, se manifestaba contrario a la existencia de los números infinitos. Consideraba que un número debía disminuir cuando se le verificaba una resta.
Rusell consideraba todo lo contrario y comentando a Leibniz ("**Obras Completas"**, T.II, pág. 1238) expresó:

> *"Se notará que Leibniz considera contradictorio que el todo no es mayor que su parte. Pero la palabra "mayor" tiene muchas acepciones; para nuestro fin debemos sustituirla por la expresión menos ambigua "conteniendo un número mayor de términos.*
> *En este sentido no es contradictorio que el todo y la parte sean iguales. Al comprender este hecho se hizo posible la moderna teoría del infinito."*

El elemento conflictivo de la teoría de conjuntos fue la noción de infinito introducida por medio de ella. A la forma de idealización utilizada por Cantor, se le ha dado el nombre de abstracción del infinito actual.
De la teoría de conjuntos, mucho se ha escrito, pero quizás lo que sea más representativo sean las palabras de Hilbert cuando valoró esta como *"el fruto más maravilloso del genio matemático y en general una de las obras supremas de la actividad humana puramente intelectual"*.

Cantor previó las discusiones en torno a la teoría de conjuntos; en 1883 escribió, con respecto a la estructuración de una teoría general de conjuntos:

> *"No me oculto a mí mismo que con este empeño me coloco en cierta oposición con las concepciones ampliamente difundidas sobre el infinito matemático y con los puntos de vista frecuentemente defendidos acerca de la esencia de la magnitud del número."*

Cantor tuvo en Kronecker un adversario encarnizado, el que sin poder presentar una objeción de peso, atribuyó a Cantor conclusiones inexactas reiteradas. Según una expresión de Hilbert, Kronecker se dejaba llevar de una actitud dogmática que se basaba en la convicción de que no existía lo infinito actual. Incluso, el uso de las series infinitas le resultaba extraño, ya que no admitía las conclusiones transfinitas.

No resulta erróneo suponer que en el grave desmoronamiento psíquico de Cantor de 1884, mucho tuvo que ver las ofensivas expresiones de Kronecker, que llegó incluso a calificar públicamente a Cantor de "corruptor de la juventud". Poincaré llamaba la atención sobre la postura de Kronecker alegando en forma de broma que éste alcanzó notables resultados en las matemáticas porque frecuentemente se olvidaba de sus convicciones filosóficas.

El mismo Poincaré era portador de una concepción muy difundida cuando aún en 1909 opinó que "no existe ningún infinito actual", sino que con lo infinito se designa únicamente la posibilidad de crear ininterrumpidamente nuevos objetos, por muy numerosos que sean los objetos ya creados.

En Dedekind, el inglés Young y el matemático sueco Mittag-Leffler, Cantor tuvo promotores entusiastas de sus ideas. En el Congreso Internacional de Matemática, celebrada en Zurich en 1897, el matemático alemán Hurwitz, uno de los maestros de Hilbert, demostró de forma convincente la importancia del pensamiento teórico-conjuntista en la teoría de funciones.

El concepto de punto límite y el concepto de conjunto cerrado relacionado con aquel, después de la introducción en el año 1902 por H. Lebesgue del concepto de medida de un conjunto y las investigaciones de E. Borel condujeron a la creación de la teoría métrica de conjuntos. Esta última sirvió de base a la teoría general de integración y las series trigonométricas. Más tarde condujo a la construcción, en los trabajos del propio Lebesgue, K. Caratheodory, F. Hausdorff y otros, de la teoría general de la medida.

M. Frechét (1906) y F. Hausdorff (1914), investigando el concepto introducido por Cantor de conexidad y otros cercanos a éste desarrollaron la teoría topológica de conjuntos situados en espacios métricos y topológicos generales. Finalmente, la teoría descriptiva de los conjuntos de puntos y la, relacionada con ella, clasificación general de las funciones discontinuas (clasificación de Baire) tienen su origen aproximadamente en el año 1900 en los trabajos de R. Baire y Lebesgue.

En la consideración de los problemas fundamentales de la teoría del conocimiento, Cantor pretendía seguir las ideas de Platón. Diferenciaba dos tipos de "realidad": los conceptos e ideas constituían la realidad inmanente *"si de acuerdo con definiciones precisas, ocupan en nuestro pensamiento un lugar determinado, diferenciándose claramente de los otros componentes del pensamiento"*. Si las ideas y conceptos representaban procesos y objetos del mundo exterior entonces, en ellos estaba presente una realidad transiente. Estas dos formas de realidad de los conceptos e ideas no se contradicen una de otra, sino al contrario, "siempre coinciden en el sentido de que cualquier concepto tomado como existente en la primera relación, posee a saber, también infinitas relaciones con la realidad transiente".

Con respecto al conocimiento, él repite los criterios fundamentales de Platón.

Esto permite, aparentemente, concluir que la posición idealista de Cantor coincide con la filosofía de Platón. Existen dos grandes diferencias: 1ro. los conceptos matemáticos deben

estar libres de contradicciones internas y 2do. ellos deben encontrarse en determinadas y precisas relaciones con los conceptos asumidos anteriormente. Estas exigencias no concuerdan en esencia con la filosofía de Platón.
El mismo Cantor señala que en el dominio de la filosofía, él ocupa una posición idealista la cual llamó "realista". Esto es válido pero con una precisión. Los criterios filosóficos de Cantor eran duales: idealistas en la esfera de los problemas generales de la filosofía, pero materialista cuando trataba los problemas específicos de la metodología de la matemática.
Las reflexiones filosóficas de Cantor atestiguan que veía la fuente de las leyes generales de la teoría de conjuntos no tanto en la realidad transiente de sus conceptos como en la contemplación interior. No es asombroso que estos razonamientos no le produjeran nada para la fundamentación de su teoría de conjuntos; el mismo Cantor más adelante no tuvo más remedio que renunciar a ellos.

Paradojas de la Teoría de Conjuntos. Como es conocido, se han encontrado no menos de 20 paradojas diferentes relacionadas con la concepción cantoriana de conjunto y el tratamiento de la abstracción del infinito actual. Vamos a exponer las más conocidas para poder hacer algunas consideraciones generales sobre ellas. La existencia de estos conjuntos paradigmáticos dio base, a comienzos de este siglo, a una polémica acerca de los fundamentos de la matemática, la que se llamó "crisis en los fundamentos" (la tercera), en la que intervinieron no sólo matemáticos, sino también figuras prominentes de disciplinas limítrofes: lógicos y lingüistas.
Algunas de estas paradojas se deben al uso sin las debidas precauciones del concepto "todos", en forma explícita o no, y ciertas eran antiguas como la del cretense mentiroso. La expresión "yo miento" implica contradicción, pues si digo verdad, miento y si miento, digo verdad. Este tipo de sofisma, con ropaje variado, ha persistido y se encuentra muy difundido.

Paradoja de Cantor (1895). Sea M el conjunto de todos los conjuntos y P(M) el conjunto de todos los subconjuntos de M. Según uno de los teoremas primarios de la teoría de conjuntos, la potencia de un conjunto es siempre estrictamente menor que la potencia del conjunto de todos sus subconjuntos, lo cual se representa por la desigualdad $\overline{\overline{P(M)}} > \overline{\overline{M}}$. Pero, dado que M contiene a todos los conjuntos P(M)⊂ M y, en consecuencia, dado otro teorema de la teoría de conjuntos $\overline{\overline{P(M)}} < \overline{\overline{M}}$. lo cual contradice la desigualdad anterior.

Paradoja de Burali-Forti (1897). Sea D el conjunto de todos los números ordinales. Por un teorema conocido, D es bien ordenado; sea α=ord(D). Considérese ahora s(α), el conjunto de todos los números ordinales menores que α. Obsérvese que:
1. Puesto que s(α) consiste de todos los elementos de D que son anteriores a α, s(α) es una sección inicial de D.
2. Por otro teorema, α=ord(s(α)); por tanto ord(s(α))=α=ord(D).
Por consiguiente, D es isomorfo a una de sus secciones iniciales. Así pues, el concepto de conjunto de todos los números ordinales lleva a una contradicción con el teorema siguiente:

Teorema. Un conjunto bien ordenado no puede ser isomorfo a una de sus secciones iniciales.

Paradoja de Russel-Zermelo. Denotemos por M el conjunto de todos los conjuntos normales, esto es, los conjuntos que no se contienen a sí mismo como elemento. Supongamos que M es un conjunto normal, entonces debe contenerse a sí mismo y no sería normal. Si suponemos lo contrario, o sea, que M no es un conjunto normal, entonces un tal razonamiento

nos lleva a que M es normal. Por tanto, no podemos suponer sin contradicción, ni la normalidad ni la no-normalidad del conjunto de todos los conjuntos normales.

Paradoja de Richard. Supongamos todas las definiciones de la aritmética ordenada según su longitud, por la cantidad de letras que se contienen en ellas. Si las definiciones que contienen la misma cantidad de letras las ordenamos alfabéticamente, entonces, a cada definición se puede hacer corresponder un número natural n -su número de orden. Llamamos número de Richard a todo número que no posee la propiedad la cual está fijada en la correspondiente definición. Pero la definición de número de Richard también es una definición de la aritmética y a ella le corresponde también cierto número natural. Sea este número m. ¿Es el número m un número de Richard? Aquí está la contradicción ya que m es un número de Richard si y sólo sí no posee la propiedad que se exige en la definición, es decir, si y sólo sí no es un número de Richard.

Paradoja de Karl Menger. Reunamos en un cuadro las tres proposiciones siguientes: "2+2=5", "4+6=3" y "todas las proposiciones escritas en este cuadro son falsas". El análisis revela fácilmente, que esta última es contradictoria, pues si se supone que es verdadera, se sigue que es falsa, y si se supone que es falsa, se sigue que es verdadera.

El hallazgo de las paradojas, relacionadas con el concepto de conjunto, transformó el problema de la fundamentación de la teoría de conjuntos de un significado teórico, como lo era para Frege, en un problema metodológico. En un sentido estrecho consistía en desprenderse de las paradojas conocidas. En un sentido más amplio era necesario contestar al problema: ¿en qué medida es una pretensión válida tratar de eliminar la contradicción en la matemática?, ¿Podrá alguna vez la matemática obtener una fundamentación definitiva? A comienzos del siglo XX todavía había una esperanza de encontrar tal fundamentación. Este problema se convierte así en uno de los problemas filosóficos de la matemática contemporánea más importantes y todavía mantiene cierto interés.

Desarrollo del estilo del pensamiento teórico-conjuntista. Frecuentemente, cuando se caracteriza el estilo del pensamiento teórico-cojuntista de la matemática, se subrayan dos rasgos diferenciantes. Primeramente, la utilización de la abstracción del infinito actual, la cual permite considerar conjuntos infinitos en su realización conjunta y total. En segundo lugar, la aplicación de los principios y leyes de la lógica clásica, sin ninguna restricción, a los conjuntos infinitos. Estas características, sin dudas, constituyen aspectos determinantes en el estilo de pensamiento teórico-conjuntista, sin embargo, ni la abstracción del infinito actual, ni la libre utilización de la lógica, son suficientes para construir la teoría de conjuntos y mucho menos servirían para elaborar un estilo de pensamiento dominante, deben estar subordinados a un fin principal -la construcción de una teoría.
A continuación relacionamos algunos hechos que muestran la penetración cada vez más profunda del estilo conjuntista en la matemática y el proceso de transformación de la teoría de conjuntos en un estilo universal.

1900-Hilbert en el II Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París, plantea sus famosos 23 problemas. El no.1 es la hipótesis del continuo, el segundo estaba relacionado con la consistencia de los axiomas aritméticos.

1900-Se celebra el Primer Congreso Internacional de Filosofía en París, donde Peano influye decisivamente en la carrera intelectual de Russell y muchos otros matemáticos, lógicos y filósofos.

1903-Russell publica su libro **“Principios de las Matemáticas”.**

1904-Lebesgue introduce los nuevos conceptos de medida de conjuntos y funciones medibles.

1904 a 1908-Zermelo elabora una axiomática general de la teoría de conjuntos que pretende eliminar las paradojas.

1904 a 1910-Hilbert investiga los espacios funcionales infinitos.

1905-Borel introduce en la teoría de las probabilidades el concepto de medida de conjuntos.

1906-Frechet introduce el concepto de espacio métrico abstracto.

1906 a 1912-A. A. Markov, discípulo de Chebishev desarrolló las ideas de éste en la teoría de las probabilidades (cadenas de Markov) hasta tal punto, que son considerados en todas partes -según Kolmogorov- como el punto de partida de todo el desarrollo ulterior de la teoría de las probabilidades.

1908-Brouwer publica **“Sobre los fundamentos de la matemática”,** en el cual formula sus ideas intuicionistas restringiendo la utilización de la abstracción del infinito actual.

1910-Lebesgue elabora la teoría de funciones de conjunto.

1910 a 1913-Russell y Whitehead publicaron sus **“Principia Mathematica”,** donde exponen los fundamentos logicistas de la Matemática.

1911 a 1930-Egorov y Lusin establecen la escuela moscovita de teoría de funciones.

1914-Hausdorff publica sus **“Fundamentos de la Teoría de Conjuntos”,** donde introduce importantes conceptos topológicos.
Frechet da la definición de continuidad y diferencial de funcionales lineales.

1916-Bernstein publica el primer sistema axiomático de la teoría de probabilidades.

1919-Noeter construye los fundamentos del álgebra abstracta conjuntista. Alexandrov realiza la síntesis de las direcciones combinatorias y conjuntistas en la topología.

1922-Banach elabora el concepto de espacio vectorial normado completo, funda la escuela polaca de topología. Skolem formaliza el sistema clásico de Zermelo (1904).

1925-von Neumann formula una teoría axiomática de conjuntos.

1925 a 1927-von Neumann y Riesz independientemente construyen la teoría espectral de operadores lineales.

1930-Kolmogorov-Hinchin-Levi-Dool, independientemente, comienzan a investigar los procesos estocásticos. Petrovski-Sobolev-Schauder-Leray, elaboran independientemente la teoría general de las ecuaciones en derivadas parciales utilizando un enfoque conjuntista.

1930-Guelfand y von Neumann desarrollan los métodos algebraicos del análisis funcional.

1931-Gödel demuestra los metateoremas de la incompletitud y la no contradicción, sobre la axiomática de la teoría de conjuntos.

1932-Hahn establece la relación entre la teoría de funciones y la topología general.

1933 a 1939-Hilbert y Ackermann publican los **"Fundamentos de la Matemática",** donde exponen la teoría formalista para salir de la crisis conjuntista.

1935-Kolmogorov formula la idea de espacio vectorial topológico. Zorn formula el lema que lleva su nombre. von Neumann elabora la teoría de los espacios vectoriales topológicos completos.
Kolmogorov y Alexander, independientemente, introducen el concepto de cohomología.
Sobolev y Schwartz elaboran, independientemente, la teoría de las distribuciones.

1937-Pontriaguin construye la teoría de caracteres de los grupos topológicos.
Pontriaguin y Andronov definen el concepto de estabilidad estructural (sistemas gruesos).
Se establece el grupo de matemáticos bajo el nombre de Nicholás Bourbaki.

1937 a 1954-Bernays reelabora la axiomática de la teoría de conjuntos.

1938-Gödel investiga el problema del continuo y el axioma de selección. Demuestra la imposibilidad de demostrar el primero dentro de la teoría axiomática de conjuntos.

1940-Aparece el primer tomo de los **"Elementos de la Matemática"** de N. Bourbaki, obra con la cual se pretende exponer bajo el fundamento riguroso de la axiomática de conjuntos, introducida por Zermelo y mejorada por Fraenkel, toda la matemática contemporánea.

1963-Paul Cohen estableció que la hipótesis del continuo es indemostrable en la axiomática de la teoría de conjuntos.

Sobre todo a partir de la década del 50 el desarrollo del estilo teórico-conjuntista llega a su máximo desarrollo. Por varios años estas concepciones van a prevalecer en toda exposición matemática y aunque siempre existieron quienes se mantuvieron en sus posiciones clásicas, la influencia llegó a hacerse tan exagerada (recordemos que en particular, Euclides murió definitivamente) que, como siempre ocurre en tales casos, se generó una oposición tal que ya en la década de los 70 había logrado borrar las huellas más nefastas del extremismo bourbakiano.
Como todo estilo de pensamiento, el enfoque teórico-conjuntista tiene sus méritos y sus deficiencias.
Entre los primeros tenemos:
1. Considerar los objetos y sistemas más complejos en los términos más simples.
2. Un único punto de vista que permite encontrar las relaciones entre las diferentes teorías y posibilita construir una metodología universal.
De las deficiencias podemos señalar:
1. El reduccionismo teórico-conjuntista hace desaparecer lo específico e irrepetible de los objetos matemáticos.
2. Se esconde el carácter histórico de la formación de los conceptos más importantes.
3. Se niega el desarrollo del conocimiento, despreciando el papel de la práctica y otros

factores externos.
4. No es efectivo desde el punto de vista didáctico y heurístico.

LA FILOSOFÍA CIENTÍFICA DE HENRI POINCARÉ.

Con la aparición de las geometrías no euclidianas, las discusiones sobre la validez de las concepciones euclidianas y newtonianas del espacio y del tiempo adquirieron un desarrollo como no habían conocido jamás. El estado de perfección definitiva desapareció de las matemáticas, sin embargo, existen ejemplos en la historia de las matemáticas del esfuerzo desarrollado por algunos matemáticos para reintroducir, con más o menos suerte, ese ideal perdido. Entre esos esfuerzos hay que señalar, a causa del crédito que ha encontrado y de la influencia que ejerce aún, la filosofía científica de Jules Henri Poincaré (1854-1912).
Poincaré desarrolla la tendencia que se conoció como **convencionalismo**, en la que la experiencia juega un papel importante (y acepta la tesis fundamental del empirismo) pero en última instancia lo que determina la veracidad es la sencillez y la comodidad.
Esa filosofía consiste en afirmar que los principios de la geometría son convenciones. De su obra **"Science et Hypothése"** tenemos algunas de sus afirmaciones más conocidas: *"una geometría no puede ser más verdadera que otra; puede ser solamente más cómoda"*. Ocurre lo mismo para los principios de la mecánica. Contrariamente a Hertz, quien piensa que lo que *"sale de la experiencia puede ser siempre rectificado por la experiencia"*, Poincaré en la obra citada concluye: *"La experiencia ha servido de base a los principios de la mecánica, y sin embargo, no podrá jamás contradecirles"*.
De esa forma, los principios de la geometría y la mecánica son sugeridos por la experiencia, es decir, que son abstractos del real geométrico y físico. La historia de la ciencia ya hecha habría podido sugerir a Poincaré otra cosa que esta teoría de la comodidad, ya que es en el pasado donde cree encontrar las razones para cerrar el porvenir. Es por eso que, según él, el sistema de Ptolomeo que hacía de la Tierra un astro inmóvil al centro del mundo fue refutado por Copérnico y Galileo, porque dicho sistema acumulaba complicaciones: ¡es más cómodo suponer que la Tierra gira!.
Que sean las concepciones filosóficas de Poincaré las que precisamente le hayan impedido desarrollar audazmente las teorías nuevas que su genio matemático le hacía presentir, parece desprenderse de las páginas en las que expone, con Lorentz, que no cree en la posibilidad de poner en evidencia el movimiento de traslación de la Tierra por experiencia de época. Pero, ¿cómo podría él deducir el principio de relatividad restringida que anunciará Einstein, si para ello había que renunciar a la geometría y la mecánica clásica, que considera que deben ser siempre las más cómodas.
De esa forma, la misma evolución de las matemáticas nos demuestra la necesidad de una filosofía científica que esté de acuerdo con el pasado y que pueda retirar delante del porvenir el obstáculo, según la expresión de Riemann, de los prejuicios tradicionales.
Pero no obstante, gracias a las ideas de Poincaré se tomó una dirección más correcta que la de los empiristas y los neokantianos. A diferencia de Helmholtz, Klein y otros, en Poincaré en primer lugar, está la especificidad de la matemática como ciencia, su diferencia con la Física. Para Poincaré la necesidad de las verdades matemáticas no se puede sustentar por ningún apriorismo si no es completamente comprensible por lo empírico de su procedencia.

LA LÓGICA MATEMÁTICA.

A mediados del siglo XIX, el Algebra invade un campo virgen o casi virgen: la lógica. Es indudable que la vinculación de la lógica con la matemática es más estrecha, o si se quiere más clara y evidente, que con cualquier otra ciencia.

Los ancestros de esta ciencia se remontan a la cultura griega, sobre todo vinculado a los nombres de Parménides y, principalmente, Zenón de Elea (fundador de la lógica según Aristóteles). Siendo este último el que le confirió el status de un "**Organon"**, desprovisto de jerarquía científica y contribuyó así a su estancamiento.
El desarrollo del Algebra del siglo XVII influyó en el desarrollo de reglas silogísticas, al advertirse una analogía entre estas y la deducción algebraica.
Es explicable que tales ideas encuentren una primera expresión concreta en Leibniz, verdadero precursor de la lógica matemática. Persiguiendo un proyecto que lo acosa desde su juventud: la de construir una "característica universal", especie de lenguaje simbólico capaz de expresar sin ambigüedades, todos los pensamientos humanos.
En 1854, se marca un hito en la lógica simbólica, George Boole (1815-1864) publica su "**The Laws of Thought"** que lo convierten en el fundador de ésta. Aún restándole cierto matiz partidario, la frase muy citada del logicista Russell: "la matemática pura fue inventada por Boole", pone de relieve la importancia del escrito de éste, cuya tendencia a la abstracción muestra, por otra parte, la tendencia de los matemáticos ingleses de la época. De ahí que se advirtiera en ese escrito la influencia de George Peacock (1791-1858), el miembro matemático más joven del grupo que fundó en Cambridge (1813), la **"Analytical Society",** con el objetivo de promover el progreso del análisis superior en la isla, atrasada en comparación con el continente. En 1830, Peacock publicó un tratado de álgebra -reeditado en dos volúmenes en 1842-1843- en el que acentúa el carácter formal y simbólico de las reglas del álgebra y por ello se le ha considerado un precursor del llamado "principio de la permanencia de las leyes formales", enunciado por el matemático e historiador de la matemática Hermann Hankel (1839-1873) en 1867.
Como el primer escrito de Boole sobre el tema data de 1847, es posible que haya en él cierta influencia de Peacock. De todos modos el libro de aquél, de 1854, abre nuevos horizontes a la investigación lógica, que se prosigue en dos direcciones: por un lado se hace más independiente de la matemática; y por el otro, en cambio, busca una vinculación cada vez más estrecha con ella hasta confundirse y culminar en las actuales "álgebras de Boole".
La primera dirección culminó en la monumental obra sobre "álgebra de la lógica", en cuatro volúmenes, de Ernest Schröder (1841-1902) aparecida entre 1890 y 1905. Cabe mencionar también a August De Morgan (1806-1871), matemático original, según el cual los dos ojos de las ciencias exactas son la lógica y la matemática. Es autor de una ingeniosa y ya clásica "**Colección de Paradojas"** (póstuma, 1872) y en 1838 introdujo la expresión "inducción matemática" con el sentido corriente de hoy.
En cuanto a la construcción de formalismos lógicos con vistas a su aplicación a los fundamentos de la matemática, se incia hacia 1880 en forma independiente por C.S. Peirce, en Estados Unidos, y por Frege, en Alemania.
Charles Sanders Peirce (1839-1914), hijo de Benjamín, fue un filósofo que se cuenta entre los fundadores del pragmatismo norteamericano y un matemático que se ocupó de lógica matemática, perfeccionó la lógica de Boole y definió nuevos conceptos, como los "valores y tablas de verdad". Por su parte, Friedich Gottlob Frege (1848-1925), en los trabajos que publicó desde 1879 hasta comienzos de este siglo, expuso en forma minuciosa y precisa conceptos cuya importancia se revelará más tarde, tanto en la lógica como en el análisis de los fundamentos de la matemática, pero que en su tiempo, en parte por el complicado e inusitado simbolismo empleado, no ejercieron mayor influencia y sólo se conocieron en este siglo sobre todo a través de la obra de Russell.
Mientras tanto aparecía la contribución de los "logísticos italianos", encabezados por Giuseppe Peano (1858-1932), que cristalizó en los "formularios matemáticos" aparecidos a fines de siglo y que se proponen exponer en un lenguaje puramente simbólico, no sólo la lógica matemática, sino también resultados más importantes de diversas ramas matemáticas.

La erección de los "**Principia Mathematica"** de Russell y Whitehead (1910-1913) en paradigma de la lógica matemática -asumido por colectivos como la escuela polaca de entreguerras o el Círculo de Viena y por personas independientes tan dispares como C.I. Lewis, E.L. Post o H. Scholz- instaura la hegemonía de la línea fregeana de investigación y la marginación relativa del álgebra booleana de la lógica. La conversión de los **"Principia…"** a lo largo de la década de los 20 en una especie de matriz disciplinaria ocurre a pesar de que la ventaja inicial correspondiera a la alternativa algebraica: esta había entrado a principios de siglo en una vía de normalización con las contribuciones de un Schroeder o de un Couturat, y más tarde siguió estudiando a su aire las condiciones de aplicación de las ecuaciones lógicas en diversos dominios estudiados.

Considerando en 1934 el renacer moderno de la lógica, se admiraba Lukasiewicz de que nos encontráramos ante un fenómeno único en su historia: "de repente -escribía-, sin explicación histórica posible, la moderna lógica proposicional surge, casi en un estado de perfecta plenitud, en la aguda mente de Gottlob Frege". Hoy en día seguimos sin una explicación cabal de la madurez lógica lograda por la **"Begriffsschrift"** de Frege en 1879, pero nos hemos habituado a una imagen mucho más complicada del nacimiento de la "lógica moderna": lejos de evocar el parto de Atenea, nacida en la plenitud de sus atributos de la cabeza de Zeus, nos recuerda un proceso lento y laborioso de conformación a través de varias cunas y cabezas. Una de estas cunas es la tradición del "álgebra de la lógica" y algunas de sus cabezas han sido citadas más arriba.

Un símil en esta dirección, lo puede ofrecer la trayectoria de Frege. Un oscuro profesor más bien ignorado por su propia universidad; Russell lo lleva, entre 1903 y 1910-1914, a que su obra sea conocida y conjuntamente, eclipsada por la suya; luego al hilo de los años 30, pasó a erigirse en el creador de la nueva lógica y, entrados los 50, ya era uno de los padres de la filosofía moderna, actualmente sigue siendo objeto de reinterpretaciones y descalificaciones hasta el punto de que un especialista como Christian Thiel cree oportuno preguntarse -no sin cierta ironía-: ¿Hasta donde el papel de Frege en la historia de la lógica y la filosofía será reescrito?

La lógica de principios de siglo (los programas de Boole y de Frege), fue caracterizada por van Heijenoort bajo los lemas de "lógica como cálculo" y de "lógica como lenguaje", respectivamente. Parece ser, hoy día, una especie de directriz interpretativa obligada para dar cuenta de una doble fundación de la "lógica moderna", a través de dos líneas de desarrollo (la algebraico-booleana y la de Frege-Russell) que discurren paralelas hasta confluir -de modo extrañamente "natural", según se ha dicho a veces- en el Gödel de 1930.

Hay constancia de los resultados de Gödel de 1931, por su trascendencia los presentamos:

i) En cualquier sistema bien definido de axiomas y reglas de inferencia, adecuado para a formalización de la teoría elemental de los números, se dan siempre problemas indecibles con tal que el sistema sea consistente; la equivalencia entre la efectividad de los axiomas y reglas y una máquina finita de Turing permite generalizar este resultado a todo procedimiento finitario de decisión.

ii) Ningún sistema de este tipo, presuntamente consistente, podrá establecer con sus propios medios su propia consistencia. De ahí se desprende el corolario que la matemática es incompletable: aunque un sistema de este tipo pueda contener toda la matemática "subjetiva" (proposiciones matemáticas demostrables en el sistema), no podrá contener toda la matemática "objetiva" (proposiciones matemáticas verdaderas).

Gödel extrae de todo esto tres conclusiones filosóficas a saber;

a) Sobre la **objetividad** y **autodeterminación** de la matemática: las proposiciones matemáticas tienen su contenido propio y hacen referencia a un ámbito tan independiente de nosotros como del mundo físico.

b) Sobre su dimensión **óntica**: los objetos y conceptos matemáticos son así mismo entidades

objetivas. Lo único que cabe debatir es su localización: bien en la naturaleza física o psíquica, al modo empirista y psicologista; bien en la mente humana, como supone el conceptualismo aristotélico; o bien en un mundo propio, según prevé el platonismo. Gödel apuesta por la tercera.

Ahora podemos formarnos una idea general del platonismo matemático de Gödel y de la argumentación aducida a su favor. En principio, Gödel entiende que la "matemática" es básicamente teoría de conjuntos y que la "filosofía de la matemática" debe hacer justicia a sus objetos y conceptos y a las relaciones existentes entre ellos, habida cuenta que en el mundo de las verdades matemáticas, en su conjunto trasciende nuestros medios efectivos de control y de prueba. Por otro lado, el platonismo godeliano es una expresión del, digamos, "realismo matemático clásico", a tenor del cual las matemáticas se distinguen por la posesión conjunta de rasgos como los siguientes:

-descubren verdades de un tipo peculiar (e.g. necesarias),

-cuentan con unos métodos más o menos específicos de conocimiento **a priori**,

-tienen un ámbito sustantivo de referencia, poblado por objetos de carácter inmaterial, pero no por ello menos autónomos y autosubsistentes.

Abundando un poco sobre las álgebras inglesas, diremos que éstas no dejan de inspirarse en ciertas importaciones francesas (e.g. Lagrange) y la tradición lógico-algebraica misma de Boole a Schröder, pongamos por caso, no deja de enmarcarse en una corriente más general de interés creciente por el estudio de estructuras matemáticas -no es casualidad que la lógica algebraica haya rendido a fin de cuentas mayores servicios a ese análisis estructural (y no precisamente en Inglaterra, sino en el continente) que al propio análisis lógico-. A su vez, el programa de Frege se mueve en otro marco más general de rigorización del discurso matemático -al que también cabría hallar raíces francesas (e.g Cauchy versus Lagrange), aunque las contribuciones más importantes sean después las que parten de Peano, Hilbert y los **"Principia Mathematica"**.

Quizás más ingenuo de plantear es preguntarse por el "fundador de la lógica moderna". Desde Bochenski en 1956 hasta hoy, no pocos contestarían: "Boole". Muchos más, desde luego, dirían Frege -es opinión que su **"Begriffsschrift"** de 1879, constituye el acta de nacimiento de nuestra "lógica moderna". Otros agregarían: "Peano". Y quizás el modo más directo de volver a poner las cosas en su lugar es considerar que todas estas "fundaciones" se refieren a distintas "lógicas" o a distintas maneras de entender la "lógica matemática"; ninguna de las cuales, por cierto, se identifica cabalmente con la nuestra. Es obvio, por ejemplo, que la lógica de Boole y sus seguidores ingleses difiere de la lógica matemática concebida por Frege o por Peano como una rigorización de la conceptualización y deducción matemática o como una lógica subyacente en ciertas teorías matemáticas. Es igualmente claro que nuestra lógica estándar, como articulación de una teoría (finitaria) de la deducción y una teoría de la cuantificación de primer orden, no emerje hasta la década de 1920. Por lo demás, si uno insiste en fijar el origen en **"Begriffsschrift"**, tendrá que reconocer que el año de su aparición, 1879, es la fecha más importante no de la lógica del siglo XIX, sino de la lógica de -bien entrado- nuestro siglo. Para colmo, las citadas no son las únicas lógicas matemáticas de nuestro inquieto siglo.

En 1959, cuando aparece la primera edición póstuma de las **"Observaciones sobre los fundamentos de la matemática"** de Wittgenstein, Colin Wilson publica **"The Outsider"**, un ensayo sobre algunas figuras prominentes de la segunda mitad del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX, desgarradas por una dolencia íntima de autodesplazamiento, extrañamiento o destierro en este mundo miserable: hay filósofos como Nietzsche, escritores como Herman Hesse, ...Son seres acuciados por problemas existenciales como el sentido de la propia vida, la autenticidad y la pureza personal. Wittgenstein no figura entre esos personajes.

La marginación o el aislamiento de la actividad filosófica de Wittgenstein son naturalmente

relativos, pero no por ello dejan de ser deliberados. El mismo afirma: “El filósofo no es un ciudadano de ninguna comunidad de ideas. Esto es lo que hace de él un filósofo”. Esto, cuando menos, hace porque el pensamiento de éste se muestre irreducible a un “ismo” filosófico pese a los esfuerzos de muchos por llevarlo a algún del atomismo, verificacionismo, convencionalismo, intuicionismo, etc.

Así pues, podríamos hablar del “no-lugar” de Wittgenstein en la historia de la lógica coetánea. No sólo se avendría a sus deseos expresos (sobre todo después de su “**Tractatus Logico-Philosophicus”**) de no contribuir al desarrollo de la propia lógica o de la matemática, sino que éste sería un corolario práctico coherente de su actitud frente a la “nociva irrupción” de la lógica matemática. Aunque Wittgenstein asegura que la filosofía no puede cambiar las prácticas lógicas y matemáticas dadas, la verdad es que sus reparos constituyen una amenaza al menos virtual para el desarrollo de la lógica matemática actual en la medida que declaran que una empresa de este jaez carece de sentido. Esto señala su extemporaneidad. Algunas de sus observaciones, en particular a raíz de su toma de posición sobre el programa de Hilbert y otras líneas de investigación lógica y metamatemática subsiguientes, eran intempestivas.

Por ejemplo, en el Congreso de Standford (1960), A. Heyting pasa revista al curso de los acontecimientos desde la primera confrontación oficial entre el logicismo, el formalismo y el intuicionismo en el congreso de Königsberg (1930). El informe de Heyting coincide en algunos puntos significativos con el madrugador diagnóstico de la situación que Wittegenstein había confiado a M. Schlick (e.g. en la conversación de junio de 1930 en torno a lo que debería decirse en Königsberg), Heyting reconoce que estas tres posturas irreconciliables pueden confluir en un difuso construccionismo. Por lo demás, a estas alturas de los tiempos, ya está claro que la prueba de consistencia no aumenta la fiabilidad de una teoría ni el rendimiento matemático de un sistema. En suma, el desenlace de la crisis parece dar razón a los previsores reparos de Wittgenstein.

Más adelante, en lo que se ha denomina el tercer período de desarrollo de Wittgenstein, éste reacciona críticamente contra el **“Tractatus”**, en especial contra la idea de que la lógica está dada en la naturaleza esencial del lenguaje y representa la estructura lógica del mundo. Su punto de partida es ahora la existencia de sistemas proposicionales, **Satzsysteme**, noción que abre la perspectiva ulterior de los juegos de lenguaje.

Wittgenstein madura su nueva concepción durante la última parte de la década del 30 y la primera mitad de la del 40, cuando aborda las **“Investigaciones filosóficas”** y escribe las **“Observaciones sobre los fundamentos de la matemática”**. Ahora bien, la evolución del pensamiento de Wittgenstein tiene todos los visos de ser una autocrítica autóctona, un ajuste personal de cuentas con la filosofía de la lógica del **“Tractatus”**, al margen de lo que ha ido aconteciendo en la lógica. Tal es así, que cuando Wittgenstein renuncia en las “**Notas”** de 1932 al atomismo y al finitismo del **“Tractatus”**, Hao Wang al comunicárselo a Gödel recibe la siguiente respuesta: “¿Y qué ha estado haciendo Wittgenstein todos estos años?”

La idea de la demostración es un tema central de la filosofía wittgensteiniana de la matemática. Veamos su automarginación en este caso. Según él, lo que necesitan las proposiciones matemáticas es una clarificación de su gramática, no una fundamentación. Esto quiere decir que, por un lado, hemos de apreciar la abigarrada mezcla de técnicas demostrativas en que consiste la matemática y por el otro, hemos de elucidar los rasgos distintivos de todo esto que los matemáticos presentan y aceptan como pruebas. Al margen de motivos técnicos (él remite a ejemplos combinatorios de la aritmética elemental - efectivamente decidibles) y aunque la idea de una especie de **Beweissysteme**, sistemas de demostraciones, guarda notables analogías con ciertos desarrollos actuales de la demostración en el campo de la deducción natural; son más bien presunciones filosóficas las que sustentan esta posición.

Como colofón a esta descripción del desplazamiento de Wittgenstein está el hecho que las

sugerencias lógicas y matemáticas de éste de los años 30 y 40 no sólo no encuentren un lugar en la lógica y en la matemática de su entorno sino que tampoco lleguen a ser cabalmente congruentes con su tiempo: las hay extemporáneas por anticipación (como hemos visto) y las hay por retraso (el punto de vista crítico de los **Satzsysteme** o de los **Beweissteme** cobre su mayor interés al aplicarlo a situaciones como las geometrías euclidianas y no euclidianas).
En conclusión, la contribución de Wittgenstein a la lógica contemporánea ha tomado deliberadamente el rumbo de una elucidación filosófica más pendiente de su propia evolución conceptual que del desarrollo mismo de la lógica. De ahí que esta contribución haya resultado más virtual que efectiva, más notable si acaso como objeto de mención que como objeto de uso. Pero no deja de ser sintomático que alguien tan celoso de confesar sus deudas con Wittgenstein como Carnap, las haya adquirido en realidad reinterpretando el **"Tractatus"** a la luz de otros, de Hilbert y de Gödel por ejemplo.
Otros detalles relacionados con estas temáticas, serán tratados en la próxima conferencia, amén de que utilizaremos muchos de los aquí expuestos.

CUESTIONARIO

1. Presente algunos de los errores más comunes, cometidos en los siguientes tipos de razonamiento:
-deductivo,
-inductivo, y
-por analogía.

2. Enuncie y demuestre los teoremas de Cantor y Schroeder-Berstein.

3. Demuestre que $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

4. Demuestre que los números reales del intervalo [0,1] no son numerables.

5. Demuestre que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros, es numerable.

6. Demuestre que el axioma de elección es equivalente al postulado de Zermelo.

7. Demuestre el teorema de la buena ordenación.

8. Demostrar que si V es un espacio vectorial, V tiene una base. **Sugerencia**: Aplique el Lema de Zorn.

9. Decir cuál de las siguientes afirmaciones, sobre los números cardinales es falsa, y cuál es verdadera, justifique.
a) $\aleph_0 + \aleph_a = \aleph_a$, b) $\aleph_a + \aleph_b = \aleph_{a+b}$.

10. Definiendo una relación de orden entre los conjuntos por:

$$\text{card } X \leq \text{card } Y \Leftrightarrow f: X \rightarrow Y \text{ inyectiva},$$

presente algunas propiedades que se derivan de la anterior relación.

Conferencia 15. Logicismo, Formalismo e Intuicionismo.

"Las matemáticas en su forma final aparecen como puramente deductivas y solo contienen demostraciones, sin embargo en su proceso de elaboración, se parecen a cualquier otro conocimiento humano"

George Polya

LA CUESTIÓN DE LOS FUNDAMENTOS.

Veamos un hecho curioso que ocurre con una de las cuestiones sometidas al juicio de Sancho Panza, como gobernador de la ínsula de Barataria (**"Don Quijote"**, Parte II, Cap. LI) que resumimos: El dueño de un río había impuesto, como condición, a quien quisiera pasar un puente que lo cruzaba, la siguiente ley: *"jurar primero a dónde y a qué va, y si jura verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra"*. Ocurrió entonces que un hombre, que sin dudas conocía lógica moderna, que no iba a otra cosa que *"a morir en aquella horca"*, con lo cual los encargados del cruce del puente quedaron desconcertados, pues si lo dejaban pasar libremente, el hombre había mentido y debía morir en la horca, pero si era ahorcado había dicho verdad y debía dejársele pasar libremente. Consultado el buen Sancho, que no entiende de sutilezas lógicas, propone una imposible solución salomónica: *"que de este hombre aquella parte que dijo verdad la dejen pasar y la que dijo mentira la ahorquen"*; más luego, cediendo a razones no lógicas pero sí humanitarias, resuelve que lo dejen pasar libremente *"pues siempre es alabado más hacer el bien que el mal"*.

En todas estas paradojas los conceptos lógicos o matemáticos están encubiertos por palabras. No ocurre lo mismo con las que dieron origen a la "crisis": la de Cesare Burali-Forti (1861-1931) que en 1897 observó que el conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales es contradictorio; así como es una contradictorio el "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos" (paradoja de Russell, de 1905).

Las cuestiones que suscitaron estas paradojas desataron la polémica (no sólo desde el punto de vista de la metodología matemática, sino también del enfoque filosófico) que culminó hacia 1930, en la que se perfilaron tres tendencias: logicista, formalista e intuicionista.

El surgimiento de la crisis en los fundamentos teórico-conjuntistas de la matemática reflejada en el hallazgo de las antinomias, como la anterior y que fueron estudiadas en la conferencia anterior, llevó a la convicción de que la teoría de conjuntos en su forma original, la cual frecuentemente es llamada teoría ingenua, no puede servir de fundamento a las ciencias matemáticas. Ante esta crisis se tomaron distintas posiciones:

1. Ignorar las paradojas, considerarlas como construcciones artificiosas y continuar elaborando la teoría cantoriana de conjuntos en sus aspectos no paradójicos.
2. Restringir la existencia de conjuntos "paradójicos" a través de sistemas axiomáticos más consistentes.
3. En los límites cantorianos de la consideración del infinito actual, mejorar su fundamentación a través de razonamientos con elementos finitos.
4. Criticando las concepciones de la abstracción del infinito actual y las leyes de la lógica clásica, formular un nuevo programa de fundamentación con la correspondiente nueva lógica.

La primera posición sigue siendo de una ingenuidad tal que no merece su consideración filosófica -aunque en la práctica puede resultar efectiva.

La segunda posición fue mantenida por muchos especialistas de los fundamentos de la matemática, quienes, como Zermelo y Gödel, a medida que iban perfeccionando el sistema de

axiomas, iban encontrando nuevas contradicciones. Dentro de esta posición podemos incluir la tendencia llamada **logicista**.

El logicismo, cuyo principal representante fue Russell (1872-1969) y su Biblia los **"Principia Mathematica"**, debió su nombre al hecho de pretender que los conocimientos básicos de la matemática podían definirse mediante recursos puramente lógicos (lo que en verdad ya había sido planteada por Frege), con lo cual la matemática perdía su autonomía para convertirse en una parte de la lógica o, en el mejor de los casos, constituía con la lógica una única y misma disciplina.

Analizando la estructura lógica de las paradojas, Bertrand Russell y Alfred North Whitehead (1861-1947) plantearon que la solución para eliminar las paradojas era admitir un llamado **principio del círculo vicioso**: *"Un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos del conjunto, no puede pertenecer a dicho conjunto"*, lo que obligó a desarrollar una "teoría de tipos", escalonando las proposiciones en una serie jerárquica, y a recurrir a un discutible "axioma de reducibilidad".

La polémica acerca de los fundamentos de la matemática no dejó de ser beneficiosa para el logicismo, pues en la discusión que provocó se hicieron notables progresos en su propio campo: la lógica matemática. Por otra parte, esta tesis logró un aliado, en cierto mundo vigoroso e importante en su tiempo (nos referimos a los años vecinos del 1930), con la adhesión del denominado "Círculo de Viena", cuyas investigaciones dieron lugar a algunas concepciones nuevas de la ciencia y la filosofía, así como el papel que en ella desempeñan la lógica y la matemática.

La doctrina del "Círculo de Viena", bautizada con el nombre un tanto paradójico de "empirismo lógico" o "positivismo lógico", muestra en sus notas esenciales su interés por la matemática. Dentro de un carácter algo fluido y variable, estas notas se inclinan hacia dos vertientes distintas: por un lado, tendencia antimetafísica así como fuerte empirismo e inclinación hacia la ciencia natural; por el otro, intervención metódica de la lógica y matematización de toda la ciencia.

El grupo tuvo su origen en el seminario dirigido por Moritz Shlick (1882-1936), en 1923, en Viena, en un ambiente propicio para su futura orientación, y tuvo dos centros geográficos principales en Viena y en Praga, ciudades en que fue profesor el epistemólogo Ernst Mach (1838-1916) considerado uno de los precursores de la escuela. Cuando en 1926, se incorpora el grupo Rudolf Carnap (1891-1970), que aporta el instrumento de la lógica moderna y el análisis científico del lenguaje, el círculo se asienta en terreno firme. En 1929 y 1938 aparece la revista **"Erkenntnis"** que fue su órgano europeo de difusión, y en 1929 se inician los congresos en que se exponen, difunden y discuten sus concepciones.

Y justo en su primer congreso (Praga, 1929) se ocupó en especial de los fundamentos de la matemática, objeto de la polémica entonces en pleno desarrollo. Allí sus voceros más autorizados expusieron los argumentos de las tres tendencias en pugna. El grupo se inclinó hacia la tendencia logicista, pero es de advertir que las concepciones que los empiristas lógicos mantenían acerca de la lógica provenían principalmente de la obra de Ludwig Wittgenstein (1839-1951): **"Tractatus logico-philosophicus"**, de 1922, que convertía la lógica en una vasta tautología que nada decía acerca del mundo y sólo expresaba la equivalencia entre las proposiciones. Con la posición adoptada por los empiristas lógicos, la matemática, encerrada en las mallas de la lógica, se convierte también en una tautología, interpretación que va más allá del logicismo mismo, el cual, dentro de cierta atmósfera empírica, no está totalmente desvinculado con la realidad objetiva. Con todo el Círculo de Viena consideró siempre a Russell como uno de sus precursores, y Russell mismo, sin adoptar las posiciones extremas del positivismo lógico, no dejó de declarar que sentía la mayor simpatía por la escuela vienesa.

Volviendo al logicismo, si bien es cierto que con su "teoría de tipos" no ha asomado ninguna nueva paradoja, nada asegura que no aparezca en el futuro. Cabe recordar la observación, tantas veces citada por Poincaré con motivo de la compatibilidad de un sistema de axiomas: *"No basta, para preservarlo de los lobos, encerrar el rebaño en el redil, hay que estar seguros además de que no quedó dentro lobo alguno"*.

Esto nos lleva al centro de las reflexiones que distinguen la otra tendencia que terció en la cuestión de los fundamentos: el formalismo.

La tercera posición de las destacadas al comienzo, **el formalismo**, cuyo adalid fue Hilbert, al acentuar el carácter formal de la Matemática, que constituye una nota esencial de esta ciencia, fue por ello la tendencia más tradicional y conservadora, y también la más afín a los matemáticos de profesión. Puede verse su punto de partida en los **"Grundlagen der Mathematik"** de Hilbert (1899) (reeditados más adelante en colaboración con su discípulo Paul Bernays), que ofrecieron el modelo de una disciplina matemática construida según el método axiomático, método que no sólo era perfectamente adecuado al carácter formal de la matemática, sino que eliminaba de los fundamentos matemáticos la intuición, con sus hábitos mentales y sus moldes tradicionales.

La emergencia de las paradojas implícitas en la teoría de conjuntos puso en evidencia que tales hábitos mentales afectaban también al proceso lógico mismo; de ahí la necesidad de axiomatizar esa teoría, tarea en que se empeñaron los formalistas. Y así como en los **"Grundlagen"** los puntos, rectas y planos podían ser objetos cualesquiera, en la teoría axiomática de la teoría de conjuntos no interesa que cosas son los conjuntos ni qué son sus relaciones: sólo importa el encadenamiento de tales relaciones prescindiendo el significado concreto que se pueda atribuir tanto a ellas como a los elementos que relacionan.

En definitiva, el lema del formalismo es: "Al principio fue el signo", lo que equivale a concebir la matemática como un variado juego de signos y de símbolos, de carácter formal y sin contenido empírico alguno. Estas "formas vacías" obedecen a una serie de reglas de estructura y de deducción que, en último análisis, descansan en un sistema de axiomas.

Un sistema formal así concebido depende única y exclusivamente de su validez lógica, de manera que el problema central que plantea el formalismo es el de no probar la no-contradicción del grupo de axiomas básico de cada sistema formal. Tal es la tarea que se impusieron Hilbert y su escuela, creando una disciplina: la **metamatemática**, que abarca una **teoría de la demostración**. Esta teoría, según Bourbaki, no integra el cuerpo mismo de la matemática, a la cual, como a la lógica, la metamatemática puede proporcionar algunos elementos, sino que es una disciplina autónoma que ha dado ya muestras de su fecundidad, bien mediante conceptos importantes como el de categoricidad de una teoría, bien en el planteo de nuevos problemas como el de la "decisión" y sobre todo mediante uno de sus resultados más notables, el ya clásico teorema de Kurt Gödel (1906-1978) de 1931, según el cual no todo es demostrable en un sistema formal. A pesar de esto, se han obtenido resultados valiosos en el cumplimiento del programa elaborado por Hilbert, cuya parte realizable se ha dado en llamar "teoría de la demostración": así logró G. Gentsen en 1936, la demostración de la compatibilidad sintáctica de un fragmento de la teoría elemental de los números con medios aproximadamente "finitos" y S.P. Novikov, un resultado aún más trascendente en 1941, pero con medios auxiliares más fuertes (véase P. Schreiber-**"Grundlagen der Mathematik"**, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1977, pág. 222).

El procedimiento de fundamentación de una teoría matemática tenía, de acuerdo a Hilbert dos etapas:

1. Formalización de la teoría, o sea, representación de la misma como una serie de fórmulas, símbolos, unidos por constantes lógicas. Para esto es imprescindible escribir en símbolos lógicos sus axiomas y formular explícitamente las reglas de la lógica permisibles.
2. Demostración de la no-contradicción de este sistema de axiomas junto con sus reglas lógicas partiendo sólo de su estructura formal, es decir, sobre el nivel puramente sintáctico.

En cuanto al problema central, el de la no-contradicción, entiende Bourbaki, lo mismo que Jacques Hadamard (1863-1963) que, en matemática, se trata más bien de comprobar tal ausencia; en el caso de no demostrarse. Alonso Church (n.1903) demostró que para una gran clase de sistemas formales no existen procedimientos de decisión, lo que constituye una segunda demostración del teorema de Gödel relativo a la existencia de expresiones individuales en estos sistemas. Desde el punto de vista filosófico los formalistas no se interesan manifiestamente por el contenido de verdad o por el carácter objetivo de los teoremas que deducen, siempre y cuando esto no se haya realizado en una forma libre de contradicción.

Al hablar del formalismo no podemos menos que aludir al juego. En efecto, el juego y, en especial, el ajedrez, ha sido la comparación obligada a que ha conducido esta doctrina; pero si como comparación es aceptable, no lo es cuando se torna equivalencia y la matemática, al considerar sin mayor análisis los fundamentos del formalismo, se convierte en un mero juego. En verdad, al traer a primer plano las reglas operatorias y dejar en la sombra toda interpretación concreta de los objetos sometidos a esas reglas, el formalismo apunta en especial hacia la libertad absoluta en la elección de esa interpretación y a la eliminación de todo vínculo de tipo platónico que mantenga atadas las mentalidades matemáticas a determinados "objetos", por ideales que sean.

Se han esgrimido numerosos argumentos en contra de esta pretendida equivalencia entre la matemática y el juego. Por razones, diríamos profesionales, podríamos agregar que basta comparar la historia de las matemáticas con la del juego, entendidos ambos como actividades humanas, para desvirtuar tal equivalencia. Por lo demás, el historiador Johan Huizinga (1872-1945), que hizo del juego una manifestación cultural importante en su **Homo Ludens**, de 1939, al aludir a la lógica como juego y traer a colación la consabida comparación con el ajedrez, deja la cuestión indecisa. "*Quede la cuestión para otros*", dice, aunque muestra

acertadamente el carácter lúdico de los sofismas y de las polémicas; pero es claro que la matemática, y la ciencia en general, es algo más que sofismas y torneos más o menos caballerescos.

En definitiva, no creemos que la tendencia del hombre hacia el saber, reflejada en la frase del viejo, aunque siempre vivo Leonardo: *"naturalmente li omini boni desiderano sapere"*, pueda confundirse con la tendencia del hombre al juego.

El logicismo y el formalismo fueron tendencias conservadoras en el sentido que trataron de mantener intacto el cuerpo matemático ya construido. Al referirse en especial a la teoría de conjuntos, dirá Hilbert en 1930: *"Del paraíso que Cantor creó para nosotros, nada podrá expulsarnos"*. No ocurre lo mismo con el **intuicionismo** que, aún nacido en el seno de la matemática misma, se opone a la matemática clásica en una actitud francamente revolucionaria, radical. Aunque no en esta actitud, pero sí en algunos conceptos, el intuicionismo cuenta entre sus precursores a Leopold Kronecker (1823-1891), como ya sabemos decisivo adversario de Cantor, y para quien toda la matemática debía fundarse sobre el número natural, único tipo de número cuya existencia estaba asegurada. Pero mientras que para los intuicionistas del siglo XX tal existencia se funda sobre una "intuición básica", para Kronecker lo era por un acto de fe. Es muy conocida su frase: *"El buen Dios creó el número natural, el resto es obra humana"*.

También Poincaré, por otras razones, es considerado precursor del intuicionismo, aunque es Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) el verdadero fundador de la escuela intuicionista y quien le ha impreso su forma radical planteando la cuestión de los fundamentos de la matemática en términos distintos de aquellos en que se fundan las otras tendencias, por otra parte, deben mencionarse los nombres de Henri Lebesgue (1875-1941), Hermann Weyl (1885-1955) y Arend Heyting (n.1898) entre otros.

El intuicionismo debe su nombre al carácter intuitivo inmediato que asigna al conocimiento matemático, cuya verdad se comprueba mediante una experiencia sui generis, pero tal intuición originaria y primigenia no va más allá de la sucesión de los números naturales, de modo que, dando a este término el importante sentido técnico que le asigna el intuicionismo. En efecto, para esta escuela la existencia matemática ya no equivale a una contradicción, como en el formalismo, sino que significa constructividad.

Además, para el intuicionismo la matemática ya no es un ser, algo hecho, sino una "actividad constructiva del espíritu" o "el ingrediente exacto de nuestro pensamiento", frases harto sospechosas para más de un científico y que muestran, además, una buena dosis de psicología o, como dice Hadamard, hacen intervenir *"las propiedades de nuestro cerebro"*. Por otra parte, las relaciones de la matemática con la lógica se presentan bajo un aspecto totalmente nuevo. Según Brouwer, la lógica clásica es la traducción, en la sintaxis del lenguaje, de la experiencia general sobre los sistemas finitos, de ahí que **a priori** esa lógica deje de ser válida en la matemática que estudia conjuntos infinitos. De este hecho resulta como consecuencia que el principio lógico del tercero excluido deja de ser válido en la matemática, no obstante, los matemáticos intuicionistas aceptan el principio de la contradicción excluida. Si frente a un conjunto finito de elementos se enuncia una proposición que afirma que estos elementos

tienen tal propiedad o no la tienen, esa proposición es verdadera, pues una experiencia constructiva permite examinar uno por uno todos los elementos del conjunto con respecto a dicha proposición y confirmar el enunciado. Pero frente a un enunciado que se refiere a una propiedad de los elementos de un conjunto infinito, por ejemplo la conjetura de Christian Goldbach (1690-1764) ya aludida, la cosa cambia pues, según los intuicionistas, a las dos posibilidades enunciadas en dicha conjetura cabe agregar una tercera: que mientras no se demuestre uno de los dos miembros de ese juicio y aún suponiendo que no se demuestre que el problema es insoluble, no es lícito afirmar que uno de los dos casos es el verdadero.

En una palabra, la lógica intuicionista no es ya bivalente, como la lógica clásica, sino trivalente, engrosando así el número de lógicas polivalentes, cuyo estudio constituye uno de los aportes de este siglo. Además, el intuicionismo ha ofrecido una nueva solución al problema de las relaciones entre la matemática y la lógica, que completa el cuadro ofrecido por las otras dos concepciones. Ya no es la lógica una disciplina autónoma, como quiere la concepción corriente, ni posee con la matemática una parte en común, como admite el formalismo, sino que, por el contrario, la lógica intuicionista es una parte de la matemática, ya que es la consecuencia proveniente de cristalizar y traducir en reglas fijas, aquella "actividad constructiva del espíritu", que constituye la peculiar experiencia matemática.

Los resultados del intuicionismo fueron desoladores en el sentido que la rigurosa aplicación de su concepción ha invalidado gran parte de la matemática clásica, ya que en ésta abundan las preposiciones no constructivas en el sentido intuicionista. De ahí la crítica de que es objeto por parte de los matemáticos que no se resignan a mutilar su ciencia y convertirla en un muñón informe, alegando que toda esa parte de la matemática ya hecha y que el intuicionismo invalida, jamás ha mostrado contradicción alguna. A esto los intuicionistas pueden replicar, y han replicado, diciendo que el hecho de no aparecer la prueba de un delito, no significa que el delito no se haya perpetrado.

Pero en verdad, cabe interpretar el resultado de la crítica del intuicionismo, no en el sentido de invalidar parte de la matemática clásica, sino en el de limitar en ella ciertas zonas que son susceptibles de ser estudiadas mediante nuevos recursos que hasta ahora no se habían concebido. Puede agregarse, al respecto, la frase final de Bourbaki, nada intuicionista por cierto, al referirse a esta tendencia: *"La escuela intuicionista, cuyo recuerdo sin duda no habrá de subsistir sino a título de curiosidad histórica, mantendrá por lo menos el mérito de haber obligado a sus adversarios, vale decir en definitiva a la inmensa mayoría de los matemáticos, a precisar sus posiciones y a adquirir más claramente conciencia de las razones (para unos de orden lógico, para otros sentimental) de su confianza en la matemática"*.

Quizás puede extenderse esta expresión a todas las tendencias y reconocer como saludable resultado de la "crisis de los fundamentos" esa toma de conciencia y ver en esa crisis, que suscitó tal despliegue de nuevos horizontes y perspectivas una prueba más de las palabras de Cantor: *"La esencia de la matemática reside en su libertad"*.

Otro efecto saludable puede reconocérsele al intuicionismo, pues es después de la atenuación y declinación de la polémica de los fundamentos de la matemática que ésta adquiere los rasgos actuales: unificación y vinculación a través de las estructuras de temas muy diferentes que en la matemática clásica constituían capítulos separados y una armonía cada vez más estrecha entre lógica, álgebra y método axiomático.

Para terminar este análisis señalaremos que una de las variantes que surgieron como superación de los errores gnoseológicos detectados fue la de la escuela constructivista soviética. Esta se desarrolla fundamentalmente en Moscú bajo el impulso de las ideas de Lusin (1883-1950) creador de la escuela de teoría de funciones moscovitas que había estudiado en Francia con Lebesgue y Emil Borel, principales exponentes de una corriente empirista conocida como "efectivismo".

Posteriormente A.A. Markov (1903-1980) y otros matemáticos soviéticos van a exponer sistemáticamente todo un programa constructivista el cual retoma algunos de los planteamientos de la escuela intuicionista y desecha aquellos principios relacionados con los conceptos de la "preintuición" y la "claridad intuitiva". Los principios de existencia también están basados en la realización potencial constructiva como método de formación de los objetos matemáticos. Sin embargo, la efectividad de los procesos de construcción de estos objetos y la efectividad de los procesos de verificación de los razonamientos sobre estos objetos se entiende basándose en la definición exacta de un algoritmo. Además, a diferencia de los intuicionistas, los constructivistas no van a absolutizar la verdad constructiva. Es decir, no se plantea la cuestión de que la matemática debe separarse de la matemática sino que esta sólo no aparece en el objeto de la matemática constructiva y por eso el problema de su fundamentación no es objetivo de su programa.

Para la Cibernética Matemática, el programa constructivista tiene gran valor. Así, también otras ramas que han desarrollado sus teorías constructivistas han recibido un impulso considerable permitiendo su tratamiento algorítmico computacional.

Quisiéramos hacer algunas conclusiones generales de lo tratado en este punto y la conferencia anterior.

1. Las primeras ideas de la teoría cantoriana de conjuntos, surgen en problemas prácticos del Análisis Infinitesimal, reflejando cómo las leyes generales del desarrollo son reflejadas en la esencia misma del proceso de desarrollo de la matemática.
2. En esta crisis en los fundamentos de la matemática, al igual que en las anteriores, encontramos la naturaleza del infinito matemático y de la consideración de la abstracción del infinito actual.
3. Las paradojas demuestran que la teoría cantoriana de conjuntos no puede servir de fundamento efectivo de toda la matemática clásica.
4. Los cuatro programas más destacados de la primera mitad de este siglo, con los cuales se pretendió salir de la crisis son: el programa axiomático-conjuntista, el programa logicista, el programa formalista y el programa intuicionista. Todos están lastrados de una fuerte dosis de neopositivismo, el cual, a su vez, recibió una influencia determinante de los trabajos sobre los fundamentos de la matemática.
5. Las posteriores investigaciones lógico-matemáticas han logrado probar, por una parte, la inconsistencia de estos programas de corte neopositivistas y por otra, la posibilidad de construir sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos, no sólo diferentes, sino además, incompatibles unos con otros, baste a título de ejemplo el hecho que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son independientes de los demás axiomas clásicos de la teoría de conjuntos. Esto quiere decir, que si tomamos la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática, existirán tantas matemáticas diferentes como teorías axiomáticas de conjunto se construyan.
6. Aunque esta situación pueda resultar idéntica a la ocasionada por los descubrimientos de las Geometrías No-Euclidianas, existen, desde luego, analogías pero también diferencias. Entre tales diferencias se puede señalar: a) en la geometría existe una teoría general que incluye todas las demás, esto es, la teoría de Riemann y hasta el momento no se conoce que pueda existir tal teoría en el caso conjuntista, b) los sistemas axiomáticos representan sistemas incompletos, c) no existe hasta el momento demostración de la consistencia de los sistemas de axiomas de la teoría de conjuntos; ch) la concepción intuitiva de la teoría de conjuntos es demasiado imprecisa, indeterminada.
7. El desarrollo de estos programas permitió formular los fundamentos de la matemática como una ciencia. Los mismos teoremas de Gödel pudieron aparecer gracias a la enorme cultura lógica que se logró en el mismo proceso de su formación.

8. Existe un aspecto sobre el que quiero retornar y es el hecho de la influencia de las paradojas de la teoría de conjuntos. Es comúnmente aceptado que las paradojas provocaron la crisis y el reexámen de los fundamentos de la matemática que tuvieron lugar. Esta interpretación estándar parece razonable, a la vez aparentemente es consistente y coherente cronológicamente. Sin embargo, el historiador mexicano A. Garciadiego ha criticado esto de tres maneras distintas. Primero, ha argumentado que las paradojas originalmente no fueron resultado de la crítica a la teoría de los números transfinitos. Segundo, y tal vez la más importante, mostró que fue Russell quien primero descubrió la llamada "Paradoja de Cantor", su propia contradicción de la clase de todas las clases que no son contenidas a sí mismas, y también dio los primeros pasos hacia el descubrimiento de la paradoja de Burali-Forti. Todas estas paradojas están contenidas en la obra de Russell **"The Principles of Mathematics"**, publicada por primera vez en mayo de 1903. Tercero, siguiendo la dicotomía propuesta por F.P. Ramsey (**"The foundations of mathematics"**, Proc. of the London Math. Soc.25, 1926, 338-394), argumentó que las paradojas semánticas no fueron un producto de las paradojas lógicas.

En este sentido, queremos presentar un pequeño esbozo del desarrollo de las tres escuelas presentadas.

En el período 1893-1898, Russell estuvo muy influido ("indoctrinado" según el propio Russell) por algunos de los neohegelianos en Cambridge. Previamente había tenido influencias de John S. Mill e Inmanuel Kant, pero Mill no proporcionó, incluso al comienzo, soluciones a las preguntas de Russell concernientes a los principios de la aritmética y la geometría, bajo esta influencia se encontró con los números transfinitos de Cantor. Inicialmente consideró a Cantor como un charlatán. Posteriormente, Russell rechazó el neohegelianismo y desarrolló un entendimiento completamente diferente de la naturaleza ontológica de los objetos matemáticos. El Congreso de 1900, Peano, etc. fueron etapas en su desarrollo.

"Principia Mathematica" fue la continuación natural del trabajo previo que Russell y Whitehead habían llevado a cabo separadamente. Aproximadamente en septiembre de 1902, una vez que Whitehead leyó algunas de las galeras de **"The Principles of Mathematics"**, se dio cuenta que su proyecto (un segundo volumen de su obra **"A Treatise of Universal Algebra With Applications"**) y el de Russell (un segundo volumen de **"The Principles..."**) tenían mucho en común, por lo cual decidieron reunir esfuerzos y producir una sola obra.

Russell descubrió las paradojas en el proceso de escritura de "**The Principles..."**, o sea, no empezó su investigación debido a las contradicciones, más bien, su interés en las paradojas fue estimulado por su investigación sobre los principios de la matemática. Por otra parte, Russell fortaleció sus tesis logicistas, después de leer los artículos de Cantor en 1895 y 1897. La mayoría de las alusiones a las tesis logicistas en las primeras secciones de **"The Principles..."** (partes III, IV y V) parecen haber sido añadidas al manuscrito original.

Aún antes de que Russell publicara esta obra, ya había diseminado su tesis logicista en al menos tres artículos diferentes. Dos de estos ensayos fueron impresos en la **"Rivista di Matematica"** de Peano (Vol.7 y 8, 1901 y 1902). El otro artículo estaba contenido en una revista popular llamada **"The International Monthly"** (Vol.4, 1901), con claros indicios de las paradojas y referencias explícitas a sus tesis.

Frege, que también había estado trabajando sobre los fundamentos lógicos de la aritmética, tuvo un compromiso intelectual diferente a Russell al conocer las paradojas. El primero, que estaba más cercano del final de su carrera matemática y filosófica, decidió abandonar el estudio de los fundamentos de la aritmética, Russell, en el umbral de un brillante futuro en la filosofía de las matemáticas, pronto llegó a convencerse -probablemente a través del propio Frege- de la riqueza intelectual de esta área de investigación.

En el caso de la escuela formalista, es más difícil determinar la influencia de las paradojas en el origen de esta. Antes que nada, según lo señaló Russell en retrospectiva, la interpretación formalista no era nueva a la vuelta del siglo XX. En segundo lugar, Hilbert quien llegó a ser conocido como el líder de esta escuela, publicó algunos trabajos que explícitamente contienen algunas de las premisas del formalismo, entre 1899 y 1904, aunque los principios básicos del programa no fueron desarrollados sistemáticamente hasta finales de los años 10 y principios de los 20.

El interés de Hilbert en los fundamentos de las matemáticas no surgió súbitamente en 1897, cuando supo de las paradojas; tampoco en 1899 con la publicación de su libro sobre los fundamentos de la geometría. Según Blumenthal, Hilbert había afirmado hacia 1891 que *"es posible reemplazar en todos los argumentos geométricos las palabras punto, línea y plano por mesa, silla y pocillo"*.

Más aún, en sus 23 problemas de 1900, Hilbert no incluye el estudio de las paradojas, es posible que haya subestimado su importancia, sin embargo, el segundo estaba relacionado con la consistencia de los axiomas aritméticos.

En agosto de 1904, en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticos Hilbert pronunció una conferencia sobre cuestiones que pudo haber pensado desde 1891. Sin embargo, la influencia de las paradojas en los discípulos de Hilbert es clara (Zermelo, Fraenkel, etc.).

A fines de 1906 o principios de 1907, Brouwer defendió su disertación doctoral titulada **"Over de Grondslagen der Wiskunde"** ("Sobre los fundamentos de las Matemáticas"), donde expresó originalmente algunas de sus ideas concernientes a los principios de las matemáticas: un conjunto de ideas que posteriormente sería percibido como la parte central de una teoría matemática llamada intuicionismo. Desdichadamente, tal vez debido a que inicialmente sus ideas fueron presentadas en holandés, los orígenes de su pensamiento son oscuros, para quienes estén interesados en el origen y metamorfosis de las ideas de Brouwer, existen sólo unas pocas indicaciones con que trabajar. De acuerdo con Stight, una de estas pistas fue la proximidad entre la publicación de **"Life, Art and Mysticism"** (1905) y **"On the Foundations of Mathematics"** (1907). Esta disertación es tan austera intelectualmente que uno debe basarse en un tratado no matemático para comprender algunas de las afirmaciones matemáticas de Brouwer, se ha encontrado además, una relación cercana entre bosquejos previos de la disertación y tendencias solipsistas y místicas.

La filosofía de Kant juega un papel fundamental en el intuicionismo de Brouwer y éste creía que solamente necesitaba actualizar sus opiniones. Una de las primeras tareas de Brouwer fue establecer la naturaleza de las proposiciones matemáticas, mediante la cual afirman que las matemáticas son una manifestación básica del intelecto, hecha sin referencia al mundo real que las rodea, una creación libre del espíritu humano.

Contrariamente a lo que Russell, Peano, Cantor y otros han sugerido, los números naturales no podrían ser deducidos lógicamente, ni podría postularse su existencia ni se podrían construir sobre el concepto de conjunto. En términos brouwerianos, los números cardinales finitos (números naturales) se construyen inmediatamente en la mente del matemático y su valor y certidumbre, son apoyados por la evidencia de la intuición.

Pero retornemos ahora a la cuestión de si las paradojas tuvieron influencia importante en la formulación del intuicionismo de Brouwer. Debe tomarse en cuenta que no porque éste las mencione en su tesis, signifique que éstas fueron su motivación original. De acuerdo con Brouwer, las inconsistencias estaban basadas en un principio matemático injustificado que debía ser abandonado. Las paradojas tenían sus raíces en la aceptación de cantidades infinitas genuinas (actuales) y, en opinión de Brouwer, no había lugar para estos elementos en las matemáticas. Posteriormente, él indicaría que estos argumentos contradictorios (la paradoja de Russell y la de Burali-Forti en particular) no existían matemáticamente. Sin embargo, las

dificultades subyacentes a las paradojas eran mucho más profundas y requerían una reformulación seria.
Por último, queríamos abundar sobre la disputa entre estas escuelas. La primera polémica tuvo lugar inmediatamente después que Russell publicó su ensayo sobre los fundamentos de la geometría -escrito en 1895, revisado en 1896 y publicado en 1897. La **"Revue de Métaphysique et de Morale"** fue el vehículo de esa polémica y la disputa se centró alrededor de la naturaleza de los axiomas geométricos. La segunda polémica tuvo lugar entre 1905 y 1906 (aproximadamente), en las páginas de la misma revista francesa. Esta vez el foco de la disputa fue la tesis logicista de Russell y Poincaré usó todo su conocimiento y discernimiento para desacreditar sarcásticamente la tesis de Russell y el **"Mengenlehre"** de Cantor. En esta ocasión las paradojas jugaron un papel fundamental.
Sin embargo, Russell no consideró el programa formalista como serio (filosóficamente hablando) y sólo le dedicó pocas referencias. Un poco más adelante, con **"The William James Lectures"** (publicadas en 1940 bajo el título de **"An Inquiry into Meaning and Truth"**), Russell analiza el tema del tercero excluido, sin embargo en esa época Russell no tenía la intención de involucrarse en una disputa con Brouwer y aseveró públicamente que no había una refutación fácil a los principios del intuicionismo.
Hilbert y Brouwer, por otro lado, escribieron ensayos retando al acercamiento logicista. Sin embargo, el matemático británico en general no respondió.
Contrario al caso de Russell, las fuentes indican que Hilbert y Brouwer estuvieron involucrados en una polémica no tan encarnizada y sangrienta como algunos pretenden presentar. Por una parte, el intuicionismo en esa época estaba subdesarrollado, por la otra, Hilbert tuvo un alejamiento de los fundamentos hasta 1917, algunos afirman que la fascinación de Weyl en el intuicionismo perturbó a Hilbert. Pero por la época que Hilbert estuvo listo para presentar una fuerte defensa de sus ideas, Brouwer estaba listo para negociar. En 1927, Brouwer escribió una breve comunicación donde discutía algunas "intuiciones", mostrando cómo los formalistas y los intuicionistas podían trabajar juntos (por ejemplo, las metamatemáticas de Hilbert).
Sin embargo, pronto aparecieron otros artículos (Black, Borel, Fraenkel, Wavre entre otros) postulando la existencia de una crisis en las matemáticas y el papel jugado por las paradojas. ¿Por qué esta actitud y otras relacionadas? No existe una respuesta satisfactoria aún.

EL MÉTODO AXIOMÁTICO. HILBERT.

Una consecuencia del análisis lógico de los fundamentos de la matemática fue la crítica y consiguiente actualización del método axiomático. Este método, que Euclides instauró en la geometría: a) denuncia previamente los postulados y nociones comunes de que se parte, sin demostración; y b) deduce por un proceso lógico los teoremas matemáticos a partir de tales postulados y nociones comunes. Si la creación de las geometrías no euclidianas había obligado a revisar los fundamentos de la geometría de Euclides y a poner de manifiesto sus debilidades lógicas, ahora, en el último tercio del siglo XIX, ya no se trataba sólo de la geometría, sino de toda la matemática.
En este sentido puede decirse que la revisión se inicia con las **"Lecciones de geometría moderna"** de Moritz Pasch (1843-1931), profesadas en 1873 y publicadas en 1882, donde por primera vez se presenta un sistema completo de postulados suficientes para exponer rigurosamente la geometría proyectiva. Aunque Pasch confiere aún ciertos rasgos físicos a los entes geométricos, insiste en que la construcción así fundada es independiente de ellos, y no tiene por qué apelar a la intuición, y no deja de ser sintomática su advertencia, hoy trivial, pero sin duda útil en su época, de no omitir en sus "razonamientos ni aun los argumentos más insignificantes".

En la dirección axiomática siguen los trabajos de Dedekind, que en 1888 expuso un sistema completo de axiomas en que fundar la aritmética, y los trabajos de Peano de 1889 y 1891. En 1889 Peano da a conocer un ensayo, del cual sólo las notas están escritas en italiano, mientras todas las proposiciones se expresan en forma puramente simbólica, se titula **"Los principios de la geometría expuestos lógicamente"**; no obstante, tuvo mayor difusión otro de sus escritos de ese mismo año, con las notas en latín, sobre **"Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método"**, este trabajo aparece, algo modificado, en su **"Formulario"** de 1891.

La exposición axiomática de la aritmética de Peano se fundamenta en nueve postulados que definen implícitamente la igualdad y tres conceptos primitivos: cero (o uno), número y sucesivo. El último postulado no es sino, en símbolos de Peano, el principio extramatemático o un método de demostración para convertirse en un elemento esencial de la definición de número natural, o mejor, de la cadena abierta más simple con un primer eslabón y tal que a cada eslabón sigue otro.

El principio de inducción completa, ya implícito en Grassmann, fue aplicado por primera vez, y en forma rudimentaria, por Francesco Maurolyco (1494-1575) en la demostración de algunas propiedades de los números poligonales y poliédricos que aparecen en su **"Arithméticorum libri duo"**, de 1575. Este principio, implícito en algunas demostraciones de Euclides, es considerado por Maurolyco y otros matemáticos posteriores como un principio lógico o, mejor, como un método de demostración por aplicación reiterada e indefinida de un mismo silogismo.

Después de Peano cabe mencionar a uno de sus discípulos: Mario Pieri (1860-1904), que introdujo en 1897 el movimiento como concepto primitivo de la geometría euclidiana y, ya en este siglo, a Edward Vermilye Huntington (1874-1952) que formuló sistemas de postulados para distintas disciplinas matemáticas.

Pero el verdadero sistematizador del pensamiento matemático en general es David Hilbert (1862-1943), cuyos **"Fundamentos de la geometría"**, de 1899, confieren un sello riguroso al tradicional método euclídeo y lo convierten en un método de mayor alcance y fecundo en problemas de toda índole.

Hilbert, que con Poincaré forma quizás la pareja de los últimos matemáticos universales, han sido uno de los más grandes matemáticos de finales del siglo pasado y comienzos de éste y han tenido una notable influencia en la matemática de ambos siglos. Profesor en su ciudad natal Koenigsberg y luego en Gottinga, ha impresionado su sello y dejado huella en todas las cuestiones vitales de la matemática, desde el análisis de sus fundamentos y los capítulos más elevados hasta el tratamiento de problemas particulares.

Es famoso el discurso pronunciado por Hilbert en el Congreso de París de 1900 sobre los "problemas de la matemática", en el que mencionó 23 problemas matemáticos que entonces esperaban solución. Gran parte de la matemática del siglo XX ha surgido del estudio de estos problemas, la mayoría de los cuales se ha resuelto, si bien, lo que es más importante, dejaron tras sí otros problemas.

Al referirse a la producción matemática de Hilbert dice Dieudonné:

> *"Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hilbert es la belleza pura de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de "elegancia superficial" que resulta de cálculos hábilmente conducidos, sino de una satisfacción estética mucho más profunda que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para alcanzarlo. Estos últimos son a menudo de una desconcertante simplicidad. Por lo general, no fue un perfeccionamiento más o menos ingenioso de los métodos de sus antecesores lo que le permitió a Hilbert hacer sus grandes descubrimientos, sino, por el contrario, un retorno voluntario al origen del problema tratado; de este modo separaba de la ganga, donde nadie había sabido verlos, los principios que permitían trazar hacia la solución el "camino real" en vano buscado hasta entonces".*

La unidad de la matemática y la importancia de los problemas en la investigación matemática son ideas cardinales del pensamiento de Hilbert.

Así entresacamos entre sus frases: *"En mi opinión la matemática es un todo invisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes. (...) Con la extensión de la matemática, su carácter orgánico no se pierde, sino que se manifiesta con mayor claridad. (...) Los símbolos aritméticos son diagramas escritos, y las figuras geométricas son fórmulas gráficas. (...) En la medida que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva; la carencia de problemas presagia la extinción o el cese de un desarrollo independiente.*

Quien persigue métodos sin tener en mente un problema definido, investiga en vano. (...) La convicción de la resolubilidad de un problema matemático cualquiera es un poderoso incentivo para el investigador. Resuena en nosotros una llamada constante: Hay un problema. Busca la solución. La encontrarás razonando, pues en matemática no hay ignorabimus".

Los **"Grundlagen"** de Hilbert revelan su originalidad y genialidad. Comienzan con la siguiente aclaración: *"Pensemos tres diferentes clases de objetos. Llamemos a los objetos de la primera clase, puntos, (...) a los objetos de la segunda clase, rectas y (...) a los objetos de la tercera, planos (...)"*. Según una anécdota muy difundida, Hilbert aclaraba esto diciendo que podían sustituirse las palabras: punto, recta y plano, por mesa, silla y vaso de cerveza, sin que esto alterara en lo más mínimo la geometría resultante; lo que equivale a subrayar el carácter arbitrario del nombre de los objetos, que se convierten en entes abstractos definidos implícitamente por los axiomas; de ahí la expresión de "definiciones disfrazadas" conque Henri Poincaré (1854-1912) designaba los axiomas. En efecto, sigue Hilbert: *"Supongamos que puntos, rectas y planos estén en ciertas relaciones mutuas que designaremos con las palabras "estar en", "entre", "paralelo", "congruente", "continuo", cuya exacta y completa descripción se conseguirá por medio de los axiomas de la geometría"*. Los axiomas sobre los cuales Hilbert funda la geometría euclidiana son veinte, y están distribuidos en cinco grupos: axiomas de incidencia, de orden, de paralelismo, de congruencia y de continuidad.

Los axiomas de incidencia definen las relaciones entre puntos, rectas y planos que dan sentido a las expresiones "estar sobre", "pasar por", etc. Los axiomas de orden cumplen igual finalidad respecto a expresiones como "entre", "ordenamiento", y permiten definir el segmento. Cabe agregar que entre los postulados de Euclides figuran elementos de los axiomas de enlace de Hilbert; en cambio, Euclides no menciona para nada la idea de orden, y adopta el segmento como noción primitiva y el ordenamiento como algo dado empíricamente, lo que le permite soslayar sofismas en que podría incurrir mediante un tratamiento riguroso sin tener en cuenta los axiomas de orden. Estos axiomas, utilizados ya por Pasch, y su

exigencia en la construcción geométrica, constituyen uno de los progresos que la crítica moderna puso en evidencia en el análisis de los principios de la geometría.
Por su parte, el axioma de paralelismo, que admite la existencia de una y una sola recta paralela a otra dada por un punto exterior a la misma, equivale al Quinto Postulado de Euclides; mientras que los axiomas de congruencia, cuyos equivalentes son las nociones comunes de Euclides, definen el concepto de congruencia o de movimiento de los segmentos, ángulos (que se definen en forma correlativa a los segmentos) y triángulos.
Por último, Hilbert adopta como axioma de continuidad una expresión que equivale a la definición de Euclides: "Se dice que las cantidades tienen razón entre sí cuando cualquiera de ellas puede multiplicarse de manera que supere a la otra", enunciado que más tarde Arquímedes reconocerá con razón como postulado; de aquí que Hilbert denomine su axioma como "axioma de Arquímedes".
Después de exponer y aclarar los distintos axiomas, Hilbert recurre a sus "**Grundlagen"** a una novedad importante al abordar el análisis lógico del conjunto de axiomas, que es, por una parte, establecer la compatibilidad de éstos, es decir: que sus consecuencias no se contradicen, y por otra que son independientes, es decir, que un axioma o un grupo de axiomas no es consecuencia de los anteriores.
Para ello Hilbert construye geometrías artificiales cuyos elementos son números o funciones, de tal modo que las relaciones geométricas definidas por los axiomas correspondan relaciones homólogas entre esos números o funciones. Para demostrar que los axiomas de un grupo son compatibles hasta demostrar que en la geometría correspondiente no hay contradicción, cosa que se comprueba por cuanto si hubiera contradicción en ella aparecería en la aritmética del sistema de números o funciones así construida. Para determinar la independencia de un axioma determinado respecto a los demás, basta construir también una geometría artificial admitiendo estos y negando aquél. Si esta geometría es compatible queda demostrada la independencia del axioma en cuestión. En este análisis Hilbert comprueba la validez de las geometrías no euclidianas, al demostrar la independencia del axioma de paralelismo, así como de las geometrías no arquimedianas, de las que Giuseppe Veronese (1854-1917) había dado un ejemplo en 1891, al comprobar igual independencia del axioma de Arquímedes.
Claro es que las consideraciones de Hilbert desplazaron la compatibilidad e independencia de los axiomas de la geometría a un problema semejante, aunque de raíz más profunda: la compatibilidad de los axiomas de la aritmética, problema que es, como ya dijimos, el segundo en la nómina de los 23 problemas señalados por Hilbert en su discurso de 1900.
Los **"Grundlagen"** terminan con un interesante epílogo, en el que Hilbert, después de insistir en la importancia de los problemas y recordar la "exigencia de pureza de los métodos demostrativos, elevada a principio por muchos de los matemáticos de nuestro tiempo", termina diciendo: "La investigación geométrica precedente pretende dilucidar en toda su generalidad qué axiomas, presupuestos o medios auxiliares son necesarios para establecer una verdad de geometría elemental, dejando a las circunstancias la elección de los métodos demostrativos adaptados al punto de vista que se haya adoptado".

BERTRAND RUSSELL.

Tal vez el lector conozca a Bertrand Russell como el ganador del Premio Nobel de Literatura en 1950, o quizás lo reconozca por su labor política, en particular su fuerte oposición y crítica a la guerra de Viet-Nam o por medio de su llamado a la paz junto con Albert Einstein. No mencionaremos ni sus escritos de divulgación de las ciencias, ni filosóficos, morales, educación, etc, sólo nos detendremos en los temas relacionados con la teoría de conjuntos.
En relación con el tema de los fundamentos de las ciencias físicas, Russell había llegado, en 1903, a la conclusión de que las cuestiones más importantes relacionadas con los problemas

de los fundamentos de la dinámica (como una ciencia **a priori**) no eran problemas que pertenecían a las ciencias físicas, sino a las matemáticas puras, y entonces, de acuerdo con su programa logicista, podían ser derivados de constantes y definiciones lógicas. Siguiendo los lineamientos de este programa, Russell expresó la noción de "ocupando un punto o instante" en términos de relaciones. Los conceptos de "tiempo" y "espacio", fueron reemplazados por series de una y n-dimensiones respectivamente. Según Russell, todos los argumentos de la dinámica eran capaces de ser traducidos al lenguaje de las matemáticas puras y, por tanto, al de la lógica simbólica también. Russell centralizó su postura en las siguientes palabras:

> *"Las verdades* **a priori** *envueltas en la dinámica son únicamente aquellas de la lógica: como un sistema de razonamiento deductivo, la dinámica no requiere de nada más, mientras que como una ciencia de lo que existe requiere de experimentación y observación."*

Es de fundamental importancia señalar que estas ideas de Russell fueron un producto de sus investigaciones filosóficas a principios del presente siglo y que fueron refinadas en 1914. Obviamente, Russell desconocía los lineamientos que seguirían las ciencias físicas en el futuro. Las corrientes de investigación que cambiarían nuestra forma de pensar (mecánica cuántica y teoría de la relatividad, por ejemplo) se encontraban en el umbral de sus formulaciones y desarrollo. Debemos destacar, no obstante, que la influencia de la filosofía russeliana es innegable -no siempre positiva y directa- a través del positivismo lógico, es decir, a través de las ideas de Rudolf Carnap y Philip Frank, entre otros.

El concepto de infinito ha jugado un papel excepcional en la filosofía de las matemáticas y de las ciencias físicas. El mismo Russell ha señalado, en el prefacio de uno de sus libros, que las especulaciones del pasado, en cuanto a la realidad o irrealidad del mundo físico, fueron oscurecidas por la ausencia de una satisfactoria teoría del infinito matemático. Recordemos Aristóteles y la aporía de Aquiles y la Tortuga. Sin embargo, los grandes problemas vendrían mucho después.

Mucho se ha escrito, y poco fundamentado, de las polémicas que causó el trabajo de Cantor. También se ha hablado mucho de que Cantor había perdido la razón y que éste se encontraba internado en una clínica para enfermos mentales. Los matemáticos han ayudado a mistificar el personaje, como sucede con casi todo personaje y evento matemático. Algunos de los matemáticos contemporáneos rechazaron esta teoría de Cantor, la mayoría debido al malentendimiento de las obras de éste. Russell fue uno de ellos.

Bertrand Russell nació en Inglaterra en 1872, a los 18 años fue a estudiar a la Universidad de Cambridge, física y matemáticas por tres años y el siguiente filosofía, debido al poco agrado que sentía por las clases de matemática. Como resultado de este cambio, Russell se puso en contacto con la crema y nata de la filosofía de la Universidad, que estaba muy influida por las ideas de Francis H. Bradley. Es lógico suponer que Russell no tardó mucho tiempo en caer influenciado por dicha doctrina, en particular porque ningún otro sistema filosófico había logrado explicar la naturaleza de las proposiciones matemáticas. Por último, parece ser que la causa inmediata de su adopción del neohegelianismo fue su aceptación del argumento ontológico como una prueba del **absoluto**. Russell también leyó las obras de Kant y tomó de ambas corrientes. Algunas de las consecuencias más importantes de la aceptación de estas ideas de los neohegelianos y kantianos fueron: i) ambas doctrinas rechazaron la idea de la existencia del infinito actual; ii) los neohegelianos estaban fuertemente opuestos a lo que ellos llamaban "lógica equacional", la cual se transformó en la lógica matemática a través de los trabajos de Hamilton, Boole, de Morgan y Peano, entre otros; iii) de acuerdo con algunos de los filósofos neohegelianos, el papel de la lógica era el de dar una descripción más precisa del razonar en general; iv) los neohegelianos consideraban que todas las ciencias -incluyendo la

física y la matemática- eran inherentemente defectuosas, es decir, cada una era inconsistente en sí misma.
Un día, mientras Russell tomaba un paseo en Berlín en 1895, con 23 años, decidió escribir dos series de libros: una iría de matemáticas a fisiología, y la otra, discutiría cuestiones sociales siguiendo los principios de las doctrinas neohegelianas. Con base en dicho esquema, las contradicciones que dejara sin resolver cada una de las ciencias serían resueltas en otra ciencia subsecuente.
Una vez que Russell acabó su libro sobre los fundamentos de la geometría (1897), procedió a escribir un libro sobre los fundamentos de la dinámica, con una estructura similar al libro anterior. Sin embargo, su proyecto no cristalizó. Russell relata que el comprendió que la dinámica no es una ciencia a priori, sino que casi todas sus cuestiones son esencialmente empíricas. Entonces, Russell decidió concentrar su actividad intelectual en los fundamentos de la aritmética, una cuestión que había estado siguiendo con anterioridad, pero a la que no le había dedicado la debida atención.
Sabemos que inicialmente Russell rechazó las tesis de Cantor. En 1899, Russell tuvo por fin la oportunidad de leer las contribuciones originales de Cantor. Aquí empezó a redactar un tercer intento por explicar los fundamentos de la aritmética (**"Principios de Matemática"**), acabado probablemente en junio de 1900, un mes antes del Primer Congreso Internacional de Filosofía que se celebró en París. Y aunque Russell seguía poniendo en tela de juicio algunas de las ideas de Cantor, empezó a adaptar otras.
Fue en este congreso donde Russell sufrió un cambio dramático en su carrera intelectual, como él lo afirma en sus escritos autobiográficos. Russell tuvo oportunidad de oír argumentar al matemático italiano Giuseppe Peano durante las discusiones que siguieron a varias de las ponencias. Según Russell, Peano ganó todas las discusiones y polémicas en que se vio envuelto. El entonces joven inglés pensó que la superioridad de Peano se debía esencialmente a su manera de argumentar y, en especial, a su lógica matemática; Russell tomó de Peano varios de los elementos de su trabajo. En primer lugar el cálculo simbólico, las diferencias entre las relaciones de pertenencia y contención. Ahora el matemático inglés estaba convencido de la lógica matemática; la cual, por medio de su lenguaje simbólico, podía expresar el contenido de las ciencias matemáticas sin ambigüedad alguna, en particular, la obra de Cantor. Peano suponía la consistencia global de las matemáticas. Por lo que las antinomias con respecto al infinito debían ser superadas. En adelante, Russell intentaría demostrar la total consistencia de las matemáticas, incluyendo las cuestiones relacionadas con el concepto de infinito. Esta influencia había seguido, aproximadamente la siguiente cadena:

Lógica	$\Rightarrow$	conjunto	$\Rightarrow$	número	$\Rightarrow$	matemática pura
(Russell)		(Cantor)		(Weierstrass)		

Llevado de este extremismo, Russell postuló que las matemáticas no eran más que una parte o rama de la lógica, o sea, que podían ser derivadas de ella.
Una vez demostrada que la aritmética podía ser deducida de esos principios lógicos (en su obra de 1903), Russell procedió a hacer lo mismo con otras ramas de la matemática, en particular, con la dinámica racional. Russell intentó llevar a cabo su programa en detalle en los **"Principia Mathematica"**, trabajo -inconcluso- que requirió los siguientes 10 años de su investigación. Unicamente, un año después, pudo Russell publicar en forma más detallada la derivación o deducción de la dinámica racional a partir de sus principios lógicos, expuestos con anterioridad. Este programa no fue universalmente aceptado -ni por filósofos, ni matemáticos, ni físicos- porque aún en su formulación original presentaba graves problemas que el mismo Russell no había sido capaz de resolver en ese momento. Sin embargo, hemos destacado la profunda huella dejada por su programa, en las nuevas formulaciones.

EL PERÍODO POSTGODELIANO.

Después del surgimiento de las tres escuelas filosóficas de principios de siglo, pudiera pensarse que el universo filosófico-matemático estaba completamente determinado. Los resultados de Gödel promovieron la incertidumbre entre los seguidores de las distintas corrientes que aludíamos. A partir de los años 60 en la filosofía de la matemática comienza a destacarse una posición para la cual la mejor denominación es "neoempirista", ya que su dirección principal se encamina hacia la búsqueda de un fundamento común para el conocimiento matemático y el conocimiento científico-natural.

Después de la pérdida de confianza en los programas surgidos al calor del positivismo lógico y que nombres como Hermann Weyl (1949), Russell (1959), von Neumann (1947) y H. B. Curry (1963) pusieron de manifiesto, surge la voz con más autoridad dentro de esta corriente: Imre Lakatos, quien expone sus ideas por primera vez en el Seminario de Karl Popper en la London Schools of Economics, en el mes de marzo de 1959, pero cuya formulación más clara se va a encontrar en su trabajo de 1967 "**A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?"** y que estaba fuertemente influenciado por filósofos como G. Lukacs, R. B. Braithwaite y K. Popper, con la supervisión de los profesores G. Polya y B.L. van der Waerden, todos ellos de reconocida relevancia científica. En este punto nos proponemos esbozar (muy someramente) algunos criterios acerca de las concepciones de Lakatos sobre los problemas filosóficos de la matemática.

Este enfoque de Lakatos, en algunos sentidos es un paso de avance en las concepciones filosóficas de la matemática. Debemos destacar ante todo, su interés en considerar la matemática a través del análisis de las leyes de su desarrollo, confrontando sus hipótesis con hechos concretos de la historia de esta ciencia. En su identificación del conocimiento matemático y el empírico, se refleja el hecho incuestionable de que la matemática, como las demás ciencias, se desarrolla en fin de cuentas a través de la resolución de problemas prácticos.

Hay que notar que el concepto de "programa de investigación científica" que Lakatos introduce para explicar el desarrollo de la ciencia y en particular de la matemática representa también un progreso en las concepciones empiristas y neoempiristas, pues en él se intenta apresar la tendencia del conocimiento utilizando las estructuras metateóricas cuya necesidad ante todo, había sido señalada por Hilbert con relación a las matemáticas.

La suposición Lakatosiana de que el establecimiento de una teoría matemática depende de la asimilación de un determinado género de hechos según un esquema cercano al que describe el establecimiento del conocimiento empírico, no deja de ser válida dentro de determinados límites y es mucho más adecuada para la solución del problema del establecimiento del conocimiento matemático que las teorías anteriores y cita algunos ejemplos particulares que apoyan sus tesis.

En la famosa tesis de doctorado de I. Lakatos presentada en Cambridge en 1961, con el análisis del ejemplo concreto de la prueba de la conjetura de Euler sobre los poliedros, pretende demostrar, no sólo el hecho insoslayable de que el fundamento objetivo que determina la dirección principal del desarrollo del conocimiento teórico lo constituye la ampliación de su contenido empírico sino también que este es el único criterio de selección de hipótesis en una situación concreta, evitando la independencia relativa de este desarrollo de la matemática (baste como ejemplo la teoría de grupos).

También es conocido que una gran cantidad de resultados se han establecido en matemáticas, sin necesidad de recurrir a contraejemplos, ni locales, ni globales como reclama Lakatos y conjugando distintos métodos inductivos, estadísticos, analógicos, intuitivos, deductivos y constructivos. Esta interrelación es la que Lakatos es incapaz de reconocer desde su posición

empirista. Confesándose deudor de Hegel, no puede esconder su tendencia al inductismo, como se lo señala otro empirista Herbert Feigl: *"Con el temor de ser excomulgado (si no aniquilado) por la comunidad popperiana actual, quiero observar que el profesor Lakatos es y -creo- no puede dejar de serlo, un inductivista de segundo nivel"*.

Hay otra deficiencia en la concepción de los programas de investigación científica de Lakatos y es su carácter convencionalista. De qué nos puede servir un modelo que aceptamos convencionalmente sin atender a la objetividad inherente al problema, por abstracto que este sea. En esta misma línea subjetivista se enmarca su tesis de la "reconstrucción racional de la historia de la ciencia" ilustrada también en el ejemplo de Euler. Según Lakatos, antes de que la historia de la ciencia pueda cumplir su papel de "base cuasiempírica" de la metodología debe ser racionalmente reconstruida. Al utilizar la historia de la ciencia, Lakatos no analiza todos los factores que influyen en la formación y desarrollo del conocimiento matemático sino que se concentra en la lógica interna del descubrimiento. Maravillado por su "ingeniosidad" para comprender el ¿cómo?, se olvida de la necesidad de explicar el ¿por qué?

CUESTIONARIO

1. Destaque la importancia de los trabajos de Cantor para la Historia de la Matemática.

2. Presente algunos de los problemas propuestos por Hilbert en el Congreso de 1900.

3. Ante el surgimiento de las paradojas, ¿cuál fue la postura de los matemáticos?

4. Presente las principales ventajas e insuficiencias de las corrientes filosófico-matemáticas que surgieron en el entronque de los siglos XIX y XX.

Conferencia 16. Las Matemáticas del Siglo XX.

"Con la resolución de problemas crece la fuerza del investigador; encuentra nuevos métodos, nuevas perspectivas y consigue un horizonte más amplio y más libre"

Hilbert

Rusia como centro mundial de Matemática.

El cambio operado en el desarrollo matemático de Rusia, que lo convirtió en unos pocos años en una potencia mundial de las matemáticas, no fue obra de la casualidad, fue la consecuencia de una serie de acontecimientos desencadenados a raíz de la Revolución de 1917, y en los que tuvo papel destacado el conocido matemático Steklov como organizador de la ciencia rusa, lo que será ilustrado a continuación.

Por el nivel de alfabetización, Rusia figuraba entre los países más atrasados de Europa. Particularmente grave era la situación de las nacionalidades no rusas: entre los tadzhikos, los analfabetos llegaban al 99,5 % de la población; entre los kirguizes, al 99,4 %; entre los yakutos, al 99,3 %; entre los tukmenos, al 99,3 % y entre los uzbekos, al 98,4 %. La revista **"Viestnik Vospitania"** ("Noticias de Educación") predecía en 1906 que, de mantenerse el ritmo de fomento de la cultura social existente entonces en Rusia, se necesitarían 180 años para liquidar el analfabetismo entre los hombres y 280 años, entre las mujeres. Los recursos dedicados a la educación eran muy pocos, un ejemplo es que para la reparación de los edificios escolares se invertía menos dinero que en la construcción y reparación de las cárceles.

La Revolución de Octubre, en 1917, cambió la situación de raíz. El 26 de diciembre de 1919, el Consejo de Comisarios del Pueblo publicó el decreto **"Sobre la liquidación del analfabetismo de la población de la RSFSR",** firmado por Lenin: Toda la población de la República, de 8 a 50 años de edad que no sepa leer y escribir, está obligada a aprenderlo en su lengua materna o en ruso, según lo desee.

En los años del segundo y tercer planes quinquenales, se logró liquidar en la URSS, en lo fundamental, el analfabetismo entre la población adulta. En total, hacia 1940, se enseñó a leer y escribir en el país a 50-60 millones de personas.

Por grande que fuesen los éxitos de alfabetización de la población adulta, no se podía lograr la alfabetización total si no se extendía la enseñanza a toda la nueva generación.

En 1918, la Constitución de la RSFSR refrendó el derecho a la "enseñanza completa general y gratuita". Partiendo de la ley del CEC de toda Rusia (del 16 de octubre de 1918) **"Acerca de la escuela laboral única"** se proclamó que la escuela era accesible a todos los pueblos de la República. En lugar de los liceos, las escuelas de los zemstvos, las distintas escuelas parroquiales, etc., fue creada la escuela laboral única de primera y de segunda enseñanza: la primera, para los niños de 8 a 13 años de edad, y la segunda para jóvenes hasta 17 años de edad.

Los éxitos logrados en el fomento de la industria y la economía agropecuaria propiciaron el paso a la instrucción primaria general y obligatoria de 4 años, la cual se instauró en la URSS en 1930/31. esto fue uno de los pasos notables en la revolución cultural, creando una base firme para la formación de cuadros para la economía nacional y la cultura del país.

En la Rusia anterior a la revolución engrosaban las filas de la intelectualidad, en la gran mayoría de los casos, los jóvenes procedentes de las clases privilegiadas. Baste recordar que en la víspera del Gran Octubre, en las universidades de Rusia hasta el 60% de los estudiantes procedía de familias con solvencia económica.

Poco tiempo después de la Revolución de Febrero, en la Academia de Ciencias tuvieron lugar cambios sustanciales. En mayo de 1917, el nombre de Imperial Academia de Ciencias fue sustituido por el de Academia de Ciencias de Rusia. Fue entonces cuando los Académicos, por primera vez en la historia de este centro científico, eligieron directamente al presidente de la Academia de Ciencias. Este puesto fue ocupado por el académico A.P. Karpinski, el cual en realidad, dirigía la Academia desde Mayo de 1916, siendo vicepresidente. El académico A.P. Karpinski, geólogo, científico de renombre mundial se reveló como un gran organizador de la ciencia.

A mediados de 1917 se definió en la Academia de Ciencias un grupo de científicos que aspiraba acercar la ciencia al pueblo e incrementar su influencia en la vida de la sociedad. En este movimiento, cuyo inspirador era A.M. Gorki, también tomó parte muy activa V.A. Steklov. Hombre de sólidas convicciones, valiente y audaz, verdadero sabio y excelente organizador, con fe en el gran futuro del pueblo ruso y de la ciencia rusa, V.A. Steklov se convirtió en uno de aquellos científicos que encausaron el mundo científico del país por un nuevo camino. La elección de tal persona, precisamente como Vicepresidente de la Academia de Ciencias (1919), fue un gran acontecimiento en la vida de la Academia. Sobre los hombros de Steklov recayó la carga de las grandes preocupaciones relacionadas con el desarrollo y renovación de la Academia de Ciencias y con ella, de toda la ciencia rusa.

Inmediatamente después de la Revolución de Octubre, el gobierno soviético planteó la tarea de una amplia aplicación de la ciencia. En los años de la guerra civil, a pesar de las dificultades, el trabajo científico no cesó. Tratando de ampliar las aplicaciones de la física-matemática, Steklov en 1919, junto a los Académicos A.A. Markov y A.N. Krilov, planteó la cuestión sobre la organización en la Academia de Ciencias de un Gabinete Especial de Matemáticas. Las tareas de este fueron enunciadas en la memoria con la cual estos científicos se dirigieron a la sección físico-matemática. El Gabinete de Matemáticas (al que le fueron concedidos los nombres de P.L. Chebishev y A.M. Liapunov) comenzó a trabajar bajo la dirección de Steklov en 1919.

En enero de 1921 Steklov presentó a la sección físico-matemática una memoria detallada en la cual argumentaba la necesidad imperiosa de organizar en la Academia de Ciencias el Instituto Físico-Matemático. Esta proposición encontró apoyo unánime en la Academia y en 1921, fue organizado dicho instituto. Como director del mismo fue elegido Steklov. Este instituto existió hasta 1934, cuando el 11 de marzo fue dividido en dos institutos independientes: el Instituto de Matemáticas V.A. Steklov, dirigido por el académico I.M. Vinográdov y el Instituto de Física P.K. Lebédev, encabezado por el académico S.I. Vavílov.

Terminada la guerra civil el volumen de las investigaciones científicas se amplió en nuestro país notablemente, lo que repercutió en la actividad de la Academia de Ciencias.

Steklov fue uno de los iniciadores y organizadores del Comité Provisional Especial de la Ciencia, adjunto al Consejo de Comisarios del Pueblo de la URSS. Formaban parte de este, representantes de la Academia y de los Comisarios. Con la participación directa de Steklov, el Comité elaboró y llevó a la práctica una serie de decretos del Gobierno, que contribuyeron al desarrollo, sobre todo de otros centros científicos del país, junto a la Academia.

Recordando a su maestro, V.I. Smirnov escribió:

> *"Steklov cargó sobre sus hombros el trabajo, tanto de administración, como de organización científica en un momento, cuando parecía que no se podía hacer nada, que todo se desmoronaba. Pero el temperamento de Steklov no admitía el cruzarse de brazos en los momentos difíciles. Cuanto más difícil era la situación, con tanta más energía se ocupaba V.A. de los asuntos..."*.

Realizando un gran trabajo de organización, Steklov, en los últimos años de su vida, continua dedicándose intensamente a la ciencia: libros, manuales, distintos artículos científicos y otros materiales, ilustran esto.

Un gran acontecimiento en los últimos años de vida de Steklov fue su viaje al Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Toronto (Canadá) en 1924. El principal objeto de este viaje era participar en dicho congreso, que tuvo lugar paralelamente con el Congreso de la Asociación Británica y donde presentó dos informes. Particularmente útil fue **"Sobre el trabajo póstumo de A. M. Liapunov"**, que causó gran impresión en muchos de los participantes del congreso, pues muchos de los resultados de Liapunov eran desconocidos en el mundo (sobre este punto, volveremos en la próxima conferencia).

En este Congreso A.V. Steklov hizo amistad con el Profesor G. Fields (1863-1932), presidente del Congreso. Cabe señalar, que precisamente en este Congreso G. Fieds sugirió instituir dos medallas de oro con premios, para condecorar a los jóvenes matemáticos por sus notables aportaciones a las matemáticas; esto fue realizado en 1932, después de su muerte.

El 13 de agosto, a mediados de la semana dedicada al Congreso, a V.A. Steklov, conjuntamente con siete personalidades más, le fue solemnemente otorgado el título de Doctor Honoris Causa de la Universidad de Toronto.

En 1925 se cumplieron 200 años de la fundación de la Academia de Ciencias. Para conmemorar este aniversario la Academia comenzó a prepararse con anticipación a esta fecha. V.A. Steklov dedicó muchos esfuerzos y energía, para que este aniversario se convirtiera en una verdadera fiesta de la ciencia soviética. En víspera del aniversario intervino reiteradamente en las páginas de la prensa con artículos, en los cuales describía el gran camino histórico recorrido por la Academia de Ciencias, eso produjo un desgaste en su organismo, que unido a un viaje a Kazán en conmemoración del centenario del nacimiento de las geometrías no euclidianas, agravó aún más su estado de salud. Steklov falleció el 30 de mayo de 1925 en Graspe.

Hasta la 1era Guerra Mundial, los centros más destacados de las matemáticas eran Francia y Alemania. Producto a esta y con los acontecimientos que hemos descrito someramente, emerge la URSS como líder de la comunidad matemática, toda vez que Francia y Alemania no habían logrado recuperarse de los efectos de la guerra. Esto a pesar de ciertos extremismos políticos cometidos por la dirección soviética, baste a título de ejemplo la expulsión de Lusin de la Universidad de Moscú y la exclusión de uno de los autores del renombrado libro de Andronov por motivos políticos.

Existe un rasgo del desarrollo matemático soviético que queremos destacar y es la proliferación de las investigaciones en la filosofía de la matemática, al extremo que su revista más renombrada de filosofía, **"Voprosi Filosofii"**, en los últimos tiempos siempre tenía artículos sobre el tema. Eran investigaciones que redundaban sobre diversos (y muy escogidos temas) lo que creó un cierto nivel de abstracción en estos resultados, al extremo que lo hemos denominado **Metafilosofía de la Matemática**, designando con esto la característica que hemos apuntado antes.

EEUU, el otro polo mundial de Matemáticas. Entre las dos guerras, surgió en los EEUU un centro mundial de matemáticas, al romperse la organización internacional que existía, producto de las represiones fascistas y el surgimiento de la Rusia soviética en un territorio que había sido destino obligado de muchos matemáticos europeos de años anteriores, o sea, las emigraciones europeas favorecen lo antes dicho, pues nuclearon a su alrededor un grupo de jóvenes matemáticos norteamericanos que unieron a su talento, la excelencia de los investigadores extranjeros. Señalemos que en el eje Berlín-Roma-Tokyo, sólo Heisemberg y Fermi quedaron en el proyecto de la bomba atómica, quizás eso salvo a la humanidad.

Los siguientes hechos demuestran bien a las claras lo antes expuesto e indican que la preparación de Alemania estaba dirigida a la guerra. Los siguientes datos definen la situación económica de los países capitalistas europeos en 1937:

Volumen de la producción industrial de los países capitalistas de Europa en 1937

Países	Fundición de hierro (en millones de toneladas).	Fundición de acero (en millones de toneladas).	Fundición de alumino (en millares de toneladas).	Fundición de automóviles (en millares)
Alemania	16	19,4	127,6	331
Gran Bretaña	8,6	13,2	19,3	504
Francia	7,9	7,9	34,5	227
Italia	0,8	2,1	22,9	72

La anexión de Austria y Checoslovaquia influyó de modo esencial en la correlación de fuerzas de los países capitalistas. Se hizo más evidente la superioridad de Alemania hitleriana sobre la Gran Bretaña y Francia en todos los índices económicos fundamentales:

Volumen de la producción de los países capitalistas de Europa en 1939.

Países	Fundición de hierro (en millones de toneladas).	Fundición de acero (en millones de toneladas).	Fundición de alumino (en millares de toneladas).	Fabricación de automóviles (en millares)
Alemania con Austria y Che-coslovaquia .	20,1	23,2	200	420
Gran Bretaña	8,3	13,8	25	493
Francia	7,4	7,9	50	230
Italia	1,1	2,3	34,2	77

En el cuadro que reproducimos a continuación, basado exclusivamente en datos oficiales, mostramos, comparadas, las proporciones de la primera guerra mundial y de la segunda. Ello significa que entre los Estados que participaron en la contienda se incluyen únicamente a los que se declararon beligerantes, y entre los efectivos de los ejércitos, sólo a los movilizados para las fuerzas armadas regulares, sin contar a los combatientes del Movimiento de la

Resistencia. Un dato que no se puede obviar: EEUU fue el país menos afectado, tanto en pérdidas humanas como materiales, amén de que la guerra no se realizó en su territorio.

Datos comparativos de la primera y la segunda guerras mundiales.

Índices	1era guerra mundial	2da guerra mundial
Estados beligerantes	33	72
Efectivos de los ejércitos (millones de hombres)	74	110
Muertos (millones de personas)	10	cerca de 50
Mutilados (millones de personas)	20	28
Gastos militares directos (miles de millones de dólares)	208	935

Los grandes racionalistas del siglo XVIII, buscaban en la naturaleza una lógica objetiva y la hallaban en el vínculo causal universal, en el determinismo que dirige los fenómenos de la naturaleza. No se limitaban a esto y exigían que en la sociedad humana reinasen la lógica y la razón, por consiguiente, el derecho y la justicia. El blanco de sus críticas era todo el arsenal de lo irracional: el "creo, pues es absurdo", la intolerancia, los argumentos de la hoguera y el cadalso contra los argumentos de la lógica y la razón.

En los años treinta de nuestro siglo el demonio de lo irracional se elevó en toda su altura. Intentaba tomar revancha en la guerra contra la razón. Uno de los elementos del programa de Hitler era la liquidación de los criterios objetivos y lógicos en la ciencia. La ciencia no debía partir del experimento y del vínculo lógico de las deducciones concordantes con el experimento; debía partir de la voluntad del dictador y de los criterios presentados por él. Criterio tal resultó ante todo la pertenencia racial de cada concepción científica. El ministro de Educación nazi Bernard Rust declaró: **"El nacionalsocialismo no constituye un enemigo de la ciencia, es enemigo sólo de la teoría".**

La teoría de la relatividad, con su explícita tendencia racionalista y explícito reconocimiento de la objetividad del mundo, era en extremo odiosa a los ojos de los nazis. Lenard y Stark comprendían que había llegado la época de la revancha por el infame final de sus ataques de años atrás contra la teoría de la relatividad y contra Einstein. En 1933, Lenard, en el Volkischer, escribía: *"El más importante ejemplo de peligrosa influencia de los círculos judíos sobre el estudio de la naturaleza lo representa Einstein con sus teorías y charlatanerías matemáticas, compuestas de informaciones viejas y adiciones arbitrarias. Ahora su teoría está rota en mil pedazos, ése es el destino de todos los productos que son ajenos a la naturaleza. Pero los científicos con trabajos importantes en el pasado no pueden eludir la objeción permitiendo que la teoría de la relatividad hallara un lugar en Alemania. No vieron o no quisieron ver la mentira que era considerar a Einstein (en la ciencia y en igual medida fuera de ella) un buen alemán"*.

La purga de las universidades alemanas y la represión contra la ciencia en Alemania se desplegaron cuando Einstein ya se hallaba fuera del alcance de los destacamentos de asalto y de la policía secreta. Desde 1930, era "profesor invitado" del Instituto Tecnológico de California.

Aún antes de esto, Einstein salió de las filas de la Academia de Ciencias de Berlín. Sabía que la Academia, bajo presión de los nazis, lo excluiría del número de sus miembros. Semejante acto habría sido una prueba muy dura para algunos científicos que habían permanecido en Alemania, sobre todo para Planck. La protesta contra la exclusión de Einstein los habría expuesto al peligro. La aprobación los habría deshonrado. Para evitar a sus amigos semejante prueba, Einstein comunicó a la Academia de Berlín que con el gobierno existente él no podía servir a Prusia y hacía así dejación de sus obligaciones de académico prusiano.

Cuando Nernst y otros científicos alemanes intentaban obtener de Guillermo II la organización de una institución científica especializada, en Berlín, que se ocupase de los problemas más importantes de las ciencias naturales, tenían como modelo las instituciones análogas en EE.UU. La nueva etapa del progreso científico-técnico exigía semejantes institutos en todos los países, pero su forma, como ya se dijo, estaba en correspondencia con las condiciones y con las tradiciones: en Alemania el instituto berlinés recibió el nombre del kaiser, que se hizo cargo de su mantenimiento; en EE.UU los institutos de investigación si no pertenecían directamente a las compañías, se financiaban por los reyes de la industria. Durante los años veinte, el desarrollo de la ciencia exigía, todavía en mayor grado, separar organizativamente las investigaciones más profundas de los problemas que planteaban y que debían ser ejecutados por los más grandes teóricos. En 1930, los multimillonarios Louis Bamberger y su hermana, la viuda de Félix Fuld, pidieron consejo y ayuda en la organización de un nuevo instituto científico a Flexner, célebre activista de la educación y reformador de escuelas en EE.UU. Flexner apuntó que en EE.UU había suficientes institutos de investigación similares y propuso crear una institución de nuevo tipo. Se convirtió, de hecho, en el organizador del Instituto de Investigaciones Superiores (**Institut for Advanced Study**).

Flexner quería liberar por completo al grupo de grandes científicos de cualesquiera obligaciones pedagógicas y administrativas y de preocupaciones materiales. Debían ocuparse de los problemas más elevados y generales y conformar el núcleo del instituto. Alrededor de ellos, suponía Flexner, se podría reunir a científicos jóvenes, de talento. En las cartas circulares que aclaraban el sentido y las tareas del nuevo instituto, se subrayaba en especial la total independencia de los científicos invitados al proyectado instituto. Este último, según las palabras de Flexner, debía convertirse en un *"puerto donde estudiantes y científicos puedan examinar el mundo y sus fenómenos como su laboratorio, sin ser arrastrados por el maelstrom del trato directo con él"*.

Flexner decidió que, al principio, los científicos que elaboran los problemas matemáticos debían convertirse en el núcleo del instituto. Su primera sede fue una parte del Fine Hall, el edificio de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Princeton. En ese edificio de estilo gótico, que recordaba las universidades inglesas, rodeado por umbrosos árboles, funcionó el Instituto de Investigadores Superiores durante diez años. En 1940, el Instituto dejó el Fine Hall y el territorio universitario y se ubicó en un edificio propio, más apartado, a una distancia de media hora de marcha desde Princeton.

En Princeton casi no tenía obligaciones pedagógicas. Él dirigía un grupo no grande de jóvenes científicos. Entre ellos estaba Walter Mayer, traído por él desde Alemania (fue su asistente entre 1929 y 1934), Nathan Rosen (en 1934-1935), Peter Bergmann (en 1937-1938) y Valentín Bargmann, estos últimos fueron en Princeton fuente inagotable de malentendidos y de bromas. Allí estuvieron Ernst Strauss (en 1944-1947), Joseph Kemeny (en 1948-1949), Robert Krainchnan (en 1950) y Bruria Kaufmann (en 1951-1955).

De 1936 a 1938, el asistente de Einstein fue Leopold Infeld, con el cual pronto nos volveremos a encontrar. Einstein se veía con menos frecuencia con la vieja generación de colegas princetonianos.
Einstein tuvo que intervenir en Londres, en cierta ocasión, cuando se discutía el destino de los científicos emigrantes desde Alemania.
A finales de los años cuarenta y a principios de los años cincuenta, el tono psicológico de Einstein descendió con la pérdida de los seres cercanos. Le obligaban a recordar a los amigos y a los compañeros de lucha desaparecidos ya en los años treinta. Einstein recordaba con frecuencia en esta época a Paul Ehrenfest, que se había suicidado en 1933. El suicidio se le representaba a Einstein, en alguna medida, como el resultado de un conflicto entre los intereses científicos de una generación y, aún en mayor medida, entre las interrogantes que la ciencia plantea ante un científico y las respuestas que él pueda hallar. La causa inmediata del suicidio de Ehrenfest fue puramente personal, pero la causa más profunda se hallaba en la trágica insatisfacción del científico.
Después de muchos años, al martirologio de la ciencia se añadió otro nombre, símbolo de aquella misma elevada fuerza de ideas: a comienzos de 1947, Einstein supo de la muerte de Paul Langevin. *"Fue para mí uno de los más caros amigos, un verdadero santo y extremadamente dotado"*, escribió Einstein a Solovine.
Los recuerdos de Infeld dan mucho material sobre la vida de Einstein en Princeton. En 1936, Infeld era profesor de la Universidad de Lvov. En esa época se cernía cada vez más intensamente el nubarrón de la reacción sobre las universidades polacas e Infeld sentía que no le sería dado mantenerse en aquel centro docente. Escribió a Einstein y pronto recibió una invitación del Instituto de Princeton; se le concedía una beca para que él pudiese, bajo la dirección de Einstein, llevar a cabo trabajos investigativos en física teórica. Llegó a Princeton y enseguida llamó a la puerta número 209, en Fine Hall, donde se hallaba el Instituto de Matemáticas y Física Teórica.
Einstein comenzó a exponer los resultados de sus intentos de elaborar una teoría unificada del campo. En ese momento entró en la habitación Levi-Civita (uno de los creadores de los medios matemáticos aplicados por Einstein en la teoría general de la relatividad). Levi-Civita tenía entonces cerca de sesenta años. Este pequeño y delgaducho matemático italiano se negó a prestar juramento de fidelidad al régimen fascista y encontró refugio en Princeton. Al entrar en la habitación, Levi-Civita quiso irse enseguida para no molestar la conversación de Einstein con Infeld. Más con gestos que con palabras (la gesticulación italiana se le daba mejor que el idioma inglés) comunicó cuál era su intención. Pero Einstein le pidió que se quedase y tomara parte en la conversación. Mientras Einstein sucintamente exponía el contenido de la conversación precedente, Infeld contenía con dificultad la risa, escuchando el habla anglo-italiana de Levi-Civita, que era comprensible sólo porque se componía, en una mitad, de fórmulas. Einstein también hablaba mal el inglés, pero aún así lo hacia bastante mejor que su interlocutor. Además, sus frases se hacían comprensibles gracias a la manera reposada y lenta, a las expresivas entonaciones y principalmente, gracias a lo consecuente y a la claridad transparente del contenido.
Esto es sólo un ejemplo de lo que acontecía en EEUU en esta época, un país que había hecho mucho por la técnica pero no tanto por la ciencia pura; a partir de este momento, la tecnología norteamericana pasó a ocupar el primer lugar mundial. Un ejemplo de esto que hemos dicho, lo constituye el hecho que la carrera de cibernético, fue implementada en las universidades norteamericanas a solicitud de la IBM principalmente, esto se reflejó en la calidad de los ingenieros de este campo formado en los EEUU. Al revés de la URSS, que desarrollaron la ciencia a un grado elevadísimo pero esto no tuvo repercusión en la tecnología aplicada, de ahí que el pensamiento soviético, tal y como indicábamos antes, tomara como dirección fundamental la línea teórica, descuidando la práctica.

El mapa matemático mundial. A pesar que cada uno de nosotros tiene un "escalafón" de donde están situados en calidad los países del mundo, utilizaremos la clasificación que ofrece la IMU (referida en este caso al último congreso mundial, el de Zurich, Suiza, de Agosto 3 al 11 de 1994).
Este escalafón depende de la calidad matemática del país en sí, aunque está condicionada también por la estabilidad política, económica, etc. del mismo, así Bulgaria bajó del grupo II al I, hasta tanto la situación económica de dicho país mejore. Chile subió del grupo I al II, no sólo por sus méritos matemáticos, sino por su estabilidad económica e Israel subió del grupo III al grupo IV, por razones semejantes; pues a cada ascenso de grupo aumenta la cuota que debe pagar el país a la IMU (y el número de representantes con voz y voto en la Asamblea General, otros detalles se presentaran en la última conferencia). Presentaremos la relación de países en cada grupo, empezando por el de más calidad.

Grupo V.

Alemania, EEUU, Francia, Japón, Reino Unido y Rusia.

Grupo IV.
Canadá, Israel e Italia.

Grupo III.
Australia, Bélgica, Brasil, R.P.China, España, Hungría, India, Holanda, Polonia, Suecia y Suiza.

Grupo II.
Argentina, Austria, Rep.Checa, Chile, China-Taipei, Dinamarca, Finlandia, Georgia, Irán, Irlanda, Korea, México, Eslovakia, Sudáfrica y Yugoslavia.

Grupo I.
Bulgaria, Camerún, Croacia, Cuba, Egipto, Grecia, Hong Kong, Islandia, Costa de Oro, Filipinas, Nueva Zelandia, Nigeria, Noruega, Portugal, Arabia Saudita, Singapur, Eslovenia, Venezuela y Viet-Nam.

El desarrollo matemático de Asia. En estos momentos estamos presenciando un fenómeno singular, el surgimiento de un nuevo polo mundial de matemáticas en el Asia. Esto se traduce en la elevación de la calidad matemática de la región lidereada por Japón y China, y que se refleja en la organización de grandes eventos matemáticos (por ejemplo, Kobe organizó el ICM90), la obtención de premios en las olimpíadas internacionales, China "arrasó" en la versión de 1995, el aumento en calidad y cantidad de las publicaciones matemáticas, etc. Pudiéramos preguntarnos a qué se debe este auge de la matemática en Asia, la respuesta pasa, obligatoriamente, por la solvencia económica de los países de la región.
Veamos algunos datos. Los países de la región han mantenido un crecimiento del PIB en los últimos 10 años del ¡7,6 % anual!, algo realmente increíble; el 75 % del comercio mundial se realiza en la cuenca del Pacífico, tal es así, que la línea aérea de Singapur, por ejemplo, transporta más pasajeros que la renombrada Air France; China, con Taiwan y Hong Kong tendrán el 20 % del comercio mundial en los próximos 10-15 años y Japón hace muchos años que liderea la economía mundial en lo referido al superávit y estabilidad económica.
Esto **grosso modo**, representa un detalle que no se puede soslayar, el desarrollo económico permite el desarrollo educacional, en primer término, y el aumento de las investigaciones

fundamentales como una consecuencia de lo anterior, así hemos visto el desarrollo de centros de Japón, Viet Nam y China hasta un nivel destacado internacionalmente.

NICHOLAS BOURBAKI.

Este es el seudónimo colectivo usado por una corporación informal de matemáticos.
En sus inicios constituían un grupo de jóvenes, profesores y estudiantes de matemática que celebraban seminarios sobre diversos aspectos de la matemática. En estos seminarios se estudiaban, de una manera sistemática, las nuevas y grandes ideas que venían de todas partes. Es aquí cuando surge la idea de diseñar un amplio trabajo en forma de libro, el cual abarcaría las principales ideas de las matemáticas modernas. Fue en ese momento que nació un nuevo enfoque sobre la matemática moderna bajo la firma de Nicholás Bourbaki.
Comienzan en 1939 su trabajo y escogen a Nancy, una ciudad que ha aportado muchos matemáticos de vanguardia, como su hogar. Carl Boyer (**"A History of Mathematic"**, p.675) nos dice:

> *"Pudiera no ser una coincidencia el hecho de que en Nancy existe una estatua de un general de mucho colorido y muy real en su época Charles Denis Sauter Bourbaki (1876-1897), quien en 1862 declinó aceptar el trono de Grecia que se le ofrecía y cuyo rol en la guerra Franco-Prusiana fue notable, Nicholás Bourbaki, no obstante, no es su pariente en ningún sentido de la palabra. El nombre sencillamente ha sido tomado para designar un grupo de matemáticos, casi todos fanceses".*

Mejor aún, Dieudonné relata (**American Math. Monthly**, Vol.77, No.2, 1970) lo siguiente:

> *"Debo decir, que los colaboradores de Bourbaki eran muy jóvenes y sin duda ellos nunca hubieran empezado esta obra de haber sido más viejos y estar mejor informados. En el primer encuentro para el proyecto la idea que se tenía era terminarlo en tres años y en este tiempo, debíamos haber bosquejado los esenciales básicos de las matemáticas. Acontecimientos y la historia decidieron de forma diferente. Poco a poco según nos convertíamos en cada vez más competentes y más conocedores nos percatábamos de la enormidad de la obra y de que no había esperanzas de acabarla tan pronto como pensábamos."*

La presentación por Bourbaki de cada uno de los temas tratados es sistemática y profunda y a menudo incluye una visión histórica de los mismos. La presentación de un volumen llevaba consigo una cantidad de trabajo enorme, una vez que se ha decidido sobre un proyecto en particular, alguno de los miembros escribe una primera versión, la cual se copia y se distribuye entre todos los miembros, en la próxima reunión, la redacción será criticada sin misericordia alguna y muchas veces fue completamente rechazada. Después de esta primera, sigue una segunda (posiblemente por un miembro diferente). El proceso continúa, se han hecho hasta seis o siete redacciones en algunos casos.
Entre los fundadores de esta asociación tenemos a Jean Dieudonné (1906-1992), Claude Chevallier, Henry Cartan (1869-1951) y André Weil (n.1906). Usualmente el número de miembros variaba entre 10 y 20, como dijimos, en general franceses, con una excepción notable: Samuel Eilenberg.
Como hemos podido percatarnos, la labor de Bourbaki es amplia y profunda con un alto grado de colectivismo. Los miembros de Bourbaki para realizar este trabajo deben tener una visión

amplia de todas las partes de la matemática. Esto lo consideraban esencial para la inclusión de nuevos miembros. Como única ley tienen que los miembros, al cumplir los 50 años, deben retirarse del grupo porque consideran que a esa edad ya un matemático ya ha aportado sus mejores y más fuertes ideas.

En nuestros días se habla sobre la algebrización de las matemáticas, es decir, sobre la penetración de ideas y métodos del álgebra en las partes teóricas y aplicadas de esta ciencia.

El álgebra desde la antigüedad constituía una parte esencial de las matemáticas. Lo mismo habría que decir acerca de la geometría, pero como dijo Sofía Germain: *"El álgebra no es otra cosa que la geometría escrita en símbolos, y la geometría es sencillamente álgebra expresada en figuras"*.

La postura asumida por Nicholás Bourbaki fue la de presentar a la Matemática bajo la óptica del álgebra. Este considera que a lo largo de la historia de la Matemática, esta ciencia siempre se ha considerado bajo la óptica de algunas de sus disciplinas, cuando éstas han alcanzado un predominio determinado.

Bourbaki hace un análisis histórico de las manifestaciones de la unidad de la Matemática, donde se manifiesta la visión que se ha tenido de ésta, siempre a través de una teoría determinada.

La obra de Descartes cambió la faz de las Matemáticas, el mérito de éste en esta ciencia fue muy grande, ya que desbrozó los caminos de la fecundísima aplicación del álgebra a la geometría. Por todo el trabajo desempeñado por Descartes, Bourbaki considera que éste va más lejos, ya que concibe la unidad de las ciencias que se denominan Matemática, aunque sus objetos sean diferentes, dice que por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en ellas. De esta manera, según Bourbaki, esto convierte al álgebra en la ciencia Matemática fundamental.

A mitad del siglo XIX se pasa de una teoría a otra hasta la aparición de la noción moderna de estructura en el siglo XX, no reconociéndose que toda estructura lleva incorporada una noción de isomorfismo y que no es necesario dar una definición particular para cada tipo de estructura.

Bourbaki reconoce la primacía de una u otra teoría Matemática a lo largo de la historia, pero a pesar de esto, considera que su conclusión sobre el carácter general de la relación isomorfismo- estructura se halla situada por encima de todas las consideraciones anteriores sobre la unidad de la Matemática.

Con el surgimiento de la teoría de los conjuntos, Bourbaki considera finalizada la primacía de la aritmética, como fin al proceso de aritmetización del análisis, lo que trae consigo que a partir de este momento se facilitaron determinadas circunstancias para llevar los problemas Matemáticos al lenguaje y estilo algebraico.

ESTADÍOS FUNDAMENTALES DEL ÁLGEBRA.

1. El álgebra es una generalización de las operaciones aritméticas elementales, en estas condiciones, en la base de su objeto se hallaba el problema de dar solución a las ecuaciones.
2. El álgebra deviene en una teoría de las ecuaciones, en cuanto, se ocupó de manera priorizada de su descripción, clasificación, sistematización de sus soluciones, etc.
3. Este estadio se corresponde con lo que se denomina álgebra moderna.

Bajo este carácter unificador y capacidad interpretativa del álgebra la obra de Nicholás Bourbaki se desarrolla en dos vertientes: la presentación de la historia de la matemática sobre bases estructuralistas y la presentación de las diversas teorías matemáticas bajo las consideraciones expresadas en su artículo "La arquitectura de la matemática".

¿Cuál es la definición del concepto de estructura dado por Nicholás Bourbaki?
El inicio del estudio sistémico de las estructuras matemáticas se vincula a la elaboración de la teoría de los grupos, y a la definición y formación del concepto "grupo".
El grupo se define como un conjunto de objetos matemáticos, de cualquier naturaleza, para los cuales se ha mantenido sólo una operación algebraica: la composición; y cuyas propiedades esenciales se describen por medio de un sistema de axiomas. Este sistema de axiomas son los que determinan la estructura de los grupos, debiendo responder solamente a las tres condiciones siguientes:

a) No ser contradictorios;
b) Ser independientes;
c) Constituir un sistema completo.

La generalización de estas características estructurales del grupo hacen posible las siguientes conclusiones sobre las componentes de la estructura matemática que deben participar en su definición:

a) La estructura matemática debe estar constituida por un conjunto de elementos, no importa de que naturaleza;
b) Estos elementos tienen que mantener entre sí ciertas relaciones;
c) Con esos elementos se pueden realizar determinadas operaciones cuyas particularidades se describen mediante un sistema de axiomas.

Las relaciones entre los elementos de los conjuntos que determinan la estructura, pueden ser las más variadas por su naturaleza, implicando igual variedad en el sistema de axiomas, o sea, en los posibles tipos de estructuras matemáticas.
En las estructuras matemáticas se destacan tres grupos básicos, éstos son:

1-Estructuras algebraicas.
2-Estructuras de orden.
3-Estructuras topológicas.

La relación entre los elementos de los conjuntos matemáticos puede ser una relación entre tres elementos, uno de los cuales se puede denominar el tercer elemento, y éste está dado en función de los primeros. Este tipo de relación ya la hemos descrito cuando definíamos los grupos, pero también es característico para los anillos y los campos.
Este tipo de relación ha recibido el nombre de "Ley de composición" y la operación que ellos realizan se llama "operación algebraica", por lo tanto, se denomina estructura algebraica a un conjunto que tiene como característica fundamental de sus relaciones la "Ley de composición" y sus operaciones son "operaciones algebraicas".
Cuando en un conjunto matemático puede determinarse relaciones entre dos de sus elementos que establezcan su ordenación, se dice que este conjunto se caracteriza por relaciones de ordenación. La estructura de este tipo de relaciones es la que se denomina estructura de orden.
Cuando en un conjunto matemático se introducen los conceptos de límites y continuidad, que son aceptables para el sistema de axiomas, se considera que para este sistema se ha establecido la topología y que la estructura de este sistema es una estructura topológica.
Estos tres tipos de estructuras son las que Bourbaki considera fundamentales, y además, plantea que estas estructuras se deben denominar estructuras matemáticas básicas, de las que

se pueden derivar, con la introducción de axiomas complementarios, una gran cantidad de estructuras e infinidad de conclusiones teóricas.
Bourbaki considera que la estructura algebraica típica es la estructura de grupo, que las relaciones de orden se refieren a las entidades típicas de la lógica de relaciones y que las estructuras topológicas se refieren a los conceptos de entorno, límite y continuidad.
Estos tipos de estructuras dan lugar o son la base de las diversas teorías matemáticas mediante su diferenciación y combinación. La diferenciación consiste en la limitación de la generalidad de las estructuras fundamentales mediante axiomas adicionales y la combinación no es más que la construcción de estructuras que pueden denominarse múltiples, por interferencia de dos estructuras que pueden denominarse múltiples, por interferencia de dos estructuras básicas, ajustadas orgánicamente mediante uno o varios axiomas que lo enlacen. Es decir, estas estructuras básicas no siempre se presentan en forma pura, sino que con mucha frecuencia se interfieren mutuamente creando las llamadas estructuras complejas.
Un ejemplo de lo planteado anteriormente lo constituye la serie de números naturales, que conjuga las tres estructuras.
El último estadio del proceso estructural de Bourbaki se corresponde con las teorías particulares de la matemática clásica.
Bourbaki considera que de esta forma, las estructuras dejan de presentarse como autónomas, adoptando la forma de encrucijadas, y que estas encrucijadas con sus jerarquías constituyen la arquitectura de la matemática.
N. Bourbaki formula una serie de conclusiones metodológicas que implican la concepción de las estructuras matemáticas, tanto en la determinación del objeto de esta ciencia como en las posibilidades de su sistematización y desarrollo. A continuación señalaremos dichas conclusiones:

a) La matemática se debe definir ahora como la ciencia que estudia las estructuras matemáticas, pues, los únicos objetos matemáticos son, precisamente, estas estructuras.
b) Existe sólo una ciencia matemática dividida en una serie de disciplinas que logran su unidad gracias a la “estructura matemática” y al “método axiomático”.
c) En lugar de las partes tradicionales de esta ciencia: análisis, cálculo diferencial, álgebra, geometría, teoría de los números, que son esferas autónomas de hecho desligadas entre sí, se establece una jerarquía de estructuras que componen los vínculos internos entre las diferentes partes integrantes de esta ciencia.
d) Es sabido que el método axiomático fue uno de los factores que desempeñaron un papel fundamental en el proceso de fundamentación de la unidad del saber matemático. Según Bourbaki, dicho método fue la savia que nutrió todo el organismo de las matemáticas y el instrumento que utilizaron todos los grandes matemáticos en su análisis de los concepto básicos de esta ciencia.

CRÍTICA A LA TEORÍA ESTRUCTURAL DE LA MATEMÁTICA ASUMIDA POR N. BOURBAKI.

La historia bourbakiana es denominada por los estructuralistas como diacronia, que no se corresponde con la presentación marxista-leninista de la historia. Esto no significa que el ensayo histórico de Bourbaki resulte carente de valor, pues en este se percibe la lógica del desarrollo de las estructuras matemáticas.
En la historia de Bourbaki falta la relación de la práctica con la génesis de estas estructuras, el cumplimiento de las leyes generales en el desarrollo de la matemática, la existencia de contradicciones internas y externas como fuente de este desarrollo y otros presupuestos marxistas. Aquí el autor pretende no hacer referencias biográficas o anecdóticas, intentando

poner de manifiesto fundamentalmente las ideas directrices de cada teoría y la forma en que han actuado unas sobre otras.
La obra está carente de toda explicación acerca de los factores externos e internos que han determinado el desarrollo de la matemática a lo largo de los siglos.
Es bueno señalar que el carácter explicativo del álgebra, su característica unificante es innegable, y además, presentar diversas partes del álgebra, de manera que ésta pueda ser utilizada tanto en las aplicaciones como en la explicación de otras teorías, no tiene nada criticable.
Debido a la forma en que el desarrollo de la matemática influye de conjunto sobre todas sus teorías, la obra magna que emprendió Bourbaki, de escribir toda la matemática sobre bases estructuralistas, no podía constituir una obra definitiva.
Puede plantearse que la consideración estructuralista de Bourbaki cuenta con limitaciones históricas. Las ideas bourbakianas no tienen el grado de unilateralidad del logicismo, intucionismo y formalismo, pero tampoco quedan establecidas por medio de ellas sus diferencias, excluyendo al intuicionismo, cuyas diferencias no necesitan explicación.
Bourbaki tiene toda la razón cuando plantea que el estudio de la fundamentación de la matemática, realizada desde principios del siglo XIX, solo ha sido posible debido a un esfuerzo paralelo de sistematización de la lógica, al menos en aquellas partes que rigen el encadenamiento de las proposiciones matemáticas, y también cuando plantea que la historia de la teoría de conjuntos y de la formalización en matemática, tampoco pueden separarse de la historia de la lógica matemática. Pero estos son planteamientos que corresponden a hechos innegables, cuya esencia no es objeto de análisis por N. Bourbaki.
A pesar que Bourbaki no hace ninguna consideración sobre la sujeción a la ley del transcurso tomado por el lenguaje matemático, hace una breve historia de la deducción y de su correlación con el lenguaje aritmético.
Bourbaki considera que la deducción, introducida por los griegos, servirá de base a la reflexión filosófica y matemática de las edades posteriores. A partir de aquí el autor concluye que la lógica formal se va a desarrollar sobre el modelo de las matemáticas hasta llegar a la creación de lenguajes formalizados.
Cuando Bourbaki habla acerca de la formalización de la lógica, considera que los griegos querían extender a todo el campo del pensamiento humano los procedimientos de la articulación del discurso empleados en la retórica y en la matemática.
Después de referirse a la formalización de la lógica hasta Aristóteles, concluye en que al desarrollarse el álgebra no podían dejar de observarse la analogía entre sus expresiones y las de la lógica formal.
Cuando Bourbaki llega a los logicistas modernos se aprecia que no se aviene a tal manera de pensar, lo que trae como consecuencia, que Frege, Peano y Russell no resulten bien situados en su historia.
Por otra parte, reconoce de forma descriptiva la contribución de los logicistas al lenguaje formalizado, la que encuentra su punto culminante en los **“Principia Mathemática”** de Whitehead y Rusell.
Como resumen del pensamiento de Nicholás Bourbaki podemos decir que a partir de un número de estructuras fundamentales o estructuras matrices no deductibles unas de otras, la matemática está engendrada por un doble movimiento de diferenciación interna de las estructuras y de combinaciones entre ellas, o entre ciertas estructuras de una y de otra.

PRINCIPALES HECHOS MATEMÁTICOS DEL SIGLO XX.

Como veremos, algunos de estos hechos ya han sido ampliamente citados, otros sólo han sido mencionados (o lo serán) alguna que otra vez y hay algunos que no podremos ocuparnos de ellos en esta obra.

1era Mitad:

- La presentación de los 21 Problemas por parte de Hilbert en el Congreso Internacional de 1900.
- La definición de Métrica y Espacio Métrico Abstracto por Frechét en su tesis de 1906.
- Establecimiento de la Teoría de Conjuntos (sobre la base de los trabajos de Cantor, Peano, Hilbert, Cohen, Gödel y muchos más que permitieron la asimilación de este nuevo tipo de pensamiento matemático, ver conferencias 13 y 14).
- Surgimiento del Análisis Funcional (gracias a las contribuciones de Fredholm, Hilbert, Schmidt, Fischer y Riesz, sobre todo).
- Se empieza a desarrollar la modelación bio-matemática con los trabajos de Vito Volterra, proseguidos por Lotka.
- En los trabajos de Lebesgue se consolida la teoría de la medida y la integración, donde aportes significativos son dados por Radon y Haar.
- Desarrollo de nuevas teorías geométricas con Weyl y Cartan.
- Desarrollo de la Teoría de la Estabilidad según Liapunov, así como de la Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en general.
- Desarrollo de la Teoría de Oscilaciones por parte de la escuela rusa de Andronov.
- Se funda la IBM (1927), lo que trae aparejado el desarrollo de la cibernética y su ingeniería propuesta por esta Ccompañía.
- Se funda la IMU en 1947.

2da Mitad:

- Desarrollo vertiginoso de la Cibernética y su mercado de software, baste como ejemplo que en Agosto de 1996, Bill Gates tenía una fortuna personal de 16 mil 622 millones de dólares.
- Implementación y desarrollo de la Teoría de Control y Optimización.
- El problema 16 de Hilbert: **Sea F(x,y) un campo vectorial polinomial en RxR de grado d, encontrar una cota que sólo dependa del grado d, del número de ciclos límites que tiene F y de la posición relativa que tienen ellos**, se ha mostrado como una fuente muy fértil de investigaciones en el campo de la Teoría Cualitativa de EDO (aún no completamente resuelto).
- El desarrollo de la matemática según el esquema estructuralista de Bourbaki, significó un avance en muchos campos de esta (ver punto anterior).
- Se consolida la Teoría Cualitativa como una de las principales ramas en expansión con los trabajos de Birkhoff, Pontriaguin, Moser, Smale, Kolmogorov, Arnold y otros.
- El desarrollo del álgebra homológica (a partir de 1960) en los trabajos de Alexander Grotendieck.
- El desarrollo del Análisis Numérico, sobre todo relacionado con la simulación de diversos fenómenos, entre ellos los viajes espaciales.

- El Segundo Método de Liapunov, muestra su potencia y flexibilidad al adaptarse al estudio de diversas propiedades cualitativas, no sólo las referidas a la estabilidad, su geografía se amplía de Europa a todo el mundo.
- El desarrollo de la cibernética "toca" diversas ramas matemáticas, surgen la Geometría y el Algebra Computacional por ejemplo.
- La Informática invade la comunicación, surge el e-mail como la forma más barata, segura y cómoda de envío de información.

ANÁLISIS FUNCIONAL.

El Análisis Funcional es una parte muy reciente de las Matemáticas cuyo origen y desarrollo, como parte entidad propia, tiene lugar a lo largo de este siglo, y esta indisolublemente unido a la topología.
Ya desde el comienzo del Cálculo Diferencial fue poniéndose en evidencia la conveniencia de considerar conjuntos cuyos elementos, a diferencia de lo que sucede en el Análisis clásico, no son puntos del espacio euclídeo ordinario, sino funciones.
En este sentido puede entenderse, por ejemplo, el famoso "principio de superposición", enunciado por Daniel Bernoulli en torno a 1750, que afirma que la forma más general que puede tomar una cuerda homogénea de longitud π mantenida en tensión y sometida a vibración en un plano, puede obtenerse como "superposición" de las posiciones más sencillas que pueden adoptar.
En terminología actual, esto significa que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es un espacio vectorial, cerrado para alguna topología, generado por una familia de funciones.
Probablemente los antecedentes más claros del Análisis Funcional se pueden encontrar en el Cálculo de Variaciones.
En este contexto donde aparece primero la idea de distancia entre funciones.
Además de sus aplicaciones Geométricas y Físicas, el Cálculo de Variaciones está íntimamente ligado a uno de los problemas más importantes del Análisis del siglo XIX: el llamado Problema de Dirichlet. Este problema (para la ecuación de Laplace) consiste en encontrar una función U, armónica en un dominio Ω (del plano, por ejemplo), verificando:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ en } \Omega, \text{ u } (Fr\Omega) \text{ prefijado.}$$

Este problema y su análogo en 3 o más variables, están relacionado con multitud de problemas Físicos (Cálculos de potenciales, etc.) y Matemáticos, y a lo largo del siglo XIX se hicieron muchos intentos para solucionarlo.
Pero el método que nos interesa destacar ahora es el llamado Principio de Dirichlet, según el cual la solución del problema es la función U tal que su restricción a Γ es el valor prefijado, digamos f, y hace mínima la llamada integral de Dirichlet:

$$D(v)=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy,$$

en el conjunto F, definido de la siguiente forma, $F=\{v\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$: $v(\Gamma)=f$ y $D(v)<\infty\}$.
Este principio fue ya utilizado por Gauss en relación con problemas de determinación de funciones analíticas en 1839, y posteriormente por Lord Kelvin en1847, en conexión con la

teoría del potencial. El nombre del principio de Dirichlet fue dado por Riemann, quien lo usó en sus importantes trabajos sobre funciones holomorfas y abelianas.

Los esfuerzos de Weierstrass y su escuela (Du Bois-Reymond, Zaremba, etc.) consiguieron fundamentar rigurosamente la mayor parte de los resultados y argumentos clásicos del Cálculo de variaciones, salvo el principio general de existencia de extremo. Desde nuestra perspectiva, este fallo es perfectamente comprensible: los teoremas generales que implican la existencia de extremo de una función real (continua),están basados en la notación de compacidad. De hecho, la primera demostración rigurosa del principio de Dirichlet, dada por Hibert alrededor de 1900, se basa en la posibilidad de extraer una subsucesión uniformemente convergente de una sucesión $(U_n) \subseteq F$, tal que $(D(U_n)) \downarrow \text{Inf}\{D(v): v \in F\}$. Para ello, Hilbert tuvo que redescubrir una versión del que puede considerarse uno de los primeros teoremas del Análisis Funcional: el teorema de Ascoli-Arzelá.

Uno de los primeros problemas planteados con la rigorización del análisis, fue estudiar condiciones bajo las cuales el límite (puntual, por supuesto) de sucesión de funciones, conservara las buenas propiedades que pudieran tener las funciones de sucesión (continuidad, derivabilidad, etc.) Los primeros intentos en esta dirección, consistieron en imponer condiciones más restrictivas sobre la convergencia de la sucesión. Así surgió la noción de convergencia uniforme (Weierstrass, 1841; Stokes, 1847; Von Seidel, 1848; Cauchy, 1853). La postura de los italianos Dini, Ascoli y Arzelá, fue radicalmente diferente. En lugar modificar la noción de convergencia empleada, dieron una condición general sobre el conjunto formado por la sucesión de funciones (la equicontinuidad: Ascoli, 1883), de tal modo que el límite puntual es necesariamente continuo. Los trabajos posteriores permitieron demostrar que toda sucesión equicontinua de funciones acotadas sobre un cerrado y acotado de R^n, posee una subsucesión uniformemente convergente, extendiendo así el clásico teorema de Bolzano para conjuntos acotados de R a conjuntos de funciones. Una version de este teorema de compacidad en espacios funcionales es la que redescubrió Hilbert para su demostración del principio de Dirichlet.

Otro de los rasgos distintivos del Análisis Funcional es la algebrización del Análisis. Los métodos algebraicos se han desarrollado casi siempre antes que los analíticos y, al considerar esencialmente conjuntos finitos, suelen ser más fáciles de usar. Por ello, una idea reiteradamente usada por los analistas ha sido la de considerar las ecuaciones funcionales como casos límites de ecuaciones algebraicas, cuya solución es más sencilla. Así, por ejemplo, la deducción que hace D. Bernoulli en 1750 de la solución general de la cuerda vibrante, se basa en sustituir la cuerda por n masas puntuales, calcular la posición general del sistema a lo largo del tiempo, y hacer tender formalmente n a infinito. El descubrimiento por D'Alembert de la ecuación diferencial que rige el movimiento y el desarrollo de las técnicas analíticas, relegó el método de Bernoulli a un segundo plano. Sin embargo, la idea persistió y tuvo una influencia decisiva en los trabajos sobre Física de Lagrange y, sobre todo, de Fourier, para la obtención de las ecuaciones diferenciales que controlan los fenómenos de transmisión del calor (ver Conferencia 10). Hay que hacer notar que el método de truncamiento usado por Fourier para resolver el sistema (7), no siempre conduce a una solución.

Durante todo el siglo XIX se hicieron diversos intentos para elaborar una teoría satisfactoria para resolver los sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas (Poincaré, 1895; Van Koch, 1896, etc.), pero sin demasiado éxito. Hubo que esperar a 1913, a la publicación de la Memoria definitiva de F. Riesz "**Les systemes d'equations a une infinité d'inconnues"** (París).

El método de separación de variables, aplicado a otras ecuaciones diferenciales (en general no homogéneas), conduce al estudio de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden $y'' - q(x)y + \lambda y = 0$, donde λ es un parámetro complejo, q(x) es real, y la función incógnita es de

clase 2 en un intervalo (a,b) y satisface unas condiciones de contorno $\alpha_{1y}(a) + ß_{1y'}(a) = 0$, $\alpha_{2y}(b) + ß_{2y'}(b) = 0$, Ch. Sturm (1836) y J. Liouville (1837) desarrollaron una teoría general para abordar este tipo de problemas (llamados desde entonces problemas de Sturm-Liouville). Gran parte de los esfuerzos de los analistas del siglo XIX, se dirigieron a tratar de entender la teoría de Sturm-Liouville para tratar distintos tipos de ecuaciones en derivadas parciales con 3 ó más incógnitas.

El ejemplo más representativo y, probablemente, más influyente en el establecimiento del análisis funcional, es el de las ecuaciones integrales.

Fue en 1888 cuando Paul du Bois-Reymond sugirió el nombre de ecuaciones integrales para este tipo de problemas, y propuso desarrollar una teoría general de tales ecuaciones como métodos alternativos para resolver problemas de ecuaciones diferenciales.

Los primeros resultados generales en esta dirección, fueron obtenidos por J.M. Le Roux (1894) y V. Volterra (1896). Ambos establecieron teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones del tipo $f(x) + \int_a^x k(x,t)f(t)dt = g(x)$, mediante hipótesis adecuadas sobre el núcleo K. Los resultados son muy similares, pero el trabajo de Volterra tuvo una mayor influencia posterior, al destacar las propiedades algebraicas del operador, lo que le permite obtener la solución en términos de una nueva ecuación integral de segunda especie, cuyo núcleo (o resolvente) viene dado por la suma de la serie de núcleo iterados.

I. Fredholm, estudiante de Mittag-Leffler y más tarde su colega en Estocolmo, realizó una visita a Paris en 1899, entrando en contacto, con Poincaré y otros famosos matemáticos de la época. En 1900 publicó una nota, titulada **"Sur une nouvelle méthode pour la resolution du probleme de Dirichlet"**, completada dos años más tarde por un artículo en **Acta Mathematicae**, que iban a provocar un gran impacto en la Comunidad Matemática. Como indica el nombre de la nota de 1900, la intención original de Fredholm es dar un nuevo método de resolución del problema de Dirichlet.

En el artículo de **Acta Mathematicae** de 1903, Fredholm completó los resultados obtenidos probando la Alternation de Fredholm (ver I.G. Petrovski-**"Lecciones de la Teoría de Ecuaciones Integrales"**, Mir, Moscú, 1971).

Estos resultados supusieron el punto de partida de la moderna teoría espectral e influyeron grandemente en el desarrollo posterior del Análisis Funcional.

Los sensacionales resultados de Fredholm se extendieron rápidamente y pronto llegaron a Gottingen, lugar de residencia de David Hilbert, a la sazón unos de los matemáticos más reputados de la época. Hilbert se interesó vivamente por el tema y entre 1904 y 1910 publicó 6 artículos sobre el tema (publicados posteriormente en forma de libro, 1912). Todos los especialistas coinciden en señalar como más importantes el primero (1904) y, sobre todo, el cuarto (1906) al que, por ejemplo, J. Dieudonné considera como el primer artículo de Análisis Funcional.

Los trabajos segundo y tercero de Hilbert sobre E.I. se dedican a aplicar los resultados de distintos problemas de contorno en Ecuaciones Diferenciales y a la teoría de Sturm-Liouville.

El artículo cuarto es uno de los más apreciados de Hilbert. En él aparece claramente el espíritu actual del análisis funcional y la Teoría Espectral. En efecto, en este artículo Hilbert da un salto cualitativo: abandona deliberadamente el marco de las ecuaciones integrales y trata de crear una teoría general de formas bilineales y cuadráticas "continuas" que es aplicable en particular al estudio de E.I. En efecto, Hilbert introduce la notación "Sistema Ortogonal Completo de Funciones" como una sucesión (Ψ_n) de funciones continuas en [a,b] tal que $(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm}$ y se cumpla la "relación de completitud" siguiente: $(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \Psi_n)(g, \Psi_n)$, para todo par de funciones continuas f y g.

De hecho, en el trabajo de Hilbert aparecen ya (en términos de la forma cuadrática asociada) algunas de las clases más importantes de operadores (de Hilbert-Schmidt, nucleares, etc.), aunque la formulación moderna en términos de operadores lineales, en lugar de formas cuadráticas, se debe a F. Riesz.

Es evidente, con una perspectiva actual, que estos resultados están prefigurando la teoría de los espacios de Hilbert en su versión canónica de espacio l_2. Por otro lado, en 1906 aparece también la famosa tesis doctoral M.Fréchet **"Sur quelques points du calcul fonctionnel"**, que tuvo una tremenda influencia tanto para el desarrollo del Análisis Funcional como para la Topología. En su tesis, Frechet introduce la notación abstracta de distancia de un conjunto, lo que permite extender las notaciones habituales de entornos, límites, continuidad, etc. en conjuntos abstractos. También introdujo a Frechet las nociones de compacidad, completitud y separabilidad, y las estudió en el contexto de distintos espacios funcionales (C([a.b]), H(D), B([a,b]), etc.), mostrando la importancia de las mismas.

Estas ideas topológicas se difundieron rápidamente. No es extraño, pues, que se intentaron aplicar en el contexto de los importantes trabajos desarrollados por Hilbert. Este programa fue llevado a cabo por el mismo Frechet y unos de los mejores discípulos de E. Schmidt quién, en un artículo publicado en 1908 definió el "Espacio de Dimensión Infinita" l_2 , con las nociones actuales de producto escalar, norma, ortogonalidad, etc. Introdujo también el lenguaje geométrico actual, probando el teorema de la proyección ortogonal y el proceso de ortogonalización que lleva su nombre.

Otros dos jóvenes matemáticos, E. Fischer y F. Riesz, también compartieron esta visión geométrica y topológica del espacio de Hilbert, lo que les llevó a descubrir (independientemente) el llamado "teorema de Fischer-Riesz" que a su vez establece una inesperada relación de estos temas con otro gran descubrimiento de la época: la Teoría de integración de Lebesgue.

Probablemente, unos de los mayores responsables del desarrollo del Análisis Funcional, tanto por la variedad de aplicaciones y originalidad de sus contribuciones, es el matemático húngaro Federic Riesz (1880-1956). Ya hemos comentado el famoso teorema de Riesz-Fischer, descubierto independientemente por Fischer y Riesz en este campo. En el mismo año, Frecher y Riesz, independientemente obtienen la representación de cualquier forma lineal continua T sobre el espacio L^2 en la forma $T(f) = (f,g) = \int f(x)g(x)\,dx$, para alguna g del mismo espacio.

Dos años más tarde, en 1909, Riesz resuelve completamente un problema abordado por Hadamard y Fréchet en 1903 y 1904, probando que cualquier funcional lineal continuo T sobre el espacio C((a,b)) puede escribirse en forma de integral de Stieltjes $T(f)=\int_a^b f(x)\,dw(x)$, donde w es una función de variación acotada.

Este es el famoso "Teorema de representación de Riesz", que tendría gran influencia en el desarrollo posterior de la teoría de la integración abstracta. Punto de partida de sucesivas generalizaciones por Radon y muchos otros, este teorema se tomó como definición básica en la "Teoría de medidas de Radon" desarrollada por el grupo Bourbaki a mediados de los 40.

En 1910, Riez introduce los espacios L^p y l^p, $1<p<\infty$, como generalización natural de L^2 y l^2.

Vemos pues, que en la obra de Riesz se van conformando en nociones básicas del Análisis Funcional, como son la noción de norma, espacio dual, convergencia débil, etc. Pero no acaba aquí el trabajo seminal de Riesz, ya que en un artículo fundamental sobre ecuaciones funcionales lineales, publicado en 1918 en **Acta Mathematicae**, Riesz crea su famosa teoría de operadores compactos versión lineal de gran parte de las nociones introducidas por Hilbert en su cuarto artículo sobre E.I., pero sin disponer de la herramienta de la ortogonalidad y la geometría del espacio de Hilbert. Aunque el desarrollo de la teoría lo hace Riesz en un

espacio de Banach concreto, el espacio C ([a,b]), el mismo señala que esto no es esencial, y los resultados son válidos en otros espacios funcionales. De hecho toda la teoría se desarrolla en término de la noción de norma, cuyos axiomas se advierten también en este trabajo, en el contexto de C ([a,b]).
A partir de los trabajos de Riesz y Helly, parece natural llegar a la definición general de normas en un espacio vectorial arbitrario. Esto aconteció en la tesis de S. Banach, definida en 1920 y publicada dos años después en **Fundamenta Mathematicae**. En la introducción, Banach declara su intención de demostrar una serie de resultados válidos en distintos "Campos Funcionales", para los cuales establece una serie de teoremas en un marco muy general que, por especialización, dan lugar a los distintos resultados buscados. El marco general en cuestión es precisamente lo que hoy conocemos como espacio normado completo.
Banach da la definición axiomática de espacio vectorial real y de norma y prueba, entre otros, el principio de acotación uniforme en forma general.
En 1922 se publica el libro **"Lecons d' Analyse Fonctionnelle"**, de P. Levy, alumno de Hadamard, en donde por primera vez aparece el nombre de Análisis Funcional. Con su bautismo oficial, podemos considerar, pues, que termina el proceso funcional.

CUESTIONARIO

1. Abunde sobre los factores que llevaron a que la URSS (hoy disgregada en múltiples estados) y EEUU se convirtieran en los polos mundiales de la matemática en este siglo.

2. ¿Cuál es el status del mapa mundial de las matemáticas?

3. Presente las ventajas y desventajas de la tendencia estructuralista de las matemáticas, propugnada por Bourbaki.

4. ¿Cuáles son, a su juicio, los principales hechos matemáticos de este siglo?

5. Defina punto de acumulación. Ejemplifique en **Q** y **R** con diferentes topologías.

6. Estudie los axiomas de separación y defina espacios de Hausdorff, regulares y normales.

7. ¿Cuándo un espacio es conexo y arco-conexo? Presente la relación entre estos conceptos.

8. Enuncie los teoremas que son considerados las tres llaves del Análisis Funcional.

9. A lo largo de los congresos de la IMU, ha habido 42 ganadores de la Medalla Fields. Nombre algunos de ellos y presente sus resultados fundamentales.

10. El 14 de octubre de 1997, la Royal Swedish Academy of Sciences, anunció los ganadores del Premio Nobel en Economía. Los ganadores fueron los Profesores Robert C. Merton, de la Universidad de Harvard y Myron S. Scholes de la Universidad de Stanford, por el descubrimiento de *"un nuevo método para determinar el valor de las derivadas"*, lo que contradice, en cierta forma, las palabras de Alfred Nobel al instaurar el Premio, ¿cuál es su opinión al respecto?

Conferencia 17. Cien Años de Teoría Cualitativa.

"La actividad matemática puede ser considerada como una relación con la práctica diaria, fuera de los espacios académicos"

T. Nunez

En los límites de la Mecánica Celeste, la Teoría de Oscilaciones y (en parte) de la física matemática, se desarrollaron, al margen de métodos cualitativos, nuevos métodos de integración, en particular, los que se resuelven con series según las funciones especiales. Esto significó, el desarrollo del aparato del Análisis Matemático, completando de esta manera, el cuerpo de una teoría matemática relacionada con las ecuaciones diferenciales ordinarias y no como había estado sucediendo hasta ese momento, el desarrollo de los métodos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, a raíz del desarrollo de las propias teorías matemáticas. Esto es un índice, por supuesto, de la calidad del pensamiento matemático de finales del siglo pasado.

Por otra parte, en el estudio de ciertos sistemas físicos, resulta interesante, y casi siempre necesario, conocer propiedades (de las soluciones de la ecuación o sistema que modela tal sistema) tales como acotamiento, estabilidad, periodicidad, etc., sin tener que recurrir a la ardua y laboriosa tarea, que en muchos casos es impracticable, de encontrar expresiones analíticas para las soluciones. De este modo, surgió el problema de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de "su propia expresión", dando lugar a la **Teoría Cualitativa** de las ecuaciones diferenciales, teoría que surge en la segunda mitad del siglo XIX y que fue abordada inicialmente por Jules Henri Poincaré (1854-1912) y Alexander Mijaílovich Liapunov (1857-1918) aunque por motivos diferentes (uno, debido al estudio de figuras de equilibrio y de la estabilidad del movimiento **"Problème géneral de la stabilité du mouvement"**, traducción francesa (1907) del original en ruso (1893), **"Sur les figures d'equilibre peu diffèrentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne dovée d' un mouvement de rotation"** (1906) y el otro, debido a sus investigaciones en Mecánica Celeste, **"Sur les courbes définie par une équations differentielle"** (1880), **"Memoire sur les courbes définie par une équation differentielle"** (1881-1886) y **"Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste"** (1892-1899).

Como se ha repetido tantas veces, para Galileo el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático y para explicar un fenómeno es necesario leer sus caracteres: puntos, líneas, ... Esto significa que más que atribuir el movimiento de los objetos "graves" -los que se dirigen al centro de la Tierra- a una causa, lo que se debe hacer es descubrir la regla que lo regula. Por ello Galileo, al enunciar su solución al problema de la caída libre, lo hace diciendo que cualquier cuerpo, grande o pequeño, ligero o pesado, al caer libremente lo hace con una aceleración constante.

Con Newton el problema se resuelve suponiendo la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocida la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, la trayectoria se puede calcular y, para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que dado un estado del sistema los estados futuros quedan unívocamente determinados: este es el sentido del determinismo que Laplace creyó la Mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, mostraba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería.

Y sin embargo, en la práctica, había ciertos problemas que rehusaban someterse a este esquema, ya sea porque la ecuación diferencial no tenía solución en cuadraturas y había que conformarse con soluciones aproximadas, o porque la gran cantidad de ecuaciones involucradas hacía imposible el conocimiento de la solución del sistema. Esto apuntaba a que posiblemente el conocimiento de la solución del sistema.
Esto apuntaba a que posiblemente nuestro conocimiento y predicción de los fenómenos podían estar vedados en ciertas situaciones que no correspondieran a simplificaciones de la realidad, lo cual es la mayoría de los modelos estudiados.
Así ocurrió con la Astronomía y su intento de predecir con toda exactitud eclipses y movimientos de planetas. Afortunadamente Poincaré apuntó, como ya dijimos, la dirección en que muchos de estos problemas debían ser tratados: la Teoría Cualitativa, o más general, el estudio de los Sistemas Dinámicos, como se le ha venido a llamar en las últimas décadas.
Puntualizaremos que la historia toma, en ocasiones, el camino opuesto al indicado. Tal es el caso de la ecuación del péndulo libre, en la cual, el estudio cuantitativo precedió al cualitativo.
El primer estudio sistemático, utilizando técnicas cualitativas, para probar la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial, fue llevado a cabo por Poincaré, dando un método que lleva su nombre y que consiste en buscar puntos fijos para un cierto funcional, definido sobre un subconjunto de R^n.
Posteriormente y usando técnicas del Análisis Funcional, se aborda el mismo problema, consistiendo la esencia del método, en determinar puntos fijos para un funcional definido en el espacio:

$$C_T = \{x: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \ / \ x \text{ continua y T-periódica}\}.$$

Más recientemente, se trata el problema arriba aludido, con técnicas de **Teoría de la Bifurcación**, la cual surge al analizar la dinámica de sistemas físicos regidos por ecuaciones no lineales, dependientes de un parámetro.
Por otra parte, el estudio de la existencia de soluciones se reduce, en ocasiones, a la búsqueda de los ceros de un determinado operador, definido sobre un apropiado espacio de Banach. Este método tiene sus orígenes en los trabajos de Liapunov sobre la existencia y comportamiento de los estados de equilibrio de un fluido en rotación, en los de Poincaré sobre Mecánica Celeste y en los de E. Schmidt (**"Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integral-gleichung und der Verzweigung ihrer Losungen"** (1908)) sobre el estudio de la existencia de ecuaciones integrales no lineales.
Hemos visto como las etapas anteriores del desarrollo de las EDO desembocan, hacia el último cuarto del siglo XIX, en el trabajo de Poincaré, con el desarrollo de la teoría cualitatitva. Es a este eminente matemático, a quien le corresponde hacer una profunda reflexión del pasado, hacer algunos cambios radicales y proponer nuevas alternativas. En su comunicación al Congreso Internacional de 1908 Poincaré dijo: *"...En el pasado una ecuación sólo era considerada soluble cuando se puede expresar la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto es posible en una de cada cien. Lo que podemos siempre, o casi siempre, es resolver el problema cualitativo, de obtener la forma general de la curva representando la función desconocida..."* (ver M.W. Hirsch-**"The dynamical systems approach to differential equations"**, Bull. Amer. Math. Soc. vol.11, No.1, 1984, pág. 19).
En el trabajo de Poincaré de 1881, encontramos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$x'=P(x,y),\ y'=Q(x,y),$$

en lugar de la tradicional ecuación diferencial dy/dx=Q/P; la totalidad de las curvas definidas por esta ecuación constituye el llamado "retrato de fases" de las soluciones, el método de Poincaré permite obtener las características generales de todas las curvas, las cuales él demostró que existen solamente dos tipos: las trayectorias **cerradas** o **ciclos límites** y las trayectorias que tienden a un ciclo límite, o a un punto crítico en el que P=Q≡0.
En el acercamiento de Poincaré encontramos dos puntos de vista centrales en la forma de concebir la solución de una ecuación diferencial ordinaria.
Por un lado, el que una solución está descrita por una curva y no sólo por una expresión algebraica, y por otro, que una ecuación diferencial es un proceso determinístico, no considera la solución sólo como una función de la variable independiente, sino como una función de las condiciones iniciales (Hadamard).
Como una muestra de la magnitud de los estudios llevados a cabo por Poincaré, reproducimos la tabla de contenidos de **"Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Cèleste"**:

Volumen I.

Cap.1. Generalidades y método de Jacobí.
Cap.2. Integración por series.
Cap.3. Soluciones Periódicas.
Cap.4. Exponentes característicos.
Cap.5. No-existencia de integrales uniformes.
Cap.6. Desarrollo aproximado de la función de perturbación.
Cap.7. Soluciones asintóticas.

Volumen II.

Cap.8. Cálculos formales.
Cap.9. Los métodos de Newcomb and Lindstedt.
Cap.10. Aplicaciones al estudio de variaciones seculares.
Cap.11. Aplicaciones al problema de los tres cuerpos.
Cap.12. Aplicaciones a órbitas excéntricas.
Cap.13. Divergencia de las series de Lindstedt.
Cap.14. Cálculo directo de las series.
Cap.15. Otros métodos de cálculo directo.
Cap.16. Métodos de Gyldén.
Cap.17. Caso de ecuaciones lineales.
Cap.18. Caso de ecuaciones no lineales.
Cap.19. Métodos de Bohlin.
Cap.20. Series de Bohlin.
Cap.21. Extensión del método de Bohlin.

Volumen III.

Cap.22. Invariantes integrales.
Cap.23. Formulación de invariantes.
Cap.24. Uso de invariantes integrales.
Cap.25. Invariantes integrales y soluciones asintóticas.

Cap.26. Estabilidad de Poisson.
Cap.27. Teoría de consecuencias.
Cap.28. Soluciones periódicas de segundo tipo.
Cap.29. Varias formas del principio de acción mínima.
Cap.30. Formación de soluciones del segundo tipo.
Cap.31. Propiedades de soluciones del segundo tipo.
Cap.32. Soluciones periódicas del segundo tipo.
Cap.33. Soluciones doblemente asintóticas.

Estas ideas geométricas de Poincaré, así como los métodos numéricos de Runge y Kutta de principios de siglo, se comienzan a incorporar a los libros de texto después de la segunda mitad de este siglo, básicamente en los dedicados a los ingenieros. Asimismo, los métodos operacionales que se originan con Heaviside a fines del siglo pasado, los encontramos en muchos de los textos escritos en este siglo (en forma del operador D), como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales, más adelante en muchos libros es sustituido por el método de la transformada de Laplace, la cual es usada fundamentalmente para resolver ecuaciones diferenciales lineales, aunque se ha observado en estos años su utilización en diversas investigaciones puras.

El Análisis de la Estabilidad (Segundo Método de Liapunov).

El trabajo fundamental de A. M. Liapunov sobre la estabilidad del movimiento (publicado primeramente en ruso en 1892 y en una traducción francesa en 1907), originalmente recibió sólo poca atención y por un largo tiempo fue prácticamente olvidado. Justamente 25 años después, estas investigaciones fueron retomadas por algunos matemáticos soviéticos, al notar que el método de Liapunov era aplicable a problemas concretos en física e ingeniería.
Por tanto, cada vez fue mayor, el número de matemáticos que se "dedicaron" a la teoría de la Estabilidad fundada por Liapunov.
Los conceptos "estabilidad" e "inestabilidad" se originaron en Mecánica, como caracterizaciones del equilibrio de un cuerpo rígido. El equilibrio se dice estable si el cuerpo permanece en su posición original después de perturbaciones suficientemente pequeñas. Similarmente, un movimiento es llamado estable si es insensible a pequeñas perturbaciones y los cambios en los valores iniciales y los parámetros. Aquí, en el caso más simple, movimiento significa la variación de un punto con respecto al tiempo, de forma más general, entendemos por movimiento, las cantidades que determinan el estado de un sistema físico como una función del tiempo (tales como las coordenadas de Lagrange).
Liapunov explica el propósito que lo animaba en la Introducción: "*El problema que yo me he propuesto al comenzar el presente estudio, puede ser formulado como sigue: indicar los casos donde la primera aproximación resuelve realmente el problema de la estabilidad y dar métodos los cuales permitan resolver, al menos en algunos casos, cuando la primera aproximación no es suficiente... Todos los procedimientos pueden ser divididos en dos categorías. En la primera de ellas, incluimos aquellas que se reducen al estudio inmediato del movimiento perturbado, y el cual, consecuentemente depende de la obtención de la solución general o particular de la ecuación considerada... El conjunto de todos estos métodos de estudio será llamado el primer método. En la otra categoría, incluiremos todos los tipos de procedimientos que son independientes de la búsqueda de las soluciones de la ecuación diferencial del movimiento perturbado. Este es el caso, por ejemplo, para el bien conocido método de estudiar la estabilidad del equilibrio en el caso de la existencia de un potencial... El conjunto de todos los procedimientos en esta*

categoría se llamará el segundo método". Todo el mundo conoce hoy lo que significan estos métodos en la teoría de la estabilidad, pero Liapunov introdujo también en su memoria muchos e importantes conceptos y resultados en la teoría de ecuaciones lineales y no lineales, por ejemplo, la definición precisa de **estabilidad** y **estabilidad condicional**, los conceptos de **números característicos** o **exponentes de Liapunov** de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, los conceptos relacionados de **sistemas normales** y **reducibles**, el concepto de funciones de Liapunov, etc.
En este trabajo Liapunov dejo bien explícito que su segundo método estaba inspirado por la demostración de Lejeune Dirichlet del teorema de Lagrange sobre el estudio del equilibrio, dada la importancia de este trabajo de Liapunov, queremos presentar aquí el índice general de esta obra:

Capítulo 1. **Análisis preliminar**.
Generalidades sobre la cuestión considerada.
Sobre algunos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
Sobre un caso general de ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado.
Algunas proposiciones generales.

Capítulo 2. **Estudio de los movimientos estables**.
Sobre ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
Estudio de las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado.
Soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado.

Capítulo 3. **Estudio de movimientos periódicos**.
Sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos.
Algunas proposiciones concernientes a la ecuación característica.
Estudio de las ecuaciones diferenciales del movimiento perturbado.
Una generalización.

Nota: **Complementos a teoremas generales sobre estabilidad**.

El también llamado "Método Directo", no sólo se usa actualmente para probar teoremas de estabilidad y de mecánica teórica. Actualmente, este método es aplicado a problemas prácticos de la mecánica y de las oscilaciones eléctricas, particularmente, en el control ingenieril. La teoría del método directo, ha recibido un considerable avance en los últimos años y se aproxima a un cierto estado de completamiento. Han aparecido algunos trabajos en las últimas décadas, relacionados con el estudio del comportamiento de las trayectorias de ecuaciones diferenciales no lineales, que representan generalizaciones paulatinas de la ecuación del péndulo.
En estos trabajos, se intentan hacer planteamientos sobre la estabilidad del equilibrio, sin usar la forma explícita del movimiento perturbado, estos planteamientos se hacen usando (en adición a la ecuación diferencial o sistema) determinada función o funciones definidas en el Plano de Fases. Estas funciones usualmente se denominan Funciones de Liapunov. En general el signo de la función de Liapunov y el de su derivada son considerados y a veces se incluyen ciertas relaciones con otras funciones que cumplen determinadas propiedades.
El método admite una interpretación geométrica muy sencilla, la cual es muy probable sea debida a G. N. Chetaev (1902-1959) y la que es particularmente útil en las aplicaciones.

El mundo de las Oscilaciones. En los últimos 50 años hemos presenciado, un notable desarrollo de un campo de la Física-Matemática, designado con el nombre de **Mecánica No Lineal**. Este término, probablemente, no es del todo correcto, los cambios no han ocurrido en la propia Mecánica, sino mayormente, en las técnicas de resolución de sus problemas, sobre todo los tratados con ayuda de las ecuaciones diferenciales lineales, que ahora se sirven de ecuaciones diferenciales no lineales.

Esta no es una idea nueva en la Mecánica. En efecto, estos problemas no lineales son conocidos desde los estudios de Euler, Poinsot, Lagrange y otros geómetras de esa época, suficientes para ilustrar este período no lineal de más de un siglo. La principal dificultad de estos estudios, denominados clásicos, radica en la ausencia de un método general para tratar estos problemas, los cuales eran tratados sobre todo, por artificios especiales para obtener su solución (ver además de la Conferencia 9, **"De Lagrange hasta Arnold. Apuntes Metodológicos a una historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"** del autor).

A causa de esta dificultad la atención se concentró (como ya vimos) en las ecuaciones lineales, hasta encontrar algoritmos suficientemente simples y generales, que permitieran establecer los contactos con la física, a veces mediante algunas idealizaciones. Entre estos el más conocido es, posiblemente, el método de **oscilaciones pequeñas** el que, como su nombre lo indica, ofrece resultados satisfactorios, mientras las oscilaciones sean pequeñas, de donde resultan algunas simplificaciones bien conocidas, es suficiente mencionar, como ejemplo, la ecuación del péndulo. Sin embargo, los progresos en la física proporcionaron algunos problemas que no podían ser incluidos en la clase de **pequeñas oscilaciones**. Así, por ejemplo, el descubrimiento de las oscilaciones **autoentretenues** (al abordar el estudio de los arcos eléctricos y más tarde para lámparas con tres electrodos), oscilaciones periódicas cuya amplitud y período no dependen, dentro de ciertos límites, de las condiciones iniciales sino de los parámetros del sistema, no pudieron ser estudiadas por estos métodos lineales y por esta razón no pueden ser consideradas como **pequeñas**; estas dificultades en el estudio de tales problemas, bien utilizados desde el punto de vista práctico, duraron una veintena de años de este siglo. Dichas oscilaciones fueron llamadas por Alexander Alexandrovich Andronov (1901-1952) autooscilaciones, mientras que los sistemas en que son posibles tales procesos se denominan autooscilantes.

Hace dos decenios, Lorenz se esforzaba por entender los fenómenos atmosféricos, Henón estudiaba los movimientos de las estrellas y May el equilibrio de comunidades naturales. Mandelbrot trabajaba, desconocido para el mundo, con figuras monstruosas; Feigenbaum aún no llegaba a los Alamos y Farmer sólo era un joven más que crecía en Nuevo México. La Teoría de la Relatividad había dejado los templos sagrados de los académicos para convertirse en una frase más de todas las lenguas. La Teoría Cualitativa en general, y la Teoría de las Oscilaciones en particular es, posiblemente, el único lugar en que convergen tan disímiles disciplinas.

Ocurre en la práctica, que numerosos problemas pueden ser matematizados por medio de ecuaciones diferenciales periódicas (o bien autónomas) -pensar por ejemplo en oscilaciones de electrones, latidos de corazón, satélites artificiales, pulsaciones de objetos estelares,...- para los cuales se desea producir o impedir la aparición de fenómenos periódicos.

El estudio de la existencia de soluciones periódicas, incluso en el caso lineal, está lejos de ser trivial y se encuentra íntimamente ligado a numerosos problemas interesantes de la Matemática y que sobrepasan con creces los límites de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Estas consideraciones justifican la gran cantidad de trabajos dedicados, por parte de muchos matemáticos, al estudio del problema antes planteado.
Queremos apuntar aquí, la célebre frase de Poincaré: *"Lo que hace que estas soluciones periódicas sean tan apreciadas es que son, por así decirlo, la única brecha por donde podemos intentar penetrar en un lugar considerado hasta aquí inabordable"*. Como dijimos, el inicio de la Teoría Cualitativa en general y de la Teoría de Oscilaciones en particular, se sitúa a fines del siglo pasado, con los trabajos de Poincaré y Liapunov, aunque motivados ambos por diferentes razones. Sobre todo en los trabajos de Poincaré, publicados en esta época (1882-1892) se sientan las bases de la denominada **Mecánica No Lineal**. En estos trabajos, como sabemos, él estableció las nociones topológicas que caracterizan las curvas definidas por una ecuación diferencial y se ocupó de las soluciones dadas por series del pequeño parámetro, los primeros trabajos no tuvieron una aplicación práctica inmediata y tuvieron que esperar casi medio siglo para su aplicación, los segundos permitieron la solución de los antiguos problemas astronómicos por nuevas vías.
Como dijimos anteriormente, fue Andronov (**"Teoría de Oscilaciones"**, Moscú, 1929 escrita en colaboración con A. A. Witt y E. E. Chaikin) quien sugirió que las oscilaciones **autoentretenues** se experimentan en términos de los ciclos límites (soluciones periódicas aisladas) de la teoría de Poincaré, marcando una nueva época en estos estudios. Más aún, en 1937, él y L.S. Pontriaguin (1908-1983) definen la noción de sistema **rudo** (**estructuralmente estable**), teniendo en cuenta que una de las características del sistema autooscilante, puede ser la presencia de la llamada reacción o retroalimentación que controla el consumo de energía de la fuente no periódica, se desprende directamente de todo lo anterior, que el modelo matemático de un sistema de este tipo, debe ser rudo y notoriamente no lineal.

Intuitivamente, un sistema dinámico es estructuralmente estable, si pequeñas `perturbaciones' del sistema, no cambian el estado de fases, más adelante, con el desarrollo de la teoría cualitativa, se ha mostrado que la estabilidad estructural es una noción importante en dicha teoría y por lo tanto, fue en los últimos años, el tema de muchas investigaciones, en particular de la escuela de S. Smale.
Nosotros distinguimos implícitamente 4 etapas en el desarrollo de la Teoría de Oscilaciones, a saber, una primera etapa que comienza con los trabajos de Poincaré y termina en 1929; una segunda (desarrollada casi exclusivamente en la ex-URSS con los trabajos de Andronov y su escuela) que comprende el período de 1929-1940; la tercera etapa, a partir de 1945 y que concluye a mediados de los años 60, y marcada por el rápido desarrollo de la Teoría del Control Automático, de suerte que en esta etapa una serie de nuevos problemas aparecieron y la última etapa, desde la década de los años 70 hasta nuestros días y que transcurre muy influida por el desarrollo de los medios electrónicos de cómputo, con todas las ventajas que esto trae aparejado en la simulación y solución numérica de los problemas.
Sobre todo a partir de la última etapa, hay un rasgo que queremos destacar y es la ampliación de la `geografía' de las escuelas, que se dedican a esta teoría, sobre todo hacia América y Asia. Por otra parte, debemos distinguir en este desarrollo, dos grandes campos, por un lado el refinamiento de los métodos cualitativos `clásicos' a los que hemos hecho alusión y por el otro, el establecimiento de métodos cuantitativos cada vez más efectivos desde el punto de vista práctico.

A. M. LIAPUNOV

Uno de los más grandes Mecánico-Matemáticos del siglo pasado y principio de éste fue el científico ruso Alexander Mijaílovich Liapunov, quién además de dar solución a uno de los problemas principales de la mecánica en el siglo XIX, la teoría de la estabilidad del movimiento, obtuvo profundos y significativos resultados, tanto en la mecánica como en la matemática.

A.M. Liapunov nació el 25 de Mayo 1857, en Yaroslav, Rusia, fue el mayor de los tres hijos del conocido astrónomo M.B. Liapunov, de quien recibió su formación de matemática elemental, pasando posteriormente a estudiar en un gimnasio donde reveló grandes aptitudes para el estudio de las matemáticas.

En 1876, culminó sus estudios en el gimnasio con medalla de oro, por su excelentes resultados, e inmediatamente ingresa en la Universidad de Petersburgo, en la Facultad de Físico-Matemático. En esta época el representante principal de la escuela de Matemática de Petersburgo era el científico ruso P. L. Chebyshev (1821-1894) quién fue tutor científico de Liapunov y ejerció gran influencia en él.

En el año 1880, siendo estudiante, prepara un artículo relacionado con la hidroestática titulada **“Sobre el Equilibrio de los Cuerpos Pesados Sumergidos en Líquidos Pesados”**, por este trabajo recibió medalla de oro. En el propio año 1880 culminó sus estudios universitarios a propuesta de Chebyshev se queda trabajando en la cátedra de mecánica de la Universidad, ocupándose de las investigaciones relacionadas con las formas de los cuerpos celestes.

En el año 1885, defiende en opción al grado de Master, el trabajo titulado **“Sobre la estabilidad de las formas elipsoides de los líquidos giratorios en equilibrio”**. Más tarde fue invitado ocupar el cargo de jefe de cátedra de Mecánica Teórica de la Universidad Járkov, Ucrania, el cual acepta.

Su primer trabajo sobre la estabilidad del movimiento fue publicado en 1888 en la revista, **“Resultados de la Sociedad Matemática de Járkov”**. Para que se tenga una idea más clara del aporte decisivo del trabajo científico de Liapunov en la teoría de la estabilidad del movimiento, haremos un breve esbozo de la situación en este campo antes del aporte hecho por Liapunov.

Los problemas sobre la estabilidad, surgieron por primera vez en la mecánica mientras se estudiaban las posiciones de equilibrio de los sistemas.

La observación simple, muestra que algunas posiciones de equilibrio de sistemas sometido a perturbaciones pequeñas son estables; pero otras posibilidades de posición de equilibrio son en principio, imposibles de realizar desde el punto de vista práctico. Así por ejemplo, si un péndulo ocupa su posición inferior, una perturbación pequeña puede provocar solamente su oscilación alrededor del punto de equilibrio.

Si después de aumentar la perturbación se logra el algún momento detener el péndulo en la posición superior, entonces hasta un pequeño golpe provoca su caída.

En el ejemplo dado, el problema sobre la estabilidad se resuelve de manera elemental, pero en caso general no siempre queda claro bajo cuáles condiciones la posición de equilibrio es estable.

En el 1644 los criterios de estabilidad de los sistemas de cuerpos en equilibrio sometidos a la fuerza de gravedad en el caso general, fueron formulados por E. Torricelli, y en 1788 Lagrange demostró un teorema, que brindaba condiciones suficientes del equilibrio estable de sistemas conservativos arbitrarios.

A mediado del siglo XIX en la ciencia y la tecnología, surgieron problemas que exigían del planteamiento del problema general de la estabilidad, no solo del equilibrio, sino también del

movimiento, uno de estos problemas era el siguiente: la estabilidad del regulador centrífugo contenido en las máquinas de vapor de pequeñas potencias se mantenía por las vueltas del motor. Con el aumento de la potencia de la mecánica, el trabajo del regulador presentó problemas: no se garantizaba la seguridad del regulador y además se rompía el motor a causa del régimen inestable de trabajo.

Este fenómeno no fue entendido por los ingenieros y técnicos de esa época y creó una crisis en la construcción de motores.

Los científicos D. K. Maxwell (1868) y I. N. Vichnegradski (1876-1877) principalmente, demostraron que la solución de este problema, así como el desarrollo general de la teoría de regulación, exigían ante todo el establecimiento de los criterios del movimiento estable.

A finales del siglo XIX aparecieron trabajos, en los cuales el problema de la estabilidad del movimiento fue tratado desde una posición general, se resolvieron algunos problemas particulares y al tratar el mismo método de resolución a otros problemas, se llegaban a contradicciones.

La insuficiencia fundamental de los trabajos de este tiempo, consistía en que los autores al hacer el análisis de la ecuación del movimiento, perturbado, partían de las ecuaciones lineales, sin tener en cuenta la influencia de los términos de orden mayor.

Es a Liapunov a quién corresponde el honor de dar solución completa a la problemática anteriormente analizada.

Los trabajos y resultados obtenidos por Liapunov desde 1888 hasta 1892 fueron de gran valor y culminaron con su obra capital **“Problema general sobre la estabilidad del movimiento”**.

Este trabajo tiene tantas ideas y resultados de primer orden que toda la historia de la teoría de la estabilidad del movimiento se acostumbran a dividir en dos etapas: antes y después de Liapunov.

Los resultados obtenidos en este trabajo lo sitúan como el creador de la teoría moderna de la estabilidad, en él se da la definición de estabilidad del movimiento que se utiliza en nuestros días y que es conocida como estabilidad según Liapunov.

Este trabajo fue defendido en 1892, en opción al grado de Dr. en Matemáticas Aplicadas. Después de la defensa se le otorgó la categoría de Profesor, equivalente hoy en día a nuestra categoría de Profesor Titular (ver sección anterior).

En sus trabajos de esta época se refleja que él fue el primero en estudiar desde el punto de vista matemático el problema sobre la estabilidad del equilibrio y del movimiento para sistemas mecánicos en un número finito de grados de libertad, también una serie completa de resultados brillantes en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, fueron obtenidas por él.

Un grupo de sus trabajos está dedicado a la teoría de la figura de equilibrio de líquidos giratorios. Fue el primero en demostrar la existencia de figuras de equilibrio para líquidos homogéneos y débilmente no homogéneos dando respuesta a un problema planteado por Chebyshev.

En 1900 fue nombrado miembro correspondiente de la Academia de Ciencias y en 1901 Académico por la Cátedra de Matemática Aplicada la cual estaba vacante desde la muerte de Chebishev. En 1902 regresa a Moscú dedicándose completamente al trabajo científico, retorna al estudio de las figuras de equilibrio y su aplicación en la teoría de los cuerpos celestes. En este campo le pertenecen descubrimientos excepcionales de mucha profundidad.

Liapunov muere el 3 de Noviembre de 1918. Sus trabajos en el campo de las figuras de equilibrio representa en sí la primera investigación sobre la teoría de las ecuaciones integrales no lineales y el ciclo de trabajo sobre la figura de equilibrio de los líquidos giratorios y la estabilidad de las figuras ocupan un lugar central en toda la teoría de las figuras de equilibrio, también se dedicó al estudio del problema de Dirichlet, a las cuestiones relacionadas con la teoría de las responsabilidades junto al académico A. A. Markov, donde logró una

generalización significativa y puntualizó las condiciones bajo las cuales tienen lugar el famoso teorema del límite central.
Obtuvo resultados significantes en el campo de la Física-Matemática y corrigió resultados relacionados con la teoría del surgimiento de la luna, donde demostró a los científicos Poincaré y Darwin, lo erróneo de no considerar la llamada “Segunda Aproximación”.
Además de los amplios resultados concretos obtenidos por Liapunov en los diferentes campos de trabajo dejó como ejemplo múltiples y originales métodos de trabajo matemático para el estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de la estabilidad, de amplia aplicación actualmente en la Física, Astronomía, Química, Biología y desde el punto de vista técnico el funcionamiento de diferentes mecanismos, aviones, satélites, etc.
La etapa final de la vida de este gran científico transcurre con problemas relacionados a su visión, viéndose en la necesidad de recibir ayuda de su esposa para redactar los resultados obtenidos en sus investigaciones. Esto no fue en vano ya que los resultados científicos de Liapunov fueron y son ampliamente valorados en su patria y en el extranjero. Fue elegido miembro de honor en muchas universidades, miembro correspondiente de las Academias de Ciencias de Rumania y de París.
Hoy en día el material que dejó Liapunov sobre la teoría de la estabilidad, es uno de los que más se estudia e investiga por su importancia, actualidad y posibilidades de aplicación práctica a los problemas que se presentan en la ciencia y la técnica, a tal punto, que esta teoría es uno de los aspectos de la Matemática que todo Ingeniero y Físico debe dominar si desea estar actualizado en su campo de trabajo profesional.

CUESTIONARIO

1. Enuncie y demuestre los teoremas de Liapunov sobre estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad.

2. Presente la interpretación geométrica del Segundo Método de Liapunov.

3. Para la Ecuación de Liénard, $x''+f(x)x'+x=0$, demuestre la estabilidad de la solución trivial, mediante una apropiada Función de Liapunov.

4. Demuestre la prolongabilidad y oscilación de las soluciones de la ecuación de Liénard generalizada $x''+f(x)x'+g(x)=0$.

Conferencia 18. Los Fractales, el Caos y la Teoría de las Catástrofes.

"Ayuda a tus semejantes a levantar su carga, pero no a llevarla"

Pitágoras

LOS FRACTALES.

Dimensión, Simetría y Divergencia.

Los matemáticos reconocieron, durante la crisis de 1875-1925, que una comprensión aceptable de la irregularidad o fragmentación (como de regularidad y conexión) no puede ser satisfecha con la definición de dimensión tal y como se entendía en esos años: el número de coordenadas. El primer paso de un análisis riguroso es la carta de Cantor a Dedekind del 20 de junio de 1877, el próximo paso es el de Peano en 1890 y el paso final, en los años 20.

En estos tiempos, los matemáticos usaban el término dimensión en un sentido vago. Una configuración era llamada E-dimensional, si el menor número de parámetros reales, necesarios para describir sus puntos, en un cierto sentido, es E. Los peligros e inconsistencias en esta formulación, fueron puestos en claro por dos destacados trabajos de la última parte del siglo XIX: la correspondencia uno-a-uno de Cantor, entre los puntos de una línea y los puntos de un plano, y la aplicación continua de un intervalo sobre todo un cuadrado, debido a Peano. La primera destruyó la convicción de que un plano es más rico en puntos que una línea, y mostró que la dimensión puede transformarse por una aplicación uno-a-uno. La segunda, contradijo la creencia que la dimensión puede ser definida como el menor número de parámetros continuos reales, necesarios para describir un espacio, y mostró que la dimensión puede ser ¨creada¨ por una transformación uno-a-uno.

Después de la famosa tesis de Frechét de 1906, las investigaciones sobre métricas y espacios métricos crecieron exponencialmente, uno de los principales investigadores del tema fue el destacado matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942), una de cuyas direcciones de trabajo, relaciona los conceptos de medida y dimensión (ver P.R. Halmos-**"Measure Theory"**, Van Nostrand Cía, Inc., 1961). Sea p un número real no negativo arbitrario, $0 \le p < +\infty$ y dado $\alpha > 0$ consideremos:

$$\mu_p^{\alpha} = \operatorname*{extr}_{d(X_k)<\alpha} \inf \sum_{k=1}^{\infty} \left[d\left(X_k\right) \right]^p ,$$

donde $X = UX_k$ es una descomposición finita o infinita numerable cualquiera de X, en subconjuntos X_k de diámetro $d(X_k)$ menores que α.

Cuando $\alpha \to 0$, el número $\mu_p^{\alpha}(X)$ tiende en forma monótona creciente a un determinado límite (finito o infinito) $\mu_p(X)$.

Esta medida puede servir para definir la dimensión de un conjunto, debido a que un conjunto puede tener medida p-dimensional finita y no nula, a lo sumo para un sólo valor p. Observemos que la dimensión de Hausdorff de un conjunto no es necesariamente un entero, por ejemplo, la dimensión del conjunto ternario de Cantor (ver §50-2, nota 3 del texto citado antes) es $\ln 2/\ln 3 = 0{,}63093$, como se demuestra en la memoria original de Hausdorff **"Dimension und ausseres mass"** (Math. Ann., 79, 1919, 157-179).

Por otra parte, en 1913 Brouwer construyó una precisa, y topológicamente invariante, definición de dimensión (L. E. J. Brouwer-**"Collected Works"**, A. Heyting and H. Freudenthal (eds.), New York: Elsevier North Holland, 1975), la cual para una amplia clase de espacios, es equivalente a la usada hoy en día. Este trabajo de Brouwer, permaneció desconocido por varios años, así, en 1922, independientemente de Brouwer y entre sí, Menger y Urysohn, redescubrieron el concepto de Brouwer, con algunas mejoras importantes.
En este sentido, es claro que existen objetos en la Naturaleza que son irregulares y fragmentados (montañas, costas, hojas, etc.) y que exhiben un alto nivel de complejidad. La existencia de estos patrones, fue lo que retó a los matemáticos a estudiar aquellas formas que, desde el punto de vista euclidiano, no tenían ¨forma¨. Respondiendo a este reto, Benoit Mandelbrot, concibió y desarrolló una nueva geometría de la Naturaleza, él describió muchos de los patrones irregulares y fragmentados, identificando una familia de formas a las que llamó *fractales*. Este término fractal, viene del adjetivo latino fractus, que debemos entenderlo como fraccionado y debe ser entendido también como irregular (**"The fractal geometry of Nature"**, W. H. Freeman and Company, New York, 1983).
Mandelbrot definió un fractal, como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica y no necesariamente entera.
La dimensión topológica comprende al sentido habitual de la dimensión y es un número entero: cero para un punto, uno para una recta, dos para un plano y tres para un cuerpo en el espacio. La dimensión topológica es invariante ante homeomorfismos (aplicaciones f biyectivas, y bicontinuas; o sea, aplicaciones topológicas). En cambio, la dimensión de Hausdorff está definida para cualquier subconjunto de $\mathbf{R}^n$, pero no es invariante ante homeomorfismos.

El concepto que usó Mandelbrot, es una simplificación del concepto de dimensión de Hausdorff y corresponde exactamente a la definición establecida en 1958 por el matemático ruso Kolmogorov (**"A new invariant for transitive dynamical systems"**, DAN USSR, 119 (1958), 861-864) de la *capacidad* de una figura geométrica. Así, la capacidad de un conjunto plano E se define como:

$$d_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}; \qquad (K)$$

donde, si el conjunto E es un subconjunto acotado de un espacio euclidiano p-dimensional $\mathbf{R}^P$, entonces $N(\varepsilon)$ es el número mínimo de cubos p-dimensionales de lado ε, necesarios para cubrir a E. para un punto $N(\varepsilon)=1$; para una línea es $N(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ y para

un área es $N(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}$. Aplicando la definición anterior, es fácil comprobar que d_C es igual a 0, 1, 2 para un punto, una línea y un área plana, respectivamente.
La noción de autosemejanza se vincula con el concepto intuitivo de dimensión. Un segmento puede dividirse en N partes iguales, cada una de las cuales está en relación $\varepsilon=N^{-1}$ con el segmento total. Análogamente, al dividir un cuadrado en el plano en N cuadrados iguales, obviamente autosemejantes, se tiene una relación $\varepsilon=N^{-1/2}$ con la dimensión de la figura completa; esta razón es $N^{-1/3}$ en el caso del cubo y $N^{-1/D}$ para un objeto d-dimensional. Entonces, $\varepsilon^D=N^{-1}$; $D\ln\varepsilon=-\ln N$, de donde se tiene que:

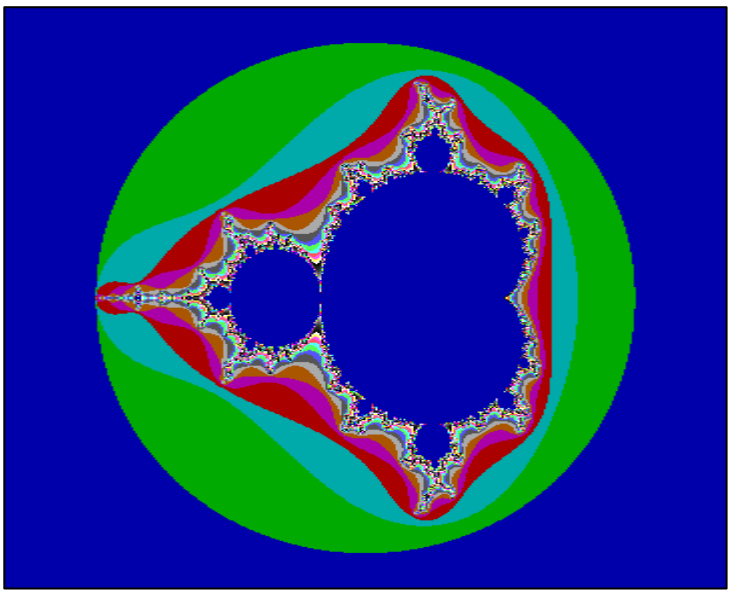
$$D=\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Que es la definición de fractal dada por Mandelbrot. Esta definición tiene el inconveniente que excluye conjuntos que debieran ser reconocidos como fractales. Del hecho que se han propuesto otras definiciones de fractales, pero que no existe todavía una suficientemente general, se ha llegado al acuerdo de no definir un fractal, sino enumerar sus propiedades características:

- Un fractal tiene una estructura fina; esto es, detalle en escalas arbitrariamente pequeñas,
- Un fractal es demasiado irregular para ser descrito con la geometría euclidiana, tanto local, como globalmente,
- Con frecuencia un fractal tiene una cierta forma de autosemejanza, quizás aproximada o estadística,
- En general, la *dimensión fractal* es mayor que su dimensión topológica, pero menor que su dimensión algebraica,
- En muchos casos interesantes, el fractal puede ser definido recursivamente.

Los ejemplos más conocidos de fractales, son:

1. El Conjunto de Cantor ya citado, el cual es un subconjunto de **R**. Una sucesión de aproximantes es definida primeramente. Comencemos con el intervalo $C_0=[0,1]$. Entonces el conjunto C_1 es obtenido dividiendo C_0 en tres partes iguales, suprimiendo el segmento (1/3,2/3) y quedando $[0,1/3]\cup[2/3,1]$. El próximo conjunto C_2 se obtiene de la división en tres partes iguales de estos segmentos, suprimir la interior y tomar el resto, así $C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$ y así sucesivamente. El conjunto de Cantor es el límite cuando $n\to\infty$ de C_n, la suma total de los C_k es cero (técnicamente, la medida de Lebesgue de este conjunto). Ya conocemos que $D\approx0{,}6309$, mientras que $D_T=0$ y $D_A=1$.
2. La Curva de Van Koch, para la que se tiene que $D=\ln4/\ln3\approx1{,}2618$, que satisface la desigualdad señalada, pues $D_T=1$ y $D_A=2$. En 1904, el matemático Helge von Koch (**"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire"**, Arkiv fur Mathematik, Astronomich Fysik I, 1904, 681-704) descubrió una curva *patológica* que se obtenía como límite de una sucesión de polígonos. Partiendo de un segmento de longitud unitaria, en el primer paso se elimina el tercio central y se reemplaza por los otros dos lados del triángulo equilátero. En el segundo paso se procede de igual modo, y así sucesivamente. En el límite, la sucesión de poligonales se aproxima a una curva llamada "Curva de von Koch". Uniendo tres curvas de von Koch, se forma una curva llamada "Copo de Nieve", otro fractal muy conocido.
3. El Conjunto de Mandelbrot o, sencillamente, conjunto M. Más que una descripción matemática del mismo, es conveniente una imagen a color de dicho fractal.

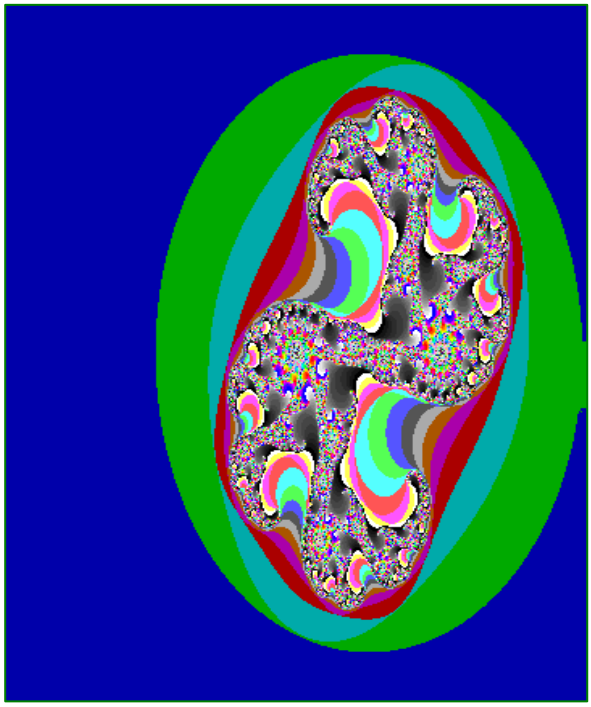


Debemos añadir, por último, que un fractal puede tener dimensión D entera, así en el capítulo 25 del citado libro de Mandelbrot, se muestra una trajectoria de un movimiento browniano, cuya dimensión fractal es D=2, mientras que D_T=1 y D_A=2.

En la actualidad existen infinidad de escritos sobre el conjunto Mandelbrot, que fue presentado al mundo ajeno a la IBM en el artículo **"Computer Recreations"** (Scientific American, agosto, 1985, pp.16-25).

Para lectores interesados en el tema, además del libro de Mandelbrot ya citado (muy técnico y prácticamente inaccesible para el lector matemático medio), recomendamos **"The beauty of fractals"**, Springer-Verlag, 1986 de H.-O. Peitgen y P.H. Richter, que es el primer libro en tecnicolor que muestra el conjunto M, posteriores desarrollos se describen en **"The science of fractal images"**, Springer-Verlag, 1988 de H.-O-Peitgen y Dietmar Saupe. También muy técnico, pero con capítulos preparatorios es **"Measure, topology and fractal geometry"** de Gerald A. Edgar, publicado por la Springer-Verlag en 1990.

Mucho más accesible para el lector aficionado (pero intrépido) es **"The Armchair Universe"** (W. H. Freeman, 1988) que contiene el artículo original publicado en el Scientific American en 1985, con actualización e información sobre software disponible para PC. En esta dirección es conveniente señalar **"Geometría Fractal"** (Nueva Librería, Buenos Aires, 1994) de Vera W. De Spinadel, Jorge G. Perera y Jorge H. Perera, con una magnífica introducción matemática al tema. Yo me he sentido muy satisfecho con **"Fractal Creations. Explore the magic of fractals on your PC"** (Waite Group Press, 1991) de Timothy Wegner y Mark Peterson, el cual trata la teoría de los fractales y detalla como usar el programa Fractin V 15.11, revelando la programación en C, que permite construir los fractales rápidamente. Este programa permite generar fractales, así como manipularlos, editarlos y alterarlos. A diferencia de otros programas, los fractales se generan casi instantáneamente (de hecho con este programa es que hemos generado los fractales que ilustran este capítulo). De Michael F. Barnsley es **"Fractals**



eveywhere”, Academic Press Professional, 1993[2], el que muestra cómo la geometría fractal puede ser usada para modelar objetos reales en el mundo físico, es considerado el libro de texto sobre fractales más completo hasta el momento.
Un dato curioso es que se han señalado “agujeros negros” en el conjunto M, cuando se ha ampliado este a unas proporciones equivalentes a la órbita de Marte.
Indudablemente, la mejor forma de apreciar el conjunto M es a través de las cintas de vídeo que se han realizado de él, especialmente con acompañamiento musical. Las más célebre son, quizás, **“Nothing but zooms”** de Art Matrix, y **“A fractal ballet”** de The Fractal Stuff Company.

LA PULSACIÓN DE UN TAMBOR FRACTAL

Todo en el Universo vibra. La luz de las más distantes Galaxias y el canto de un ruiseñor son transmitidos como vibraciones del continuo espacio-tiempo y la atmósfera, respectivamente. El tono de un violín Stradivarius y la estabilidad de la rueda de un carro dependen de cómo ellos vibren y cada objeto no posee exactamente uno, sino un rango completo de frecuencias de vibración resonantes características. Las antiguas campanas chinas eran construidas, para tener dos frecuencias naturales de tañer; las cuales dependen de dónde la campana era golpeada.
Para una amplia variedad de sistemas físicos, es común que las fronteras exhiban estructuras *no suaves*. Después de los trabajos de Mandelbrot, esto ha adquirido un sentido matemático preciso, existe una amplia gama de fronteras que poseen una estructura fractal (**“Fractal Structure of Boundaries in Two Bistable Systems”**, en Nonlinear Phenomena in Fluids, Solids and Other Complex Systems, P. Cordero y B. Nachtergaele (Eds), Elsevier Science Pulishers B.V., 1991, 435-446). Sistemas dinámicos nolineales pueden tener más de un estado asintótico y en ocasiones, tal estado asintótico, puede depender de las condiciones iniciales en diferentes regiones del espacio de fases.
Veremos cómo la geometría fractal puede influir en la obtención de importantes resultados, aún en áreas tan “euclídeas”, como la teoría de oscilaciones. Mostraremos cómo la estructura de la frontera, puede influir en la distribución asintótica de los valores propios de un conocido problema de la Física- Matemática.
Michel Lapidus y Jacqueline Fleckinger-Pellé, probaron no hace mucho en Comptes Redus (**“Tambour fractal: vers une résolution de la conjecture de Weyl-Berry pour les valeurs propres du laplacien”**, C.R. Acad. Sci. París, 306, série I, 1988, 171-175) una importante conjetura sobre las frecuencias de vibración de objetos que tienen fronteras fractales, sobre la significación de tal demostración , hablaremos en lo sucesivo.

Armónicos. La frecuencia fundamental de un violín es determinada por la tensión en la cuerda, pero él puede generar armónicos de la frecuencia fundamental -vibraciones que ocurren dos, tres, cuatro veces, ... rápidamente. Aquí el patrón es descrito fácilmente: las posibles frecuencias siguen la sucesión de números enteros 1,2,3,...Pero formas más complicadas producen series más complicadas de frecuencias. El análisis de las vibraciones de un disco circular, modelando la cabeza de un tambor, nos lleva a sofisticadas cuestiones sobre las funciones de Bessel.

Herman Weyl (**"Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen"**, Math. Ann., 71, 1912, 441-479) descubrió que todas las formas de vibración poseen algo en común, al menos si ellas poseen vértices suaves. En particular, la distribución estadística de las frecuencias características sigue reglas regulares, descritas con más detalles más abajo. En un famoso artículo (**"Can one hear the shape of a drum?"**, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 1-23), M. Kac planteó la siguiente pregunta: ¿Puede alguien con un oído perfecto, reconocer la forma de un tambor, solamente oyendo sus tonos fundamentales y todos los sobretonos?

Motivados por esta cuestión, muchos investigadores estudiaron este problema en los años 70. No hace mucho tiempo, H. Urakawa (**"Bounded domains which are isospectral but not congruent"**, Ann. Sci. Ecole Normale Sup., 15, 1982, 441-456) exhibió dos dominios isoespectrales, los cuales no son isométricos; dando respuesta negativa a la pregunta anterior. En 1980 Michel Berry (**"Some geometrical aspects of wave motion: wave point dislocations, difractions catastrophes, difractals"**, in *Geometry of the Laplace Operators*, Proc. Symp. Pure Math., Vol.36, Amer. Math. Soc., Providence, 1980, 13-38) conjeturó, sobre hechos físicos, que una versión más fina del resultado de Weyl debe ser cierta y que esta puede ser aplicada, no sólo en formas suaves como las consideradas por Weyl, sino en formas con dimensión fractal. Esta conjetura de Weyl-Berry fue probada -en forma ligeramente modificada por Lapidus y Fleckinger-Pellé. Matemáticamente, las vibraciones de pequeña amplitud de cualquier medio son descritas por la Ecuación de Ondas. Esta fue originalmente descubierta en el siglo XVIII por Leonard Euler, en un estudio de instrumentos musicales, pero rápidamente, Joseph-Louis Lagrange la extendió a las ondas de sonido e hidrodinámica. La Ecuación de Ondas es, quizás, la más importante de todas las ecuaciones de la Física-Matemática:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla^2 f,$$

esta envuelve el operador diferencial Laplaciano ∇, definido por $\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. La frecuencia característica de una forma vibrante, corresponde a los autovalores λ del Laplaciano; o sea, las soluciones de la ecuación $\nabla^2 f + \lambda f = 0.$

En esta ecuación se supone que la frontera permanece fija, mientras el resto de la forma vibra, exactamente como en un tambor o una cuerda de violín. La fórmula de Weyl describe las propiedades asintóticas de las vibraciones de alta frecuencia. Específicamente, sea $N(\lambda)$ el número de frecuencias características, menores que un valor dado λ. ¿Cómo se comporta $N(\lambda)$, cuando λ se hace suficientemente grande? El resultado es que $N(\lambda)$ se aproxima, proporcionalmente, a $\lambda^{\frac{k}{2}}$ donde k es la dimensión del objeto vibrante. La constante de proporcionalidad depende del volumen de la forma vibrante. Aquí, "aproximadamente" significa que el radio de la respuesta verdadera, dada por la fórmula de Weyl, tiende a 1 cuando λ tiende a infinito. Pero esto da muy poca información.

Probar la fórmula de Weyl significa determinar si el error puede crecer. La idea de Berry es que el error depende de los efectos de la frontera y debe ser del mismo orden de magnitud de $\lambda^{\frac{d}{2}}$ donde d es la dimensión de la frontera. Por ejemplo, un tambor posee una cabeza

circular, para la cual k=2 y d=1. Así, N(λ) es aproximadamente proporcional a $\lambda^{\frac{1}{2}}$, con un error no mayor que λ.
La prueba de Weyl de su fórmula original, asume que la frontera de la forma es matemáticamente buena: suave o al menos suave, excepto en un conjunto finito de vértices. Pero, el razonamiento físico de Berry aparece también cuando la frontera es irregular. De hecho, la sugerencia de Berry debe ser cierta, cuando la frontera es *fractal*, en el sentido de Benoit Mandelbrot (“**The Fractal Geometry of Nature”**, Freeman, San Francisco, 1982).

Snowflake fractal. El fractal típico en muchos estudios teóricos es la curva copo de nieve, de la que hablamos al comienzo. Pudiéramos preguntarnos ¿Cómo vibra un tambor con frontera semejante a un copo de nieve? Acorde a Berry, muy parecido a un tambor con una corona suave, sin embargo, aquí deben ser posibles más vibraciones, pues los objetos fractales poseen lotes de infinitas celdas pequeñas. Así que el número N(λ) debe ser diferente. Berry argumenta que el error debe ser “sobre $\lambda^{\frac{d}{2}}$ “ donde d es la dimensión de la frontera fractal.
¿Qué entendemos por dimensión de la frontera, cuando esta es un fractal irregular? La conjetura de Berry es que esta es la dimensión fractal, o sea, la dimensión de Hausdorff-Besicovich. Este concepto, que es fundamental en el análisis de fractales, mide el comportamiento del copo de nieve bajo cambios de escala. En particular esta no es, necesariamente, un número entero. Aquí d es sobre 1.2618. Así, el error en la fórmula de Weyl debe ser del orden de $\lambda^{20.6309}$, comparada con $\lambda^{20.5}$ para un tambor con una corona suave.
Esto puede parecer un ejercicio de Matemática Pura -*arte por hacer arte*- pero no es así. Muchos objetos naturales son mejor modelados por fractales que por superficies suaves: las vibraciones del agua en un lago con un contorno irregular, o las oscilaciones de La Tierra estudiadas por sismólogos, para detectar fallas y analizar el interior del planeta. Las propiedades acústicas de una sala de conciertos dependen de la forma de sus paredes irregulares -desarrollada por modernos arquitectos y que poseen algunas justificaciones teóricas para probar las respuestas acústicas.
Pero la conjetura de Berry es falsa. Esto lo mostraron Brossard y Carmona (J. Brossard and R. Carmona-**“Can one hear the shape of a fractal?”**, Commun. Math. Phys. 104, 1986, 103- 122). Esto parecía ser el final de la historia. Sin embargo, la intuición física nos sugiere que la conjetura debe ser muy similar. Lapidus y Fleckinger- Pell5e 1mostraron que la conjetura puede ser cierta, si en lugar de la dimensión de Hausdorff-Besicovich, se usa la menos familiar dimensión de Minkowski.
La dimensión de Hausdorff-Besicovich, como ya dijimos, describe cómo el “volumen d-dimensional” de un objeto, se comporta bajo cambios de escala. La dimensión de Minkowski, en contraste, describe el comportamiento de los puntos cerca del objeto en sí. Esta posee algunas aplicaciones en problemas de vibración, como las partes de un tambor que vibran cerca de la corona y no la corona misma. La prueba es puramente analítica y extiende la demostración clásica del Teorema de Weyl al caso fractal. Esto no establece una versión más fuerte de la conjetura de Weyl-Berry, de que el error puede ser absorbido en un segundo “término de corrección” en la fórmula, sino que es muy parecido a este caso.
La importancia de la intuición física para el descubrimiento matemático es clara y esta extensión del resultado clásico de Weyl es un ejemplo excelente. Pero se pueden obtener

otras lecciones de este caso. Una es que es necesario, para el propio rigor matemático, comprender cómo la definición fractal "popular" no es apropiada aquí. La segunda es que, la intuición puede sugerir que ciertos resultados son ciertos y no siempre sugiere la correcta línea de ataque en la demostración -la cual aquí requirió métodos analíticos clásicos. Y una tercera es que, aparentemente, ideas muertas en la matemática pura -la versión de la dimensión de Minkowski, ciertamente no muy conocida por los matemáticos- pueden renacer en nuevas aplicaciones.

UN ESBOZO HISTÓRICO DE LA TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES.

En 1955 el matemático americano Hassler Whitney, publicó el artículo **"Mappings of the plane into the plane",** donde expuso las bases de una nueva teoría matemática- **La teoría de Singularidades de Aplicaciones Suaves**. A mediados de los años 60, comienza a hablarse del libro de René Thom **"Stabilité Structulle et Morphogénèse",** que apareció en forma acabada en 1972 y que rápidamente despertó la atención e interés de todos por una teoría conocida ahora como **Teoría de las Catástrofes**. Thom propuso utilizar la teoría topológica de los sistemas dinámicos, para la modelación de diversos fenómenos de crecimiento y desarrollo en diversas ramas, principalmente la biología. El señaló que bajo algunas condiciones exigidas, se deduce que el estudio de diversos sistemas se puede describir, localmente, mediante algunas formas elementales estándar llamadas, catástrofes elementales.

Desde los años setenta este discurso de René Thom que apuntaba a una nueva ciencia, a la que él llamó Semiofísica, la física de las formas significantes, cobró gran impulso sobre todo porque buscó dotar de sentido al observador que contempla la evolución de las formas que ocurren en la Naturaleza: seres estables -o formas emergentes- y entidades no visibles, las llamadas pregnancias, especies de semillas de donde surge la forma. Esta metodología hace una crítica a la ruptura galileana, acusándola de haber abandonado algunas intuiciones fundamentales que formaban parte importante del discurso científico de los antiguos.

Algunos consideran que la Teoría de las Catástrofes, es una parte de la Teoría de las Singularidades, mientras otros afirman lo contrario. Es una disputa bizantina. Aplicaremos el término teórico de las catástrofes (siguiendo a Arnold), a cualquiera que trabaje sobre la teoría de las catástrofes, concebida como uno de los términos singularidades, bifurcación o catástrofe.

De acuerdo con Thom el término Teoría de las Catástrofes, es debido a su discípulo E.C. Zeeman (en 1971). Desde un punto de vista de trabajo, podemos decir que la Teoría de las Catástrofes no es más que la Teoría de la Bifurcación desde un punto de vista topológico, o sea, es el estudio, desde un punto de vista cualitativo de las formas en que las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden variar. La primera información sobre esta apareció, por primera vez, en la prensa occidental hace alrededor de 20 años. En el **"Newsweek"** reportaron una revolución en las matemáticas, comparable quizás, al

descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral. Ellos afirmaron que la nueva ciencia, la Teoría de las Catástrofes, era mucho más importante que el Análisis Matemático: mientras este sólo considera procesos suaves, continuos, la otra provee un método universal para el estudio de todas las transiciones de salto, discontinuidades y cambios cualitativos súbitos. Aparecieron cientos de científicos y publicaciones sobre el tema y sus aplicaciones a variados campos que van, desde el estudio del corazón al estudio de la teoría de partículas elementales, pasando por el estudio de los desórdenes mentales y la censura policial a la literatura erótica.
El punto "filosófico" es que el conjunto de los puntos catástrofes K son los que contienen el comportamiento significativo del proceso, es decir, donde se trabaja es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del sistema. El es el esqueleto, del cual el resto de la morfología depende. .
Consideremos un sistema dinámico gradiente:

$$dx/dt=-\text{grad}_x F(x,a), \qquad (1)$$

donde x y a son vectores de números reales (posiblemente, unidimensional) y F es infinitamente diferenciable, o suave.
Llamemos a x variable de estado y a la variable de control.
Busquemos los puntos de equilibrio, así tenemos:

$$\text{grad}_x F(x,a) = 0. \qquad (2)$$

El problema matemático es cómo varían las soluciones x de (2) con a, para F general. Si al resolver esto desde un punto de vista topológico, diferentes funciones F tienen el mismo comportamiento (local), se dicen que son equivalentes.
Una clase de equivalencia de tales funciones F es llamada una catástrofe elemental.
Para una familia de funciones $f:\mathbf{R}^n x \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$; es decir, con n variables de estado, y con k parámetros, denominados de control, si $n\leq 2$ y $k\leq 5$ Thom estableció la existencia de formas canónicas, a las que hacíamos referencia antes. A ellas son reducibles las funciones en estudio, si cumplen con la restricción antes citada y otra que se comentará más abajo.
En las catástrofes elementales, que listamos a continuación, las componentes x_1, x_2, ... de x han sido reemplazadas por x, y, .. y a_1, a_2, ...por a, b, ...

Nombre	*F(x,a)*	
Pliegue	$x^3/3 + ax$	A_2
Cúspide	$\pm x^4/4 + ax^2/2 + bx$	A
Cola de milano	$x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$	A_4
Mariposa	$\pm x^6/6 + ax^4/4 + bx^3/3 + cx^2/2 + dx$	$A_{\pm 5}$
	$x^7 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$	A_6
Ombligo	$x^2y - y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_{-4}

Elíptico		
Ombligo Hiperbólico	$x^2y + y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_4
Ombligo Parabólico	$x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$	D_5
	$x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_6
	$x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_{-6}
	$x^3 \pm y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + dx + ey$	$\Sigma_{\pm 5}$

Estos nombres son escogidos por una gran variedad de razones y deben ser tratados meramente como mnemotécnicos, las siglas de la última columna son las denominaciones de cada una de estas catástrofes elementales. Es de destacar que estas poseen una propiedad de estabilidad muy fuerte: la **estabilidad estructural**. Esta noción se remonta al trabajo de Andronov y Pontriaguin de 1937 **"Sistèmes grossiers"** (DAN, vol.14, pp.247-251), concepto desarrollado posteriormente, en conexión con la topología dinámica por Smale (**"Differentiable dynamical systems"**, Bull. Amer. Math. Soc., vol.73, pp.747-817, 1967). Esta es una propiedad muy deseada y Thom (junto a nombres como Lefschetz y Arnold) trata esto como un requerimiento esencial.

Es importante destacar, que la estabilidad estructural debe considerarse en un "contexto determinado". El contexto comprende: a) una clase de sistemas matemáticos C, b) una clase de perturbaciones P, c) una relación de equivalencia R. En este contexto, un sistema es estructuralmente estable si demostramos que toda perturbación en P, lleva a un sistema en C que es equivalente, con respecto a R, al original.

Un péndulo simple, por ejemplo, considerado como un oscilador no forzado, es un sistema estructuralmente inestable (en el modelo usual) si la clase de perturbaciones incluye la posibilidad de términos de amortiguamiento.

Restringiendo las perturbaciones al caso no disipativo solamente, es posible restaurar la estabilidad estructural.

Si consideramos la existencia de simetría, debemos restringir las clases P y C consecuentemente y así debe procederse en lo sucesivo.

La descripción matemática del mundo depende, sobretodo, de una delicada interrelación entre la continuidad y discontinuidad, `fenómenos discretos'. Singularidades, bifurcación y catástrofe son términos diferentes para la descripción del surgimiento de estructuras discretas a partir de otras suaves, continuas.

La teoría de las singularidades es una generalización del estudio de funciones en sus puntos de máximo y de mínimo. En la teoría de Whitney las funciones son reemplazadas por aplicaciones, i.e., colección de varias funciones de varias variables.

El término bifurcación como entendemos ahora, significa rompimiento y es usado en un sentido amplio para designar toda suerte de reorganización cualitativa o metamórfosis de varias entidades que resultan de un cambio de los parámetros sobre las cuales ellas dependen.

Catástrofes, son cambios bruscos que surgen como una respuesta súbita del sistema a un cambio suave en las condiciones externas.

En la Teoría de Bifurcación como Teoría de las Singularidades, los resultados fundamentales y aplicaciones fueron obtenidos sin la ayuda de la Teoría de las Catástrofes. La contribución de esta, fue la introducción del término **atractor** y el conocimiento sobre la bifurcación de atractores. Una variedad de atractores han sido descubiertos ahora en todas las áreas de la Teoría de Oscilaciones; por ejemplo, ha sido sugerido que los variados fenómenos del lenguaje, son diferentes atractores de un sistema dinámico "productor de sonidos".

Hasta hace alrededor de dos décadas, todo experimento que encontraba complicadas oscilaciones aperiódicas, digamos en reacciones químicas, eran abandonados, citando impurezas en el experimento, efecto de cambios externos y cosas por el estilo. Ahora es claro que muchas de estas oscilaciones complejas, están conectadas con la esencia misma de la materia, con la presencia del caos y atractores **extraños**, quizás determinado por las ecuaciones fundamentales del problema y no por los variados efectos externos; ellas pueden ser estudiadas a un nivel superior de los modos estacionarios clásicos y los modos periódicos de comportamiento de los procesos.

Por otra parte, la característica común de las trayectorias en un régimen caótico es el tener una estructura geométrica altamente irregular y que ante cierto tipo de enfoque -estudiar la sección de Poincaré, por ejemplo- da lugar a ciertos conjuntos **fractales**. Guiados por el más puro espíritu clásico, la clasificación topológica de las singularidades, en el Plano de Fases de un sistema de tres dimensiones, nos lleva a la aparición de estos fractales. Denominación que a partir de los trabajos de Mandelbrot, ha llegado a ser una de las denominaciones matemáticas más populares en los últimos años. Algo extraordinario es que los fractales resultaron ser ubícuitos en la Naturaleza, tanto al nivel de las formas de algunos elementos naturales -hojas, costas marinas, copo de nieve, etc.- como en las formas geométricas generadas siguiendo reglas relativamente sencillas, rompiendo así con el viejo adagio de que **natura non facit saltus**.

ALGUNOS APUNTES SOBRE EL CAOS.

Desde sus inicios el pensamiento griego se preguntó por el origen de las cosas. El mundo visible, a través de su permanencia y a pesar de su multiplicidad, manifestó una unidad matemática y una belleza y grandiosidad tal, que el paso del mito al logos fue inevitable. Durante el siglo V a.C. el pensamiento mítico dejó su sitio a las causas naturales.

El mundo era entonces un enorme sistema, magnífico organismo en el que sus partes se entretejían hacia la totalidad. Los principios de las cosas, las normas que la regían, fueron preocupación de la filosofía griega. Fueron los tiempos de las grandes concepciones, las leyes que abarcaban al ser y al suceder, eran los días en que una idea vendría a dar coherencia al mundo. Dicha idea, el orden, tuvo en Anaximandro su principal expositor.

Para éste, el principio de todas las cosas está en el **apeirón**, lo indeterminado; de él surge el mundo, al que por primera vez llama **cosmos**, **orden**, término que hasta entonces había tenido un sentido social o, como en Homero, a la formación de hermandades en la lucha armada. Esta noción de orden había surgido después que varias generaciones, en todo el mundo antiguo, habían presenciado el carácter cíclico de los movimientos celestes. Todo esto despertó en el hombre antiguo, la creencia de una certeza en los acontecimientos de los cielos y la búsqueda de un lenguaje que la describa y de principios que la expliquen.

"De la naturaleza de las cosas", obra cumbre de Lucrecio, se presenta como un tratado de física atomista. Usualmente hemos visto en él un texto donde prima lo absurdo y, por tanto, sólo es posible una lectura metafórica, interpretándolo como un poema

filosófico. Hoy esta conclusión no es tan categórica, se trata de suspender la oposición entre ciencia y poesía.

El universo lucreciano se inicia en el **caos**, un estado donde sólo existe el desorden en la materia y la energía, un paisaje donde sólo existen elementos sólidos que se desplazan en un medio fluido. Dos modelos coexisten: la catarata de átomos que caen libremente en el vacío, fluyendo a lo largo de trayectorias paralelas, y la nube caótica, masa desordenada, fluctuante, de disimilitudes y oposiciones, de intervalos sin eventos, de colisiones al azar.

El modelo lucreciano de turbulencias habla no sólo del espacio y la materia, habla también del tiempo. Aquí y allá, aleatoriamente, surge un vórtice en tanto que otro desaparece. Es como si la física atomista se asomara a los principios fundamentales de la termodinámica moderna: por una parte la entropía o degradación irreversible de la energía (información) y, por el otro, la invarianza de fuerzas o energías. La de Lucrecio es una nueva física, en lo que lo global tiene en cuenta lo local, lo previsible asume lo imprevisible; es un discurso que nos habla de cierto equilibrio general en un universo estocástico.

Hacia finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, la concepción que se tenía del Universo cambia, debido en gran medida, a los aportes tanto matemáticos como metodológicos, de ese genio singular que fue Isaac Newton. Se ve que la Naturaleza tiene una serie de regularidades que se pueden analizar y predecir; de hecho, la ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaron que era poco lo que quedaba por descubrir. La tarea de los científicos era, dilucidar las repercusiones de estas leyes en el ámbito de los fenómenos particulares.

Como se ha repetido tantas veces, para Galileo el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático y para explicar un fenómeno es necesario leer sus caracteres: puntos, líneas, *"... Esto significa que más que atribuir el movimiento de los objetos "graves" los que se dirigen al centro de la Tierra a una causa, lo que se debe hacer es descubrir la regla que lo regula"*. Por ello Galileo, al enunciar su solución al problema de la caída libre, lo hace diciendo que cualquier cuerpo, grande o pequeño, ligero o pesado, al caer libremente lo hace con una aceleración constante.

Con Newton el problema se resuelve suponiendo la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocida la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, la trayectoria se puede calcular y, para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que dado un estado del sistema los estados futuros quedan unívocamente determinados: este es el sentido del determinismo que Laplace creyó la Mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, mostraba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería.

Retornando a los inicios de la teoría cualitativa tenemos que Poincaré y Bendixon demostraron que para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de dos dimensiones, el comportamiento de las soluciones se puede clasificar geométricamente en cuatro casos relativamente sencillos. En nuestros días, y gracias al uso de las computadoras, al intentar clasificar y entender las representaciones gráficas de la dinámica de un sistema que se mueve en tres dimensiones aparece ante nosotros una fuente de formas exóticas que se han denominado **fractales**, entes con dimensión fraccionaria, no entera.

No es casual que la propiedad fractal, resulte ser una medida de la complejidad de la órbita, de un movimiento. Lo interesante radica en que dicha complejidad, aunque asociada a un sistema completamente determinado por una regla matemática, hace que sea, prácticamente imposible, predecir el comportamiento del sistema a largo plazo.

Científicamente, cada fenómeno es observado, sus detalles son minuciosamente descritos con el auxilio de las Matemáticas y se buscan ecuaciones que lo representen.
Pasamos entonces, de lo real a un modelo matemático.
Este modelo, en el cual se expresa la evolución del fenómeno en tiempo, es un Sistema Dinámico. Se puede pensar en un sistema dinámico como una forma de describir la evolución temporal de todos los puntos de un espacio E. Este espacio E puede ser, por ejemplo, el espacio de los estados de un sistema físico o biológico.
En los casos más simples el tiempo será **discreto** (un número natural) y la evolución es dada por una ecuación del tipo:

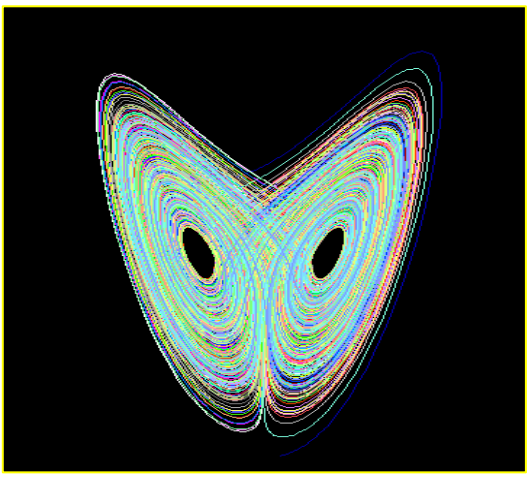
$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad (3)$$

donde x_n es un vector m-dimensional, m es el número de variables contenidas en el problema y f una función diferenciable en el espacio m-dimensional.
Estos sistemas se prestan para describir fenómenos de Biología o Economía, donde el tiempo es medido en años, meses o generaciones.
Los sistemas dinámicos continuos, descritos por una ecuación:

$$dx/dt = f(x),$$

son más usados en Física y Química.
En el caso de un sistema discreto, conocer la evolución de un estado x es explicitar la sucesión x_0, x_1, x_2 , ... llamada la órbita positiva de x, donde x_0 =x. En el caso de un sistema continuo, conocer esta evolución de un estado x es resolver la ecuación con condición inicial x . Para realizar previsiones sobre el comportamiento futuro (asintótico) del sistema es deseable que las soluciones dependan continuamente de las condiciones iniciales.

EL ESTUDIO DE SISTEMAS CAÓTICOS.



Los sistemas dinámicos caóticos (quizás el más famoso es el modelo de Lorenz de 1963) son formados por ecuaciones que no poseen soluciones analíticas, tienen como característica básica una **sensible dependencia de las condiciones iniciales**, esto es, órbitas con condiciones iniciales próximas se alejan exponencialmente; los atractores son extraños, la evolución temporal se da en forma cuasi-aleatoria.
Una ecuación con un atractor extraño tiene órbitas que se mueven, imprevisiblemente entre las vecindades de muchos puntos diferentes, permaneciendo por un momento en una región y luego se mueven en dirección a otra.
Una consecuencia de este comportamiento caótico es la total imposibilidad de prever el futuro del fenómeno.
La dimensión mínima en que puede ocurrir el caos, en las ecuaciones diferenciales es 3. En las ecuaciones en diferencias, el caos puede aparecer en dimensión 1.
La Entropía positiva de Kolmogorov-Sinaj es una condición técnica esencial difícil de verificar directamente en un sistema dinámico. En la práctica, ella significa que el sistema exhibe extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, de modo que dos trayectorias que

estén próximas en el instante inicial, divergen en una razón exponencial. Esta razón es medida por la media de los exponentes de Liapunov, que es equivalente a la Entropía de Kolmogorov-Sinaj y puede ser fácilmente calculada.
Definimos CAOS como el comportamiento de sistemas dinámicos que exhiben comportamiento mixto (sistemas que se aproximan a cualquier valor posible durante su evolución) con ENTROPIA positiva.
Por ejemplo, para aplicaciones de una dimensión como (3), la media de los exponentes de Liapunov es:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\left|\frac{df(x_n)}{dx_n}\right|\right).$$

Presentaremos algunas aplicaciones de un resultado conocido como el **Teorema de Sarkovskii**, A.N. Sarkovskii-**"Coexistencia de ciclos de una transformación continua de la recta en si misma"**, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, T.XVI, No.1, 1964, 61-71 (en ruso), (que como veremos, es la conclusión de varios resultados preliminares) a la Teoría de las Ecuaciones Funcionales y su vinculación con el Caos, detalles complementarios pueden ser consultados en el trabajo del autor **"Una nota sobre el Teorema de Sarkovskii"**, revista Lecturas Matemáticas, UNC-SCM, Vol.16, No.2, 1995, 211-214.
El trabajo de Sarkovskii, que tiene sus antecedentes en dos trabajos del mismo autor (Uspeiji Matematicheskii Nauk, T.XII, No.4, 1960 y Doklady Akad. Nauk URSS, T.189, No.5, 1961), es uno de una serie de artículos relacionados con funciones que transforman un intervalo en si mismo y cómo podemos caracterizar esa transformación por un conjunto de puntos bien determinados.
Sabemos que toda función continua de variable real f(x), $-\infty< x <+\infty$, genera una transformación continua T de la recta en si misma: $x\to f(x)$. Resulta, que la propiedades de la transformación T quedan definidas en la estructura básica del conjunto de puntos fijos de la transformación T.
Recordemos, que el punto a se llama **punto fijo de orden k** de la transformación T, si $T^k a=a$ y $T^j a\neq a$ $(0<j<k)$. Los puntos $Ta, T^2a, ..., T^{k-1}a$ también resultan puntos fijos de orden k y junto con el punto a conforman un **ciclo de orden k**.
En el trabajo de Sarkovskii se investiga el problema acerca de la dependencia entre la existencia de ciclos de diferentes órdenes y sus principales resultados son enunciados con ayuda del siguiente hecho. Consideremos el conjunto de los números naturales en el que se introduce la relación n_1 **precede a** n_2 $(n_1 \leq n_2)$, si para cualquier transformación continua de la recta en si misma, la existencia de un ciclo de orden n_1 implica la existencia de un ciclo de orden n_2.
No es difícil probar que tal relación cumple con las propiedades reflexiva y transitiva, y por tanto, el conjunto N con esta relación representa un conjunto ordenado, quedando ordenado de la manera siguiente:

$$3 < 5 < 7 < 9 < 11 < ... < 3.2 < 5.2 < ... < 3.2^2 < 5.2^2 < ... < 2^3 < 2^2 < 2 < 1. \qquad (4)$$

En nuestra exposición, necesitamos dos de los resultados obtenidos por Sarkovskii (mantendremos la notación de este), que son los siguientes:

"***Teorema 6.*** *Si la transformación T tiene ciclos de orden* 2^n *, (n>0), entonces T admite también ciclos de orden* 2^i *(i=0,…,n-1). Si la transformación T admite ciclos de orden* 2^n

(2m+1) con n≥0 y m>0, entonces T tiene también ciclos de orden 2^i (i=0,…,n) y 2^n (2r+1), para r=m+1, m+2, ..., 2s con s=1,2,3,...”

*“**Teorema 7.** Entre cualesquiera dos puntos, del ciclo de orden k>1, se encuentra al menos un punto del ciclo de orden l<k.”*

Lo interesante de los resultados de Sarkovskii y que es a lo que vamos a referirnos aquí, es que estos pueden ser extendidos al lenguaje de soluciones periódicas de la ecuación funcional:

$$y(x+1)=f(y(x)), \qquad (5)$$

tomando una sucesión discreta de valores del dominio. En particular, utilizando los teoremas antes mencionados, se tiene el siguiente resultado:

***Teorema.** Si la transformación T es continua, entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

i) si la ecuación funcional (5) tiene soluciones periódicas con período k, entonces dicha ecuación tiene soluciones periódicas de cualquier período posterior en (4) a k,

ii) si la ecuación funcional (5) no tiene soluciones periódicas con período k, entonces tal ecuación no tiene soluciones periódicas de ningún período que preceda a k en (4).

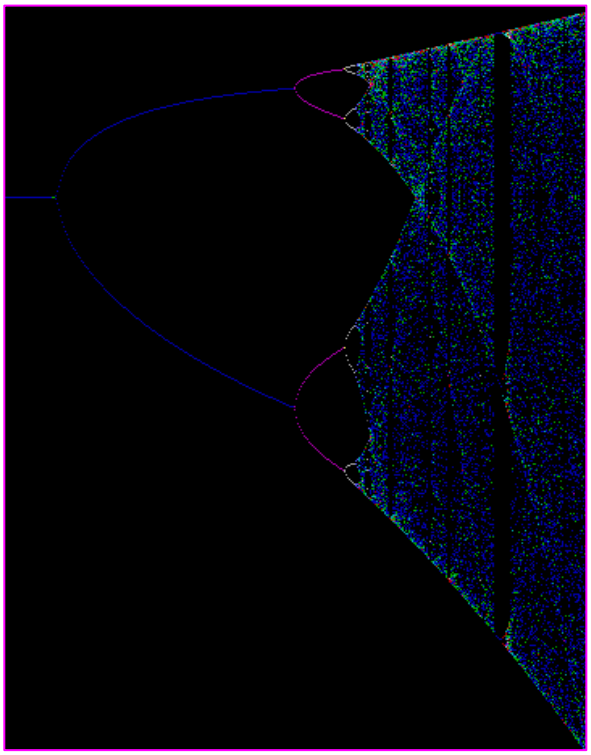
Ilustremos la anterior afirmación. Tal vez el ejemplo más simple de sistema no lineal sea la ecuación logística:

$$x_{n+1} = a.x_n\,(1-x_n), \qquad (6)$$

donde x_n representa la población del año n, con relación a una población de referencia inicial x_0, x_{n+1} es entonces la población del año siguiente y a, es la tasa de crecimiento de dicha población. Esta ecuación aparece de manera natural en el estudio de la evolución de poblaciones biológicas, en particular, (6) se ha mostrado particularmente útil en el estudio de la evolución anual de la población de ciertas mariposas del nordeste de los EEUU, que exhiben fluctuaciones imprevisibles de un año a otro.
Queremos examinar un comportamiento a largo plazo de la población x_n. Para mantener la población en el intervalo [0,1] limitaremos a entre 0 y 4 (es fácil ver que sí a>4 y x_n =1/2 tenemos x_{n+1} >1).

Tomemos 1<a<3. Tomando cualquier población inicial $x_0 \in (0,1)$, la población se aproxima a un valor constante no nulo x* = 1 - 1/a. De nuestros preliminares se tiene que x es un punto fijo de orden 1, en este caso no existen soluciones periódicas de ningún período. ***A medida que a crece de 3 a 4 existen grandes variaciones en la estructura del sistema.*** Primeramente, el punto fijo se torna inestable y la población converge a un estado de equilibrio donde se alterna entre dos valores, es decir, una órbita de período 2. Para a=3,2 la población oscila entre x_n =0,5 y x_n =0,8.

Para valores mayores el período se torna inestable y es sustituido por una solución periódica de período 4, por ejemplo para a=3,5.



A medida que a crece, la población converge a ciclos de período 8, 16, 32, 64, ...

Este es el fenómeno de **Duplicación de los Períodos** y como apuntara Rubiano en el trabajo abajo citado, este orden de los períodos, no es más que el orden (4) pero invertido.

El análisis del comportamiento del sistema (4) para restantes valores de a, pueden ser completados recurriendo a V.C. García C. (**"O Caos"**, Publicacioes do Instituto de Matemática da UFRGS, Serie C, No.6, 1988) y O. Rubiano-**"Acerca del Teorema de Sarkovskii"** (Lecturas Matemáticas, Vol.15, No.1, 1994, 21-26).

El estudio del Caos ha mostrado su aplicación en muchas áreas (Medicina, Química, Industria de Armamentos, en la Industria Aeronáutica, en las Ciencias Sociales, Psicología, etc.

La Teoría de las Catástrofes que procura determinar para cuales valores existe un cambio brusco en el comportamiento del sistema, está basada en un conocimiento del Caos y también ha sido aplicada en variados campos.

CUESTIONARIO

1. Estudie, mediante apropiadas funciones reales, las catástrofes elementales más simples.

2. Ponga ejemplos de conjuntos fractales.

3. Obtenga la dimensión del conjunto ternario de Cantor.

4. Presente el modelo meteorológico de Lorenz de 1963 (analice la imagen de la página 293).

Conferencia 19. Un Bosquejo de la Matemática Actual.

"Comprender no es solo resumir un pasado del saber. Comprender es el acto mismo del devenir del espíritu"

G. Bachelard

El Teorema de Fermat.

El problema 8 del libro II de la **"Aritmética"** de Diofanto tiene el siguiente enunciado: *"Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados"*. Si la respuesta a un problema no era única, Diofanto se limitaba a dar soluciones particulares, que obtenía gracias a una feliz elección de los datos. Veamos por ejemplo, cómo procede en el caso anterior. De entrada, se plantea resolver la ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

únicamente en el caso en que z=4. Ensaya como valor de y uno de la forma mx-4; tomando m=2 y después de sustituir, encuentra como solución x=16/5, y=12/5, lo cual equivale a considerar la solución general de la ecuación anterior como los enteros pitagóricos:

$$x=d(u^2-v^2),\ y=2duv,\ z=d(u^2+v^2),$$

donde $d,u,v \in \mathbf{Z}$ y mcd(u,v)=1.

La **"Aritmética"** de Diofanto fue traducida al árabe en Persia en el siglo X y a través del mundo árabe llegó a España, pero permaneció ignorada por el resto de Europa hasta el siglo XV. Regiomontanus (seudónimo del matemático Johan Müller que responde a la latinización de Königsberg, su ciudad natal) encontró un manuscrito de dicha obra en Venecia en 1464. Posteriormente fueron hallados nuevos manuscritos y en 1575, en Basilea, aparecía la primera traducción latina editada. La primera edición que incluía el texto griego junto a la versión en latín, fue hecha en París en 1621 por Claude Gaspar Bachet de Méziriac; su título era **"Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex; et numeris multissimis comentariis illustrati"**. Una edición muy cuidada de la obra de Diofanto fue hecha en Leipzig, en 1895, por Paul Tannery.

Pierre-Simón de Fermat poseía un ejemplar de la edición Bachet y, al lado del antes citado problema 8, escribió la siguiente nota: *"Por el contrario, es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados y, en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla"*.

Fermat, quien es considerado por algunos el más importante Teórico de los Números que ha existido, escribió esta nota sobre el 1630. Aunque a decir verdad, mucho se duda de la veracidad de la misma, ya que en toda la obra que dejó Fermat, existe una sola demostración al respecto. Fermat demostró que "el área de un triángulo rectángulo no puede ser un cuadrado". Claramente esto significa que un triángulo racional no puede ser un cuadrado racional. En símbolosesto significa que no existen enteros x, y, z con $x^2 + y^2 = z^2$ tal que xy/2 es un cuadrado. De aquí se deduce fácilmente el caso n=4 del Teorema de Fermat.

La imposibilidad de resolver en enteros, no nulos, la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n,$$

para n≥3, se viene conociendo con el nombre de "el último teorema de Fermat". Son varias las formulaciones, equivalentes por supuesto, de esta famosa conjetura (**"The heart of modern number theory"**, según I. Stewart) Obviamente basta considerar los casos n=4 o bien n=p, siendo p un entero primo impar. De las tentativas hechas hasta hoy para superar la incomodidad de la estrechez de un margen, intentaremos hacer un breve resumen a continuación.

Resultados de Fermat. Si bien el ejemplar Bachet que Fermat poseía se perdió, las notas que en él escribiera fueron publicadas por su hijo Samuel Fermat, en Tolosa 1670. Hoy pueden leerse en la edición de P. Tannery y Ch. Henry de sus obras completas. Es de notar que, el que puede considerarse fundador de la moderna Teoría de Números, no publicó prácticamente nada durante su vida. Ello, en opinión de A. Weil, se debió al aislamiento en que trabajaba. En una época en que los analistas tenían ya que luchar por defender sus prioridades, Fermat, a lo largo del siglo XVII, está prácticamente sólo (como después, lo estaría Euler, en la primera mitad del siglo XVIII, hasta que no se produjo la incorporación de Lagrange).
En dichas notas, Fermat demuestra la imposibilidad de resolver en enteros la ecuación:

$$x^4 - y^4 = z^2$$

que, obviamente, implica que la ecuación $x^4 = y^4 + z^4$, carece de soluciones enteras. Se llega a la antes citada ecuación, al intentar demostrar que no existe ningún triángulo rectángulo de lados enteros, cuya área sea el cuadrado de un número entero (un problema de "cuadratura de triángulos", como decíamos más arriba). El método seguido en la demostración es el célebre método de Fermat de descenso infinito.
En una carta, sin fecha, Fermat afirma haber demostrado el caso n=3, también por descenso infinito, pero esta demostración no pudo ser hallada.

Primeros intentos. Euler tomó como punto de partida en sus investigaciones aritméticas las, muchas veces enigmáticas, notas de Fermat. En una carta a Golbach del 4 de agosto de 1753, Euler dice tener una demostración del caso n=3. En su estudio de este caso, la demostración de Euler se iniciaba como sigue: *sin restricción se puede suponer que mcd(x,y,z)=1, que x e y son impares, y que z es par*. Haciendo el cambio de variables x+y=2a, x-y=2b, mcd(a,b)=1, y tras sustituir, se llega a la ecuación $2a(a^2+3b^2)=z^3$. Un sencillo cálculo prueba que $mcd(2a,a^2+3b^2)=1$ o bien que $mcd(2a,a^2+3b^2)=3$, en cuyo caso z debe ser múltiplo de 3. La primera de estas dos citadas posibilidades conduce a que debe existir un entero r, tal que $a^2+3b^2=r^3$. Esta igualdad llevó a Euler a afirmar que <u>debían</u> <u>existir</u> enteros c, d tales que:

$$a + b\sqrt{-3} = (c + d\sqrt{-3})^3.$$

En la afirmación anterior se encuentra la idea germinal de la aritmética de los cuerpos de números. Euler procedía como si $Z[\sqrt{-3}]$ hubiera sido un anillo factorial. En efecto, en un tal caso, existirían elementos primos $\pi_i \in Z[\sqrt{3}]$, tales que:

$$a + b\sqrt{-3} = \alpha\pi_1^{S_1} \ldots \pi_k^{S_k},$$

siendo α=1,-1; y $S_i \geq 1$, al tomar normas en la extensión $Q(\sqrt{-3})/Q$, y teniendo en cuenta que mcd(a,b)=1, se obtendría que:

$$a^2 + 3b^2 = p_1^{S_1} \cdots p_k^{S_k},$$

siendo los elementos p_i, $1 \leq i \leq k$, enteros primos distintos. Con lo cual, la igualdad $a^2+3b^2=r^2$ obligaría a que S_i fuera múltiplo de 3 y por tanto, a que $a+b\sqrt{-3}$ fuera, efectivamente, un cubo en $Z[\sqrt{-3}]$. Si bien $Z[\sqrt{-3}]$ no puede ser factorial, pues no es enteramente cerrado, su clausura si es entera, igual al anillo de las raíces terceras de la unidad $Z[\varsigma_3]$. Ello explica que, posteriormente, pudiera demostrarse el caso n=3, partiendo de la idea dada inicialmente por Euler. En realidad esta falacia de Euler, no invalida (teniendo en cuenta otras demostraciones de él) atribuirle la demostración del caso n=3 a él.

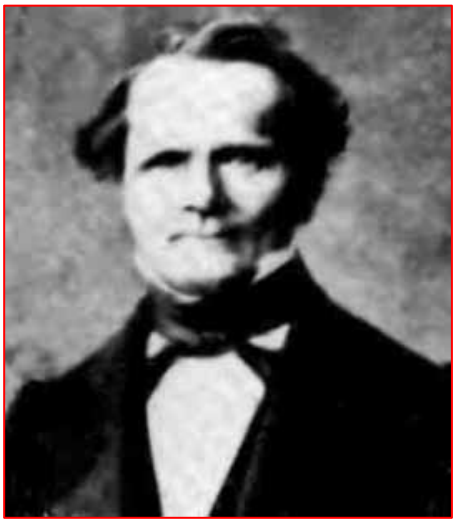
La solución de muchos de los problemas propuestos por Fermat, la dio Euler en el segundo de los volúmenes de que consta su obra "**Vollstandige Anleitung Der Algebra"**, publicada en 1770. En 1774 se publicó una segunda edición, en francés, comentada por Lagrange.

Trabajando directamente en el anillo $Z[\varsigma_3]$, Gauss, en su obra póstuma, dio otra demostración del caso n=3 de la ecuación de Fermat.

El próximo paso importante lo dio Sophie Germain. Un caso especial es tomar n y 2n+1 primos, entonces $x^n + y^n = z^n$ implica que uno de los números x, y, z es divisible por n. Por tanto, el Teorema de Fermat se divide en dos casos:

1. Ninguno de x, y, z es divisible por n.
2. Uno y solo uno de estos, es divisible por n.

Sophie Germain probó el caso 1 para todo n menor que 100 y Legendre extendió su método a todo los números menores que 197. El caso 2, para n=5 (donde falló Sophie) se divide a su vez, en dos casos. Resumiendo, uno de los números x, y, z es impar y uno es divisible por 5. El caso 2i es cuando el número divisible por 5 es impar, el caso 2ii es cuando el número impar y el divisible por 5 son distintos. El caso 2i fue demostrado por Dirichlet y presentado a la Academia de París en julio de 1825. El caso n=5, completamente resuelto, fue publicado por Dirichlet en septiembre de dicho año, sobre la base de la demostración de Legendre para el caso 2ii. En 1832 Dirichlet demostró el teorema para n=14, el caso n=7, en el que Dirichlet falló, fue demostrado finalmente por Lamé en 1839.



Trabajos iniciales de Kummer. Ernst Eduart Kummer (1810-1893) entregó, en 1847, un manuscrito a Dirichlet en el que creía haber demostrado el caso general del último teorema de Fermat. Dirichlet le hizo notar que para que su demostración fuera correcta, era necesario que en el anillo $Z[\varsigma_p]$ de las raíces p-ésimas de la unidad, no sólo todo elemento se expresara como producto de factores irreducibles, sino que, además, esta descomposición tenía que ser única; hecho improbable, sobre el cual tenía serias dudas.

La no existencia de soluciones enteras de la ecuación $x^p + y^p = z^p$, p entero primo ≥ 3, en las que $p \mid xyz$ se conoce con el nombre de **primer caso del teorema de Fermat.** El **segundo caso** se presenta al considerar las posibles soluciones en las que p|z.

La demostración de Kummer, en el caso de factorización única, parte de las consideraciones siguientes. Introduciendo una raíz primitiva p-ésima de la unidad, $\varsigma = \varsigma_p$ la ecuación de Fermat puede ponerse bajo la forma:

$$\prod_{i=1}^{p-1} (x + \varsigma^i y) = z^p.$$

En el primer caso del teorema de Fermat se demuestra que, si $i \equiv j \pmod p$, los elementos $x + \varsigma^i y$, $x + \varsigma^j y$ carecen de factores comunes no triviales. Así si $Z[\varsigma]$ es un anillo factorial, deben existir, en particular, elementos $\alpha_i, ß_i \in Z[\varsigma]$, $ß_i$ unitarios, de forma que:

$$x + \varsigma y = ß_1 \alpha_1^p,$$

$$x - \varsigma y = ß_2 \alpha_2^p.$$

La simultaneidad de ambas igualdades se demuestra que es contradictoria. A su vez, el elemento $1-\varsigma$ es siempre irreducible en $Z[\varsigma]$ y p admite la descomposición $p=(1-\varsigma)^{p-1}ß$, siendo ß un elemento unitario de $Z[\varsigma]$. Así, en el segundo caso, si $z=p^k z_0$, $k \geq 1$, $p \mid z$, la ecuación de Fermat puede escribirse en la forma:

$$x^p + y^p = (1-\varsigma)^{p-1} ß^p z_0^p.$$

Se demuestra, en el caso de factorización única, que esta igualdad es asimismo contradictoria.
En 1847 Lamé, intentando demostrar el caso general del teorema de Fermat, cae en el mismo error de Kummer, de suponer la factorialidad de $Z[\varsigma_p]$. Ello es advertido por Cauchy, quien usando un algoritmo de división por medio de la norma, cree haber demostrado que tales anillos son euclídeos y por tanto, factoriales. Más tarde, el propio Cauchy se daría cuenta de que su demostración era incorrecta.
La no factorialidad de ciertos anillos de la forma $Z[\sqrt{d}]$ ya había sido advertido por Lagrange, revisando los trabajos de Euler. Usando la teoría de las formas cuadráticas de Gauss, Kummer demuestra que en $Z[\varsigma_{23}]$ tampoco puede llevarse a cabo una teoría de divisibilidad como en el caso de Z. Todos los esfuerzos de Kummer para superar tal dificultad, quedan plasmados en una serie de artículos, aparecidos entre 1845 y 1847, y que son la base de la actual teoría de los ideales. La falta, en general, de descomposición única en factores primos en los anillos $Z[\varsigma_p]$ es evitada mediante descomposiciones de “números ideales” en producto de “números primos ideales”, de manera única (ideales, respectivamente ideales primos, en la terminología actual). El conocimiento preciso de las reglas de descomposición de un entero como producto de números ideales, llevaría a Kummer a un estudio equivalente al del cálculo de todas las valoraciones de un cuerpo de raíces de la unidad.

Evolución de las ideas de Kummer. Al intentar Dedekind extender la teoría de la divisibilidad de Kummer a anillos de la forma $z[\sqrt{d}]$, d entero no divisible por ningún cuadrado, ve que ello es sólo posible si $d \equiv 2 \pmod 4$ o $d \equiv 3 \pmod 4$. En otras palabras, un tal anillo debía ser enteramente cerrado. Aparecía así por primera vez, la noción de elemento entero sobre un anillo. Fue realmente una suerte que en las investigaciones iniciales de Kummer, $Z[\varsigma]$ fuera precisamente el anillo de los enteros de $Q[\varsigma]$.

En 1871, Dedekind, en el suplemento al texto de Dirichlet **"Vorlesungen uber Zahlentheorie"**, probó la existencia y unicidad de la descomposición de un ideal en producto de ideales primos en el anillo de los enteros de cualquier cuerpo de números. Lasker, en 1905, se preocupó de la existencia de tales descomposiciones en los anillos de polinomios $C[x_1,...,x_n]$. Introduce la noción de ideal primario, ya implícita en la obra de Dedekind y ve que en dicho anillo todo ideal puede expresarse como intersección de ideales primarios. E. Noether, en 1921, probaba la existencia de una tal descomposición "al modo de Kummer", de todo ideal en producto de ideales primos. Estos eran los anillos noetherianos, enteramente cerrados y tales que todo ideal primo no nulo era maximal, es decir, los que hoy llamamos anillos de Dedekind.
El paso de la teoría de ideales a la teoría de valoraciones sería hecho por Krull en 1931.
La medida en que un anillo de Dedekind deja de ser factorial, la da su número de clases (idea que bajo la teoría de las formas cuadráticas, se encuentra explícita en la obra de Gauss **"Disquisitiones Arithmeticae"**, publicada en Leipzig en 1801 y en la de Kummer y Dedekind).
Sea A un anillo y M el monoide de los ideales de A (con la operación de producto), por medio de la introducción de los ideales fraccionarios, M puede incluirse, de manera natural, en un grupo. Si K es el cuerpo de las fracciones de A, un ideal fraccionario es, por definición, un A-submódulo de K finitamente generado, un tal ideal puede escribirse en la forma $x^{-1}b$, siendo b un ideal de A ordinario y x, un elemento no nulo de A. El conjunto I de todos los ideales fraccionarios del anillo de Dedekind A, mediante la operación de producto, tiene estructura de grupo y, obviamente, contiene a M. Los ideales fraccionarios de la forma yA, $y \in K^*$, constituyen un subgrupo P de I, llamado de los ideales principales. El cociente I/p es el grupo de las clases de A. Su cardinal, representado usualmente por h(A) o h, es llamado número de clases del anillo A.
Sea h el número de clases del cuerpo ciclotómico $Q[\varsigma_p]$, p entero primo ≥3. La demostración del Teorema de Fermat en el caso h=1, fue extendida por Kummer en 1847 a todos los primos p tales que p/h. Ello condujo a clasificar los primos en regulares e irregulares, de modo que un primo ≥3 es regular si y sólo sí p/h, siendo h el número de clases de $Q[\varsigma_p]$. Para tener una idea de en cuanto mejoraba esto el resultado anterior de Kummer, mencionaremos que entre los primos p<100, sólo el 3,5,7,11,13,17 y el 19 dan números de clases igual a uno, mientras que únicamente el 37, 59 y el 67 son primos irregulares. El entusiasmo inicial de Kummer le llevó a titular su artículo **"Beweis des Fermat'schen Satzes der Unmoglichkeit von $x^\sigma + y^\sigma = z^\sigma$ fur eine unendliche Anzahl Primzahlen σ"**. Digamos que hasta el día de hoy, no se ha podido probar que el conjunto de primos regulares sea infinito, sin embargo, se sabe que es infinito el de los irregulares. En todos los intervalos estudiados dominan los primos regulares sobre los irregulares.

La función zeta. Es bien sabido que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \; s \in \mathbf{R},$$

es convergente si s>1 y divergente para los demás valores de s. Escribamos de acuerdo a la notación introducida por Riemann:

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, s>1.$$

Haciendo uso de la correspondiente función zeta, Kummer ayudado por resultados obtenidos previamente por Dirichlet, ve que el número de clases h del cuerpo ciclotómico $Q[\varsigma_p]$ admite una descomposición $h = h_1h_2$, siendo h_1 y h_2 enteros ≥1, y de forma que h es igual al número de clases del cuerpo real maximal $Q[\varsigma_p+\varsigma_p^{-1}]$, contenido en $Q[\varsigma_p]$.
En 1850, Kummer demostró el siguiente resultado:

Criterio de regularidad de Kummer. Un entero primo p≥3 es regular si y sólo sí p | P_2, P_4, ..., P_{p-3}. Donde $B_{2m} = P_{2m}/Q_{2m}$, siendo B_{2m} los números de Bernoulli y P_{2m}, Q_{2m} son enteros tales que $mcd(P_{2m},Q_{2m})=1$.

Puesto que los números de Bernoulli pueden calcularse de forma recurrente, quedaba así aclarada la cuestión de decidir si un primo dado era regular o no.
La Academia Francesa de Ciencias había ofrecido un premio de 3000 francos oro para el matemático que lograra dar una demostración general del Teorema de Fermat, o por el contrario, probara su falsedad. En 1850 concurrieron al premio cinco memorias, declarándose desierto. Otro tanto ocurrió en 1853, presentándose entonces memorias. Una tercera convocatoria tuvo lugar en 1857. La Academia decidió entonces, puesto que las memorias presentadas no reunían los méritos suficientes, otorgar el premio a Kummer, aunque no era aspirante al mismo, por su criterio para determinar si un primo era regular o no, es decir "... *por ses belles recherches sur les entiers*" (C.R. Acad. Sci., París, XLIV, 158 (1857)).
Con respecto a los primos irregulares, no sabemos a ciencia cierta ¿cómo reconocer si un primo es o no irregular? En 1915, K.L.Jensen probó que existían infinitos primos irregulares de la forma 4n+3. En 1954, L. Carlitz dio una demostración sencilla del resultado, más débil, de la existencia de infinitos primos irregulares. Respecto a la densidad relativa:

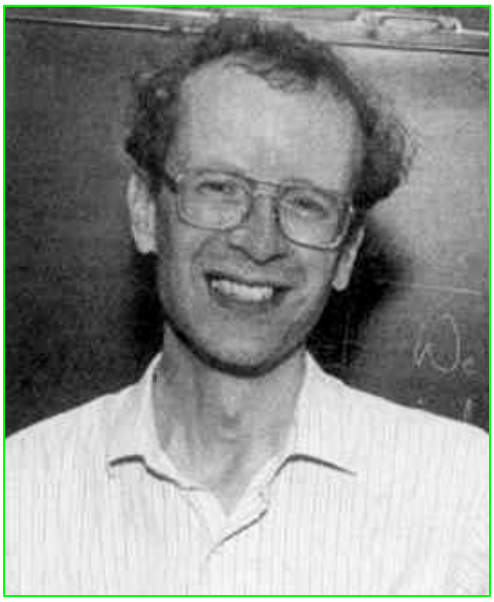
$$\lim_{n} \frac{\text{No. primos irregulares} \le n}{\text{No. primos regulares} \le n},$$

se ha conjeturado que era igual a 1/2 (Kummer), igual a 1 (Hensel) o igual a exp(1/2)-1=0,6487 (Siegel). El mejor resultado obtenido es el de W. Johnson (1957), quien con un ordenador PDP-10, examinó todos los primos p<30000, de los cuales 1971 han resultado ser regulares y 1273 irregulares. El cociente 0,6459 parece dar la razón a Siegel.
Si p es un primo irregular y p | P_{2k} para cierto k tal que 1<2k<p-3, se dice que (p,2k) es un par irregular.
En su intento de responder a la pregunta formulada antes, Kummer, en 1857, creyó haber encontrado un criterio que le permitía demostrar el Teorema de Fermat en los casos p=37, 59 y 67. En 1920, Vandiver advirtió que la demostración de Kummer no era del todo correcta. Sin embargo, pudo corregirse y ello condujo a la publicación, en 1954, por parte de Vandiver, D.H. Lehmer y E. Lehmer del siguiente criterio para el caso irregular.
A pesar de los numerosos premios ofrecidos, el Teorema de fermat, permaneció insoluble. El tiene la dudosa distinción de ser el teorema con mayor cantidad de demostraciones falsas. Un dato en esta dirección es que, más de 1000 demostraciones falsas fueron publicadas entre 1908 y 1912 ¡en solo 4 años!.
Teorema. Sea p un primo irregular y supongamos que P=rp+1 sea un primo que satisface $P<p^2-p$. Sea t un entero tal que t≡1 (mod P). Para cada par irregular (p,2k), formemos el producto:

$$N_{2k} = t^{-rd/2} \prod_{b=1}^{m} \left(t^{rb} - 1\right)^{b^{p-1-2k}},$$

donde m=(p-1)/2 y d=$\sum_{n=1}^{m} n^{p-2k}$. Si, para todos los pares irregulares se verifica que $N_{2k}^{r} \equiv 1 \pmod P$, entonces el Teorema de Fermat es válido para el exponente p.

El criterio ha sido aplicado con éxito por Johnson para todos los primos irregulares <30000. En todos los casos ha bastado tomar t=2 y el menor primo P con las condiciones requeridas.
En 1934 Vandiver conjeturó que el segundo factor del número de clases h , no era nunca divisible por p y probó, bajo la hipótesis p | h_2, que el primer caso del Teorema de Fermat era válido. Dicha conjetura se verifica para todos los primos p<30000. Sin embargo, una conjetura anterior afirmaba que h_2 era siempre igual a 1, fue desmentida en 1965 por Ankeny, Chowla y Hasse.
Usando técnicas computacionales, basadas en los trabajos de Kummer, el Teorema fue demostrado en 1993 para todo n hasta 4 000 000.



Andrew Wiles y Yataka Taniyama. Gran sorpresa se llevaría Fermat al percatarse que la demostración de su teorema requirió para su escritura más de uno, dos o veinte márgenes de las hojas del libro de Diofanto. Esta parece definitivamente encontrada por el Dr. Andrew Wiles, matemático inglés de 42 años de edad que trabaja en Princeton.
El resultado se dio a conocer en el mes de junio de 1993 en la última (sobre las 10.30 am) de tres conferencias (impartidas el lunes 21, martes 22 y miércoles 23) ofrecidas en el Instituto de Matemática "Isaac Newton" de la Universidad de Cambridge (fundado el 3 de julio del año anterior) y que llevó por título **"Modular forms, elliptic curves and Galois representations"**. Como se puede observar, el título no sugiere relación alguna con el Teorema de Fermat. Un público selecto, entre los que estaba Enrico Bombieri, Medalla Field, quedó boquiabierto.
El camino para llegar a la solución no se encuentra en forma directa a través de las herramientas de la teoría de los números, teoría con la que se podría suponer que Fermat consumó la solución. Esta empezó en 1955 cuando el matemático japonés Yataka Taniyama planteó una conjetura relativa a las curvas elípticas (curvas de la forma $y^2=x^3+ax+b$, para constantes a y b). Pocos años después, en la misma década de los 50, la conjetura fue refinada por el Dr. Goro Shimura de la Universidad de Princeton. Durante las décadas de los 50 a los 70 no se relacionó a la conjetura de Taniyama con el Gran Teorema de Fermat. A mediados de los 80, el Dr. Gerhord Frey, de la University of the Searland en Alemania, propuso una relación entre estas. Dicha relación se formalizó en 1986 cuando el Dr. Ribert demostró que era verdadera y que la conjetura implicaba el teorema de Fermat.
El probable paso final lo dio el Dr. Wiles cuando demostró que la conjetura de Taniyama para curvas elípticas semiestables sobre los racionales es verdadera, su resultado más fácil de

entender es el siguiente: **toda curva elíptica cuya ecuación es a coeficientes racionales, es susceptible de ser parametrizada por formas modulares**.
En esta formulación, a despecho de su aparente simplicidad, subyace una muy profunda sutileza: se sabe, por teoría elemental de curvas elípticas, que estas se parametrizan con funciones de Weierstrass doblemente periódicas pero el hecho de que se puedan también parametrizar mediante formas modulares, obedece esencialmente a la presencia de los racionales como coeficientes en la ecuación de la curva (en cambio para la primera parametrización los coeficientes pueden pertenecer a cualquier subcampo de C) así la Geometría, propia de las curvas elípticas definidas sobre C, y el Análisis, que corresponde a las formas modulares, concurren bajo un comportamiento que es de naturaleza aritmética, lo cual ciertamente supone un acontecimiento inusual.
Se entiende por esto, que la función es holomorfa y nula en el infinito, de peso 2 y de un cierto nivel N bien determinado para cada curva. Estas formas generan un espacio vectorial (complejo) de dimensión finita y son entonces vectores propios para ciertos operadores lineales conmutativos, los cuales a su vez generan una cierta Algebra de Hecke, estructura ésta de importancia decisiva en el trabajo rectificatorio de Wiles y usada también en la primera versión del trabajo en 1993.
Este trabajo de Wiles, sumamente notable por razones ajenas a Fermat ya que demuestra la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil para una vasta clase de curvas elípticas (las llamadas semiestables a las cuales corresponde un nivel N que es producto de factores primos distintos, es decir, libre de factores cuadrados), iba a implicar a Fermat de manera particular pero, como es sabido, Wiles cometió un error en este punto (un error algo fantasmagórico e imperceptible, digno de un matemático de su altura). Ahora, como resultado de un esfuerzo intelectual intenso, sostenido por más de un año, el error está, según parece, subsanado. Para ello Wiles debió renunciar a un camino prácticamente infranqueable, justificador de escepticismos, cual era el de calcular un eventual defecto entre las representaciones asociadas a una curva elíptica del grupo de Galois (sobre Q) de la clausura algebraica (en C) de Q y las representaciones de G asociadas a una forma modular, estas de más difícil construcción que aquellas (dichas representaciones deben coincidir según una versión “galoisiana” de la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil). En cambio, Wiles estableció un teorema de estructura sobre las representaciones modulares que implica la igualdad requerida.
Todo este se describe sin mayor dificultad en sus grandes líneas pero ahondar en sus detalles exigiría de una muy fuerte solvencia, propia de especialistas de alta calificación. El trabajo de Wiles se extiende a lo largo de 200 páginas, de las que en Cambridge sólo filtró alguno pasajes (exactamente dos pizarras).
Jamás en la historia de las matemáticas se había visto tan numerosa pléyade de matemáticos insignes concurriendo con sus aportes imprescindibles a la obtención de un solo fin: Hilbert, Weil, Shafarevich, Grothendieck, Faltings, Serre, Mazur, Tate, Kolyvagin, Ribet, Langlands, Flach y un más bien largo etc., en el que se impone resaltar la invalorable escuela japonesa y a Taylor quien marcó el sine qua non, el camino final del trabajo de Wiles.
Dos trabajos de Wiles dados a conocer últimamente, refuerzan la convicción de que ha logrado superar la “fisura” de su demostración inicial. El primero de ellos, titulado **“Curvas elípticas modulares y el Último Teorema de Fermat”** contiene lo esencial del argumento de Wiles. El segundo trabajo, **“Propiedades Teóricas de ciertas álgebras de Hecke”**, fue escrito en colaboración con Richard Taylor, un colega de Wiles y proporciona el paso clave de la demostración. Se considera que los resultados de Wiles, aunque no lograra demostrar el Gran Teorema, constituyen una profunda contribución a la Teoría de los Números. Es concido que el 6 de octubre de 1994, Wiles envió la demostración corregida a tres colegas, entre los que se encontraba Gerd Faltings, quien había expresado serias dudas respecto a la obtención de la demostración por parte de Wiles.

Muchísimas interpretaciones del Teorema de Fermat se han presentado a lo largo de más de 355 años y cubren prácticamente, todas las ramas de las matemáticas, lo que haría de esta parte, algo sumamente extenso, nos referiremos únicamente a su connotación social.
Paul Wolfskehl dejó a la Academia de Ciencias de Gottingen en 1907, un legado de 100 000 marcos como premio para quien lograra demostrar el Teorema de Fermat. Aunque como decía el Profesor L. J. Mordell, haya otras maneras más sencillas de hacer dinero, recordamos que el plazo de presentación de trabajos expira el 13 de Septiembre del año 2007. Esperemos.
Quisiéramos presentar aquí, por último, una interpretación geométrica del Teorema de Fermat debida al matemático rumano G. Vranceanu (ver **"Sobre un teorema equivalente al teorema de Fermat"**, Gazeta de matematica si fizica, 1956. Opera matematica, IIIe vol., 97-98 (en rumano); **"Sobre el teorema de Fermat para n=4"**, Opera matematica, IVe vol., 202 (en rumano) y **"Une interprétación géométrique du théorème de Fermat"**, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tome XXIV, N°7, 1979, 1137-1140) El muestra que el caso n=3 conduce a la proposición de que la cúbica plana:

$$4ß^3 = 1 + 3\alpha^2,$$

no pasa por otros puntos de coordenadas enteras que ß=1, $\alpha=\pm1$. En otras palabras, esta ecuación significa que un número entero no se puede escribir de otra forma que esta, para ß y α con los valores dados.
Consideremos el caso n>3 (por ejemplo n=4). Suponiendo que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ tiene una solución no nula, podemos escribirla como z=y+u, donde u es un entero no nulo, así obtenemos la ecuación:

$$x^4 = u^4 + 4u^3 y + 6u^2y^2 + 4uy^3.$$

Después de varias transformaciones elementales, obtenemos la ecuación:

$$2x = uY(Y^2 + u^2)^4, \qquad (1)$$

De aquí tenemos lo siguiente:

"El Teorema de Fermat para n=4 es equivalente a obtener que las familia de cuárticas (1) del plano x, Y con u entero no pasa por otros puntos enteros que x=±u, y=u (u≠0)".

Una interpretación de este tipo es válida por supuesto para n>4.

Las publicaciones matemáticas. Sería imposible enumerar todas las publicaciones matemáticas que se editan en la actualidad, lo que haremos es presentar un resumen sobre esto, utilizando como fuente a la conocida revista referativa **Mathematical Review**, existen otras dos, la **Referativnie Zhurnal** y la **Zentralblatt für Mathematik**, pero utilizaremos la primera por razones de comodidad y amplitud de los datos.
MR es una dependencia de la American Mathematical Society y es sin dudas la principal publicación en su género en las ciencias matemáticas. Los editores revisan más de 1500 publicaciones periódicas de todo el mundo, publicadas en diversos idiomas. También son reseñados anualmente miles de libros y colecciones de monografías. En total se publican más de 52000 reseñas (reviews) por año, realizados por cerca de 12000 revisores especializados de todo el mundo. MR aparece mensualmente con una tirada de 2000 ejemplares.

Si tenemos en cuenta que los trabajos publicados no son todas las investigaciones matemáticas realizadas, están excluidas las investigaciones militares y económicas secretas, debemos llegar a la conclusión que al año deben realizarse unas 65000 comunicaciones matemáticas de todo tipo, esto por supuesto se traduce en una amplitud de líneas de investigación como nunca antes se pudo imaginar un investigador, para tener una idea, reflejemos el índice temático de un número cualquiera de MR:

1. Generales (diccionarios, colección de trabajos, ...).
2. Historia y Biografía.
3. Lógica y Fundamentos.
4. Teoría de Conjuntos.
5. Teoría Combinatoria, Teoría de Grafos.
6. Orden, Mallas, Estructuras algebraicas ordenadas.
7. Sistemas matemáticos generales (estructuras, leyes de composición, ...).
8. Teoría de Números.
9. Campos y Polinomios.
10. Algebra y Anillos conmutativos asociados.
11. Geometría algebraica.
12. Algebra lineal y Multilineal, Teoría de Matrices.
13. Algebras y anillos asociativos.
14. Algebras y anillos no asociativos.
15. Teoría de la categoría, álgebra homológica.
16. Teoría de Grupos y generalizaciones.
17. Grupos topológicos y Teoría de Lie.
18. Funciones de varias variables.
19. Medida e integración.
20. Funciones de variable compleja.
21. Teoría del Potencial (Funciones armónicas, Problema de Dirichlet, Ecuación de Poisson, ...).
22. Funciones de varias variables complejas.
23. Funciones especiales (funciones trigonométricas y exponenciales, gamma y Beta, ...).
24. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
25. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.
26. Ecuaciones funcionales y en diferencias finitas.
27. Sucesiones, series, sumabilidad.
28. Aproximación y expansión.
29. Análisis de Fourier.
30. Transformaciones Integrales, Cálculo Operacional.
31. Ecuaciones Integrales.
32. Análisis Funcional.
33. Teoría de Operadores.
34. Cálculo de Variaciones, Control Optimal.
35. Conjuntos convexos y desigualdades geométricas.
36. Geometría diferencial.
37. Topología general.
38. Topología algebraica.
39. Topología y geometría de variedades.
40. Probabilidades.
41. Estadística.
42. Métodos numéricos.

43. Máquinas de cálculo.
44. Matemática general aplicada.
45. Mecánica de partículas y sistemas.
46. Elasticidad, plasticidad.
47. Mecánica de los fluidos, acústica.
48. Optica, Teoría Electromagnética.
49. Termodinámica clásica, transferencia de calor.
50. Mecánica cuántica.
51. Física de estado, estructura de la materia.
52. Relatividad.
53. Astronomía y astrofísica.
54. Geofísica.
55. Economía, Investigación de Operaciones, Programación, Juegos.
56. Biología y ciencias biológicas.
57. Sistemas, Control.
58. Información y comunicación, circuitos, autómatas.
59. Educación matemática, elemental.
60. Educación matemática, secundaria.
61. Educación matemática, colegiada.

Quisiéramos en este punto, para ilustrar la amplitud y variedad de las actuales investigaciones matemáticas, presentar los temas contenidos en el punto Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

1. Soluciones en forma cerrada; integración por cuadraturas, reducción de ecuaciones diferenciales.
2. Teoría general de existencia y unicidad, dependencia continua de los parámetros, condiciones iniciales y de fronteras.
3. Ecuaciones Diferenciales en el dominio complejo.
4. Teoría analítica: series, transformaciones, cálculo operacional.
5. Ecuaciones lineales y sistemas, generalidades.
6.Problemas con valores en la frontera, teoría espectral, comportamiento asintótico de autovalores, distribución de autovalores.
7. Problemas no lineales y multipuntos.
8. Teoría cualitativa, generalidades.
9. Ciclos límites, puntos singulares.
10. Límite, crecimiento, oscilación y comparación de soluciones.
11. Oscilaciones no lineales, soluciones periódicas y cuasi-periódicas, método del average (promediación).
12. Asintótica exponencial, comportamiento asintótico de soluciones.
13. Estabilidad.
14. Perturbación.
15. Perturbaciones singulares, parámetros pequeños en la derivada superior.
16. Ecuaciones y sistemas con aleatoriedad.
17. Sistemas dinámicos, sistemas sobre variedades.
18. Ecuaciones Diferenciales de orden infinito.
19. Ecuaciones Diferenciales Funcionales: ecuaciones diferenciales-diferencias, ecuaciones con argumento retardado.
20 Problemas de Control Optimal.
21. Desigualdades diferenciales.
22. Ecuaciones Diferenciales en B-espacios y otros espacios funcionales.

Analicemos esta magnitud más detalladamente. En 1992, Mathematical Reviews publicó los 12 números del año, con más de 7000 páginas, en los que había sobre 42000 reseñas. Esto da una primera aproximación: en 1992 unos 42000 artículos fueron considerados como nuevos. Digamos ahora, que un artículo investigativo en Matemático tiene un promedio de 10 páginas de longitud, consideremos que algunos cientos de estas reseñas son libros y estimemos que en Matemática un libro tiene como promedio, 200 páginas. De aquí tenemos que más de medio millón de páginas, de nueva Matemática, se revisaron en 1992.
Este número puede no parecernos muy grandes en esta época de megas y gigas, sin embargo, para tener una real idea de la magnitud de la cifra anterior, tomemos que si alguien se decide a leer cada una de estas publicaciones matemáticas, y es capaz de leer una página por minuto, serían unas 8000 horas de lectura ininterrumpida, o sea, 347 días más o menos. Así, si Ud. empieza a leer el 1ro de Enero de 1999, y no toma ni siquiera un descanso para dormir o comer, Ud. podrá disfrutar las Navidades de ese año.

LA UNION INTERNACIONAL DE MATEMATICA (IMU).

En julio-agosto del año 1994, se efectuó la Asamblea General de la IMU y el Congreso Mundial de Matemática (ICM94) en Suiza (por tercera vez, en el año 1897 en su primera versión, en 1932 cuando se instauran las Medallas Field), correspondientes a las últimas versiones de estos eventos. La IMU fundada en 1947, contó con Cuba como uno de los 22 miembros fundadores que participaron en la primera Asamblea General, efectuada en Roma en 1952.
Esta última AG (la XII) se reunió en Lucerna, los días 29 y 30 de Julio. En la AG participan representantes de los países miembros de la IMU, en esta se contaron 48 países representados con un total de 108 votos el 31 de Julio y 49 países con 110 votos el 1 de agosto, sobre un total de 56 países miembros y se aceptaron las nuevas afiliaciones Armenia, Kazajastán y Tunez. De acuerdo a su nivel matemático, un país puede ser miembro de la IMU del Grupo I hasta el Grupo V. Los países ascienden de grupo a través de votación en la misma AG. El nivel indica el número de participantes a la AG y, por ende, el número de votos de cada país.
Entre las decisiones cardinales estaba la elección de la sede del próximo ICM, que recayó en Berlín en 1998 y posiblemente la AG de ese año se efectúe en Postdam unos días antes. Los alemanes triunfaron sobre los israelitas ya que estos se retiraron ante la velada amenaza, por parte de varias delegaciones, de exigir que la Asociación de Matemáticos Palestinos (miembro no pleno) participara en la organización del evento.
Después de las votaciones el Comité Ejecutivo de la IMU, para el período 1 de Enero 1995-31 de Diciembre de 1998, quedó conformado de la siguiente forma:

Presidente: Prof. David Mumford (Univ. Harvard, EEUU)
Vice-Pdtes: Prof. Vladimir Arnold (Inst. Steklov, Moscú, Rusia)
Prof. Albrecht Dold (Univ. de Heidelberg, Alemania)
Secretario: Prof. Jacob Palis (IMPA, Brasil)
Miembros: Prof. James Arthur (Univ. Toronto, Canada)
Prof. Simon Donaldson (Univ. de Oxford, G.B.)
Prof. Björn Engquist (KTH-Estocolmo, Suecia)
Prof. Shigefumi Mori (RIMS, Univ. de Kyoto, Japón)
Prof. K.R. Parthasarathy (Inst. Indio Estad., India)
Past-pres.: Prof. Jacques Louis Lions

Las presidencias de la ICMI y la CDE (Comisión para el Desarrollo e Intercambio) recayeron en el Prof. Miguel de Guzmán (Univ. Complutense, Madrid, España) y el Prof. Rolando Rebolledo (Univ. Católica de Chile), respectivamente.

Para el 2002 ya hay varios países interesados en efectuar el ICM. Entre ellos los más probables sean Australia y China.
El Congreso se inició en Zurich el primero de agosto. Las sesiones plenarias se desarrollaron en el KongressHal con 2536 participantes de 87 países. Es realmente notable el momento de las entregas de la medalla Field (propuesta por G. Field en el congreso de Toronto de 1924 e instaurada en 1932, para matemáticos menores de 40 años que es equivalente al premio Nobel, un conocido nuestro fue el ganador de la primera L. Alhsford de EEUU).
Fields en su memorandum sobre las Medallas dijo:

> *"It is understood that in making the awards, while it was recognition of work already done, it was at the same time intended to be an encouragement for further achievements on the part of the recipients and a stimulus to nenewed effort on the part of others... with a view to encouraging furter development along these lines"*.

En esta versión las medallas fueron ganadas por J.C. Yocozz (Sistemas Dinámicos, Univ de París-Sud, Orsay, Francia), P.L. Lions (Ecuaciones Diferenciales, Univ. de París, Dauphine, Francia), J. Bourgain (Univ. de Illionis, Inst. for Advanced Study; originario de Francia) y E. Zelmanov (Algebra, Univ. de Wisconsin, Univ. de Chicago). El ganador del Premio Rolf Nevanlinna fue A. Widgerson.
La IMU con la misión de divulgar, apoyar y/o fomentar el desarrollo matemático de todos los países, ha decidido declarar (bajo el auspicio de la UNESCO y mediante su **Declaración de Río de Janeiro de 1992**) el año 2000 como **Año Mundial Matemático**, para ello ha decidido la organización de una serie de eventos en diversas regiones sobre tópicos actuales.
En este espíritu se fundó, el 26 de Julio del pasado año en el IMPA, la **UNION MATEMATICA DE AMERICA LATINA Y EL CARIBE (UMALCA),** con la participación de los presidentes y representantes de las Sociedades de Matemática de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Cuba, México, Perú, Uruguay y Venezuela y los responsables de la Red Latinoamericana de Matemática. Entre sus estatutos se plantea:
-La Unión estimulará las actividades matemáticas de la región, especialmente a través de la cooperación entre sus investigadores e instituciones...
-La Unión realizará gestiones de carácter regional ante la IMU y el Comité Internacional de Uniones Científicas (ICSU) y otras organizaciones similares...
-Las finalidades específicas de la Unión son:
i) Colaborar en la creación de ámbitos de trabajo de alto nivel matemático mediante el mejoramiento de las condiciones académicas y el intercambio de estudiantes e investigadores de la región.
ii) Establecer un sistema que permita seleccionar académicamente las instituciones matemáticas de la región en las cuales se desarrollen programas de postgrado de alto nivel.
iii) Fomentar el desarrollo de la Matemática en países de menor desarrollo relativo o con mayores dificultades económicas.
iv) Apoyar programas en que investigadores en Matemática estén involucrados en el mejoramiento de la enseñanza de la disciplina.

Esto, como es de suponer, significará una ayuda inmediata para Cuba, el cual por diversas razones ha ido perdiendo su nivel en la región.

CUESTIONARIO

1. Demuestre el Teorema de Fermat para n=3 y 4, utilizando el Método de Descenso Infinito de Fermat. Analice los errores cometidos en las demostraciones de los siglos XVIII y XIX.

2. Haga un listado de los congresos de matemáticas más importantes realizados.

Apéndice. La Historia de la Matemática como Herramienta Didáctica.

A lo largo de 19 conferencias, hemos intentado presentar lo más trascendental de la Historia de la Matemática (tarea nada fácil). Queremos ahora resumir, algunas de las direcciones en las que se pueden utilizar los recursos históricos, al margen de las anécdotas utilizadas usualmente, para salpicar las clases de Matemática, de momentos de risa y distracción. Este Apéndice es una recopilación de algunos trabajos del autor sobre el tema, por lo que tiene un carácter autocontenido y puede leerse independiente del resto del libro.

Antes que todo, debemos precisar que entenderemos por Educación Matemática, aquella disciplina en formación, que está relacionada con los problemas que surgen en la impartición de esta asignatura (sin distinción de niveles) y la investigación de diversos problemas didácticos vinculado con esta, con la formación y captación de alumnos talentos y en la cual juega un papel destacado la Historia de la Matemática, cosa que nos proponemos mostrar más adelante (ver **Vasco (1994)**).

Uno de los fundamentos de la actual reforma de la enseñanza de la Matemática, es el concepto del que se parte respecto a la naturaleza del conocimiento matemático. La perspectiva histórica permite mostrar, entre otras cosas, que la Matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden, su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de los conocimientos matemáticos, del razonamiento empírico-deductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo.

Todo lo anterior podemos reafirmarlo con el hecho que el desarrollo de la Matemática ha seguido un proceso heurístico -demostrado históricamente, ver **Farfán y Hitt (s/f)**- contrario a los defensores del estilo deductivista que pretenden que la deducción es el patrón heurístico de la Matemática y que la lógica del descubrimiento es la deducción, al igual que la mayoría de los conceptos desarrollados por un matemático aislado.

El problema principal, en la Educación Matemática, es que estos modelos o metodologías no se han llevado -salvo muy pocos casos- al terreno de la enseñanza de la Matemática, siendo ellos de prioridades primordiales.

Parece difícil de negar el hecho que las diversas interpretaciones epistemológicas acerca del status científico de las Matemáticas tienen una influencia decisiva en la consideración de su Historia y su Enseñanza. Por poner sólo un ejemplo bastante reciente, qué duda cabe que la consideración Bourbakista de dicha ciencia, sintetizada en el artículo firmado por el colectivo autodenominado Nicolás Bourbaki sobre la "Estructura de la Matemática" (ver **Bourbaki (1962)**), ha determinado su visión de la Historia de la misma, así como su concepción de qué y cómo enseñarla, puesta de manifiesto en la década de los 60 bajo la denominación de la "matemática moderna" o la "nueva matemática". El slogan que acuñó Jean Dieudonné, quizás el bourbakista más osado a la hora de asumir y defender sus peculiares posicionamientos pedagógicos, amparándose incluso en los planteamientos cognitivos de Jean Piaget, con motivo del coloquio de Royaumont realizado en 1959, pone de manifiesto esta interrelación entre las Matemáticas, su Historia y su Enseñanza. Su *¡Abajo Euclides!*, está plenamente justificado en función de sus planteamientos históricos, recogidos en su **Dieudonné (1972).**

En estos momentos, han tomado fuerzas posiciones de historiadores de la matemática que defienden entre otros, las siguientes tesis (ver **Arrieta (1997)**):

"1.- En la mayor parte de las historias de las matemáticas conocidas podemos comprobar que se oculta o no se fundamenta en absoluto la concepción epistemológica que se tiene de dicha disciplina. ¿Qué se entiende por matemáticas?, ¿qué se entiende por ciencia o ciencias?, ¿y por abstracción? Estas preguntas, desgraciadamente, no se suelen responder con el más

mínimo rigor en los libros publicados al respecto, por lo que muchas de las afirmaciones que contienen se deben asumir como dogmas de fé, sin posibilidad de discusión y, en su caso, de refutación.

2.- Los textos de historia de las matemáticas se han escrito con un marcado sesgo eurocéntrico, ignorando, devaluando y distorsionando la actividad matemática realizada al margen del continente europeo. Parece ser que únicamente los habitantes del mismo han sido capaces de aportar algo a la "reina de las ciencias", al espíritu humano creador capaz de construirla y desarrollarla con racionalidad y rigor.

3.- La Educación Matemática, su enseñanza, al no fundamentarse en una adecuada epistemología e historia de la misma, no favorece la concreción de una educación Intercultural, más necesaria que nunca en esta llamada Aldea Global."

Quizás en el segundo tema, la obra más sólida es la que presenta el sirio-indio-etíope-inglés Georges Gheverghese Joseph, reciente autor de una obra que bajo el sugerente título de "La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas" **(Gheverghese (1996)**) plantea una crítica demoledora, crítica que abunda en defensa de la segunda tesis. Como afirma dicho autor (p.26)*: "Las matemáticas han desarrollado un lenguaje universal con una clase particular de estructura lógica. Contienen un cuerpo de conocimientos relacionado con el número y el espacio, y prescriben un conjunto de métodos para alcanzar ciertas conclusiones acerca del mundo físico - y para la resolución de infinidad de problemas, diríamos nosotros -. Y es una actividad intelectual que exige intuición e imaginación para deducir demostraciones y alcanzar conclusiones. Con frecuencia recompensa a las mentes creativas con un fuerte sentido de satisfacción estética".*
En esta dirección, cabe quizás añadir lo siguiente, como objetivos a trasmitir con la utilización de recursos históricos en la Educación Matemática:

1. Una concepción dinámica de la Matemática, acuñada en la célebre frase de Philip E. Jourdain, en la introducción a su comentado **"La Naturaleza de la Matemática",** cuando al declarar el objetivo central de dicho libro apuntaba: *"Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo".*

2. Que se debe aceptar el significado de los objetos matemáticos en su triple significado: institucional, personal y temporal (ver **Díaz y Batanero (1994)**) y para algunas observaciones, **Nápoles (1997b)**.

3. La distinción que debe establecerse entre una argumentación, una prueba y una demostración, y la necesaria dosificación de estas en el curriculum escolar, así como las discusiones en torno a las concepciones clásicas sobre esta última y el rigor de las mismas (**Arbelaez (1995)**, **de Gortari (1983)**, **Finochiaro (1980)**, **Gil (1990)**, **Glymour (1992)**, **Nápoles (1998)**, **Sánchez (1994)**, **Scriven (1987)**, **Serrano (1991)**, **Vega (1990a, 1990b, 1992a**, **1992b, 1993**, **1994a**, **1994b**, **1995** y **1996)** y **Weinstein (1990)**, entre otros). El concepto de una prueba no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido mayor importancia últimamente sobretodo vinculado a ciertos problemas de Educación Matemática. Así, se prefieren en ocasiones pruebas que expliquen en vez de pruebas que sólo "prueben". Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son válidas. Han adquirido relevancia en los últimos tiempos incluso, las llamadas "pruebas sin palabras", donde las representaciones geométricas vendrían a jugar el papel de las explicaciones necesarias, una pequeña muestra es

Cupillari (1989), **Flores (1993)**, **Nelsen (1990)**, **Schrage (1992)**, **Wu (1989)** y **Zerger (1990)**.

Por otra parte es claro, pero no siempre comprendido, que el objeto matemático en consideración para la enseñanza o el aprendizaje es estructuralmente, pero no cualitativamente, el mismo que en Matemáticas, de aquí que la mayoría de los matemáticos creen que la educación de la matemática sólo está afectada por problemas del tipo ¿Cómo trasmitir los hechos matemáticos importantes a los alumnos? De hecho, nosotros adoptamos la noción de significado de los objetos matemáticos en un triple condicionamiento: institucional, personal y temporal (**Díaz y Batanero (1994)**), lo que nos lleva considerar el enfoque socio-antropológico de cómo se produce y en qué consiste el conocimiento matemático, que se enmarca dentro de la línea más amplia de Etnomatemática (ver por ejemplo, **Oliveras (1996)** y **Gerdes (1991)**). Partiendo del hecho que no hay acuerdo universal sobre lo que constituye una "buena enseñanza de la Matemática", aceptamos que lo que cada cual considera como formas deseables de aprendizaje y enseñanza de la Matemática está influenciado por sus concepciones sobre la Matemática. Es poco probable que los desacuerdos sobre lo que constituye una buena enseñanza de la Matemática, puedan ser resueltos sin dirigirse a importantes asuntos sobre la naturaleza de la Matemática. Por otra parte, existen modelos didácticos dirigidos a qué cambios debe 'sufrir' el conocimiento matemático para ser adaptado como objeto de enseñanza, uno de tales modelos es el de "Transposición Didáctica" (**Chevallard (1985)**) que se manifiesta, como ya dijimos, en la diferencia existente entre el funcionamiento académico de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo. Ver el Anexo para una representación esquemática de la realizada en nuestro trabajo, que se manifiesta como ya dijimos, en la diferencia existente entre el funcionamiento académico de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo.

Una línea de investigación que no ha sido completamente desarrollada, es la búsqueda de elementos históricos como recurso pedagógico que aproveche nuestros conocimientos acerca de obstáculos didácticos, epistemológicos, ontogénicos y de problemas relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje, entre los que está, la influencia de las creencias y concepciones de los profesores en su labor docente (**Batanero y otros (1994), Thompson (1984 y1992)**, **Ernest (1989, 1992, 1994a y 1994b)**, **M.P. Flores (1993)** y **(1995)** entre otros).

Debemos dejar bien claro, que no afirmamos que este es el único, o mejor, de los métodos a utilizar, es una alternativa de trabajo que ha mostrado su utilidad en múltiples situaciones (ver a modo de ilustración **Arboleda y Recalde (1995)**, **Arzarello (1994)**, **Bartolini Bussi and Pergola (1994)**, **Cruz (1995)**, **De Guzmán (1992)**, **Díaz y otros (1991), Díaz y Batanero (1994), Estepa y Sánchez (1994)**, **Farfán y Hitt (s/f)**, **Gonzáles (1994)**, **Hitt (1978)**, **Laubenbacher and Pengelley (1992 y 1996)**, **Laubenbacher y otros (1994), Lerman (1996), Maza (1996)**, **Moreno (1993)**, **Nápoles (1997a y 1998), Pérez (1998), Puig (1994), Recalde (1994), Speranza (1994), Speranza and Grugnetti (1996)** y **Vasco (1994)**).

1. *La Resolución de Problemas y el Descubrimiento por Analogías.*

Jacques Bernoulli descubrió la suma de varias series infinitas, pero fracasó con la de la suma de los recíprocos de los cuadrados:

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/25 + ...$$

y escribió: "*Si alguien encuentra lo que hasta ahora no han logrado nuestros*

esfuerzos y nos lo comunica, le estaremos muy agradecidos por ello"

El problema interesó a Euler, quien después de varios intentos encontró el valor exacto por casualidad, la analogía le había conducido a una conjetura. Primeramente, debemos decir que Euler, antes de conjeturar cuál podría ser la suma de esta y probarlo, intentó obtener una buena aproximación calculando sumas parciales, lo cual es muy meritorio si se tiene en cuenta la lenta convergencia de esta serie.

Indudablemente las ciencias matemáticas, así como el ejercicio de su enseñanza, siempre han tenido como principal medio y fin los problemas matemáticos. P. Halmos (1980) no puede ser más elocuente al respecto, cuando afirma que los problemas son *"el corazón de la Matemática"*. La resolución de problemas entraña el engranaje de disímiles recursos cognoscitivos por parte del resolutor. Para este último resolver un problema debe servir no sólo de un simple entrenamiento intelectual, sino también de un sano y agradable entretenimiento. ¿Pero acaso sucede así con cualquier problema?

Realmente el propio concepto de problema es ya, por así decirlo, un nudo gordiano. Nosotros antes de manipular algunos términos (problema, ejercicio, resolver un problema, etc.), realizaremos una breve discusión sobre la concepción que tenemos sobre los mismos. Con relativa frecuencia los docentes esgrimimos los términos ejercicio y problema, a veces tan a la ligera que con ambos identificamos, indistintamente, el mismo concepto. Para evitar confusiones queremos precisar qué entendemos en cada caso; asumiendo las caracterizaciones y clasificaciones más plausibles en el contexto de la didáctica específica de la Matemática.

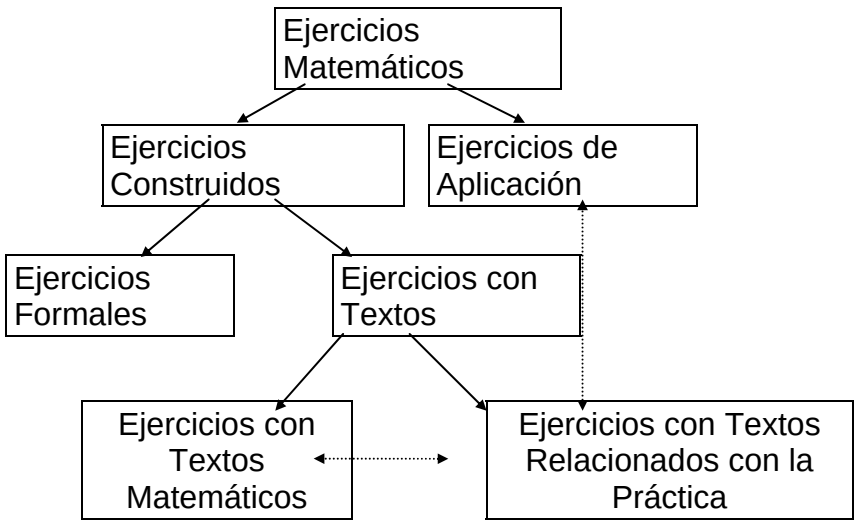
El trabajo con ejercicios no sólo constituye el medio fundamental para la realización de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, sino también el instrumento adecuado para la medición del rendimiento de los estudiantes. H. Müller (1987) ha planteado que el éxito de la enseñanza de la Matemática depende esencialmente de cuáles ejercicios se plantean, en qué sucesión y con qué función didáctica, y cómo el profesor dirige su proceso de resolución. Según varios autores, un ejercicio es una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etc. (**Ballester y otros, 1992**).

De cada acción deben precisarse el objetivo, que nos moverá a transformar una situación inicial (premisa) en otra final (tesis); el contenido, que comprende los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar, etcétera) y por otra parte, el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos), la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y matemáticas, los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas) y los medios heurísticos auxiliares. También es necesario precisar las condiciones para las acciones, es decir, valorar el grado de dificultad que presenta el ejercicio según las exigencias que este plantee al alumno.

En **(Borasi, 1986)** se denomina ejercicios a aquellas tareas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo. Si se trata de un texto formulado con precisión, donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución, entonces la tarea se denomina "Word-Problem". Cuando el contexto descubre el potencial recreativo de la Matemática, obligando al resolutor a ser flexible y considerar varias perspectivas, la tarea se denomina "Problema Puzzle". En este último caso la formulación puede resultar engañosa, y la solución no tiene necesariamente que suponer procesos matemáticos. Otra tarea que considera este autor es la "Prueba de Conjeturas" refiriéndose, por ejemplo, a la demostración de un teorema o de cierta propiedad matemática. También habla de "Problemas de la Vida Real" que supone tres procesos básicos: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de técnicas matemáticas al modelo, y la traducción a la situación real para analizar su validez. Borasi también destaca las "Situaciones Problémicas", en las cuales el sujeto se enfrenta ante un nuevo resultado matemático sin disponer de toda la información necesaria. En las situaciones problémicas la formulación es regularmente vaga, puesto que en este caso se trata

de establecer nuevas conjeturas; los métodos de aproximación suelen ser diversos; y la exploración del contexto, así como las sucesivas formulaciones del problema, son fundamentales. Por último, Borasi considera aquellas tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte del alumno, se trata de las "Situaciones".
Como podemos observar, la clasificación aducida por Borasi no solo es interesante, sino que también cubre una amalgama de ejercicios matemáticos. Sin embargo, queremos realizar algunas observaciones. En primer lugar, no queda muy clara la base para la división del concepto, aún cuando sabemos que en estos casos suele ser poco precisa. Así, por ejemplo, podemos encontrar un sinnúmero de "Word-Problems" cuyo propósito fundamental consiste en desarrollar algún tipo de algoritmo, o bien cuya formulación es difícil de interpretar a causa de la complejidad semántica, llegando a ser un "puzzle"; y más aún, ¿acaso un "Word-Problem" no puede ser un problema de la vida real? En segundo lugar, no queda clara la diferencia entre ejercicios y problemas; tal parece que los más abundantes en la enseñanza de la Matemática son los segundos y ciertamente esto no es así. No podemos negar la valía de los ejercicios destinados a estimular la identificación y fijación de los conceptos, ni tampoco los que estimulan el desarrollo de ciertas habilidades.

W. Jungk (1986) elaboró una clasificación de los ejercicios tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones, así como el tipo de reflejo que se realiza. Como superconcepto, este autor eligió el concepto ejercicios matemáticos planteados a los alumnos; a este lo subdivide en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (tienen su origen en la práctica) y ejercicios construidos (aquellos que se conciben con fines didácticos; o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otras). Los ejercicios construidos sufren a su vez otra división. Por una parte aparecen los ejercicios formales, donde los "chunks" de **Miller (1956)** aparecen declarados; o sea, al entrar en contacto con ellos, el estudiante identifica inmediatamente el tipo de ejercicio (una ecuación, un sistema, etcétera). Por otra parte aparecen los ejercicios con textos conformados por aquellos cuyo texto es puramente matemático o bien se relaciona con la práctica.



Con relación a su clasificación, el propio Jungk señala que las fronteras existentes entre los distintos grupos son movibles. Por ejemplo, tanto en los ejercicios con textos relacionados con la práctica, como en los de aplicación, el ejercicio matemático no desempeña el papel de primer lugar. Por su parte, los ejercicios con textos matemáticos y los de textos relacionados con la práctica no son conceptos completamente disjuntos, sino que también se solapan ya que

los primeros suelen ser "formas preliminares" de los segundos; además, en ambos casos debe analizarse inicialmente el texto para hallar el modelo matemático (cfr. **Jungk (1986)**, pp. 109-110), y considere las líneas discontinuas en la figura anterior).

Es notable que algunos autores han efectuado interesantes clasificaciones, que nos conducen a diferenciar los ejercicios atendiendo al dominio matemático a que pertenecen. Así, por ejemplo, F. González habla de "ejercicios geométricos" (**González (1997)**, pág. 20); N. Malara habla de ejercicios aritméticos de argumentación, inclusive los clasifica en ejercicios de razonamiento condicional, de refutación de conjeturas, de análisis crítico de fórmulas que expresan el procedimiento de solución de un problema, ejercicios para el análisis crítico de ecuaciones, y también de situaciones preparatorias para la demostración (**Malara e Gherpelli (1997)**, pág. 88). Por su parte, L. Campistrous y C. Rizo (ver **Campistrous y Rizo (1996)**, pp. 20-28) al tratar los ejercicios para el desarrollo de la habilidad para construir esquemas, tratan cuatro fundamentalmente: las situaciones y problemas sin datos numéricos que requieren de la elaboración de un esquema, los que a determinada formulación se le hacen corresponder varios esquemas, los que exigen de la elaboración de ejercicios a partir de esquemas dados, y los que conducen a transformar esquemas.

Partiendo del concepto de ejercicio, podemos caracterizar los que verdaderamente se consideran **problemas**. Según **Labarrere (1996)**, algunos autores conceptualizan el concepto de problema en términos de contradicción que debe ser resuelta, de déficit y búsqueda de información, de transformación de situaciones, etcétera. Es notable que ya en el siglo XVII el genial matemático y filósofo francés R. Descartes, en la regla 12 de sus **"Reglas para la dirección del espíritu"**, afirmaba: *"Yo no supongo más que los datos y un problema. Sólo en esto imitamos a los dialécticos: así como para enseñar las formas de los silogismos ellos suponen conocidos sus términos o materia, de la misma manera nosotros exigimos previamente que el problema sea previamente comprendido. Pero no distinguimos, como ellos, dos extremos y un medio, sino que consideramos el problema entero así: 1°, en todo problema debe haber algo desconocido, pues de lo contrario no habría problema; 2°, ese algo debe estar designado de alguna manera, pues de otro modo no habría razón para investigar ese algo y no otra cosa; 3°, ese algo no puede estar designado sino por algo conocido."*

Por nuestra parte, no coincidimos con **Jungk (1986)** en asumir los ejercicios con textos y los de aplicación como problemas (pág. 110). Creemos que *"un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conducirá con certeza, a la solución"* (ver **Jungk (1986)**). Dos años más tarde, en **House et al (1983)** se expresaban así: *"La definición común de problema matemático es una situación que supone una meta para ser alcanzada, existen obstáculos para alcanzar ese objetivo, requiere deliberación, y se parte del conocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema"* (pág. 10). También **Labarrere (1996)** ha señalado que *"…un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar"* (pág. 6). Concretando, para que una situación se denomine problema es necesario que:

a) exista una persona que desea resolverla (resolutor),
b) exista un estado inicial y un estado final (meta a alcanzar),
c) y que exista algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro.

Con esta descripción se comprende que lo que resulta un problema para un sujeto puede no serlo para otro. Cada problema constituye un reto, se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que demorará solucionarlo. No obstante, se necesita confiar en que la inteligencia y

habilidades que se poseen son adecuadas y suficientes para abordarlo. Es absurdo admitir que se pueda partir de cero. Según **Schoenfeld (1992)**, el resolutor cuenta con recursos cognoscitivos que irá mostrando al trabajar con el problema como la intuición (conocimiento informal relacionado con el dominio), los hechos, los procedimientos algorítmicos y no algorítmicos así como las comprensiones (conocimiento proposicional) acerca de las reglas admitidas en el dominio.

Resolver un problema consiste en el proceso de ataque, en el abordaje del mismo por parte del sujeto. Nosotros, aún cuando el resolutor no disponga de la idea de solución entendemos, que si se encuentra enfrascado en hallar la respuesta, se encuentra resolviendo el problema. Así parafrasean V. Brenes y M. Murillo en 1994: *"Se entenderá que resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe que hacer, pues si se sabe lo que hay que hacer, ya no hay problema"* (pág. 377).

Polya, por su parte, aseveraba que *"…resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"* (ver **Polya (1980)**, pág. 1). Resolver problemas es una actividad humana fundamental. De hecho, el pensamiento humano trabaja la mayor parte del tiempo sobre problemas. *"Cuando no dejamos la mente a su libre albedrío, cuando no la dejamos soñar, nuestro pensamiento tiende hacia un fin; buscamos medios, buscamos resolver un problema"* (**Polya (1965)**, pág. 187).

Según **Bertoglia (1990)**, actualmente está en boga considerar, básicamente, dos tipos de problemas: los problemas cerrados y los problemas abiertos (pp. 111-113). En los primeros la solución se deduce en forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, sólo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse "problemas de inferencia lógica". Aducimos un ejemplo proporcionado por Collins y Quilliam en 1969. Para optimizar el procedimiento de su solución conviene utilizar tanto la implicación aducida, como su contrarrecíproco.

He aquí cuatro cartas: cada una de ellas tiene una letra en cada una de sus caras y un número en la otra.

Indicar aquellas cartas y solamente aquellas, que deben darse vuelta para comprobar si es verdadera o falsa la siguiente regla: «*Si una carta tiene una cara con una letra vocal, entonces siempre tiene en la otra cara un número par*.»

Por su parte en los problemas abiertos el resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera distinta y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del ejercicio. Ahora los recursos lógicos resultan insuficientes y se precisa de creatividad. Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real; hay que hacer consideraciones para la respuesta, pues no se da toda la información necesaria. Por este motivo, suelen denominarse "problemas sin los datos necesarios" (**Campistrous y Rizo (1996)**, pág. 92). Un ejemplo es el caso de una persona que debe descubrir un procedimiento, que le permita distribuir entre tres personas, en forma equitativa, las dos casas que han recibido como herencia. Es justo, desde luego, que nos preguntemos: ¿Existen problemas abiertos en Matemática? Campistrous y Rizo, aportan un ejemplo muy sencillo.

Se quiere construir un tanque de agua con una capacidad de 8000L. ¿Qué dimensiones debe tener?

Evidentemente existen condiciones que no están dadas, por ejemplo:

1. La forma del tanque, que puede ser ortoédrica, cilíndrica, cónica, etcétera; y en cada caso las dimensiones están entre sí, en una proporción diferente.
2. La cantidad de material disponible, ya que se gasta más o menos, en dependencia de la forma y dimensiones escogidas (**Campistrous y Rizo (1996)**, pp. 92-93).

La clasificación de problemas en abiertos y cerrados, no es la única ni mucho menos. Por ejemplo, **Polya (1965)** trata con regular insistencia dos tipos: los "problemas por resolver" y los "problemas por demostrar". El paralelo establecido ilustra como el propósito de los primeros es descubrir cierta incógnita. Los problemas por resolver pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, serios o simples acertijos; y sus elementos principales son la incógnita, los datos y la condición. El propósito de los problemas por demostrar consiste en probar, de manera concluyente, la exactitud o falsedad de una afirmación; sus elementos principales son la hipótesis y la conclusión. Nosotros consideramos la "clasificación" aducida por este autor como una especificación de la habilidad que principalmente se quiere medir; sin embargo, es justo señalar que no debe descuidarse el desarrollo de otras habilidades.

Aquellos ejercicios que no sean problemas los denominaremos, siguiendo a Polya, como "rutinarios". Así, por ejemplo, podemos hablar de ejercicios rutinarios con textos o de problemas con textos; además, al demostrar una equivalencia, tal vez nos enfrentemos a un problema formal en un sentido y a un ejercicio rutinario formal en el otro.

Después de haber dado respuesta a las interrogantes: ¿es toda tarea un problema?, ¿en qué consiste resolver un problema?, añadamos una tercera: ¿todo problema tiene solución? Este es, a nuestro juicio, un tema bastante complicado y que sobresale de la intención de este trabajo. El destacado matemático alemán D. Hilbert en el II Congreso Internacional de Matemática de París afirmaba en su discurso el 8 de agosto de 1990: "*Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el* **ignorabimus**". Así pensaba el máximo exponente del formalismo, pensamiento que se reflejó siempre en toda su obra, y aún en el Congreso Internacional de Bolonia, el 3 de septiembre de 1928, todavía señalaba: "*La teoría de la demostración (…) nos proporciona el sentido profundo de la convicción de que a la inteligencia matemática no se le ponen fronteras y de que es capaz de escudriñar hasta las leyes del propio pensar. Cantor ha dicho: la esencia de la Matemática consiste en su libertad, y yo añado gustoso para los buscadores de dudas y los espíritus mezquinos: en la Matemática no existe el* **ignorabimus**…" (**Hilert (1900)**).

Si confiamos plenamente en esta tesis de Hilbert podríamos suponer que cualquier problema que nos planteemos debe tener, sin discusión, alguna respuesta. Polya, al contrario, afirmaba que "*partiendo del problema que se nos propone encontraremos otro (…); después partiendo de estos nuevos problemas, encontraremos otros, y así sucesivamente. El proceso es ilimitado en teoría, pero en la práctica no llegaremos muy lejos ya que los problemas que se obtengan corren el riesgo de ser insolubles*" (**Polya (1965)**, pág. 171). ¿Y es que acaso existen problemas, a los cuales nunca podremos dar respuesta?

A esta pregunta respondía afirmativamente L. E. J. Brouwer, él solía "demostrar" la inconsistencia de los razonamientos basados en la abstracción del infinito actual, mediante un ejemplo relativo al desarrollo decimal del número π. Él afirmaba que era imposible decidir si en dicho desarrollo aparecían diez novenas seguidas. Con sus radicales ideas, Brouwer estaba quitando a los matemáticos la ley del tercero excluido. Esto era en palabras de Hilbert "*lo mismo que arrebatar el telescopio a los astrónomos…*". Sin embargo, tales ideas ejercieron una sensible influencia en A. Márkov, científico ruso y creador de la lógica constructiva. Hoy día las tesis de Brouwer empiezan a atraer cada vez más la atención de los matemáticos

prácticos y de los creadores de ordenadores de nuevas generaciones, asentados sobre principios distintos de la arquitectura tradicional y, por consiguiente, de una lógica distinta de la bivalente.

Todo lo anterior nos permitirá apreciar, cómo existen problemas cerrados, como el que presentamos al inicio de la sección, que pueden ser resueltos por vía inductiva, así mismo destacaremos el papel de la Historia de la Matemática en la búsqueda de principios heurísticos útiles, en la resolución de problemas.

Para ello, veamos lo que hizo Euler. Antes que todo hagamos una puntualización: si una ecuación algebraica tiene término constante unidad, entonces el coeficiente de la potencia de primer grado es la suma con signo contrario de los recíprocos de las soluciones. Consideremos ahora la ecuación senx=0, por Taylor se tiene que:

$$x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ... = 0,$$

como el miembro izquierdo tiene infinitos términos, o sea, es de *"grado infinito"*, no es extraño, dice Euler, que haya una infinidad de raíces: 0, π, -π, 2π, -2π, 3π, ... pues senx se anula en todos los múltiplos enteros de π. Euler descarta la raíz cero y divide el miembro izquierdo por x (el factor lineal correspondiente a la raíz cero) y obtiene:

$$1 - x^2/2.3 + x^4/2.3.4.5 - x^6/2.3.4.5.6.7 + ... = 0,$$

con raíces π, -π, 2π, -2π, ... haciendo el cambio $x^2=u$ tenemos:

$$1 - u/3! + u^2/5! - u^3/7! + ... = 0,$$

pero Euler ya había discutido en esta ecuación (finita) la descomposición en factores lineales. Así concluye, utilizando lo que puntualizamos antes que:

$$\frac{\text{sen } x}{x} = 1 - x^2/2.3 + x^4/2.3.4.5 - x^6/2.3.4.5.6.7 + ... = (1-x^2/\pi^2)(1-x^2/4\pi^2)(1-x^2/9\pi^2)...,$$

de donde tiene:

$$1/2.3 = (1/\pi^2 + 1/4\pi^2 + 1/9\pi^2 + ...),$$

por lo que:

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + ...$$

Es decir, la suma de los recíprocos de los cuadrados es igual a $\pi^2/6$. Este y otros ejemplos aportados por Euler, no permiten dudar de la validez del método por analogía y de los resultados derivados por él. Sin embargo, en la lógica estricta, el método seguido por Euler fue una falacia indebida: aplicó una regla a un caso para el cual esta no estaba formalizada, una regla para ecuaciones algebraicas a una ecuación que no era algebraica. Lógicamente, el paso de Euler no estaba justificado. Sin embargo, la analogía lo justificaba; analogía que tiene en su haber los mejores logros de una ciencia en crecimiento a la que él mismo llamó **"Análisis del Infinito"**.

Las razones de Euler para confiar en su descubrimiento, no son demostrativas. Euler no reexamina los fundamentos de su conjetura, él examina sólo las consecuencias y niega la verificacion de ellos como argumentos en pro de su conjetura. Puede decirse que era

un método rudo y falaz, pero enriqueció la Matemática de modo considerable.
Estas razones son, de hecho, inductivas. Esta metodología fue llamada por algunos matemáticos posteriores como *"inducción euleriana"*, siendo no pocos los que usaron este método, íntimamente relacionado con la analogía, inducción y no-contradicción con hechos matemáticos conocidos.
El impulso que le dio esta metodología a la Matemática fue, como ya dijimos, grande, pero también la guió a contradicciones donde no era fácil encontrar la salida, el método no satisface ninguno de los criterios de rigor que exigimos hoy y, sin embargo sus conclusiones son correctas; quizás el mejor ejemplo de esto sea el trabajo de Fourier sobre la Teoría del Calor, el conocido Método de Fourier o de separación de variables, tan usado en las Ecuaciones Diferenciales, es el resultado de una extrapolación al caso infinito del Método de Eliminaciones Sucesivas (coeficientes indeterminados) para un caso finito. Abel utilizando la serie

$$\text{sen}\phi - \text{sen}2\phi/2 + \text{sen}3\phi/3 - ...$$

como contraejemplo, sitúa el verdadero problema en determinar la región de validez de muchos teoremas incorrectamente planteados.
¿Debemos renunciar a la inducción en la solución de problemas matemáticos?, la historia muestra la efectividad de este método de trabajo en algunas situaciones cuando extrapolamos correctamente un método determinado, lo fundamental, como lo señaló Abel, está en el buen planteamiento de un problema en lo referente a su región de validez.
Más aún, esta situación se ajusta a las corrientes psicológicas actuales en Educación Matemática, que destacan la importancia que tiene *la participación activa del alumno*, en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La tendencia constructiva, de la que todos tenemos parte, considera que el papel del profesor en la enseñanza es encontrar y ajustar actividades para los estudiantes, de manera que se facilite la construcción del conocimiento por parte del alumno. La perspectiva cognitiva considera que el aprendizaje se genera encadenando el nuevo conocimiento sobre el ya existente. La tendencia sociológica o epistemológica interpreta que la enseñanza es una ayuda a los estudiantes para construir conocimientos a través de problemas que les lleven a examinar sus propias consideraciones sobre lo enseñado (**Schats and Grouws (1992)**).
Como se ha podido apreciar, a la hora de resolver un problema (aún de los denominados clásicos) puede utilizarse la Historia de la Matemática como generador de ideas útiles, que permitan considerar métodos de razonamiento inductivo, como la Inducción Euleriana presentada aquí. Esta consideración puede evitar tener que realizar las operaciones deductivas más comunes, a la hora de resolver un problema cerrado y sí, como decíamos antes, considerar procedimientos inductivos que pueden llevarnos a la solución del problema.

2. *Sobre la enseñanza de las EDO.*

Históricamente, el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO por comodidad) se ha desarrollado en tres grandes escenarios: el algebraico, el numérico y el geométrico. Desde la perspectiva de la enseñanza, los programas de estudio y los libros de texto nos muestran, por diversas razones, un predominio del escenario algebraico (con sus variantes), con algunos atisbos de los acercamientos numérico y geométrico. Esto ha traído como consecuencia, que se tenga una visión muy parcial de los métodos que existen para resolver EDO, pues frecuentemente en el estudio de los modelos determinísticos (v.g. electrónica, óptica, etc.) se requiere establecer "articulaciones" entre los diferentes acercamientos.

Usando la Historia de la Matemática como base para la Transposición Didáctica, se puede variar el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, en la cual se integran los tres escenarios de solución de las mismas y se modifica el esquema de enseñanza actual de dicha asignatura (ver **Hernández (1994)** para una experiencia anterior en este sentido).

Una vía para modificar este esquema de enseñanza, es el ***juego de marcos*** introducidos por **Douady (1986)**. Un marco, como ella nos dice, se entiende en el sentido usual que tiene cuando hablamos del marco algebraico, del marco aritmético, del marco geométrico; en el "juego de marcos" el docente propone al estudiante cambios entre los distintos tipos de marcos respecto a los problemas escogidos a conveniencia, con el fin de que ellos avancen en las fases del problema y que sus conocimientos evolucionen. En el trabajo, estudiamos cómo se pueden incorporar estas ideas, en particular en la enseñanza de las EDO[1], donde los escenarios son ejemplos de los marcos, asimismo, propondremos problemas con el fin de ver cómo se puede generar el juego de marcos; donde en este "juego" la computadora personal (PC) va a desempeñar un papel central.

Douady introduce la noción de marco en su tesis doctoral en el siguiente sentido:

> "*Digamos que un marco está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, por las relaciones entre los objetos, por sus formulaciones eventualmente diversas y por imágenes mentales asociadas a esos objetos y sus relaciones. Estas imágenes juegan un papel esencial en su funcionamiento como útiles, de los objetos del marco. Dos marcos pueden tener los mismos objetos mas diferir en las imágenes mentales y la problemática desarrollada... concebimos la noción de marco, como una noción dinámica. El cambio de marcos es un medio para obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes permiten un nuevo acercamiento a las dificultades encontradas y la puesta en escena de útiles y técnicas que no se impusieron en la primera formulación*".
>
> **Douady (1986)**

Más adelante introduce el "juego de marcos", como el cambio de marcos propuesto por el docente para hacer avanzar las fases de investigación de un problema en una situación escolar. En el desarrollo de este juego se distinguen tres fases:

1. Transferencia e interpretación.
2. Correspondencias imperfectas.
3. Mejoramiento de la correspondencia y progreso del conocimiento.

En nuestro caso, los distintos escenarios de solución de las EDO, son ejemplos de los marcos, así hablaremos de los marcos algebraico, numérico y geométrico en el mismo sentido que los escenarios algebraico, numérico y geométrico. El juego de marcos es proponer a los alumnos resolver una cierta EDO en un cierto marco y traducirlo (todo o parte de éste) a otro (transferencia e interpretación). La correspondencia entre los marcos en general es imperfecta, ya sea por causa matemática o por conocimientos insuficientes de los estudiantes. Esta situación es fuente de desequilibrio, a su vez la comunicación entre los marcos y en particular la comunicación con un marco auxiliar de representación es un factor de reequilibración. Esto conduce al mejoramiento de las correspondencias y al progreso del conocimiento (ver **Douady (1986)**).

Para fijar ideas, consideremos el problema de resolver una simple EDO:

---

[1] Douady aplica esta estructura para estudiar los procesos por los cuales los escolares puedan adquirir un saber matemático en una situación escolar.

$$y' = -\frac{x}{y}, \text{ o bien } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \qquad (1)$$

Este mismo problema se puede plantear como la solución de un sistema (donde se introduce una tercera variable, el tiempo t) o bien de una EDO de segundo orden con coeficientes constantes, es decir, poniendo x = x(t), y = y(t) obtenemos:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -x \quad , \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

es decir, el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned} \qquad (2)$$

Al derivar la segunda ecuación del sistema obtenemos $y'' = -x' = -y$, lo que conduce a la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + y = 0, \text{ donde } y = y(t). \qquad (3)$$

La ecuación (3) es interesante, ya que representa la ecuación de un sistema masa-resorte (donde la masa y la constante del resorte son iguales a 1) sin amortiguamiento, que conduce a "oscilaciones libres" (ver fig. 1).

En virtud de la equivalencia de las tres ecuaciones, establecer la ecuación del movimiento para este caso, es equivalente a resolver la ecuación (1), la cual es de variables separables y conduce a una solución de la forma $x^2 + y^2 = c$, esta ecuación representa una familia de circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$, lo que nos lleva a conjeturar que $x(t) = \sqrt{c}\cos t$, $y(t) = \sqrt{c}\,\text{sen}\, t$. De lo anterior podemos observar que "inducir la solución" requiere en principio de la articulación de las diferentes representaciones (v.g., algebraicas y gráficas), amén de conocer un método de solución.

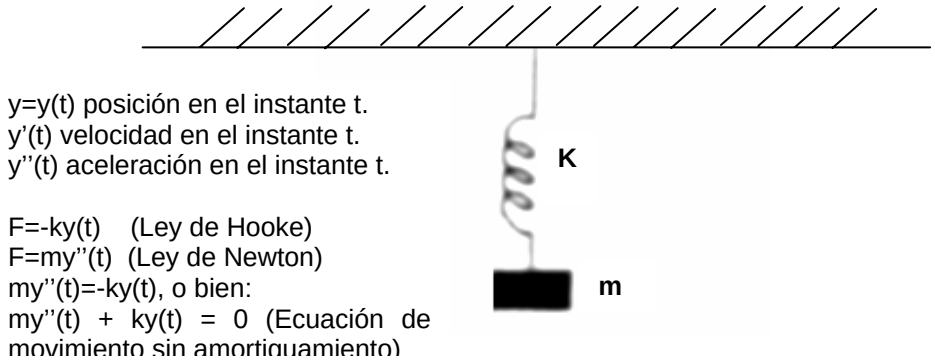


FIG. 1

En este caso, la solución del problema seguiría en general el siguiente esquema:

Modelo → EDO → Marco (algebraico, numérico, geométrico) → Representación (gráfica, numérica, geométrica) → Solución → Modelo. En este camino, algunas etapas de las rutas pueden tener dos o más subrutas.
Desde luego, como nos muestra la historia, existen algunos problemas donde la ruta seguida es única, es decir se tiene una única representación para la EDO, también se tiene un único acercamiento para encontrar la solución y en ocasiones la representación de la solución no se puede articular con otras representaciones con el fin de que nos suministren un conocimiento más amplio de la solución y en general del modelo estudiado.
En particular, en el problema anterior, la ruta seguida es la mostrada en la siguiente figura:

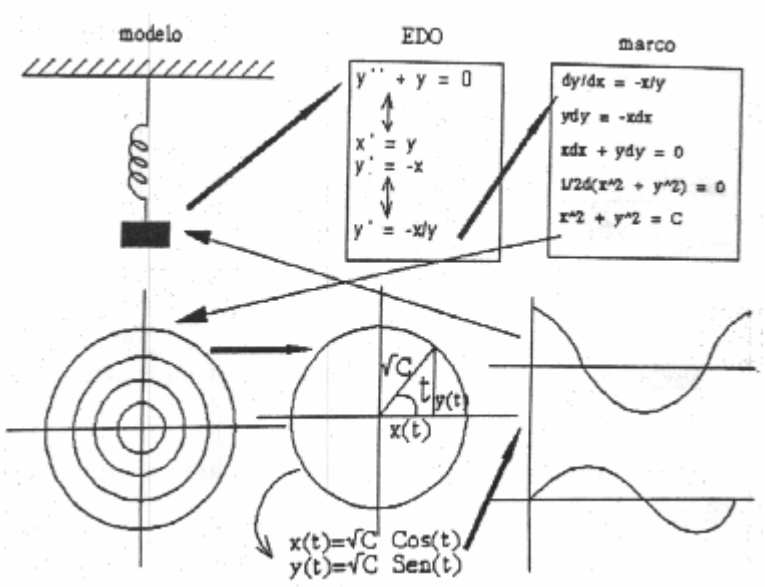


FIG. 2

Lo primero que podemos observar es que la ruta seguida no es única y que la búsqueda de la solución pone en juego una gran cantidad de representaciones (algebraicas, gráficas, etc.), que es necesario articular, con el fin de tener una mejor comprensión del modelo.

En el caso de la figura se partió de la EDO de primer orden $y' = -\frac{x}{y}$, desde luego que se hubiesen podido seleccionar cualquiera de las otras dos representaciones. Después, elegimos el marco algebraico en su primera variante, es claro, que se podrían tomar las otras dos alternativas, v.g., emplear las series de potencia o bien las transformadas de Laplace. También se pudo elegir el marco geométrico (o el numérico) y hacer un análisis cualitativo de las soluciones. El marco conduce a una representación (algebraica) para la solución la cual es necesaria articular con otras representaciones, para finalmente, llegar al modelo. En este sentido la noción de marco es dinámica (**Douady (1986)**). Esto significa que pueden elegirse otras alternativas para la ruta.
El tema que tratamos, se presta, quizás como ningún otro, para la unión de los enfoques antes citados.
Si partimos de definir cada uno de sus entornos, tendremos que los programas actuales constan, casi exclusivamente, del enfoque algorítmico-algebraico. Los componentes geométricos (de la teoría cualitativa) y numéricos están prácticamente desaparecidos, si contamos con un equipamiento aceptable, es lógico que se impone la pregunta ¿cómo remediar esta situación?
Desde el punto de vista histórico, el primer entorno donde se desarrolló la teoría de las

ecuaciones diferenciales ordinarias es el algebraico, multitud de intentos brindaron los métodos conocidos hoy, muchos de los cuales tienen unos cuantos años (Conferencia 17). Por otra parte, el desarrollo de los modernos ordenadores, ha hecho posible la implementación de métodos numéricos con una rapidez de convergencia sumamente elevada, de ahí la posibilidad de la utilización de los mismos.

Todo trabajo de teorización o de ingeniería didáctica de las matemáticas presupone y utiliza, necesariamente, un modelo más o menos elaborado (aunque a menudo implícito) de la actividad matemática y asimismo, una noción de lo que es «enseñar y aprender matemáticas». La explicitación de estos modelos permite que sean cuestionados, contrastados empíricamente y reelaborados, por lo que debería constituir un punto de referencia en toda investigación de didáctica de la Matemáticas (**Bosch y Gascon (1994)**).

Es muy útil seguir la metodología dada por Douady en su trabajo **"La ingeniería didáctica, un instrumento priviliegiado para tomar en cuenta en la complejidad de la clase"**, la cual se compone de tres ejes de estudios:

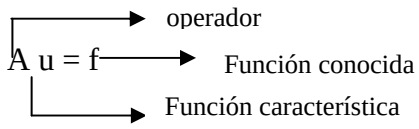
a) Análisis a priori.
b) Concepción de una enseñanza, es decir, la ingeniería didáctica propiamente dicha.
c) Análisis de los productos de la experencia.

En este caso, la parte a) coresponde fundamentalmente al análisis de los distintos aspectos que hemos creido necesario tomar en cuenta: la historia de las EDO, la evolución de los libros de textos, el impacto de las nuevas tecnologías, las creencias y concepciones de los profesores sobre la Matemática, etc.

Una primera actitud es precisamente la de mencionar que las EDO nos sirven, fundamentalmente, para modelar problemas cuya esencia es objeto de estudio por una rama de la ingeniería o de las ciencias: física, química, economía, etc. La primera dificultad que se nos presenta, es que no se puede considerar el fenómeno en estudio exactamente como se presenta en la naturaleza, debido a la gran cantidad de aspectos que habría que tener en cuenta y a la consecuente necesidad de conocimientos matemáticos demasiados complejos, lo cual trae como consecuencia la idealización del problema en el cual no se consideran aquellos aspectos del fenómeno que no tienen gran influencia en el objeto de estudio, aquí es importante la presencia de especialistas de la rama. Por ejemplo, si se quiere describir el movimiento de un péndulo, es posible que el peso de la cuerda sea insignificante en el proceso.

Para la modelación y solución es importante tener en cuenta el siguiente proceder:

1. Determinar las funciones que relacionan las magnitudes esenciales que caracterizan el proceso.
2. Utilizar las leyes de la ciencia a la cual corresponde el problema en estudio, para describir el proceso mediante ecuaciones. Por lo general se puede representar en la forma:



3. Determinar las condiciones adicionales que caracterizan completamente el proceso.
   Entre estas condiciones, son frecuentes las llamadas condiciones inciales que caracterizan el inicio del proceso y las llamadas condiciones de contorno, que caracterizan el comportamiento del fenómeno objeto de estudio, durante el proceso en la frontera de la región en la cual ocurre.

Antes de pasar a la búsqueda de su solución, debemos comprobar algunos aspectos que

impone el problema real:

4. Estudio de la existencia y unicidad de la solución.
   Por ejemplo, si estudiamos, el lanzamiento de un proyectil por un arma de artillería a partir de su velocidad inicial y del conocimiento de la resistencia del aire y pretendemos determinar la trayectoria del proyectil y la posición de este en cualquier tiempo, obligatoriamente el sistema de ecuaciones diferenciales que forma parte del modelo matemático correspondiente debe tener solución; porque realmente al lanzar el proyectil y trascurrir cierto tiempo después de lanzado, este debe ocupar una posición en el espacio.
   Si contrariamente a lo que nos indica la práctica, el modelo matemático no tiene solución, es porque se ha cometido un error en su formulación.
   Los procesos físicos, químicos, etc, que se modelan por ecuaciones diferenciales siempre tienen solución única.
5. Continuidad de la solución con respecto a las condiciones adicionales.
   Las condiciones adicionales que caracterizan completamente un proceso de la Naturaleza, se determinan, en general, por vía experimental y por ello no siempre son exactas.
   Es importante señalar que el estudio de la existencia, la unicidad y la dependencia continua de la solución de las condiciones adicionales, no solo es parte importante de la modelación del problema; en algunos problemas reales, puede ser de hecho parte esencial o total de la solución.
6. Determinación de la solución.
   En la teoría de ecuaciones diferenciales pueden distinguirse tres tipos de métodos; los llamados métodos analíticos, con los cuales se determina la solución de las ecuaciones diferenciales de forma exacta, o al menos en cuadraturas; los métodos numéricos, con los cuales la solución se determina aproximadamente; y los métodos cualitativos, con los cuales se investigan las propiedades deseadas de la solución, en muchos casos, sin necesidad de obtenerlas.

7. Determinación de una cota para el error.
   La solución aproximada se busca, generalmente, mediante un proceso iterativo y en ese caso es importante obtener, al menos, una valoración del error en función del número de iteraciones.

8. Análisis de la estabilidad de la solución.

Una segunda actitud, nos conduce a no abandonar el marco algebraico, sino por el contrario, complementarlo con los otros acercamientos para así tener una mayor riqueza (de conexiones) entre las representaciones y así poseer más herramientas al abordar el estudio de los modelos que están descritos mediante ecuaciones diferenciales, los cuales mayormente en el nivel al cual va dirigida nuestra propuesta, conducen a ecuaciones de variables separables y lineales (de primer y segundo orden).
A partir de estas premisas, nos centraríamos más en los métodos para resolver ecuaciones lineales de primer y segundo orden, así dentro del marco algebraico, básicamente estudiaríamos los procedimientos para resolver ecuaciones lineales de primer y segundo orden, tomando como estrategia, partir de ecuaciones de variables separables, continuar con exactas y lineales, para desarrollar estas actividades puede utilizarse, un sistema de tareas (**Garcés (1997)**), lo cual a nuestro juicio tiene muchas ventajas y puede completar nuestra propuesta en el uso del software computacional dentro de este marco, fundamentalmente el de ayudar al cálculo de integrales, a la simplificación de expresiones algebraicas y tener estrategias (cuando esto sea posible) para articular la solución (algebraica) con su

representación gráfica, para lo cual es factible el uso de los procesadores simbólicos como Derive, Mathematica y otros.

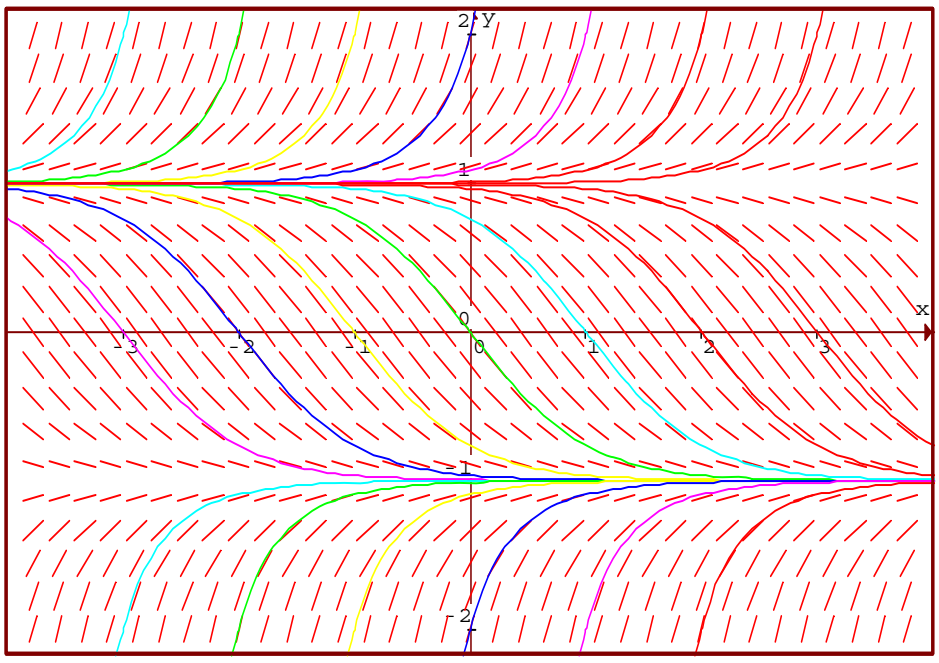
Una tercera actitud a asumir dentro de nuestra propuesta es la implementación del marco geométrico desde el inicio, desarrollando actividades que permitan trazar el conjunto de curvas compatibles con el campo de pendientes, como sabemos esto siempre es posible en el caso de ecuaciones de primer orden y en algunas de segundo orden susceptibles de ser reducidas a ecuaciones de primer orden (v.g., la lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes). En cuanto a la puesta en práctica de este acercamiento, se presentan dificultades como lo trabajoso que resulta el trazado del campo de pendientes, cuestión que puede simplificarse con la ayuda del software computacional y lo más delicado es el tratamiento gráfico que se da en los cursos tradicionales al concepto de función (recordemos que en este acercamiento, básicamente lo que tenemos que hacer es graficar funciones que vienen descritas en términos de su derivada). En esta dirección nos podemos auxiliar, al inicio, con una serie de ejercicios que permitan manejar gráficas sin el apoyo de su expresión analítica, en este aspecto son útiles los trabajos realizados por **Hitt (1992, 1995)** y **Garcés (1997)**.

El software computacional se debe usar en forma interactiva, proporcionando campos de pendientes trazados con la ayuda de la microcomputadora, con el fin de que los estudiantes bosquejen sobre éste, el conjunto compatible de curvas de solución.

El acercamiento numérico, que en ocasiones no forma parte del programa de estudio actual, cuando se exponen los libros de textos actuales se hacen de una forma muy descriptiva, o en algunos casos desarrollando programas en algún lenguaje de programación. Como sabemos, estos se pueden implementar de una forma efectiva mediante el uso de la hoja electrónica Excel. Dentro de nuestra propuesta, tal marco de resolución se puede adoptar desde un inicio como preludio del marco geométrico, ya que nos permite por un lado, pasar de la construcción (por medio de las quebradas de Euler) de una solución particular a la solución general y por otro, articular la representación tabular con la gráfica.

Por último, el marco numérico (los algoritmos clásicos como el de Euler, Euler mejorado y el de Runge-Kutta) considerarlos en la enseñanza de las EDO desde un inicio o bien al final.

Por otra parte, el desarrollo de las modernas computadoras ha hecho posible la implementación de métodos numéricos con una rapidez de convergencia sumamente elevada, de ahí la posibilidad de la utilización de los mismos.



Pudieramos citar otro ejemplo que ilustra lo anterior, el caso de la ecuación diferencial $y'=y^2-1$, que brinda insospechadas posibilidades al maestro. Si analizamos el marco algebraico, su solución es muy elemental, pues es una ecuación en variables separa-

bles y resoluble en cuadratura, cuya solución se puede expresar por $x = \frac{1+ce^{2t}}{1-ce^{2t}}$, es claro que, esta expresión, a los estudiantes no les dice mucho sobre el comportamiento gráfico de las soluciones.
Sin embargo, analizando el marco geométrico y siguiendo el esquema de Brodetsky (ver **Brodetsky (1919)**) tendremos:

1. Los lugares geométricos donde f(t,x)=0, son las rectas x =1 y x = -1.
2. El lugar geométrico donde $\frac{1}{f(t,x)} = 0$, no existe.

Estos lugares dividen al plano en compartimentos donde x´ › 0 (en el ejemplo x › 1 o x ‹ -1) y x´ ‹ 0 (-1 ‹ x ‹ 1).
3. Al calcular x´´ obtenemos x´´ = 2xx´ y analizando la ecuación x´´=0, resultan los lugares geométricos x =0, x =1, x = -1.
Estos lugares determinan regiones en el plano, donde las curvas son cóncavas hacia arriba (x › 1, -1 ‹ x ‹ 0) y cóncavas hacia abajo (x ‹ -1, 0 ‹ x ‹ 1).
4. Para completar el análisis trazamos un número de segmentos de tangentes en una cantidad conveniente de puntos, para trazar las curvas integrales compatibles con dicho campo (ver figura anterior).

Todo lo anterior nos lleva a la siguiente proposición en cuanto a los contenidos a tratar:

- Introducción: ¿Qué es una ecuación diferencial?, marcos de solución.
- El marco geométrico (estudio cualitativo de la solución): Campos de direcciones, isoclinas, ...
- El marco algebraico: Separación de variables, ecuaciones exactas, ecuaciones diferenciales lineales, variación de constantes, coeficientes indeterminados, modelos y soluciones en series.
- El marco numérico: Método de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta, análisis de errores.

El análisis a priori nos ha conducido a la propuesta descrita anteriormente, es decir, a la ingeniería didáctica propiamente dicha. Posteriormente corresponderá la elaboración de secuencias didácticas, la aplicación de las mismas, la observación y evaluación del conocimiento de los estudiantes.
Si tuviéramos que establecer otro orden “territorial” de cómo deben tratar los entornos, diríamos que:

- El enfoque algebraico, por su propia génesis y desarrollo, debe tratarse en un primer momento.
- El enfoque geométrico, debe ocupar un lugar intermedio dada las posibilidades de explotación que presenta. Basta como ejemplo la ecuación x” + senx = 0.
- El enfoque numérico, retomaría múltiples situaciones de los enfoques que le precedieron.

Es un hecho incuestionable en nuestros días la presencia del ordenador en casi todos los ámbitos de la vida cotidiana. El sistema educativo, no puede ni debe mantenerse al margen si pretende una enseñanza de calidad que forme ciudadanos capaces, y precisa incorporar el conocimiento y manejo de los ordenadores como uno de sus objetivos. Además como hemos visto en el trabajo y en las diferentes fuentes consultadas para su elaboración, el ordenador ofrece interesantes posibilidades didácticas, que aúnan la capacidad de visualización gráfica

del vídeo con la interactividad inherente al proceso de enseñanza-aprendizaje.
El término visualización es de uso reciente en Educación Matemática, para describir aspectos tales como:

> *"...en la visualización matemática lo que nosotros estamos interesados es precisamente en la habilidad de los estudiantes en dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o con ordenador) /para representar un concepto o problema matemático y utilizar el diagrama para alcanzar la comprensión, y como una ayuda en la resolución del problema ... Visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnología) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la compresión matemática".*
>
> **Zimmermann y Cunningham (1991)**

De lo anterior resulta necesario extraer algunos aspectos importantes que a modo de conclusiones resumimos:

- Creemos que con lo apuntado, se muestra cómo es posible integrar los marcos de solución de una EDO, con el objetivo que los estudiantes conozcan el significado de dicho objeto.
- Para la implementación de la propuesta se ha destacado el rol que desempeñan los paquetes simbólicos de cálculo y las calculadoras gráficas, por lo que los docentes deben profundizar en el uso de ellos.
- La elaboración de las secuencias didácticas, que constituye el núcleo fundamental de la Ingeniería Didáctica, depende de las condiciones de cada aula, profesor, institución, etc. Tal y como se plantea en nuestro esquema de la Transposición Didáctica (ver Anexo).

Tal como ya hemos señalado, el curso de EDO tiene que realizarse bajo la óptica de una integración de los tres escenarios discutidos antes. En concreto, la integración de estos, se ha mostrado como una herramienta poderosa que permite al estudiante, interactuar con los diversos marcos y desarrollar el pensamiento lógico de los mismos. De este forma, el curso será más productivo.

3. La investigación del comportamiento de funciones reales.

Es sabido que el estudio de las funciones (reales, de ahora en adelante), está sujeta a distintas dificultades didácticas. Algunas de ellas son:

- ♦ La determinación de los extremos de una función y el esbozo de su gráfico.
- ♦ La propia construcción del gráfico de las mismas, pues en la mayoría de los casos, trabajamos con el gráfico de la función propiamente dicha, y no con algunas variantes interesantes, como pueden ser: la derivada contra la función, la derivada contra la variable independiente, etc.
- ♦ La determinación de los puntos de acumulación, y las funciones definidas por series infinitas. En el primer caso, abordamos dominios "plenos" casi siempre, cuando pudiéramos generar discusiones interesantes con nuestros estudiantes, si restringimos el dominio a determinados subconjuntos de **R.** En el segundo caso, casi siempre el uso docente de las funciones continuas, o con series convergentes en dominios más o menos "cómodos", trae aparejado una convicción, en el estudiantes, sobre las "bondades" de las

funciones, sin tener prácticamente en mente, la utilización de funciones discontinuas, o continuas no derivables, restringir series divergentes, para definir funciones apropiadas en algunos casos, etc.

A pesar de la existencia de técnicas constructivas en varias ramas de la Matemática, utilizaremos el concepto de función por considerarlo de capital importancia dentro de la misma.
El concepto de función, tal y como se utiliza actualmente en Matemática, se desarrolló progresivamente. A medida que las necesidades prácticas se hacían sentir, se agregaban las definiciones necesarias. Y es a causa de eso que se llegó a una proliferación de nociones vagas e inexactas.
No haremos un esbozo histórico de este concepto, pues existen varios trabajos dedicados al mismo (Conferencia 11), sólo retomaremos algunos datos para ilustrar nuestra exposición.
Si para Jean Bernoulli, función de una variable es *"una cantidad compuesta de una cierta manera de esta cantidad y de constantes"* (1718) para Euler, en 1748, *"es la expresión analítica cualquiera de las cantidades variables y de números o cantidades constantes"*. De aquí que la continuidad de la función es prácticamente asumida, pues una curva que estaba representada por una ecuación algebraica o trascendente se llamaba una curva continua.
Y ¿no es así como, prácticamente, nuestros alumnos asumen la noción de función? Mejor aún, ¿cuantos alumnos consideran funciones definidas por más de una rama, discontinuas o definidas por una serie infinita, digamos, su desarrollo en Serie de Fourier?
Estos aspectos muestran que es necesario hacer más énfasis en la construcción de funciones en la Educación Matemática. De hecho, no sólo este es un problema, resumiendo podemos presentar otros:

- obtener, dado el gráfico (ya sea, el de la función y la variable independiente, de la función y su derivada, o de esta última con la variable independiente), la representación algebraica de la función,
- construir los gráficos de las funciones y sus derivadas.

La teoría de conjuntos permite presentar definiciones de función, reservadas para alumnos con ciertos conocimientos de avanzada, que no deben ser desdeñados, baste como ejemplo la utilización del Principio de la Acotación Uniforme, o Teorema de Banach-Steinhaus (**Goffman y Pedrick (1965)**), descubierto por Lebesgue en 1908 vinculado a sus investigaciones sobre las Series de Fourier y que fue aislado como principio general por Banach y Steinhaus en los años 20, en el estudio de la existencia de funciones continuas sin derivada, de funciones continuas 2π-periódicas cuya Serie de Fourier diverge en un punto, etc.
Por otra parte, el uso de los ordenadores como herramientas educacionales, hace muy difícil separar el concepto de función con valores reales de la idea intuitiva de función continua. Esto es quizás sugerido por el hecho que la mayoría de los "paquetes" usados presentan el concepto de función como sinónimo de una relación entre dos variables, relación expresada por una fórmula.
Por todo esto, nos parece meritorio la obtención del concepto de función desde un punto de vista histórico en el orden de dejar bien claro las relaciones entre el concepto de función y la continuidad de funciones. Este concepto de función y su devenir histórico permite, además, apuntalar la evidencia que una demanda de saber que se evalúa, puede cambiar a lo largo del tiempo conforme las viejas teorías son sustituidas por las nuevas. En realidad, está aceptado comúnmente dentro de la filosofía de la ciencia que incluso lo que se toma por conocimiento

factual, depende de las teorías en uso (**Feyerbarend (1975), Kuhn (1962), Lakatos (1976)**). Por tanto, lo que puede ser llamado conocimiento en un tiempo, puede, a la luz de nuevas teorías posteriores, ser considerada creencia. Inversamente, una creencia sostenida alguna vez, con el tiempo, puede ser aceptada como conocimiento a la luz de nuevas teorías que la apoyen. Así, las afirmaciones de Scheffler sobre la incompatibilidad de *saber* y *estar equivocado* no reconocen la cualidad temporal de las teorías como cánones de evidencia.

Quisiéramos presentar, ahora, algunas observaciones respecto a la determinación de los extremos de una función.

En nuestro trabajo docente, utilizamos el conocido algoritmo de determinar los puntos críticos de la primera derivada y después, mediante el signo de la misma en un entorno de dichos puntos, o evaluando directamente, decidir sobre la naturaleza de los mismos, y en ocasiones, cuando f'(a)=f''(a)=0, desechamos dichos puntos, por considerarlos sin ninguna importancia docente.

Sin embargo, esos puntos críticos degenerados, son los puntos de catástrofe de la aplicación.

El punto de vista "filosófico", es que este conjunto de los puntos de catástrofe K, son los que contienen el comportamiento significativo del proceso, es decir, donde se trabaja es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del sistema. Es el esqueleto, del cual el resto de la morfología depende.

La Teoría de las Catástrofes puede aplicarse a la modelación de fenómenos reales de diversas causas: cualitativas o cuantitativamente; desde un punto de vista conceptual, predominantemente descriptivo, a partir de las características de las superficies de equilibrio de las funciones de catástrofes, hasta un empleo rigurosamente matemático, cuando se conocen las funciones que gobiernan el fenómeno físico en estudio y éstas cumplen con las restricciones propias de la Teoría de las Catástrofes. Como modelos descriptivos permite agrupar en una sola geometría diversas características de un fenómeno que, de otro modo, permanecerían aislados o, incluso, pasarían inadvertidos.

Que mejor ejemplo para ilustrar lo anterior, que el de la función $f(x)=x^3+cx$, $c\in\mathbf{R}$. A pequeños cambios en el parámetro c (considérese c>0, c=0 y c<0), se obtienen gráficos totalmente distintos de la función donde no existen extremos, existe uno y existen tres, respectivamente (ver figuras 3, 4 y 5). Es decir, estamos en presencia de la catástrofe elemental tipo cúspide (ver Conferencia 18). Puesto que la función puede modificarse significativamente si se cambia c, por pequeños que sean estos cambios y el fenómeno físico que representa sufrirá alteraciones de importancia, pues cambia cualitativamente, es de interés estudiar el comportamiento de los puntos críticos de la función.

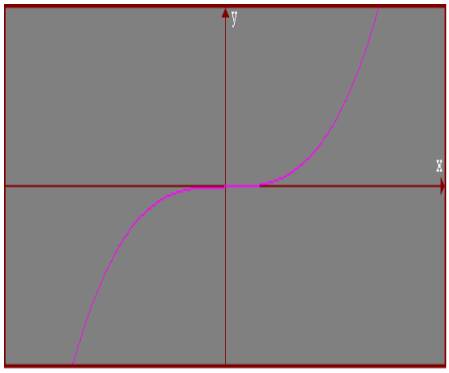


FIGURA 3

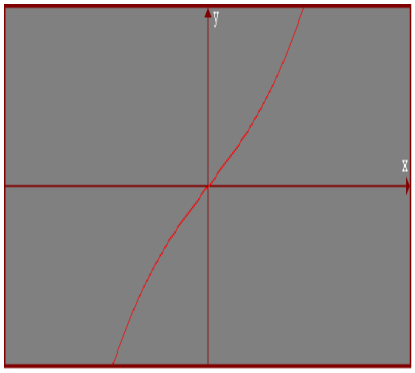


FIGURA 4

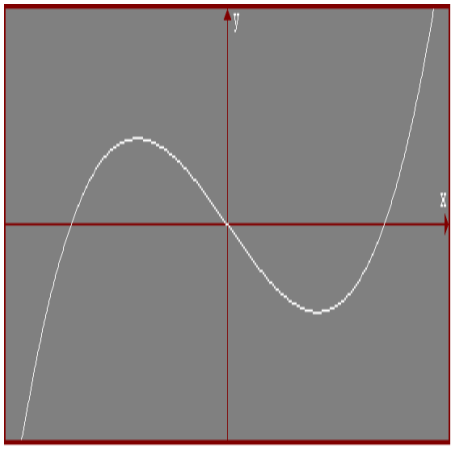


FIGURA 5

Por otra parte, este ordenamiento permite establecer programas experimentales con lo que es factible lograr una mejor presentación y comprensión de los resultados y, por tanto del fenómeno mismo. Además como método descriptivo permite introducir una nomenclatura y conceptos importantes, como el de estabilidad estructural, que facilita la comprensión de aquellos fenómenos complejos en los que la función que los gobierna se desconoce o es muy complicada. Se supone implícitamente la existencia de una relación funcional a la que puede aplicarse la Teoría de las Catástrofes. La justificación de esta hipótesis sólo se obtiene cuando los datos experimentales se ajustan a una geometría de catástrofes, cuestión esta que justifica su popularidad y uso entre los investigadores que a la vez se auxilian de sus computadoras y observan las trayectorias en el espacio de fases.

Por último, debemos señalar que los conceptos fundamentales de la Teoría de las Catástrofes son propias del lenguaje del Análisis Matemático, sus métodos, procedimientos y enfoques tanto geométricos como topológicos, son también análogos, es decir, esta nueva teoría ha surgido por continuidad para enfrentar y resolver nuevos y viejos problemas. Recordemos que en los textos tradicionales no se analiza el caso de los puntos degenerados (excepto el criterio de la n-ésima derivada) y que sólo es abordada por la Teoría de las Catástrofes.

Por todas las razones analizadas consideramos que es posible, en los cursos de Análisis Matemático, abordar algunos conceptos, procedimientos, métodos y ejemplos de la Teoría de las Catástrofes así, en nuestro trabajo presentamos una propuesta didáctica que permite perfeccionar la modelación de procesos cuyo comportamiento no es continuo, señalando consideraciones didácticas que enfaticen este aspecto importante y esencial en la disciplina de Análisis Matemático.

Aprovechar este resultado, significa que debemos vincularlo con otros conceptos como el de continuidad, y dicho análisis no debe resultar difícil, pues queda claro que para pequeñas variaciones del parámetro c en un entorno del punto O(0,0), la cuestión resulta muy interesante como ya analizamos. Luego, debemos relacionar dichos resultados con problemas de las ciencias. Reafirmando, entre otras, la noción de límite que un estudiante no debe perder nunca.

Una de las relaciones que podemos establecer, es referida a la utilidad que tiene el análisis anterior y su vínculo con otros contenidos, y que en esencia, es el mismo caso de resolver la ecuación diferencial $f'´(x) = 3x^2 + f(0)$, $f(0) = 0$, su solución es, por supuesto, $f(x)=x^3$, pero si consideramos que la condición inicial debemos hallarla como resultado de un

experimento, es muy probable que el resultado que obtengamos sea no nulo y las justificaciones son abundantes, recordemos el principio de incertidumbre señalado por J. Ford. Si aceptamos tan pequeño error, o un error tan pequeño como se quiera, podemos aceptar un valor positivo o negativo y el resultado como ya sabemos es cualitativamente distinto, el resultado de la ley que modela dicho problema es un caso muy diferente en esta disyunción y si no supiéramos a ciencia cierta cuál es el verdadero valor de la condición inicial, entonces estamos frente a un rompecabezas; por qué, cuál es la ley que modela dicho fenómeno, ya que se trata de tres curvas diferentes, ver las figura 3, 4 y 5 anteriores; en fin, puede plantearse el ejercicio de varias formas que resultan el mismo problema. En este caso, se nota la importancia de las condiciones iniciales en un problema, aún cuando para valores muy cercanos de las condiciones iniciales las soluciones no resultan aproximadas. En qué condiciones suceden dichos comportamientos, para qué tipos de fenómenos. Posiblemente pudiéramos preguntar para qué valor del parámetro c el resultado es divergente o cuál es el conjunto de valores donde las soluciones son diferentes (se bifurcan). Continuando con nuestro ejemplo, para el caso $f'(x) = 3x^2+f(0)$, resulta la solución general $f(x,c)=x^3 +cx$; pero para qué valores de x y c los resultados son cualitativamente análogos; en este caso, el estudiante puede llegar a describir las relaciones geométricas de la original y la perturbada en función de sus puntos críticos.

El ejemplo anterior resulta muy fácil de resolver pues no se necesitan métodos especiales, con conocimientos mínimos de diferenciación e integración se resuelve; pero la condición inicial impuesta convierte el ejercicio en un problema cuya solución no se encuentra al alcance de los conocimientos y habilidades que el Análisis Matemático ha brindado hasta el momento; pero es un buen inicio para relacionarse con la Teoría del Caos surgida en los últimos 30 años de nuestro siglo y que en la década de los años 90 ha planteado nuevos retos.

Deben concebirse actividades que conduzcan al estudiante a hacer descubrimientos personales. Esas actividades deben estar profundamente enraizadas en la realidad de modo que les permita explorar y examinar el mundo que les rodea. Hay que incitar a los estudiantes a copiar datos y a concebir problemas por su propia cuenta y fundamentalmente actividades relacionadas con la realidad circundante (recordemos a Aristóteles).

4. *¿Por qué los inconmensurables?*

Tomemos el caso de los números irracionales de la forma $\sqrt[n]{a}$, a y n naturales. La demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado según todo los visos, data de la segunda mitad del S.V a.C. Es una de las demostraciones matemáticas más antiguas, quizás la primera, y de cuya calidad efectivamente demostrativa tenemos constancia. Según informa Aristóteles, descansa en la reducción de la hipótesis de la conmensurabilidad de la diagonal al absurdo de que un mismo número resulte par e impar. Una versión posterior y más elaborada que se añadió al final del libro X de los **"Elementos"** de Euclides como **"proposición 117"** es apócrifa sin duda, consulte **Müeller (1981)**, **Vega (1995)** y **Vega (1997)** y hoy ya no se encuentra en las ediciones del tratado (ver **Euclides (s/f)** o **Euclides (1991-1996)**). La prueba establece la imposibilidad de una medida numérica (e.g. exacta) común entre las magnitudes consideradas, conclusión negativa de máximo alcance que los griegos sólo podían establecer mediante el recurso lógico de la deducción indirecta o reducción al absurdo dentro del marco teórico de discurso dado, tal es así, que la demostración directa de un resultado paralelo en la moderna teoría de los números (que la raíz cuadrada de un entero o es entera o es irracional) ha debido esperar a Löwenheim (**Löwenhein (1946)**). La prueba de Löwenheim, mucho más interesante e informativa que la tradicional prueba indirecta de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, que supone no sólo nuestra teoría lógica de la cuantificación sino el principio de elección, no pasa de ser

una curiosidad técnica prácticamente ignorada.
¿Qué problema tenemos aquí?, hablando con propiedad, tenemos mas de un problema teórico:

1°. La consideración de una nueva clase de números, lógicamente situada después de **N, Q_+, Z** y **Q**, mientras que, desde el punto de vista histórico se tuvo **N** y **Q_+** ¿Es conveniente la ubicación de este conocimiento en este lugar del curriculum?, ¿Debe situarse en temas de geometría o de ecuaciones?
A pesar que el marco histórico es un marco geométrico, creemos debe conservarse su ubicación en el tema "Ecuaciones", y añadir el resultado (sin demostración, por supuesto) de Löwenhein.

2°. La vinculación de esta temática a la moderna Teoría de la Argumentación. Así, la tradicional prueba indirecta que siempre ha representado un modelo de rigor matemático, no prueba que $\sqrt{2}$, sea irracional ni algo acerca de nuestros números irracionales. Antes bien, debemos destacar varios puntos: (1) el objeto de la prueba es geométrico, (2) nuestro "irracional" no equivale en extensión al álogon (sin razón expresable) de Euclides, (3) en la medida que la matemática griega carece de nuestro concepto de número real, la idea de álogon de Euclides también queda lejos de coincidir intensional o conceptualmente con lo que hoy se entiende por "irracional" (**Vega (1995)**), aún en el siglo XIX los irracionales no poseían una identidad propia como números y cuando se les utilizaba, se recurría a la aproximación infinita tomando como base los números racionales (**Recalde (1994)**), es poco probable *"que los matemáticos griegos pensaran en términos de una progresión infinita de números"* (**Rotman (1988)**).
Por otra parte, las relaciones entre la lógica y la argumentación vienen siendo un asunto muy discutido, por más que a veces lo puesto en cuestión sea la existencia misma de alguna relación entre ellas, así, en la demostración, desde los griegos, la lógica siempre ha tenido que verse las caras con la argumentación. En estos momentos la afirmación de H. Scholz de 1939 ***"lo que significa demostrar o se aprende en Matemáticas o no se aprende en ninguna otra parte"***, no es tan terminante.
Lo cierto es que nunca como ahora se ha empezado a hablar de la posible muerte de la demostración matemática (en su sentido clásico). Cunde el rumor de que las nuevas perspectivas históricas y filosóficas del desarrollo de las Matemáticas, junto con los nuevos tipos de prueba que han aparecido en el horizonte de la investigación -e.g. las pruebas que exigen la ayuda de ordenadores cada vez más potentes -basta a título de presentación la prueba de los cuatro colores (ver, por ejemplo, **Appel y Haken (1986)**, **Detlefsen y Luker (1980), Lolli (1991), Swart (1980)** y **Tymoczko (1979)**,) - amenazan con asestarle el golpe de gracia.
Sin embargo, ¿renunciamos a las demostraciones clásicas?, o analizando la situación desde un ángulo positivo: ¿cómo podemos asimilar las pruebas por ordenadores? partiendo del hecho que, para la mayoría, no son demostraciones matemáticas.
Debemos añadir aquí, que el concepto de una prueba no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, ha adquirido mayor importancia últimamente entre los que se preocupan por la Educación Matemática. **Hanna (1990)** sugiere que siempre que sea posible, demos a nuestros alumnos pruebas que expliquen en lugar de pruebas que sólo prueben. Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son pruebas válidas (aunque la segunda no sea considerada una "demostración clásica"). Una prueba que explica, además, "*debe proporcionar una justificación basada en las ideas matemáticas involucradas, las propiedades matemáticas que hacen que el teorema afirmado sea cierto"* (**Hanna (1990)**), dentro de estas sobresalen en los últimos tiempos las llamadas

pruebas sin palabras, es decir, con ayuda de gráficos, símbolos, etc., también llamadas *pruebas por vistazo* (**Wells (1991)**) que se han revelado, particularmente útiles, en la demostración de ciertas fórmulas numéricas.

3°. La tendencia a la formalización de la Matemática, a partir de este momento, contrastando con la inclinación empirista de la Matemática anterior. Son varias las razones que tradicionalmente se aducen para explicar esto, tales causas pueden agruparse de la siguiente manera (**Filloy (1995)**):

-causas sociológicas,
-causas interculturales,
-causas intramatemáticas.

Desde el punto de vista didáctico es muy útil, sobre todo, el último aspecto y el desarrollo que generó en la Historia de la Matemática.

Creemos que con los ejemplos apuntados, hemos presentado a los docentes una alternativa válida en el tratamiento didáctico de ciertos problemas considerados por casi todos como *"difíciles"*.
De esta forma, la Historia de la Matemática no es un simple conjunto de problemas históricos que introducir en clase, unas anécdotas biográficas que motiven al alumno, no es un recurso ocasional sino uno de los fundamentos epistemológicos de la actual reforma escolar (**Maza (1996)**). Más adelante, este mismo autor señala que para que la Historia de la Matemática responda a la importancia social concedida debe cumplir una serie de condiciones que resumimos a continuación:

"1) Que alcance a constituirse como campo de trabajo e investigación, lo que requiere el análisis de los elementos que la constituyen y las relaciones que es posible establecer con el campo educativo.

2) Que los profesores la puedan ver como un recurso didáctico de importancia y utilidad en su trabajo de aula.

3) Condición fundamental es la divulgación entre el profesorado de los contenidos de la Historia de la Matemática pero, al mismo tiempo, una condición previa para ello es que los especialistas en este campo del saber orienten su labor, no sólo al estudio gratificante de la historia en sí misma, sino a su repercusión en las aulas."

Queremos señalar algunas observaciones generales sobre la utilización de los recursos históricos en nuestras clases:

- casi toda la Matemática ha sido construida sobre una sucesión de ideas precedentes y como uno puede volver sobre esta cadena, la motivación para un problema se torna claro,

- los estudiantes al dedicarse a un problema original, se relacionan con la experiencia de la creación matemática, sin un interprete intermedio,

- además, algo muy relacionado con el punto anterior, los estudiantes son iniciados en el camino de la creación matemática de una forma práctica: investigación, publicación y discusión.

- la objetividad histórica, no debe ceder ante las necesidades pedagógicas (ver **Garciadiego (1997)**), ejemplo de esto son los muy conocidos E.T. Bell-**"Men of Mathematics"**, New York, Simon and Schuster, 1937 y L. Infield-**"Whom the gods love"**, New York, Whittlesey House, 1948, mal concebidos como tratados históricos en virtud de un determinado interés motivacional.

A raíz de este trabajo, creemos útil destacar los siguientes aspectos a manera de epílogo:

1. La consideración del desarrollo histórico de los entes matemáticos, permite trabajar en la labor docente con las concepciones primarias de dichos entes, lo que indiscutiblemente, ayudaría a *clarificar* la comprensión de estos, por parte de los alumnos.

2. Que el significado de los objetos matemáticos debe tomarse en su triple significado: institucional, personal y temporal, es decir, el entorno en el cual se desarrolla la enseñanza de estos, *influye* sobre la interpretación que de estos se hagan los alumnos.

3. Que existen diferencias cualitativas entre el funcionamiento académico (a nivel de investigación, como "saber sabio") de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo ya que, por diversas causas, los usos y connotaciones de las nociones matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente *restringidas*.

4. Que detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza de los conceptos o como afirma Thom: *"Toda la pedagogía de las Matemáticas, aún si apenas es coherente, descansa en una filosofía de la Matemática"* (**Thom (1973)**) y, por último,

5. Que la Matemática debe ser considerada como una clase de actividad mental, una construcción social que encierra conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados están sometidos a cambios revolucionarios y cuya validez, por tanto, puede ser *juzgada* con relación a un enclave social y cultural, contrario a la *visión absolutista (platónica)* del conocimiento matemático.

REFERENCIAS

Appel, K. and W. Haken (1986)-"The four color proof suffices", The Mathematical Intelligencer, Vol.8, No.1, 10-20.
Arbelaez, G.I. (1995)-"Una aproximación histórico-filosófica a la demostración y el rigor matemático", Cali, UniValle, Tesis de Maestría.
Arboleda, L.C. y L.C. Recalde (1995)-"Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: la historia y epistemología del infinito", Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol.4, No.1, 151-171.
Arrieta, J. (1997)-"La Matemática, su historia y su enseñanza", preprint.
Arzarello, F. (1994)-"Symbols, Computations and Concepts in Algebra: Historical Roots of a Cognitive Obstacle", en Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, N. Malara y L. Rico (eds.), Modena, Italia, 213-220.
Ballester, S. et al. (1992)-"Metodología de la enseñanza de la Matemática", t. 1, Pueblo y Educación, La Habana.
Bartolini Bussi, M. and M. Pergola (1994)-"Mathematical Machine in the Classroom: The History of Conic Sections", en Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium

in Mathematics Education, N. Malara y L. Rico (eds.), Modena, Italia, 233-240.
Batanero, M.C.; J. Díaz G. y V. Navarro (1994)-"Razonamiento Combinatorio", Educación Matemática en Secundaria, Editorial Síntesis, Madrid.
Bertoglia, L. (1990)-"Psicología del aprendizaje", Universidad de Antofagasta, Chile.
Birkhoff, G. (1950)-"Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude", Pricenton University Press.
Brodetsky, S. (1919)–"The Graphical Treatment of Differential Equations", The Mathematical Gazette, Vol. IX, No. 142, pp. 377-382, pp. 3-8, pp. 35-38.
Bosch, M. y J. Gascón (1994) –"La Integración del Momento de la Técnica en el Proceso de Estudio de Campos de Matemáticas", Enseñanza de las ciencias, Vol. 12, No. 3, pp. 314-332.
Borasi, R. (1986)-"On the nature of problems", Educational Studies in Mathematics, 17, 125-141.
Bourbaki, N. (1962)-"Arquitectura de las Matemáticas", en Le Lionnais y colaboradores (Eds.), "Las grandes corrientes del pensamiento matemático"**,** Buenos Aires: Universitaria de Buenos Aires, 36-49.
Brenes, V. y Murillo (1994)-"Algunos objetos de estudio del constructivismo", pp. 373-378, UNA-UCR-CONICIT, Costa Rica.
Campistrous, L. y C. Rizo (1996)-"Aprende a resolver problemas aritméticos", Pueblo y Educación, La Habana.
Chevallard, Y. (1985)-"La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné", Grenoble: La Pensée Sauvage.
Cruz, M. (1995)-"¿Cómo formular problemas matemáticos?", Pedagogía'98, ISPJLC, Holguín, Cuba.
Cupillari, A. (1989)-"Proof without words: 1+2+3+ ... +n=[n(n+1)]/2", Mathematics Magazine, 62, 259.
De Gortari, E. (1983)- "Conclusiones y pruebas en la ciencia", Barcelona, Océano.
De Guzmán, M. (1992)- "Origin and evolution of Mathematical Theories: Implications for Mathematical Education", Proceedings ICME-7, 55-56.
Detlefsen, M. and M. Luker (1980)-"The four-color theorem and mathematical proof", The Journal of Philosophy, Vol.LXXVII, 4, 803-820.
Díaz G., J.; M.C. Batanero y M.J. Cañizares (1991)-"Azar y probabilidad", Matemáticas: cultura y aprendizaje 27, Editorial Síntesis, Madrid.
Díaz G., J. y M.C. Batanero (1994)-"Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.14, no.3, 325-355.
Dieudonné, J. (1972)-"Elementos de historia de las matemáticas", Madrid, Alianza Universidad.
Douady, R. (1986)–"Jeux de cadres et Dialectique outil-objet", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, No. 2, pp. 5-31.
Ernest, P. (1989)-"The knowledge, beliefs and attitudes of the Mathematics teacher: a model", J. Education for Teaching, Vol.15, No.1, 13-33.
Ernest, P. (1992)-"The Nature of Mathematics: towards a social constructivist account", Science & Education 1, 89-100.
Ernest, P. (1994a)-"What is social constructivism in the psychology of mathematics education", PME'94, Lisboa.
Ernest, P. (1994b)-"Varieties of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications", Hiroshima J. of Mathematics Education 2, 1-14.
Estepa C., A. y F.T. Sánchez C. (1994)-"Desarrollo histórico de la idea de asociación estadística", Epsilón no.30, 61-74.
Euclides (s/f)-"Elementos", Dpto Matemática Educativa, CINVESTAV- IPN, México.
Euclides (1991-1996)-"Elementos", Editorial Gredos, 3 vols, Madrid.

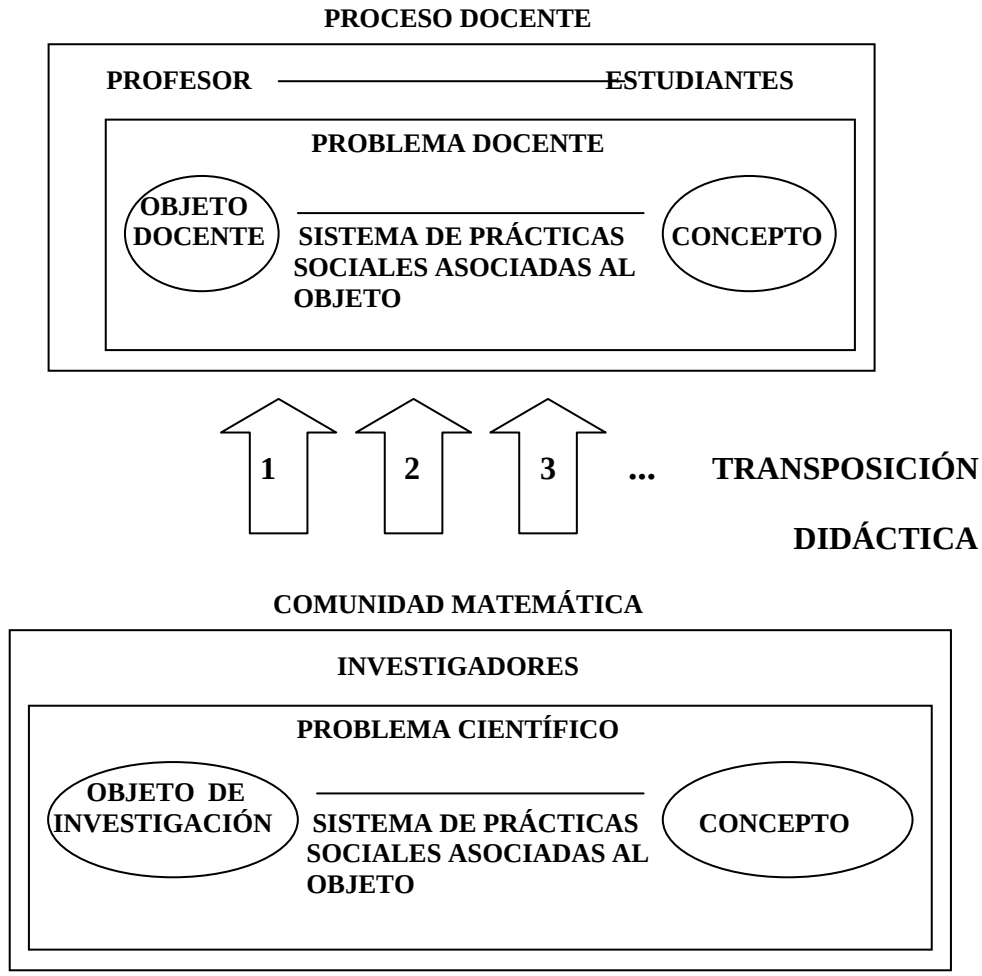
Farfán, R. M. y F. Hitt (s/f)-"Heurística", Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
Feyerabend, P.K. (1975)-"Against method", Atlantic Highlands: Humanities Press.
Filloy, E. (1995)-"Didáctica e historia de la geometría euclideana", Dpto de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
Finochiaro, M.A. (1980)-"Galileo and the Art of Reasoning", Dordrecht/Boston, Reidel.
Flores, A. (1993)-"Un tratamiento geométrico de la inducción matemática: pruebas que explican", Miscelánea Matemática 19, 11-23.
Flores M., P. (1993)-"Formación práctica inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria: algunas cuestiones de investigación sobre la planificación de la enseñanza y expectivas y necesidades de formación de los futuros profesores", Material Didáctico, Universidad de Granada.
Flores M., P. (1995)-"Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza", Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
Garcés, W. (1997)–"El Sistema de Tareas como Modelo de Actuación Didáctica en la Formación de Profesores de Matemática- Computación", Tesis de Maestría, ISPH, Cuba.
Garciadiego, A. (1997)-"Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innnata?", en "El velo y la trenza", F. Zalamea (ed.), EUN (Colombia).
Gerdes, P. (1991)-"Etnomatemática. Cultura, Matemática, Educação", Instituto Superior Pedagógico, Maputo, Mozambique.
Gheverghese J., G. (1996)-"La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas", Madrid, Pirámide.
Gil, F. (1990)-"Prove. Attraverso la nozione di prova/dimostrazione", Milano, Jaca Book.
Glymour, C. (1992)-"Thinking Things Through", Cambridge (Mass.), M.I.T. Press.
Goffman, C. and G. Pedrick (1965)-"First Course in Functional Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
González, J.L. (1994)-"Relatives, Integers and Measurements: A Theoretical Model of the Additive Structure", en Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, N. Malara y L. Rico (eds.), Modena, Italia, 221-232.
González, F. (1997)-"La transformación inversión como recurso para la solución y confección de problemas geométricos", Tesis de Maestría, ISPJLC, Holguín, Cuba.
Halmos, P. R. (1975)-"The teaching of problem solving", American Mathematical Monthly 82(5), 446-470.
Hanna, G. (1990)-"Some pedagogical aspects of poof", Interchange, 21(1), 6-13.
Hernández, A. (1994)-"Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias", CINVESTAV-IPN, México.
Hilbert, D. (1900)-"Mathematische Probleme", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenscaften zu Göttingen, Berlín, 253-297.
Hitt, F. (1978)-"Comportement de retour en arriere aprés la decouverte d'une contradiction", Tesis doctoral, Universidad Luis Pasteur.
Hitt, F. (1992)–"Intuición en Matemática, representación y uso de la microcomputadora", Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, pp. 254-266.
Hitt, F. (1994)-"Teacher's Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions", Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol.16, Number 4, 10-20.
Hitt, F. (1995)–"Intuición Primera Versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto real y Viceversa", Revista Educación Matemática (preprint).

House, P. A.; **M.L. Wallace and M.A. Johnson (1983)** -"Problem solving as a focus. How? when? whose responsibility?", The agenda in action, 9-19 NCTM, Virginia.
Jungk, W. (1986) -"Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2", t. 2. , La Habana, Pueblo y Educación.
Kuhn, T. (1962)- "The structure of scientific revolutions", Chicago: University of Chicago Press.
Labarrere, A. F. (1996)-"Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos", La Habana, Pueblo y Educación.
Lakatos, I. (1976)-"Proofs and refutations", Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
Laubenbacher, R. and D. Pengelley (1992)-"Great Problems of Mathematics: A Course Based on Original Sources", Amer. Math. Monthly 99, 313-317.
Laubenbacher, R. and D. Pengelley (1996)-"Mathematical Masterpieces: Teaching with Original Sources", in "Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching", R. Calinger (ed.), Math. Ass. of Amer., Washington DC, 1-7.
Laubenbacher, R.; D. Pengelley and M. Siddaway (1994)-"Recovering Motivation in Mathematics: Teaching with Original Sources", UME Trends, Vol.6, No.4.
Lerman, S. (1996)-"Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education", en Proceedings of "An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline", N. Malara (ed.), 43-51.
Lolli, G. (1991)-"La máquina y las demostraciones. Matemática, lógica e informática", Alianza Editorial, Madrid.
Löwenhein, L. (1946)-"On making indirect proofs direct", Scripta Mathematica, 28/2, 101-115 (ed. y revisión inglesa de W. O. Quine).
Malara, N. e I. Gherpelli (1997)-"Argomentazione e demostrazione in Aritmetica: alcuni risultati di una ricerca", L' educazione Matematica, Anno XVIII, Serie V, Vol. 2 (2), 82-102.
Maza G., C. (1996)-"El dibujo del embaldosado: un ejemplo de matematización, SUMA, No.21, 89-96.
Miller, G. A. (1956)-"The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information", Psychological Review, 63, 81-97.
Moreno, L.E. (1993)-"El Cálculo. Una perspectiva histórica y didáctica", Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol.3, No.1, 71-78.
Müeller, I. (1981)-"Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements", MIT Press.
Müller, H. (1987)–"Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática", La Habana, ICCP.
Nápoles, J.E. (1997a)-"Consideraciones sobre el uso de recursos históricos en algunos problemas de Educación Matemática", Ponencia presentada a RELME-11, Morelia, México.
Nápoles, J.E. (1997b)-"Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales", Memorias COMAT'97, Universidad de Matanzas.
Nápoles, J.E. (1998)-"Del Partenón a la realidad virtual. La idea de la demostración en la historia de la Matemática", Manuscrito preliminar.
Nelsen, R.B. (1990)-"Proof without words corollary: Sums of squares", Mathematics Magazine 63, 314-315.
Oliveras, M.L. (1996)-"Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular", Granada, Mathema 7.
Pérez C., P. (1998)-"Los conceptos matemáticos, su génesis y su docencia", Universidad Politécnica de Valencia, 1998.
Polya, G. (1965) –"Como plantear y resolver problemas", Trillas, México.
Polya, G. (1980)-"On Solving Mathematical Problems in High School", in Problem Solving in School Mathematics (Yearbook of the NCTM). Stephen Krulich (Ed.), Reston, 1-2.

Puig, L. (1994)-"A study on Mathematical Sign Systems and the Methods of Analysis: The case of "De Numeris Datis" by Jordanus de Nemore", en Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, N. Malara y L. Rico (eds.), Modena, Italia, 257-264.
Recalde, L.C. (1994)-"El papel del infinito en el surgimiento de la topología de conjuntos", Cali, UniValle, Tesis de Maestría.
Rotman, B. (1988)-"Towards a semiotics of mathematics", Semiotica, 72-1/2, 1-35.
Sánchez, C.H. (1994)-"Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia", Santafé de Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
Schatz R., M. and D.A. Grouws (1992)-"Mathematics teaching practice and their effects", en D.A. Grouws (ed.), Handbok of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, MacMillan, New York.
Schoenfeld, A. H. (1992)-"Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics", in D. Grouws (Eds.) Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan, 334-370.
Schrage, G. (1992)-"Proof without words 1+2+3+ ... +n=[n(n+1)]/2", Mathematics Magazine, 65, 185.
Scriven, M. (1987)-"Probative Logic. Review & Preview", en F. van Eemeren *et al*., "Argumentation: Accros the Lines of Discipline", Dordrecht, Foris, 7-32.
Serrano, J. (1991)-"El binomio demostración-explicación", México, Trillas.
Smale, S. (1970)-"Differentiable Dynamical Systems", Bull Amer. Math Soc. Vol. 73, 747-817.
Speranza, F. (1994)-"The Role of Non-Classical Geometries for a Radical Renewal of the Mathematical Teaching", en Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education, N. Malara y L. Rico (eds.), Modena, Italia, 249-256.
Speranza, F. and L. Grugnetti (1996)-"History and epistemology in Didactics of Mathematics", en Italian Research in Mathematics Education 1988-1995, N. Malara, M. Menghini and M. Reggiani (eds.), 126-135.
Swart, E.R. (1980)-"The philosophical implications of the four-color problem", Amer. Math. Monthly, 87, 697-707.
Thom, R. (1973)-"Modern mathematis: does it exist?, en A.G. Howson (ed.) Developments in mathematical education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education, 194-209, Cambridge: Cambridge University Press.
Thompson, A.G. (1984)-"The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice", Educational Studies in Mathematics 15, 105-112.
Thompson, A.G. (1992)-"Teachers´ beliefs and conceptions: A synthesis of the research", en D.A. Grouws (ed.), Handbok of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, MacMillan, New York.
Tymoczko, T. (1979)-"The four-color problem and its philosophical significance", The Journal of Phylosophy, Vol.LXXVI, 2, 57-83.
Vasco, C.E. (1994)-"La Educación Matemática: Una disciplina en formación", Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol.3, No.2, 59-75.
Vega, L. (1990a)-"Dureza y fragilidad de las demostraciones", Signos *(Anuario de Humanidades, UAM-Iztapalapa)*, III, 127-144.
Vega, L. (1990b)-"La trama de la demostración", Madrid, Alianza.
Vega, L. (1992a)-"Los *elementos* de geometría y el desarrollo de la idea de demostración", Mathesis, 8, 403-423.
Vega, L. (1992b)-"¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de demostración matemática", Mathesis 8, 155-177

Vega, L. (1993)-"La encrucijada de la demostración", Agora, 12/1, 69-85.
Vega, L. (1994a)-"Argumentos, pruebas y demostraciones", en AAVV, Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia, Madrid, Siglo XXI, 202-221.
Vega, L. (1994b)-"La demostración «more geométrico»: notas para la historia de una extrapolación", Mathesis, 10: 25-45
Vega, L. (1995)-"En torno a la idea tradicional de demostración", Laguna, 3: 28-56.
Vega, L. (1996)-"La dimostrazione", en Salvatore Settis (ed.) I Greci, Torino, Einaudi,, Vol. I, 285-318.
Vega, L. (1997)-"Matemática y demostración: las vicisitudes actuales de una antigua *liaison*" en "El velo y la trenza", Fernando Zalamea (ed.), Editorial Universidad Nacional, Colombia, 49-79.
Weinstein, M. (1990)-"Towards an account of argumentation in science", Argumentation, 4: 169-298.
Wells, D. (1991)-"The Penguin dictionary of curious and interesting geometry", Harmondsworth: Penguin.
Wu, T.C. (1989)-"Proofs witout words: (1x2)+(2x3)+(3x4)+...+(n-1)n=(n-1)n(n+1)/3", Mathematics Magazine, 62, 27.
Zeeman, E.C. (1971)-"The geometry catastrophe", Times Lit. Supp.
Zerger, M.J. (1990)-"Proof without words: Sums of Triangular Numbers", Mathematics Magazine, 63, 314.
Zimmermann, W. and S. Cunnigham (1991)–"Visualization in Teaching and Learning Mathematical", Association of América, USA.

ANEXO



LEYENDA

1. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO.
2. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR:

- De la Matemática.
- De otras materias.
- De la enseñanza de la Matemática (Pedagogía, Diseño Curricular, etc.)
- Dirección educacional (contexto sociocultural, lo que saben los estudiantes, etc.).
- Del contexto de la enseñanza.
- De educación.

3. CREENCIAS DEL PROFESOR:

- Concepción de la naturaleza de la Matemática.
- Modelos de enseñanza-aprendizaje.
- Principios de la Educación.

REFERENCIAS ADICIONALES

[A1] Abelló U., I.A. y P.M. Garrido-**"¿La transformada rápida de Fourier fue un descubrimiento de 1965?"**, Bol. SCMC, no.15, 1993, 21-30.
[A2] Abraham, R. and J. E. Marsden-**"Foundations of Mechanics"**, W.A.Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
[A3] Appel**,** K**.** and W. Haken-**"The four color proof suffices"**, The Mathematical Intelligencer, Vol.8, No.1, 1986, 10 - 20.
[A4] Arboleda, L.C. y L.C. Recalde-**"Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Julio Garavito (1865-1920)"**, Quipu, vol.11, num.1, 1994, 7-24.
[A5] Arboleda, L.C. y L.C. Recalde-**"Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: la historia y epistemología del infinito"**, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol.4, No.1, 1995, 151-171.
[A6] Arboleda, L.C. y L.C. Recalde-**"Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general"**, UniValle, 1996.
[A7] Arnold, V.I.-**"Catastrophe Theory"**, Springer, 1986.
[A8] Arquímedes-**"El Método"**, Alianza Editorial, Madrid, 1986 (traducción, introducción y notas: Luis Vega).
[B1] Babini, J.-**"Galileo en la Historia de la Ciencia"**, Boletín del Instituto de Matemática, Astronomía y Física (UNC), 1964, 7-28.
[B2] Balanzat, M.-**"Evolución del concepto de diferencial"**, Revista de la UMA, 28(1975), 115-124.
[B3] Baron, M.E.-**"A matemática grega"**, Editora Universidade de Brasilia, 1985.
[B4] Batkin, L.-**"El universo de Leonardo da Vinci"**, en `Hombre, Ciencia, Humanitarismo', Ciencias Sociales Contemporáneas, Moscú, 1987.
[B5] Báyer, P.-**"El Teorema de Fermat"**, Publicaciones de la Seccio' de Mathemátiques Universitat Autónoma de Barcelona, N°2, 1976, 94-110.
[B6] Belinke, H. und F. Hirzebruch- **"In memoriam Heinz Hopt"**, Marth. Ann. 196, 1-7 (1972).
[B7] Bell, E.T.-**"Historia de la Matemática"**, Fondo de Cultura Económica, México, 1995.
[B8] Blanco, F. y G. Quintero-**"Apuntes biográficos de Collin Maclaurin"**, Bol. SCMC, no.10, 1989, 23-25.
[B9] Blumenthal, L.M.-**"Geometría Axiomática"**, Aguilar, 1965.
[B10] Boido, G.-**"Noticias del planeta Tierra. Galileo Galilei y la revolución científica"**, A-Z editores, Buenos Aires, 1998.
[B11] Bombal G., F.-**"Los comienzos del Análisis Funcional"(I)**, Bol. SCMC, no.14, 1992, 10-20.
[B12] Bombal G., F.-**"Los comienzos del Análisis Funcional"(II)**, Bol. SCMC, no.15, 1993, 10-20.
[B13] Bonet, R.P.-**"El problema de la derivada oblicua a lo largo de 100 años"**, Bol. SCMC, no.13, 1991, 21-30.
[B14] Bonilla R., E.-**"La Universidad de Cambridge, la Universidad de Newton"**, Miscelánea Matemática (SMM), no.20, 1994, 15-27.
[B15] Bonola, R.-**"Las geometrías no euclidianas"**, Espasa-Calpe, Argentina, 1951.
[B16] Borodin, A.I. y A.C. Bugai-**"Lo relevante en la matemática"**, Kíev, Escuela Superior, 1987 (en ruso).

[B17] Boyer, C.B.-**"A History of Mathematics"**, John Wiley & Sons, Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1991[3].
[C1] Carda, J. L.-**"La fundamentación del Análisis de Fourrier"**, Publicaciones de la Seccio' de Mathemátiques Universitat Autónoma de Barcelona, N°2, 1976, 1-22.
[C2] Casanova, G.-**"La matemática y el materialismo dialéctico"**, Editora del Consejo Nacional de Universidades, La Habana, 1965.
[C3] Castro D., F.-**"Espacio y tiempo en la filosofía y la física"**, Ciencias Sociales, La Habana, 1988.
[C4] C. de A.-**"Ciencia y Filosofía"**, Ciencias Sociales, La Habana, 1985.
[C5] C. de A (AC-URSS y ACC)-**"La Dialéctica y los Métodos Científicos Generales de Investigación"**, T.1 y 2, Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 1985.
[C5] Contenau, G.-**"La vida cotidiana en Asiria y Babilonia"**, Gente Nueva, La Habana, s/f.
[C6] Cottrell, L.-**"Mesopotamia"**, Cuadernos Populares, La Habana, 1973.
[C7] Cottrell, L.-**"Los Egipcios"**, Cuadernos Populares, La Habana, 1973.
[C8] Courant, R. y H. Robbins-**"Qué es la Matemática?"**, Aguilar, Madrid, 1962.
[C9] Cufí, J.-**"Superficies de Riemann"**, Publicaciones de la Seccio' de Mathemátiques Universitat Autónoma de Barcelona, N°2, 1976, 23-37.
[D1] Davidson, L. J.-**"Historia de Gaspar Monge y la Geometría Descriptiva"**, Bol. SCMC, no.1, 1983, 22-25.
[D2] Davidson, L. J.-**"Historia de la Matemática"**, Manuscrito Preliminar.
[D3] De Aguiar, M.A.M.-**"Caos em Sistemas Clásicos Conservativos"**, Rev. Brasileira de Ensino de Física, Vol.16, N°.s 91-4),1994, 3-20.
[D4] De Guzmán, M.-**"Origin and evolution of Mathematical Theories: Implications for Mathematical Education**", Proceedings ICME-7, 1992, 55- 56 .
[D5] De Guzmán, M.-**"Mirar y ver. Nueve ensayos de geometría intiuitiva"**, Red Olímpica, Buenos Aires, 1993.
[D6] De Guzmán, M.-**"Cuentos con cuentas"**, Red Olímpica, Buenos Aires, 1997.
[D7] Detlefsen, M. and M. Luker-**"The four - color theorem and mathematical proof"**, The Journal of Philosophy, Vol.LXXVII, 4, 1980, 803 - 820.
[D8] Delgado, J. y L. Vela-**"El problema restringido plano y circular de tres cuerpos"**, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 13, 1993, 15-67.
[D9] De Spinadel, V.W.-**"From the Golden Mean to Chaos"**, Nueva Librería, Buenos Aires, 1998.
[D10] **Diccionario Enciclopédico Matemático**, Editorial "Enciclopedia Soviética", Moscú, 1988 (en ruso).
[D11] Dienes, Z.P.-**"La potencia de la Matemática"**, Angel Estrada y Cía, Buenos Aires, 1971.
[D12] Dlúgach, T.B.-**"Denis Diderot"**, Progreso, Moscú, 1989.
[D13] Dugan, A.-**"Los Romanos"**, Cuadernos Populares, La Habana, 1973.
[E1] Engel, W.G.-**"Problemas da História da Matemática Antiga"**, Instituto de Matemáticas, UFRGS, Brasil, 1988.
[E2] Erugin, N. P. y otros-**"Boris Pavlovich Demidovich"**, Differentsialnie Uravnenia, 1977, Tomo XVII, No.l2, 2280-2283.
[E3] Euclides-**"Obras Completas"**, UNAM, 1944.
[E4] Euclides-**"Elementos"**, Dpto Matemática Educativa, CINVESTAV - IPN, s/f, México.
[F1] Falconer, K.-**"Fractal geometry. Mathematical foundations and applications"**, Wiley, New York, 1990.
[F2] Farfán, R. M. y F. Hitt-**"Heurística"**, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV -

IPN, s/f, México.
[F3] Filloy, E.-**"Didáctica e historia de la geometría euclideana"**, Dpto de Matemática Educativa, CINVESTAV - IPN, 1995, México.
[F4] Fraguela C. A.-**"Tendencias del desarrollo de la matemática en la actualidad"**, Bol. SCMC, no.4, 1985, 9-21.
[F5] Friberg, J.-**"The early roots of babylonian mathematics. III. Three remarkable texts from Ebla"**, Research Report, No.1983-14.
[G1] García C. V.C.-**"O Caos"**, Instituto de Matemática, UFRGS, Brasil, 1988.
[G2] Garciadiego D. A.-**"Bertrand Russell y los fundamentos de la Física"**, Rev. Mexicana de Física 30, no.3 (1984), 567-584.
[G3] Garciadiego D. A.-**"Seminario de las matemáticas"**, Mathesis, 3(1985), 487-494.
[G4] Garciadiego D. A.-**"Un seminario de filosofía de las matemáticas"**, Mathesis, 4(1985), 599-605.
[G5] Garciadiego D. A.-**"Russell's precise language"**, Canadian Soc. for the History and Philosophy of Mathematics, 1987.
[G6] Garciadiego D. A.-**"Una introspectiva: cuestionando la influencia de las paradojas de la teoría de conjuntos"**, Mathesis 7(1991), 507-529.
[G7] Garciadiego D. A.-**"Should we trust primary sources? Bertrand Russell: a case study"**, Archives Int. d'Histoire des Sciences, Vol.42 (1992), 87-93.
[G8] Golovanov, Y.-**"Semblanzas de grandes hombres de ciencias"**, Progreso, Moscú, 1986.
[G9] Gómez-Sánchez A. L.-**"Enteros y trascendentes: más allá de Fermat"**, Bol. AMV, Vol.II, 1995, 9-20.
[G10] Gómez M., X.-**"Un enfoque a los sistemas dinámicos. La computación convierte a la matemática en ciencia experimental"**, Ciencia (1989). 40,233-243.
[G11] González, F.R. y F. Castro-**"Algunos elementos de la teoría pitagórica de los números"**, Bol. SCMC, no.9, 1988, 31-38.
[G12] Grebenikov, E.A.-**"Nicolas Copérnico"**, Naúka, Moscú, 1982 (en ruso).
[G13] Guliáev, V.-**"Las primeras ciudades"**, Progreso, Moscú, 1989.
[H1] Halmos, P.R.-**"Measure Theory"**, Van Nostrand Cía, Inc., 1961.
[H2] Hitt, F.-**"Teacher's Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions"**, Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol.16, Number 4, 1994, 10 - 20.
[H3] HPM-**"An Historical Perspective on Learning, Teaching and Using Mathematics"**, Proceedings ICME-7, 1992, 299 - 312.
[H4] Hofmann, J.E.-**"Historia de la Matemática"**, Ediciones R. La Habana, 1972.
[J1] Jeans, J.-**"Historia de la Física"**, Breviarios, Fondo de Cultura Económica, México-Buenos Aires, 1953.
[K1] Kagan, V.-**"Lobatchevski"**, Científico-Técnica, La Habana, 1984.
[K2] Kasner, E. y J. Newman-**"Matemáticas e Imaginación"**, Cía Editorial Continental, México, 1959.
[K3] Kedrov, B.M.-**"Clasificación de las Ciencias"**, T.I y II, Editorial Ciencias Sociales-Editorial Progreso, 1974.
[K4] Keldish, M.V.-**"Colección de Trabajos. Matemática"**, Naúka, Moscú, 1985 (en ruso).
[K5] Komkov, D.; B.V. Levshin y L.K. Semenov-**"Academia de Ciencias de la URSS"**, T.I (1724-1917), Naúka, Moscú, 1977.
[K6] Kosmodemianski, A. A.-**"Konstantin E. Tsiolkovski"**, Mir, Moscú, 1987.
[K7] Kosmodemianski, A. A.-**"Nikolái Egórovich Zhukovski"**, Mir, Moscú, 1989.

[K8] Kuznetsov, B.-**"Galileo Galilei"**, Col. Vulcano, Científico- Técnica, La Habana, 1981.
[K9] Kuznetsov, B.-**"Einstein. Vida. Muerte. Inmortalidad"**, Progreso, Moscú, 1990.
[L1] Lagowski, J.J.-**"El proceso de la creatividad"**, Revista Integración (UIS-Colombia), 53-55.
[L2] Laubenbacher, R. C, and D. Pengelly-**"Mathematical Masterpieces: Teaching with Original Sources"**, in "Vita Mathematica: Historical Reserach and Integration with Teaching" (ed. R. Calinger), Math. Ass. of Amer., Washington DC, 1-7.
[L3] Le Lionnais, F. y cols-**"Las grandes corrientes del pensamiento matemático"**, EUDEBA, 1962.
[L4] Liátker, Ya.-**"Descartes"**, Progreso, Moscú, 1990.
[L5] Lolli, G.-**"La máquina y las demostraciones. Matemática, lógica e informática"**, Alianza Editorial, 1991, Madrid.
[L6] López G. B.-**"Compendio de Historia de la Matemática"**, Dossat, Madrid, 1955.
[L7] Lowenhein, L. (1946)-**"On making indirect proofs direct"**, Scripta Mathematica, 28/2, 1946, 101 - 115 (ed. y revisión inglesa de W. O. Quine).
[M1] Martínez A, P-**"Aplicación de la Teoría de la Catástrofe al estudio de flujos potenciales"**, Actas XI Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, México, 1985, 95-99.
[M2] Martínez E. R.-**"Sistemas dinámicos y pensamiento antiguo"**, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 13, 1993, 133-146.
[M3] Martínez E. R. y R. Bulajich-**"Caos. Memoria antigua y realidad moderna"**, rev. Ciencia, vol. XVIII, 1992, 12-31.
[M4] Martins, A.V.-**"Problema dos 3 corpos e a solucao colinear de Euler"**, Instituto de Matemática, UFRGS, Brasil, 1989.
[M5] Mateo T. J.-**"Tipos históricos de unidad del conocimiento científico"**, Ciencias Sociales, La Habana, 1986.
[M6] Matute, M.; A. Soldatov y otros-**"Problemas filosóficos y metodológicos de la matemática"**, U. O. 1987.
[M7] Mawhin, J.-**"The forced pendulum: A paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems"**, Expositiones Mathematicae 6(1988), 271-287.
[M8] Mawhin, J.-**"Nonlinear oscillations: One Hundred Years after Liapunov and Poincaré"**, ZAMM 73 (1993) 4-5, T54-T62.
[M9] Mawhin, J.-**"The centennial legacy of Poincaré and Liapunov in Ordinary Differential Equations"**, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, Serie II, Supplemento N.34 (1994), 9-46.
[M10] Mayorga, B.-**"Lobachevski y la geometría no euclidiana"**, revista Lecturas Matemáticas (SCM), Vol.15 (1994), 29-43.
[M11] Maza G., C.-**"El dibujo del embaldosado: un ejemplo de matematización**", SUMA, No.21, 1996, 89 - 96.
[M12] Montagne, H.F. and M. D. Montgomery-**"The significance of Mathematics"**, Charles E. Merril Books, Inc., Columbus, Ohio, 1963.
[M13] Moore, G.H.-**"The axiomatization of linear algebra: 1875-1940"**, Mathematical Reports, Mc Master University, 1994/95, N°3.
[M14] Mueller, I.-**"Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements"**, MIT Press, 1981.
[N1] Nagel, E. y J.R. Newman-**"El Teorema de Gödel"**, Tecnos, Madrid, 1994.
[N2] Nápoles, J.E.-**"Acerca del Teorema de Ptolomeo"**, dado a publicar revista Ciencias (UNAM), México.
[N3] Nápoles, J.E.-**"El primer libro de texto de cálculo"**, inédito.

[N4] Nápoles, J.E.-**"El punto decimal"**, revista Alpha (I.S.P.H.), Vol.2, 1995, 21-25.
[N5] Nápoles, J.E.-**"Euler. Del Análisis a la Topología"**, dado a publicar.
[N6] Nápoles, J.E.-**"Vibraciones de un tambor fractal"**, dado a publicar.
[N7] Nápoles, J.E. y R. Borges-**"Acerca de Descartes y la Geometría Analítica. Presencia de la Filosofía"**, Bol. SCMC, no.12, 1990, 9-15.
[N8] Nápoles, J.E. y C. Negrón-**"De la Mecánica Analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Algunos apuntes históricos"**, revista LLULL (España), vol.17 (no.32), 1994, 190-206 (un resumen de este trabajo se publicó en el Bol. SCMC, no.15, 1993, 1-9).
[N9] Newman, J.R.-**"Sigma. El mundo de las matemáticas"**, Grijalbo, Barcelona-México, Vols I-V, 1969.
[P1] Paz, A.-**"El último teorema de Fermat y el trabajo de Andrew Wiles"**, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, ERM-Colombia, Vol 3, N°2 (1994), 93-101.
[P2] Pávlova, G.E. y A.S. Fiódorov-**"M. V. Lomonósov. Vida y obra"**, Mir, Moscú, 1987.
[P3] Peitgen, H.-O. and P.H. Richter-**"The beauty of fractals"**, Springer-Verlag, 1986.
[P4] Peitgen, H.-O., H. Jurgens and D. Saupe-**"Chaos and Fractals. New frontiers of Science"**, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992.
[P5] Perero,M.-**"Historia e Historias de Matemáticas"**, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.
[P6] Pérez C., P.-**"Los conceptos matemáticos. Su génesis y su docencia"**, Universidad Politécnica de Valencia, 1998.
[P7] Pijeira, H. E.-**"Los números mayas"**, Bol. SCMC, no.2, 1984, 42-46.
[P8] Pijeira, H.E.-**"Raíces histórico metodológicas de la Matemática Contemporánea"**, Universidad de Matanzas, 1994.
[P9] Porter, M.-**"Superficies de Riemann. Hilo dorado en la tela de las matemáticas"**, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 13, 163-192.
[P10] Poston, T. e I. Stewart-**"Teoría de las Catástrofes y sus Aplicaciones"**, Mir, Moscú, 1980 (en ruso).
[P11] Poincaré, H.-**"Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste"**, Vols I, II y III, Dover Publications, Inc; New York. 1957.
[P12] Prada, B.I.-**"Reflexiones en torno a ciertos aspectos de la Epistemología Newtoniana"**, Revista Integración, UIS-Colombia, v.5,n.1,1987. 7-23.
[R1] Rabinovich, V.-**"Jerónimo Cardano: hacerse a sí mismo"**, en `Hombre, Ciencia, Humanitarismo', Ciencias Sociales Contemporáneas, Moscú, 1987.
[R2] Rensolí L., L.-**"Reaparición del problema cosmológico en la filosofía euro-occidental de los siglos XV y XVI: factores condicionantes"**, revista Varona, No.6 y 7, 1981, 146-164.
[R3] Rensolí L., L.-**"Quimera y realidad de la razón. El racionalismo del siglo XVII"**, Ciencias Sociales, La Habana, 1967.
[R4] Repilado, J.A.-**"Sobre la estabilidad según la primera aproximación y la ecuación de bifurcación de los sistemas reversibles"**, Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación (UNAM), no.15 (1988), 1-15.
[R5] Repilado, J.A. y A. Salas-**"Apuntes biográficos sobre la vida de Alexander Mijailovich Liapunov"**, Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación (UNAM), no.27, 1989, iv-viii.
[R6] Repilado, J.A., J. Bermúdez y D. Morales-**"Apuntes biográficos de Sofía V. Kovalevskaya"**, Idem, 1-3.
[R7] Ríbnikov, K.-**"Historia de las matemáticas"**, Mir, Moscú, 1987.
[R8] Ribeuboim, P.-**"Existen funciones que geram os números primos?"**, Matemática Universitaria, S B M, N°15, 1993, 1-12.

[R9] Rivero, F.-**"Una aplicación del teorema chino del resto en la Cronología"**, Bol. AMV, Vol.II, 1995, 21-30.
[R10] Rodríguez U., Z.-**"El problema de la naturaleza específica del conocimiento filosófico"**, MES, Ciudad de la Habana, 1985.
[S1] Sánchez F., C.-**"Orientaciones Metodológicas Historia y Metodología de las Matemáticas"**, MES, 1982.
[S2] Sánchez F., C.-**"Del Cálculo Diferencial al Análisis No Estándar"**, Bol. SCMC, no.3, 1984, 29-35.
[S3] Sánchez F., C.-**"Discurso a la memoria de un genio revolucionario: Janos Bolyai"**, Bol. SCMC, no.5, 1985, 20-32.
[S4] Sánchez F., C.-**"Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática"**, U.H., 1987.
[S5] Sánchez F., C.-**"El recurso de la historia y metodología de la matemática"**, Bol. SCMC, no.11, 1989, 11-16.
[S6] Sánchez F., C.-**"La fascinante historia de los sistemas hipercomplejos (I)"**, Bol. SCMC, no.12, 1990, 16-26.
[S7] Sánchez F., C.-**"La fascinante historia de los sistemas hipercomplejos (II)"**, Bol. SCMC, no.13, 1991, 3-10.
[S8] Sestier, A.-**"Historia de las Matemáticas"**, Limusa, México-España-Venezuela-Colombia, 1996.
[S9] Shirakov, P.A.-**"Pequeño esbozo de los fundamentos de la geometría de Lobachevski"**, Naúka, Moscú, 1983 (en ruso).
[S10] Shugailin, A.V.-**"Cuestiones filosóficas de la física moderna"**, Ediciones Pueblos Unidos, Montevideo, 1962.
[S11] Simó, C-**"El Problema de n cuerpos"**, Publicaciones de la Seccio' de Mathemátiques Universitat Autónoma de Barcelona, N°2, 1976, 38-68.
[S12] Smogorzhevski, A.S.-**"Acerca de la geometría de Lobachevski"**, Mir, Moscú, 1978.
[S13] Sosa, L.A. y P.J. Abreu-**"Breve reseña histórica acerca del origen y desarrollo de la teoría de las probabilidades"**, Bol. SCMC, no.9, 1988, 6-12.
[S14] Sotomayor, J.-**"O Elipsoide de Monge"**, Matemática Universitaria, SBM, no.15, 1993, 33-47.
[S15] Spivak, M.-**"Differential Geometry"**, Publisher Perish, Inc., 1970.
[S16] Stewart, I.-**"Elementary Catastrophe Theory"**, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.30, 1983, 578-586.
[S17] Stiopin, V.-**"Características del proceso de formación del saber científico"**, en Problemas del Mundo Contempóraneo (104), tomo II, 1985, 10-25.
[S18] Struik, D.J.-**"La Matemática, sus orígenes y su desarrollo"**, Ediciones Siglo XX, Colección Panorama 38, Buenos Aires, 1960.
[S19] Struik, D. J.-**"Breve curso de Historia de la Matemática"**, Naúka, Moscú, 1984 (en ruso).
[S20] Stoop, R.R.-**"On the numerical characterization of hu scaling behavior in dissipative dynamical systems"**, Inaugural Dissertation, Universitat Zurich, 1991.
[S21] Swart, E.R.-**"The philosophical implications of the four - color problem"**, Amer. Math. Monthly 87, 1980, 697 - 707.
[T1] Topic Group 6-**"The Theory and Practice of Proof",** Proceedings ICME-7, 1992, 253 - 256.
[T2] Troelstra, A.S.-**"Principles of Intuitionism"**, Lectures Notes no.95, Springer, 1969.
[T3] Turnbull, H. W.-**"Grandes matemáticos"**, Colección Vulcano, Científico-Técnica, La Habana, 1984.

[T4] Tymoczko, T.-**"The four - color problem and its philosophical significance"**, The Journal of Phylosophy, Vol.LXXVI, 2, 1979, 57 - 83.
[U1] Ugarov, V. A.-**"Special theory of relativity"**, Mir, Moscú, 1979.
[V1] Vega, L.-**"El incierto sentido de la teoría aristotélica de la ciencia"**, Contextos, 11/4, 1984, 27-47.
[V2] Vega, L.-**"Lecturas de Lógica"**, I y II, Madrid: UNED, 1984 y 1985.
[V3] Vega, L.-**"Sobre la invención griega de la idea de la demostración"**, Llull, vol.8, 1985, 149-173.
[V4] Vega, L.-**"Inferencia, argumentación y lógica"**, Contextos, 111/6, 1985, 47-72.
[V5] Vega, L.-**"Wittgenstein, un OUTSIDER en lógica"**, Contextos VII/13, 1989, 79-103.
[V6] Vega, L.-**"Tà Endoxa: argumentación y plausibilidad"**, Endoxa: Series Filosóficas, no.1, 1993, UNED, Madrid, 5-19.
[V7] Vega, L.-**"Las versiones de los Elementos como signos de los tiempos (1574-1774)"**, en Contre les Titans de la routine, S. Garma-D. Frament (eds), Madrid: C.S.I.C., 1994, 35-50.
[V8] Vega, L.-**"Demostraciones clásicas"**, THEORIA - Segunda Epoca - Vol.X, no.24, 1995, 79- 101.
[V9] Vega, L.-**"La dimostrazione"**, en I Greci. Storia Cultura Arte Societa, I: Noi e y Greci, Einaudi, Torino, 1996, 285-318.
[V10] Vega, L.-**"¿Está en crisis la idea clásica de demostración matemática?"**, Conferencia COMPUMAT'96, Universidad de Holguín, 1996.
[V11] Vega, L.-**"Rescatando textos olvidados y papeles inéditos"**, Endoxa, Series Filosóficas N°4, UNED, S/f, 281-298.
[V12] Vega, L.-**"En torno a la idea tradicional de demostración: cuestiones y consideraciones (auto)críticas"**, preprint.
[V13] Vidal, L.C.-**"Interrogantes sobre el continuo y el infinito matemático"**, Ediciones Ariel, Barcelona, 1951.
[V14] Vizguin, V.-**"Mecánica Analítica como factor del desarrollo de la Matemática"**, en Problemas del Mundo Contemporáneo (104), tomo II, 155-172.
[V15] Vladimirov, V.S. y I.I. Markush-**"Vladimir A. Steklov"**, Mir, Moscú, 1983.
[V16] von Hagen, V.W.-**"Los Mayas"**, Gente Nueva, La Habana, 1988.
[V17] von Hagen, V.W.-**"Los Aztecas"**, Gente Nueva, La Habana, 1988.
[V18] von Hagen, V.W.-**"Los Incas"**, Gente Nueva, La Habana, 1988.
[W1] Whitehead, A.N. y B. Russell-**"Principia Mathematica"**, Paraninfo, Madrid, 1981.
[W2] Witt, E.-**"Matemática Intuicionista"**, Conferencias de Matemática, Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1951.
[W3] Wussing, H.-**"Conferencias sobre Historia de la Matemática"**, Pueblo y Educación, La Habana, 1989.
[W4] Wylie, C.R.-**"Fundamentos de Geometría"**, Ediciones Troquel, Buenos Aires, 1968.

Publicaciones Periódicas:

* Anamnesis, Vol.I, no.3, Julio 1983.
* Revista Ciencia Hoy.
* Scientific American.
* Muy Interesante.
* Boletín de la Sociedad Mexicana de Matemática.
* Revista de la UMA.
* Boletín del Instituto de Matemática, Astronomía y Física (UNCo).
* Boletín de la SCMC, nos.1-16.

* Correo de la UNESCO, números: Abril 1973, Abril 1977, Diciembre 1977, Agosto-Septiembre 1978, Noviembre 1979, Septiembre 1981, Marzo 1983, Junio 1984, Febrero 1985, Septiembre 1986, Julio 1988 y Noviembre 1989.
* Mathesis, Vol X, N°2, 1994.

Sitios Web:
- Clark University, USA.
- University of Virginia, USA.
- University of Tennesse at Knoxville, USA.
- Agnes Scott College, USA.
- New Port Richey, USA.
- Galileo Project.
- Furman University, USA.
- Mathsoft, USA.
- ANU, Canbera, Australia.
- American Institute of Physics, USA.
- ASAP, Australia.
- Trinity College, Dublin, Ireland.
- Library of Conress Vatican Exhibit.
- Simon Fraser University, Burnaby, Canada.
- IFAG, Potsdam, Germany.
- Waterloo, Canada.
- Oxford University Computing Laboratory, UK.
- The Math Forum and Math History resource collection.
- Historia Mathematica.
- The Invention Dimension.
- Université Libre de Bruxelles, Belgium.
- University of Oxford, UK.
- Mathematical Museum at the KonradZuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), Germany.
- The Geometry Center.
- Texas A and M University, USA.
- University of Delaware, USA.
- PASS maths magazine.
- Earth/Matrix.
- St.-Andrews University, UK.

ÍNDICE

Prólogo.....*1*

Conferencia 1. .....*3*

Introductoria. La arqueomatemática. Origen de los primeros conceptos matemáticos. Problemas filosóficos de la matemática. Principales períodos en la Historia de las matemáticas.

Conferencia 2. .....*12*

Civilizaciones antiguas: Mesopotamia, Egipto, China y la India.

Conferencia 3. .....*31*

La matemática griega. El surgimiento de la matemática griega. Pitágoras. Desarrollo de la Geometría desde Thales hasta Hipócrates de Cios. Los tres problemas clásicos. Tolomeo y la consolidación de la Trigonometría.

Conferencia 4. .....*50*

Los Elementos de Euclides. La Geometría Euclidiana. Arquímedes y Diofanto. Los principios fundamentales de la Estática y el Postulado de Euclides.

Conferencia 5. .....*65*

Las matemáticas en el medioevo. Los árabes. Solución de las ecuaciones de 3er y 4to grado en radicales. Desarrollo de la simbología algebraica. Cálculo literal de Vieta.

Conferencia 6. .....*84*

Galileo, Padre de la Ciencia Moderna.

Conferencia 7. .....*92*

Descartes, Fermat y Pascal. Cavalieri.

Conferencia 8. .....*111*

Newton y Leibniz. L'Hopital.

Conferencia 9. .....*124*

El Siglo de las Luces.

Conferencia 10. .....*141*

Galois y la Teoría de Grupos.

Conferencia 11. .....*157*

Bolzano y Cauchy. Gauss, El Príncipe.

Conferencia 12. .....*179*

Las Geometrías No Euclidianas.

Conferencia 13. .....*202*

El concepto de número en el siglo XIX.

Conferencia 14. .....*218*

Las Paradojas de la Teoría de Conjuntos.

Conferencia 15. .....*235*

Logicismo, Formalismo e Intuicionismo.

Conferencia 16. .....*252*

Las Matemáticas del siglo XX.

Conferencia 17. .....*271*

Cien Años de Teoría Cualitativa.

Conferencia 18. .....*281*

Los Fractales, el Caos y la Teoría de las Catástrofes.

Conferencia 19. .....*297*

Un Bosquejo de la Matemática Actual.

Apéndice. *311*

La Historia de la Matemática como Herramienta Didáctica.

Referencias Adicionales.....*342*