Aventuras, Venturas y Desventuras de la resolución de problemas en la escuela
(II - continuación)

Naturaleza de la resolución de problemas [2].
Veamos un listado de problemas, algunos de los cuales pueden resultarnos familiares, pero de los restantes reconoceremos que pueden ser problemas para otras personas:

- ¿Cómo escribo una gran novela?
- ¿Cómo voy a pagar esa deuda?
- ¿Cómo voy a encontrar aparcamiento?
- ¿Cómo voy a aprobar este examen?
- ¿Cómo se resuelve este problema matemático?
- ¿Cómo resolver el problema del paro?

Todos los problemas anteriores tienen dos cosas en común: 1. en todos se especifica una meta. 2. En todos los casos, se supone que la persona que plantea el problema no puede alcanzar la meta de forma inmediata. Estos hechos pueden usarse como base para una definición de los conceptos de problema y de resolución de un problema: siempre que se tiene una meta cuya consecución está bloqueada, ya sea por falta de recursos, de información, o de lo que sea, se tiene un problema; lo que se hace para alcanzar la meta es solución de problemas. En palabras de Newell y Simon (Newell y Simon, p. 72) una persona se enfrenta a un problema cuando quiere algo y por el momento no sabe qué serie de acciones tiene que realizar para conseguirlo. Un problema no se define por características de la tarea, sino más que nada por la

[2] http://geneura.ugr.es/~jose/RPC/

interacción entre las demandas de la tarea y las habilidades de la persona que los resuelve. Esto es algo que podemos observar en la mayoría de las definiciones explícitas de problema (las que aparecen escritas en los libros o, al menos, se comunican verbalmente). Otra cosa es la definición implícita del problema, que es la que el experimentador usa realmente y que muchas veces puede no coincidir con la definición explícita de lo que es un problema (por estar basada en la tarea mas que en la interacción entre características de la tarea y de la persona). Así, traducir una frase del latín puede ser un problema para un estudiante y algo trivial para un catedrático; la frase en sí no debe considerarse la definición del problema, aunque muchas veces se utiliza así, quizá por convención o comodidad.

Un problema se define como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere (Newell y Simon, 1972), o como una situación en la cual un individuo actúa con el propósito de alcanzar una meta utilizando para ello alguna estrategia en particular (Chi y Glaser, 1983).

Cuando hacemos referencia a "la meta" o a "lograr lo que se quiere", nos estamos refiriendo a lo que se desea alcanzar: la solución. La meta o solución está asociada con un estado inicial y la diferencia que existe entre ambos se denomina "problema". Las actividades llevadas a cabo por los sujetos tienen por objeto operar sobre el estado inicial para transformarlo en meta. De esta manera, se podría decir que los problemas tienen cuatro componentes: 1) las metas, 2) los datos, 3) las restricciones y 4) los métodos (Mayer, 1983).

Las metas constituyen lo que se desea lograr en una situación determinada. En un problema puede haber una o varias metas, las cuales pueden estar bien o mal definidas. Los problemas se diferencian, entre otras cosas, por el grado de definición de los objetivos, y se suele distinguir entre problemas bien definidos y problemas mal definidos.

Problemas bien definidos. Por ejemplo, en el ajedrez la meta es conocida desde el comienzo (dar jaque mate al rey contrario).

Problema mal definidos. En ocasiones, definir los objetivos a conseguir es parte del problema. Componer una pieza musical, ¿Cuándo se ha alcanzado el objetivo?

En general, los problemas de naturaleza matemática son situaciones-problema con metas bien definidas. En el ejemplo: "Alvaro tiene 5 creyones. Javier le dio 8 creyones más. ¿Cuántos creyones tiene Alvaro en total?", la meta está bien definida, consiste en saber cuántos creyones tiene Alvaro en total, después que Javier le dio 8 creyones. Por el contrario, los problemas de la vida real pueden tener metas no tan claramente definidas.

Como veremos más adelante, el grueso de la investigación experimental clásica se ha hecho con problemas bien definidos y resolubles.

Los datos de un problema, consisten en la información numérica o verbal disponible con que cuenta el aprendiz para comenzar a analizar la situación problema. Al igual que las metas, los datos pueden ser pocos o muchos, pueden estar bien o mal definidos o estar explícitos o implícitos en el enunciado del problema. En el ejemplo anterior, los datos están bien definidos y son explícitos: 5 creyones y 8 creyones.

Las restricciones son los factores que limitan la vía para llegar a la solución. De igual manera, pueden estar bien o mal definidos y ser explícitos o implícitos. En el ejemplo anterior, no hay restricciones. Sin embargo, vamos a dar un ejemplo de lo que es una restricción.

Anita tiene una muñeca y quiere vestirla con pantalón y franela. Tiene cuatro pantalones de color rojo, blanco, azul y negro, y tiene tres franelas de color verde, amarillo y rosado. Ella quiere hacer diferentes combinaciones con todos los pantalones y las franelas verde y rosada. ¿Cuántas combinaciones diferentes puede hacer?

En el ejemplo anterior, la restricción consiste en que Anita sólo quiere utilizar dos de las tres franelas, la verde y la rosada, en consecuencia, no todas las franelas van a ser consideradas para las diferentes combinaciones que quiere hacer. Esto es una restricción.

Los métodos u operaciones se refieren a los procedimientos utilizados para resolver el problema. En el caso del ejemplo referido a los creyones, la operación a realizar es una adición, por lo tanto, el resolutor deberá aplicar el algoritmo de la suma.

¿Qué son los problemas matemáticos? Por tanto, un problema es una situación que implica un no saber, o bien, una incompatibilidad entre dos ideas. Desde ya, también debe existir una necesidad por resolverlo, pues si no, no sería un problema, y, por lo tanto, este tiene que tener un carácter de obstáculo para alcanzar una meta, que es su resolución.

En el caso de la escuela, es preciso tener presente que la misma situación puede ser un problema para el docente y otro distinto para el alumno, pudiendo haber una gran distancia entre ambos. Por ello, el docente debe presentar problemas familiares a los alumnos, y arrancar desde allí.

Con relativa frecuencia los docentes esgrimimos los términos ejercicio y problema, a veces tan a la ligera que con ambos identificamos, indistintamente, el mismo concepto. Para evitar confusiones queremos precisar qué entendemos en cada caso; asumiendo las caracterizaciones y clasificaciones más plausibles en el contexto de la didáctica específica de la Matemática.

El trabajo con ejercicios no sólo constituye el medio fundamental para la realización de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, sino también el instrumento adecuado (y quizás el único) para la medición del rendimiento de los estudiantes. H. Müller (1987) ha planteado que el éxito de la enseñanza de la Matemática depende esencialmente de cuáles ejercicios se plantean, en qué sucesión y con qué función didáctica, y cómo el profesor dirige su proceso de resolución. Según varios autores, un ejercicio es una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etc. (Ballester et al, 1992).

De cada acción deben precisarse el objetivo, que nos moverá a transformar una situación inicial (premisa) en otra final (tesis); el contenido, que comprende los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar, etcétera) y por otra parte, el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos), la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y matemáticas, los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas) y los medios heurísticos auxiliares. También es necesario precisar las condiciones para las acciones, es decir, valorar el grado de dificultad que presenta el ejercicio según las exigencias que este plantee al alumno.

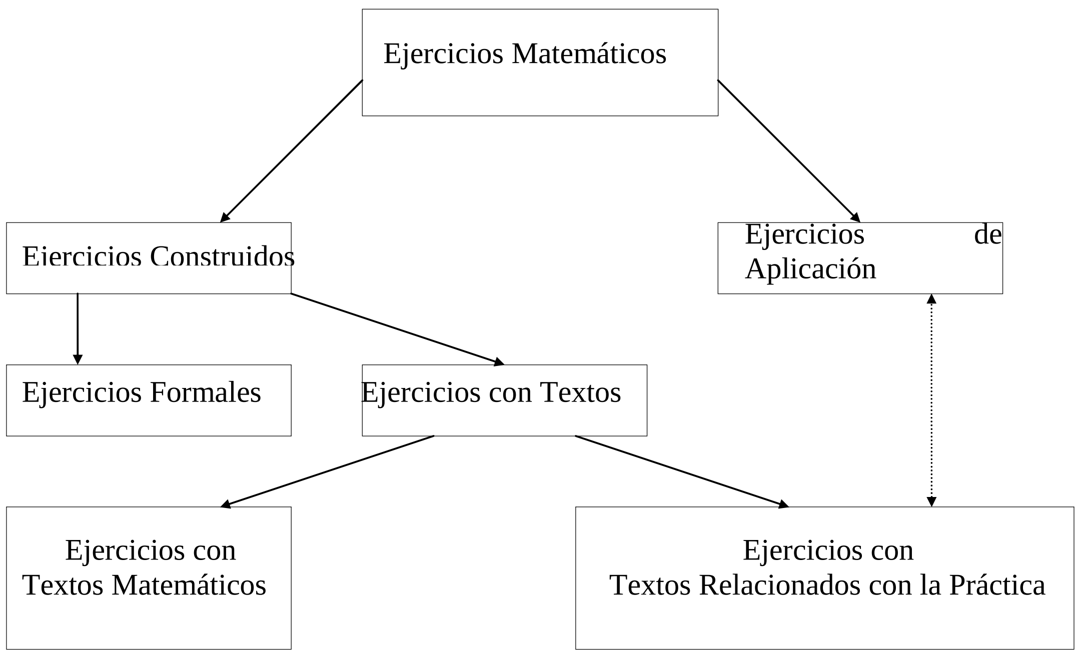
Existen muchas clasificaciones de ejercicios, por ejemplo, L. Blanco establece una comparación entre las dadas por T. Butts (1980), R. Charles y F. Lester (1982), así como la de R. Borasi (1986) (véase Blanco, 1991, pp. 61-66); pero no es objetivo nuestro ensayar una discusión al respecto. Nos limitaremos a examinar la más reciente, pues desde nuestro punto de vista, es la más completa de las tres.

Borasi denomina ejercicios a aquellas tareas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo. Si se trata de un texto formulado con precisión, donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución, entonces la tarea se denomina “Word-Problem”. Cuando el contexto descubre el potencial recreativo de la Matemática, obligando al resolutor a ser flexible y considerar varias perspectivas, la tarea se denomina “Problema Puzzle”. En este último caso la formulación puede resultar engañosa, y la solución no tiene necesariamente que suponer procesos matemáticos. Otra tarea que considera este autor es la “Prueba de Conjeturas” refiriéndose, por ejemplo, a la demostración de un teorema o de cierta propiedad matemática. También habla de “Problemas de la Vida Real” que supone tres procesos básicos: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de técnicas matemáticas al modelo, y la traducción a la situación real para analizar su validez. Borasi también destaca las “Situaciones Problémicas”, en las cuales el sujeto se enfrenta ante un nuevo resultado matemático sin disponer de toda la información necesaria. En las situaciones problémicas la formulación es regularmente vaga, puesto que en este caso se trata de establecer nuevas conjeturas; los métodos de aproximación suelen ser diversos; y la exploración del contexto, así como las sucesivas formulaciones del problema, son fundamentales. Por último Borasi considera aquellas tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte del alumno, se trata de las "Situaciones". Blanco aporta el siguiente ejemplo de situación:

Consideremos algunas triplas pitagóricas: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17);… ¿Cumplen alguna regularidad?
A esta interrogante puede seguir toda una nebulosa de ideas. En efecto, podría conjeturarse que en cualquier trío:
a) existe un múltiplo de 3,
b) existe un múltiplo de 5,
c) un número es par y dos son impares,
d) un número siempre es primo, etcétera.
Está claro que las proposiciones a) y b) son verdaderas. En el caso de c) la conjetura no siempre es cierta, pero subsiste para el caso de triplas primitivas. Si se consideran algunos casos más, pronto d) será descartada, aún para ternas primas entre sí (Sierpinski, 1964).

Como podemos observar, la clasificación aducida por Borasi no solo es interesante, sino que también cubre una amalgama de ejercicios matemáticos. Sin embargo, queremos realizar algunas observaciones. En primer lugar, no queda muy clara la base para la división del concepto, aún cuando sabemos que en estos casos suele ser poco precisa. Así, por ejemplo, podemos encontrar un sinnúmero de "Word-Problems" cuyo propósito fundamental consiste en desarrollar algún tipo de algoritmo, o bien cuya formulación es difícil de interpretar a causa de la complejidad semántica, llegando a ser un "puzzle"; y más aún, ¿acaso un "Word-Problem" no puede ser un problema de la vida real? En segundo lugar, no queda clara la diferencia entre ejercicios y problemas; tal parece que los más abundantes en la enseñanza de la Matemática son los segundos y ciertamente esto no es así. No podemos negar la valía de los ejercicios destinados a estimular la identificación y fijación de los conceptos, ni tampoco los que estimulan el desarrollo de ciertas habilidades.
W. Jungk (1986) elaboró una clasificación de los ejercicios tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones, así como el tipo de reflejo que se realiza. Como superconcepto, este autor eligió el concepto ejercicios matemáticos planteados a los alumnos; a este lo subdivide en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (tienen su origen en la práctica) y ejercicios construidos (aquellos que se conciben con fines didácticos; o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otras). Los ejercicios construidos sufren a su vez otra división. Por una parte aparecen los ejercicios formales, donde los "chunks" de G. A. Miller (1956) aparecen declarados; o sea, al entrar en contacto con ellos, el estudiante identifica inmediatamente el tipo de ejercicio (una ecuación, un sistema, etcétera). Por otra parte aparecen los ejercicios con textos conformados por aquellos cuyo texto es puramente matemático o bien se relaciona con la práctica.
Con relación a su clasificación, el propio Jungk señala que las fronteras existentes entre los distintos grupos son movibles. Por ejemplo, tanto en los ejercicios con textos relacionados con la práctica, como en los de aplicación, el ejercicio matemático no desempeña el papel de primer lugar. Por su parte, los ejercicios con textos matemáticos y los de textos relacionados con la práctica no son conceptos completamente disjuntos, sino que también se solapan ya que los primeros suelen ser "formas preliminares" de los segundos; además, en ambos casos debe analizarse inicialmente el texto para hallar el modelo matemático (cf. Jungk, 1986, pp. 109-

110, y considere las líneas discontinuas en la figura siguiente). En lo adelante asumiremos la clasificación de este autor.
Es notable que algunos autores hayan efectuado interesantes clasificaciones, que nos conducen a diferenciar los ejercicios atendiendo al dominio matemático a que pertenecen. Así, por ejemplo, F. González habla de "ejercicios geométricos" (1997, pág. 20); N. Malara habla de ejercicios aritméticos de argumentación, inclusive los clasifica en ejercicios de razonamiento condicional, de refutación de conjeturas, de análisis crítico de fórmulas que expresan el procedimiento de solución de un problema, ejercicios para el análisis crítico de ecuaciones, y también de situaciones preparatorias para la demostración (1997, pág. 88). A.S. Posamentier y Jay Stepelman, hablan de Problemas Algebraicos (Geométricos) estándar (ver Posamentier and Stepelman, 1996); Hans Humenberger y Hans-Christian Reichel prefieren



hablar de "Problemas en el contexto de Teorías Matemáticas Especiales", en los cuales incluyen Problemas concernientes a números racionales e irracionales, Problemas concernientes a números complejos, etc. (ver Humenberger and Reichel, 1996). Por su parte, L. Campistrous y C. Rizo (1996, pp. 20-28) al tratar los ejercicios para el desarrollo de la habilidad para construir esquemas, tratan cuatro fundamentalmente: las situaciones y problemas sin datos numéricos que requieren de la elaboración de un esquema, los que a determinada formulación se le hacen corresponder varios esquemas, los que exigen de la elaboración de ejercicios a partir de esquemas dados, y los que conducen a transformar esquemas.
Partiendo del concepto de ejercicio, podemos caracterizar los que verdaderamente se consideran problemas. Según A. F. Labarrere (1996) algunos autores conceptualizan el concepto de problema en términos de contradicción que debe ser resuelta, de déficit y búsqueda de información, de transformación de situaciones, etc. Es notable que ya en el siglo XVII el matemático y filósofo francés R. Descartes, en la regla 12 de sus **"Reglas para la dirección del espíritu"**, afirmaba: "*Yo no supongo más que los datos y un problema. Sólo en esto imitamos a los dialécticos: así como para enseñar las formas de los silogismos ellos suponen conocidos sus términos o materia, de la misma manera nosotros exigimos previamente que el problema sea previamente comprendido. Pero no distinguimos, como ellos, dos extremos y un medio, sino que consideramos el problema entero así: 1ro, en todo problema debe haber algo desconocido, pues de lo contrario no habría problema; 2do, ese*

algo debe estar designado de alguna manera, pues de otro modo no habría razón para investigar ese algo y no otra cosa; 3ro, ese algo no puede estar designado sino por algo conocido".

Por nuestra parte, no coincidimos con Jungk (1986, pág. 110), en asumir los ejercicios con textos y los de aplicación como problemas. Dos años más tarde, en 1983, P. A. House et al se expresaban así: *"La definición común de problema matemático es una situación que supone una meta para ser alcanzada, existen obstáculos para alcanzar ese objetivo, requiere deliberación, y se parte del conocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema"* (pág. 10). También Labarrere (1996, pág. 6) ha señalado que *"…un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar"*.

Concretando, para que una situación se denomine **problema** es necesario que:

- exista una persona que desea resolverla (resolutor),
- exista un estado inicial y un estado final (meta a alcanzar), y
- que exista algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro.

Con esta descripción se comprende que lo que resulta un problema para un sujeto puede no serlo para otro. Cada problema constituye un reto, se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que demorará solucionarlo (recuerde la definición de Tarzia (1999)). No obstante, se necesita confiar en que la inteligencia y habilidades que se poseen son adecuadas y suficientes para abordarlo. Es absurdo admitir que se pueda partir de cero. Según Schoenfeld (1992) el resolutor cuenta con recursos cognoscitivos que irá mostrando al trabajar con el problema como la intuición (conocimiento informal relacionado con el dominio), los hechos, los procedimientos algorítmicos y no algorítmicos así como las comprensiones (conocimiento proposicional) acerca de las reglas admitidas en el dominio.

La Resolución de Problemas. Ahora bien, un problema no puede ser resuelto sin primero entender clara y minuciosamente en qué consiste. El enunciado de un problema muchas veces incluye descripciones de eventos o situaciones que, en forma verbal, son muy difíciles de relacionar entre sí. En estos casos es importante aprender a visualizar la descripción verbal y representar la situación o el evento subyacente. Muchas veces estos es todo lo que se necesita para resolver el problema, puesto que la solución puede ser leída directamente en la representación (ver Megía (1992)).

Resolver un problema consiste en el proceso de ataque, en el abordaje del mismo por parte del sujeto. Nosotros, aún cuando el resolutor no disponga de la idea de solución entendemos, que si se encuentra enfrascado en hallar la respuesta, se encuentra resolviendo el problema. Así parafrasean V. Brenes y M. Murillo: *"Se entenderá que resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe que hacer, pues si se sabe lo que hay que hacer, ya no hay problema"* (1994, pág. 377).

Polya, por su parte, aseveraba que *"…resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"* (1980, pág. 1). Resolver problemas es una actividad humana fundamental. De hecho, el pensamiento humano trabaja la mayor parte del tiempo sobre problemas. *"Cuando no dejamos la mente a su libre albedrío, cuando no la dejamos soñar, nuestro pensamiento tiende hacia un fin; buscamos medios, buscamos resolver un problema"* (1965, pág. 187).

En esta última obra, Polya señala que un problema puede resolverse correctamente si se siguen los siguientes pasos:

- Comprender el problema.
- Concebir un plan para llegar a la solución.
- Ejecutar el plan.
- Verificar el procedimiento.
- Comprobar los resultados.

Aunque la resolución de problemas -así como el pensamiento reflexivo en general- no se ajustan a un modelo estereotipado y uniforme, también podemos ordenar las fases que llevan a su resolución, siguiendo a Dewey, en cinco etapas:

1) Reconocer el problema: El sujeto se da cuenta que hay un problema.

2) Aclarar el problema: Una vez percibido en términos generales, se busca precisar qué resultado debe alcanzarse, qué se sabe o qué recursos hay para resolverlo.

3) Proponer una hipótesis para resolver el problema: Establecer un curso de acción para resolverlo.

4) Inferencia de la hipótesis: Uniendo la hipótesis y los hechos relevantes que le son conocidos, el sujeto infiere lo que se desprende de la hipótesis que él considera.

5) Verificación de la hipótesis: las conclusiones de la hipótesis se verifican con hechos conocidos o con otros producidos por experimentación, para ver si se confirma o no la hipótesis.

Estos pasos constituyen en rigor un modelo idealizado, y no los cumple el sujeto real que resuelve problemas, cuya conducta es a menudo confusa, ilógica y desordenada.

Qué es una hipótesis?- Es una respuesta sugerida, una suposición elaborada sobre la base de hechos presentes en la situación original donde el problema surgió. Puede haber varias hipótesis para resolver un mismo problema, y la primera suele aparecer en forma espontánea en la mente, siguiendo luego otras.

De dónde provienen la hipótesis?- Probablemente debamos reconocer tres fuentes:

a) Experiencias pasadas individuales específicas.- Esto es cierto tanto en sentido negativo (quien no aprendió a dividir, difícilmente podrá resolver un problema práctico matemático), como en su sentido positivo (cuanto más experiencia y conocimientos tiene alguien sobre un área determinada, más se puede esperar de él fluidez y eficiencia para resolver problemas en dicha área). Según Thorndicke, en primer lugar hay que tener presente que no siempre tener conocimientos implica saber usarlos, o sea, habilidad para saber seleccionar, relacionar y organizar el saber en función de la resolución de un problema. En tal sentido debe distinguirse el aprendizaje significativo del aprendizaje repetitivo (entre otras cosas, el primero permite la posibilidad de transferir lo aprendido a nuevas situaciones). Además, en segundo lugar, la forma en que se adquirió el conocimiento influye sobre la aptitud para aplicarlos en la resolución de problemas.

b) Maduración individual y habilidad intelectual.- Madurez intelectual y riqueza de información corren paralelas, pero además de la experiencia se requiere una facilidad para aprehender relaciones entre objetos o conceptos. Según Torrence, todos tenemos en grado variable un poco de pensamiento divergente y de pensamiento convergente. El primero es la capacidad de percibir lagunas, usar caminos diferentes para resolver un problema apelando a recursos propios. El segundo implica resolver problemas usando recetas que se le han enseñado o que obedecen a la tradición. El pensamiento divergente es una capacidad innata, cuyo desarrollo es inhibido por la educación sistematizada.

c) Factores que la misma dinámica de la situación problemática engloban.-

Según Dijkstra (1991), la resolución de problemas es un proceso cognoscitivo complejo que involucra conocimiento almacenado en la memoria a corto y a largo plazo.

La resolución de problemas consiste en un conjunto de actividades mentales y conductuales, a la vez que implica también factores de naturaleza cognoscitiva, afectiva y motivacional. Por ejemplo, si en un problema dado debemos transformar mentalmente metros en centímetros, esta actividad sería de tipo cognoscitiva. Si se nos pregunta cuán seguros estamos de que nuestra solución al problema sea correcta, tal actividad sería de tipo afectiva, mientras que resolver el problema, con papel y lápiz, siguiendo un algoritmo hasta alcanzar su solución, podría servir para ilustrar una actividad de tipo conductual. A pesar de que estos tres tipos de factores están involucrados en la actividad de resolución de problemas, la investigación realizada en el área ha centrado su atención, básicamente, en los factores cognoscitivos involucrados en la resolución.

Pro otra parte, según Andre (1986), el proceso de resolución de problemas puede describirse a partir de los elementos considerados a continuación:

1. Una situación en la cual se quiere hacer algo, pero se desconocen los pasos precisos para alcanzar lo que se desea.
2. Un conjunto de elementos que representan el conocimiento relacionado con el problema.
3. El resolutor de problemas o sujeto que analiza el problema, sus metas y datos y se forma una representación del problema en su sistema de memoria.
4. El resolutor de problemas que opera sobre la representación para reducir la discrepancia entre los datos y las metas. La solución de un problema está constituida por la secuencia de operaciones que pueden transformar los datos en metas.
5. Al operar sobre los datos y las metas, el resolutor de problemas utiliza o puede utilizar los siguientes tipos de información:
    - Información almacenada en su memoria de largo plazo en forma de esquemas o producciones.
    - Procedimientos heurísticos.
    - Algoritmos.
    - Relaciones con otras representaciones.
6. El proceso de operar sobre una representación inicial con el fin de encontrar una solución al problema, se denomina búsqueda. Como parte del proceso de búsqueda de la solución, la representación puede transformarse en otras representaciones.
7. La búsqueda continúa hasta que se encuentra una solución o el resolutor de problemas se da por vencido.

Varios investigadores han analizado la actividad de resolución de problemas y señalan que tal actividad, como ya hemos dicho, es un proceso que involucra una serie de etapas. Desde principios de siglo se viene investigando sobre las fases en la resolución de problemas. Es así como Wallas (1926) señala que éstas incluyen las siguientes:

1. La preparación, es la fase en la cual el resolutor analiza el problema, intenta definirlo en forma clara y recoge hechos e información relevante al problema.
2. La incubación, es la fase en la cual el resolutor analiza el problema de manera inconsciente.
3. La inspiración, es la fase en la cual la solución al problema surge de manera inesperada.
4. La verificación, es la fase que involucra la revisión de la solución.

Otros autores (Andre, 1986; Hayes, 1981) señalan que las etapas en la resolución de problemas sirven para enfatizar el pensamiento consciente y para aproximarse analíticamente a la solución, así como también para ofrecer una descripción de las actividades mentales de la persona que resuelve el problema. En tal sentido, Andre (1986) propone que las etapas en la resolución de problemas son las especificadas en el siguiente cuadro:

Cuadro 1
Etapas en la resolución de problemas

1. Darse cuenta del problema, de que existe una discrepancia entre lo que se desea y lo que se tiene. 2. Especificación del problema, se trabaja una descripción más precisa del problema. 3. Análisis del problema, se analizan las partes del problema y se aisla la información relevante. 4. Generación de la solución, se consideran varias alternativas posibles. 5. Revisión de la solución, se evalúan las posibles soluciones. 6. Selección de la solución, se escoge aquélla que tenga mayor probabilidad de éxito. 7. Instrumentación de la solución, se implementa la solución. 8. Nueva revisión de la solución, de ser necesario.

Es de hacer notar que las etapas se aplican usualmente a problemas aritméticos y algebraicos, pero también pueden aplicarse a muchos otros tipos de problemas no necesariamente relacionados con disciplinas académicas.
Schoenfeld (1985), a partir de los planteamientos de Polya (1965), se ha dedicado a proponer actividades de resolución de problemas que se pueden llevar a cabo en el aula, con el fin de propiciar situaciones semejantes a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de resolución de problemas. Su modelo de resolución abarca los siguientes pasos: Análisis, Exploración y Comprobación de la solución y puede aplicarse a problemas matemáticos y algebraicos. Aunque estos pasos no necesariamente tienen que ser aplicados en su totalidad, en el Anexo 2 se incluye un ejemplo de resolución de un problema matemático siguiendo este modelo.

Análisis

1. Trazar un diagrama, si es posible.
2. Examinar casos particulares
3. Probar a simplificar el problema

Exploración

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes: sustituir las condiciones por otras equivalentes, recombinar los elementos del problema de modo diferente, replantear el problema.
2. Examinar problemas ligeramente modificados: establecer submetas, descomponer el problema en casos y analizar caso por caso.
3. Examinar problemas ampliamente modificados: construir problemas análogos con menos variables, mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efectos tiene esa variable, tratar de sacar partido de problemas afines que tengan parecido en su forma, en sus datos o en sus conclusiones.

Comprobación de la solución obtenida

1. Verificar la solución obtenida siguiendo criterios específicos: utilización de todos los datos pertinentes, uso de estimaciones o predicciones.
2. Verificar la solución obtenida siguiendo criterios generales: examinar la posibilidad de obtener la solución por otro método, reducir la solución a resultados conocidos.

En síntesis, como puede observarse, desde principios de este siglo, diferentes autores han propuesto pasos, fases o etapas a cumplir para poder resolver problemas con éxito. Este aspecto es importante ya que permite, de antemano, planificar los pasos a seguir en la resolución de un problema, ejecutar esos pasos y, posteriormente, supervisar el proceso de resolución y comprobar la solución o resultado.

Un aspecto importante a considerar en el proceso de resolución de problemas es la representación. Esta consiste en la transformación de la información presentada a una forma más fácil de almacenar en el sistema de la memoria, e incluye la identificación de las metas y los datos. La representación también ha sido denominada espacio del problema para referirse a las representaciones mentales de los individuos acerca de su estructura y de los hechos, conceptos y relaciones del mismo.
A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar cómo se puede representar un problema en la memoria[3]:

> Un autobús parte de la parada en la mañana. Se detiene en la primera parada y recoge 5 personas. Sigue hasta la próxima parada y allí suben 6 personas. Continúa hasta la siguiente parada y suben 4 personas. En la próxima parada, suben 5 personas y se bajan 3. En la siguiente parada, suben 5 personas y se bajan 4. En la parada siguiente, suben 6 personas y se baja 1. La próxima vez, suben 3 personas y se bajan 2. La vez siguiente, se bajan 2 personas y no sube nadie. En la siguiente parada nadie espera por el autobús, de manera tal que este no se detiene. En la próxima parada, suben 10 personas y se bajan 3. En la siguiente, suben 3 personas y se bajan 6.
> Finalmente, el autobús llega al terminal.
> ¿Cuántas paradas hay en la ruta del autobús?

La tendencia más común es que la mayoría de los estudiantes puedan decir cuántas personas llegan a la parada final, cuántas subieron o cuántas bajaron, pero muy pocos están en capacidad de indicar cuántas paradas hay en la ruta del autobús debido a que seleccionaron la información numérica como datos importantes y la representaron internamente en la forma de operaciones aritméticas.
En términos de los procesos involucrados en la resolución de problemas, esto sucede porque la meta del problema no estaba bien definida a pesar de que había datos numéricos explícitos precisos. El énfasis sobre el número de personas que suben y bajan del autobús hace posible que los estudiantes piensen que tienen que hacer algo con esos datos y, en tal sentido, construyen una meta la cual se representa como el logro de una cantidad total. Esta decisión conduce a los estudiantes a seleccionar cierta información como relevante (número de personas que suben y bajan del autobús) e ignorar otra (número de paradas del autobús).
Kintsch y Greeno (1985) señalan que una estrategia adecuada para resolver problemas consiste en traducir cada oración del enunciado del problema a una representación mental interna y, luego, organizar la información relevante en una representación mental coherente de la situación descrita en dicho enunciado. En este sentido, se puede señalar que las representaciones mentales, adecuadas o inadecuadas, utilizadas por los individuos para resolver problemas, pueden facilitar o inhibir la solución.
En la literatura sobre la resolución de problemas se pueden distinguir dos tendencias: una que enfatiza el proceso de resolución y otra que resalta el conocimiento base del individuo que resuelve el problema, particularmente la organización de ese conocimiento. En este sentido, podría señalarse que ha habido un cambio en el foco de interés en esta área, el cual ha pasado del análisis de las estrategias generales más o menos independientes de un dominio del conocimiento —como es el caso de los pasos sugeridos por Polya (1965)— al conocimiento base referido al área en la cual el individuo resuelve el problema, como por ejemplo, el

[3] Tomado de Andre, 1986, p. 177.

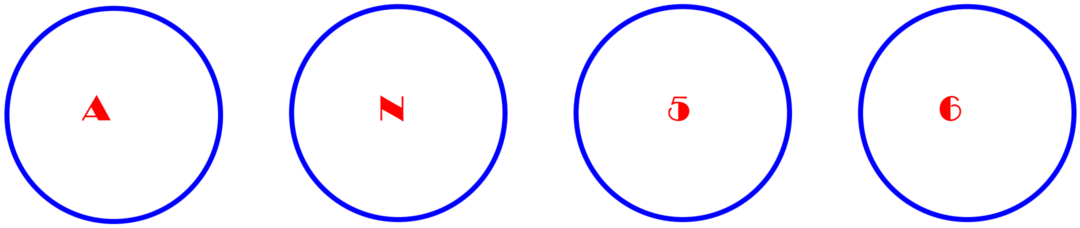
conocimiento de la Matemática, de la Física o de la Química, necesario para resolver problemas en estas disciplinas.
Resolver problemas en áreas o dominios específicos requiere, por lo tanto, del conocimiento de la disciplina involucrada. Sin embargo, se ha puesto en evidencia que la sola presencia del conocimiento almacenado en el sistema de memoria, no implica necesariamente que éste va a estar disponible en el momento de resolver el problema.
En años recientes, los investigadores en el área de la resolución de problemas han examinado la ejecución de individuos en tareas que requieren muchas horas de aprendizaje y de experiencia. Los estudios sobre la experticia han focalizado su interés en el examen de las diferencias experto/novato en diferentes áreas del conocimiento.
Desde los inicios de la década de los ochenta, Chi, Feltovich y Glaser (1981) y Chi, Glaser y Rees (1982), realizaron algunos estudios con el fin de examinar el comportamiento de los individuos expertos y novatos cuando resuelven problemas de física. Al resumir los diversos experimentos de sus estudios, estos autores concluyen que las diferencias que caracterizan a los expertos y los novatos cuando resuelven problemas de física son las siguientes:

1. Las estructuras cognoscitivas (esquemas) de los expertos se basan en principios físicos (por ejemplo, el principio de la conservación de la energía y la segunda Ley de Newton), mientras que las de los novatos se basan en objetos (por ejemplo, planos inclinados) y en constructos (por ejemplo, fricción, gravedad).
2. Los contenidos de los esquemas de los expertos y los novatos no difieren significativamente en información, sin embargo, las estructuras de los novatos carecen de relaciones importantes que constituyen la base de las soluciones. En los expertos existen vínculos entre la representación del problema y los principios físicos que constituyen la base para resolverlo, mientras que en los novatos estos vínculos no existen.
3. Las estructuras cognoscitivas de los expertos están ordenadas jerárquicamente, de arriba hacia abajo, con los conceptos más generales e inclusores en la parte superior del nivel de abstracción, mientras que en los novatos, los diferentes niveles del conocimiento no están bien integrados y no hay acceso fácil de un nivel a otro.

Los resultados de los estudios realizados conducen a pensar que existen altos niveles de competencia en términos de la interacción entre la estructura de conocimiento del sujeto y sus habilidades de procesamiento, y señalan que las relaciones entre la estructura del conocimiento base y los procesos en la resolución de problemas están mediadas por la calidad de su representación (Gagné y Glaser, 1987).

La clasificación de los problemas. Una primera clasificación general de los problemas, puede englobarlos en prácticos e intelectuales. Los problemas 'prácticos' están motivados por una necesidad de actuar, resolver una situación concreta, mientras que los problemas 'intelectuales' están motivados por una necesidad de comprender, de saber, de conocer (recordemos el listado de problemas de la sección anterior).
Según L. Bertoglia (1990, pp. 111-113), actualmente está en boga considerar, básicamente, dos tipos de problemas: los problemas cerrados y los problemas abiertos. En los primeros la solución se deduce en forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, sólo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse “problemas de inferencia lógica”. Posamentier and Stepelman (pág. 126) proponen el siguiente problema en el que, para optimizar su solución, conviene utilizar tanto la implicación aducida, como su contrarecíproco.

Un trabajador de control de calidad afirma estar muy seguro, de que todos los platos de metal manufacturados tienen una vocal impresa sobre una cara, poseen un número par sobre la otra.



¿Cuáles de los siguientes platos deben ser volteados, para estar seguros de que la regla ha sido seguida?

Este tipo de problemas, ellos lo denominan "no rutinario".
Por su parte en los problemas abiertos el resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera distinta y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del ejercicio. Ahora los recursos lógicos resultan insuficientes y se precisa de creatividad. Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real; hay que hacer consideraciones para la respuesta, pues no se da toda la información necesaria. Por este motivo, suelen denominarse "problemas sin los datos necesarios" (Campistrous y Rizo, 1996, pág. 92). Un ejemplo es el caso de una persona que debe descubrir un procedimiento, que le permita distribuir entre tres personas, en forma equitativa, las dos casas que han recibido como herencia. Es justo, desde luego, que nos preguntemos: ¿Existen problemas abiertos en Matemática? Los profesores Campistrous y Rizo, aportan un ejemplo muy sencillo.

Se quiere construir un tanque de agua con una capacidad de 8000L. ¿Qué dimensiones debe tener?
Evidentemente existen condiciones que no están dadas, por ejemplo:

1. La forma del tanque, que puede ser ortoédrica, cilíndrica, cónica, etcétera; y en cada caso las dimensiones están entre sí, en una proporción diferente.
2. La cantidad de material disponible, ya que se gasta más o menos, en dependencia de la forma y dimensiones escogidas (1996, pp. 92-93).

La clasificación de problemas en abiertos y cerrados, no es la única ni mucho menos. Por ejemplo, Polya (1965) trata con regular insistencia dos tipos: los "problemas por resolver" y los "problemas por demostrar". El paralelo establecido ilustra como el propósito de los primeros es descubrir cierta incógnita. Los problemas por resolver pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, serios o simples acertijos; y sus elementos principales son la incógnita, los datos y la condición; el propósito de éstos es descubrir cierto objeto que resulta ser la incógnita del problema.
Desde un punto de vista metodológico, es útil la siguiente clasificación.
Supongamos que el objetivo consiste en resolver el problema p_1, y que el problema p_2 ya ha sido resuelto.
Varios autores establecen la siguiente taxonomía para relacionar entre sí dos problemas:
A. El problema p_1 no está relacionado con el p_2, o bien p_1 y p_2 no tienen elementos en común. La estrategia de resolución de p_2 no nos servirá.
B. El problema p_1 es equivalente al p_2, entonces p_1 y p_2 son isomorfos y la manera en que resolvimos p_2 nos servirá para resolver p_1.

C. El problema p_1 es similar al p_2, entonces p_1 tiene elementos en común con p_2, por lo tanto son análogos. En este caso puede darse que:

1. p_1 y p_2 tengan la misma dificultad.
2. p_1 sea más simple que p_2.
3. p_1 sea más complejo que p_2.

La estrategia de resolución para p_2 podrá orientarnos en mayor o menor medida, según se dé el caso 1), 2) o 3).

D. El p_1 es un caso especial del p_2, entonces decimos que p_1 está incluido en p_2. El p_1 constituye un caso particular del p_2 y, por ende, ya está resuelto.

E. El p_1 es una generalización del p_2, entonces decimos que p_1 incluye al p_2. El p_1 podrá, posiblemente, ser resuelto usando el p_2 como parte del conjunto de estrategias a utilizar.

Para encontrar la solución a estos problemas hay que conocer, de modo preciso, sus elementos principales. A continuación se detallan preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos que, para la mayoría de los problemas, resultan ser de gran utilidad:

- ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?
- Distinga las diversas partes de la condición.
- Encuentre la relación entre los datos y la incógnita.
- Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
- No conserve más que una parte de la condición, descarte la otra. ¿En qué medida la incógnita queda entonces determinada?, ¿Cómo puede variar?, ¿Puede deducir de los datos algún elemento útil?
- ¿Podría pensar en otros datos que le permitieses determinar la incógnita?, ¿Podría cambiar la incógnita, o los datos, o los dos si es necesario, de tal manera que la nueva incógnita y los nuevos datos estuviesen más relacionados entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha utilizado la condición por completo?

La finalidad de los problemas por demostrar consiste en probar, de manera concluyente, la exactitud o falsedad de una afirmación; sus elementos principales son la hipótesis y la conclusión. Para resolverlos deben conocerse exactamente sus partes principales (hipótesis y conclusión). Algunas sugerencias y preguntas que pueden ser de utilidad, son las siguientes:

- ¿Cuál es la hipótesis?, ¿Cuál es la conclusión?
- Distinga las diversas partes de la hipótesis.
- Encuentre la relación entre la hipótesis y la conclusión.
- Trate de pensar en algún teorema que le sea familiar y que tenga la misma conclusión o similar.
- No conserve más que una parte de la hipótesis, descarte la otra. ¿Sigue siendo válida la conclusión?
- ¿Podría deducir de la hipótesis algún elemento útil?, ¿Podría pensar en otra hipótesis de la cual se pudiera deducir fácilmente la conclusión?, ¿Podría cambiar la hipótesis o la conclusión o las dos si es necesario, de modo que la nueva hipótesis y la nueva conclusión estuviesen más relacionadas entre sí?
- ¿Ha empleado la hipótesis completa?

Nosotros consideramos la “clasificación” aducida por Polya, como una especificación de la habilidad que principalmente se quiere medir; sin embargo, es justo señalar que no debe descuidarse el desarrollo de otras habilidades.

En la resolución de problemas, es muy útil un tipo especial de razonamiento, el razonamiento heurístico, que aunque no se considera definitivo y riguroso, sino provisional y plausible, nos permite en muchas ocasiones descubrir la solución del problema propuesto. Este razonamiento es de empleo frecuente, aunque nunca debe asociarse a una demostración rigurosa, sino más bien, a los pasos (o posibles pasos) que nos pueden conducir a obtener una verdadera respuesta.
De acuerdo a la experiencia acumulada, es común distinguir cuatro fases en la resolución de problemas:

1. Saturación: trabaje sobre su problema hasta que haya realizado todo lo que podía hacer. Pruebe con todos los métodos e ideas que se le presenten en su mente.
2. Incubación: ponga el problema fuera de su mente consciente y deje que su inconsciente lo tome y trabaje.
3. Inspiración: la respuesta le llega en un momento dado (muchas veces llamada la intuición) y a veces en los momentos menos propicios, por lo que debe tomar algunas precauciones pues puede olvidarla.
4. Verificación: compruebe la solución para estar seguro de la respuesta.

Una metodología muy usada en este caso, es la brindada por Polya (a la que volveremos más adelante), en la que señala los siguientes pasos:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Aquellos ejercicios que no sean problemas los denominaremos, siguiendo a Polya, como "rutinarios". Así, por ejemplo, podemos hablar de ejercicios rutinarios con textos o de problemas con textos; además, al demostrar una equivalencia, tal vez nos enfrentemos a un problema formal en un sentido y a un ejercicio rutinario formal en el otro.
Después de haber dado respuesta a las interrogantes: ¿es toda tarea un problema?, ¿en qué consiste resolver un problema?, añadamos una tercera: ¿todo problema tiene solución? Este es, a nuestro juicio, un tema bastante complicado. El destacado matemático alemán D. Hilbert en el II Congreso Internacional de Matemática de París afirmaba en su discurso el 8 de agosto de 1990: *"Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el ignorabimus"*. Así pensaba el máximo exponente del formalismo en Matemática; pensamiento que se reflejó siempre en toda su obra, y aún en el Congreso Internacional de Bolonia, el 3 de septiembre de 1928, todavía señalaba: *"La teoría de la demostración (…) nos proporciona el sentido profundo de la convicción de que a la inteligencia matemática no se le ponen fronteras y de que es capaz de escudriñar hasta las leyes del propio pensar. Cantor ha dicho: la esencia de la Matemática consiste en su libertad, y yo añado gustoso para los buscadores de dudas y los espíritus mezquinos: en la Matemática no existe el ignorabimus…"*.

En Junio de 1696, en la revista matemática "Acta Eruditorum", fundada por G. W. Leibniz, aparecía el siguiente problema compuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli:
"Se invita a los matemáticos a resolver UN NUEVO PROBLEMA: Dados dos puntos A y B en el plano vertical y no colocados en la misma recta vertical, asignar a una partícula móvil M

el sendero AMB a lo largo de la cual, descendiendo por su propio peso, pasa del punto A al punto B en el tiempo más breve posible.

Para estimular a los amantes de tales tareas el deseo de realizar la solución de este problema, puede señalarse que la cuestión propuesta no consiste, como pudiera parecer, en una mera especulación sin entidad alguna. Contra lo que uno pensaría a primera vista, tiene gran utilidad en otras ramas de esta ciencia, tales como la Mecánica. Mientras tanto, para prevenir, cualquier juicio prematuro, se puede hacer notar que aunque la línea AB es ciertamente la más corta entre los puntos A y B, no es, con todo, el sendero atravesado en tiempo mínimo. Sin embargo, la curva AMB, cuyo nombre yo daré, si nadie lo ha descubierto antes del final de este año, es una curva bien conocida de los geómetras"[4].

Beato (1996) ha enfatizado que merece especial atención la forma de plantear este problema. Bernoulli comienza invitando a los matemáticos, continua afirmando que se trata de un nuevo problema, y finaliza señalando que el problema no es un simple divertimento pues tiene aplicación en otras ciencias. Se han puesto de manifiesto, en el planteamiento del problema, tres aspectos a los que debemos prestar mucha atención a la hora de proponer un problema a nuestros alumnos:

- Propiciar la participación activa de los estudiantes, conscientes de que "aprender Matemática es hacer Matemática" (invitar, no obligar).
- Innovar continuamente tanto en los temas como en su tratamiento.
- Proponer cuestiones justificadas por su aplicación tanto matemática como extramatemática (1996, pág. 408).

En el planteo han de transparentarse las cuatro funciones esenciales de los problemas: la función instructiva, que comprende el sistema de conocimientos acordes con el nivel de aprendizaje; la función desarrolladora, que abarca el sistema de habilidades intelectuales a lograr; la función educativa, que involucra la formación de actitudes; y la función de control, pues se concibe al problema como el medio más eficaz para medir el vencimiento de los objetivos (Ballester et al, 1992). El proceso de formulación de problemas se regula, según Bertoglia (1990, pp. 114-117), atendiendo a cinco principios especiales. Ellos deben:

- ajustarse a los objetivos del aprendizaje;
- reservarse para el momento oportuno;
- tener un nivel de complejidad adecuado;
- favorecer el trabajo reflexivo;
- presentar la información en términos positivos y familiares.

En efecto, los problemas deben ajustarse a los objetivos del aprendizaje; su elaboración debe ser hecha de tal modo que, el encontrar la solución signifique la adquisición del aprendizaje o bien el logro de un conocimiento relevante. De este principio se desprende la necesidad de conducir la actividad de tal modo que, en términos ideales, todos los alumnos puedan encontrar la solución del problema. El segundo principio revela que los problemas deben ser propuestos cuando estén aseguradas las condiciones previas; de esta manera los estudiantes tendrán la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos, en un final lo que se pretende es que él llegue a la solución. En cuanto al nivel de complejidad, debemos tener cuidado de no plantear situaciones tan difíciles que excedan la posibilidad de respuesta de los alumnos, pues esto *"…en lugar de favorecer la adquisición del aprendizaje, lo perturba, ya que crea en los alumnos un sentimiento de frustración, al sentirse incapaces de resolver los problemas que se*

[4]Por supuesto que se trata del problema de la braquistócrona, y la curva en cuestión es la cicloide.

les plantea. En síntesis, se trata de adecuar el nivel de complejidad del problema a las características de los alumnos; sin embargo, esto plantea una dificultad debido a las diferencias individuales que se dan entre los estudiantes, ya que lo que resulta complejo para un alumno, puede no serlo para otro" (Bertoglia, 1990, pp. 114-115). Sin estar en contra de la ejercitación o práctica de lo aprendido, el cuarto principio nos revela la principal diferencia entre un problema y un ejercicio: en la resolución de un problema el discente tiene la oportunidad real de trabajar reflexivamente. Por último, el quinto principio, nos recuerda que al plantear un problema en forma de negación, se incrementa la probabilidad de que se cometan errores en la interpretación de la información, específicamente del tipo estructural.

En nuestra opinión, el planteo ha de ser preferiblemente lacónico; no contendrá elementos superfluos ni contradictorios, ni debe necesitar información adicional, no se referirá a situaciones prácticas o a conceptos matemáticos desconocidos por el escolar a menos que se definan en el propio ejercicio; estarán matizados con valores estéticos y originalidad.

En aras de lograr formulaciones que obliguen a los escolares a la reflexión, se puede incurrir en lo que denominamos "problemas mal planteados". Queremos ilustrar esta clasificación con tres ejemplos:

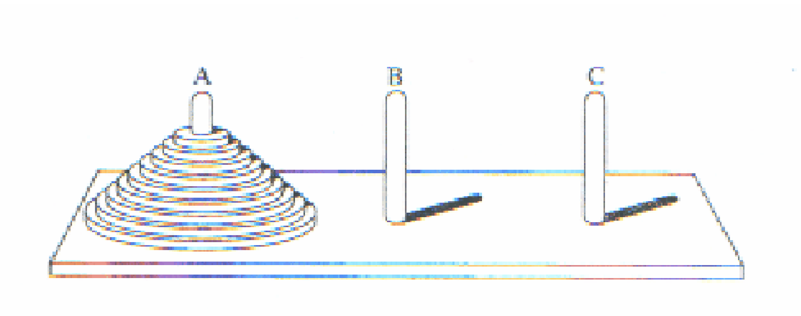


Figura 1. El problema de la Torre de Hanoi.

<u>Problema con datos superfluos.</u> El año en que nació Lope de Vega, está representado por un número **que tiene más de tres cifras, pero menos de cinco**; en fin, por un número de cuatro cifras. Se conoce que la suma de sus dígitos, **no de su producto**, es 14; y la cifra de las decenas es igual al triple de las unidades. ¿En qué año nació Lope de Vega? Está claro que si podamos el texto de la información que aparece en negrita, lograremos hacerlo más inteligible (cf. con el ejercicio 28 en Cuadrado et al, 1991, pág. 40).

<u>Problema con datos contradictorios.</u> Compré 80 artículos entre gomas y lápices por $5.00, 50 lápices a 5¢ y las gomas a 10¢. ¿Cuántas gomas compré? Evidentemente los datos proporcionados resultan contradictorios. Por una parte, si de los 80 artículos 50 son lápices, entonces 30 son gomas. Por otra parte, de los $5.00, $2.50 representan el precio total de lápices; luego, los otros $2.50 debieron invertirse en la compra de 25 gomas (Campistrous y Rizo, 1996, pág. 93).

<u>Problema con déficit de datos.</u> Un barco lleva 23 ovejas, 13 hembras y 10 machos. ¿Cuál es la edad del capitán? A pesar de ser extremadamente forzado, este problema ilustra perfectamente nuestra intención y es utilizado en ocasiones, para medir el grado de "madurez" de los estudiantes.

Una gran parte de la investigación clásica se ha realizado sobre el paradigma experimental de la Torre de Hanoi y sus derivados (Newell y Simon (1972)). Lo utilizaron por primera vez Ewert y Lambert (en 1932). Era y es un problema simple (es resuelto por una mayoría) y nuevo para los sujetos (recomendamos Mayer (1992)). El problema consiste en un número variable (3 a 7) de discos de tamaño decreciente (ver Figura 1) que están amontonados en una posición A de una mesa con tres postes posibles A, B y C. El objetivo de la tarea es desplazar todos los discos de la posición A a la C de manera que formen de nuevo una pirámide y sin

que en ninguna de las posiciones intermedias un disco grande descanse sobre uno mas pequeño.
Es frecuente utilizar, como descripción del problema, la representación del espacio de estados, concepto propuesto por Nilsson (1971)), es un conjunto de configuraciones o situaciones distinguibles de un problema, junto con el conjunto de movimiento permisibles para pasar de una situación a otra. Ello significa que la representación del espacio de estados consiste en el estado inicial junto con los otros estados que podrían alcanzarse desde el inicial mediante la aplicación de sucesivos movimientos legales. Uno o mas estados pueden ser el estado de meta.

- Cada cuadrado representa uno de los estados que pueden alcanzarse realizando movimientos legales; hay 243 estados.
- Cada dos estados consecutivos están unidos por un operador legal (el paso de un disco de un espacio a otro). La Figura 3 es una ampliación de la Figura 2 donde se pueden ver los primeros estados posibles.
- En la arista derecha están representados los pasos mínimos que hay que dar para pasar del estado inicial a la meta.
- El número mínimo de pasos para alcanzar la solución es igual a 2^n-1, donde n es el número de discos. Para 5 discos son 31 pasos.
- A partir de cada estado el sujeto siempre puede elegir entre tres movimientos: el disco 1 (el mas pequeño) puede transferirse a cualquiera de los dos espacios en que no está y el disco menor de los que están en un espacio distinto al ocupado por el 1 también puede cambiarse al otro poste.
- La única excepción a esta regla son los estados en los que todos los discos están apilados en un mismo espacio; en este caso hay solo dos movimientos posibles, y los dos consisten en transferir el disco menor que es el que está en la parte superior del montón (esta situación se corresponde con los estados que ocupan los vértices de la gráfica).
- La simple observación de la representación del espacio de estados del problema hace ver que si el sujeto se enfrenta a la tarea sin ningún plan o estrategia, puede estar vagando por el espacio de forma indefinida, introduciéndose en bucles que le impedirían alcanzar el estado de meta.

Se han desarrollado varias tareas con esta misma estructura (tareas isomorfas como por ejemplo la `ceremonia del Té' y `El problema de los monstruos extraterrestres'). Otras tareas comparten la misma idea subyacente (un sólo estado de meta y un espacio de estados reducido), aunque tienen espacios de estados diferentes a al Torre de Hanoi, como por ejemplo Misioneros y caníbales). Nosotros llamaremos a todas estas tareas durante el trabajo tareas clásicas o tareas Tipo torre de Hanoi.
Como hemos dicho antes, la Torre de Hanoi es un problema simple (lo pueden resolver una gran mayoría de lectores) y nuevo para los sujetos; la lógica de usar tareas simples y novedosas es clara:

- Se controlan los efectos de experiencia previa, puesto que los sujetos no conocen el problema antes de entrar al laboratorio.
- Tienen soluciones óptimas claramente definidas.
- Son resolubles en una cantidad de tiempo relativamente corta.
- Los pasos que dan los sujetos pueden ser trazados fácilmente.

La suposición subyacente es que, claro está, estas tareas simples del estilo de la torre de Hanoi capturan las principales propiedades de los problemas reales, y los procesos cognitivos que los sujetos usan intentando solucionar problemas simples son representativos de los procesos implicados cuando se resuelven problemas reales. Así, se usan problemas simples por razones de conveniencia, ya que se supone posible la generalización de los resultados a problemas mas complejos. Durante los días del inicio del paradigma del procesamiento de la información en los 60's y a principio de los 70's, las definiciones dominantes de resolución de problemas contenían implícitamente al menos tres supuestos: a) La meta teórica era comprender los procesos cognitivos de una persona resolviendo un problema. b) los procesos cognitivos estaban guiados por metas internas. c) y quizá mas importante: los procesos cognitivos eran esencialmente los mismos para todos los problemas. Los problemas estudiados eran de dominio general, vacíos de contenido en lo posible, como solucionar puzzles abstractos basados en sacar anillas entrelazadas o formar figuras a partir de unos elementos dados (por ejemplo, VanLehn, 1989). No obstante, a principios de los 70's, los investigadores se fueron convenciendo de que los hallazgos empíricos y los conceptos teóricos derivados de tareas simples en laboratorio no eran generalizables a problemas mas complejos de la vida diaria. Peor incluso, parecía que los procesos subyacentes a la resolución de problemas complejos (RPC) en diferentes dominios se diferenciaban unos de otros. Estos convencimientos han llevado a respuestas muy diferentes en Norteamérica y Europa.

¿Por qué resolver problemas es un tema de interés? No hay una respuesta fácil, ni única, a esta pregunta. La resolución de problemas, en Francia, nada tiene que ver, por ejemplo, con el trabajo realizado en Inglaterra, Rusia y con el de los Estados Unidos; incluso dentro de un país, se pueden presentar 3 ó 4 enfoques distintos al tratar dicho tema. El que nos interesa es *"el uso de problemas o proyectos difíciles por medio de los cuales, los alumnos pueden aprender a pensar matemáticamente"* (Schoenfeld, 1994).
Es claro que los diferentes enfoques, no están completamente desvinculados unos de otros. Antes que todo, queremos aclarar que este método de enseñanza no es el único o mejor, es solo una de las vías posibles. Por otra parte, el método todavía presenta algunas dificultades que no están satisfactoriamente resueltas en la mente de algunos profesores y, mucho menos, en la forma práctica de llevarlo a cabo. Se trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que la integran, la componente heurística, es decir, la atención a los procesos de pensamiento y los contenidos específicos del pensamiento matemático.
Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de ejercicios y carentes de verdaderos problemas, incluso, existe en la actualidad, una buena cantidad de obras cuya atención primordial poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. La apariencia exterior puede ser engañosa. También en un ejercicio se expone una situación y se pide que se llegue a otra: *Escribir el coeficiente de* x^{32} *en el desarrollo de* $(1+2x)^{55}$.
Pero si esta actividad, que fue un verdadero problema para los algebristas del siglo XVI, se encuentra, como suele suceder, al final de una sección sobre el binomio de Newton, no constituye ya ningún reto notable. El alumno tiene los caminos bien marcados. Si no es capaz de resolver un problema semejante, ya sabe que lo que tiene que hacer es aprenderse la lección primero.
La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.
Se trata de considerar como lo más importante:

- que el alumno manipule los objetos matemáticos;
- que active su propia capacidad mental;
- que ejercite su creatividad;
- que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente;
- que, a ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;
- que adquiera confianza en sí mismo;

- que se divierta con su propia actividad mental;
- que se prepare para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;
- que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

¿Cuáles son las ventajas de este tipo de enseñanza? ¿Por qué esforzarse para conseguir tales objetivos? He aquí unas cuantas razones interesantes (que sin ser suficientes, deben ser necesarias):

- porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestro jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;
- porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;
- porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo;
- porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;
- porque es aplicable a todas las edades.

¿En qué consiste la novedad? ¿No se ha enseñado siempre a resolver problemas en nuestras clases de matemáticas? Posiblemente los buenos profesores de todos los tiempos han utilizado de forma espontánea los métodos que ahora se propugnan. Pero lo que tradicionalmente se ha venido haciendo por una buena parte de nuestros profesores se puede resumir en las siguientes fases:

- exposición de contenidos,
- ejemplos,
- ejercicios sencillos,
- ejercicios más complicados,
- problema.

La forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder, más o menos, del siguiente modo:

- propuesta de la situación-problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...);
- manipulación autónoma por los estudiantes;
- familiarización con la situación y sus dificultades;
- elaboración de estrategias posibles;
- ensayos diversos por los estudiantes;
- herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados);
- elección de estrategias;
- ataque y resolución de los problemas;
- recorrido crítico (reflexión sobre el proceso);
- afianzamiento formalizado (si conviene);
- generalización;
- nuevos problemas;
- posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas, ...

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. Las ventajas del procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido.
Sin embargo creo que aún no han surgido intentos serios y sostenidos por producir obras que efectivamente apliquen el espíritu de la resolución de problemas a la transmisión de aquellos contenidos de la Matemática de los diversos niveles que en la actualidad pensamos que deben estar presentes en nuestra educación.
Lo que suele suceder a aquellos profesores genuinamente convencidos de la bondad de los objetivos relativos a la transmisión de los procesos de pensamiento es que viven una especie de esquizofrenia, tal vez por falta de modelos adecuados, entre los dos polos alrededor de los que gira su enseñanza, los contenidos y los procesos. Los viernes ponen el énfasis en los procesos de pensamiento, alrededor de situaciones que nada tienen que ver con los programas de su materia, y los demás días de la semana se dedican con sus alumnos a machacar bien los contenidos que hay que cubrir, sin acordarse para nada de lo que el viernes pasado practicaron. Sería muy necesario que surgieran modelos, aunque fueran parciales, que integraran en un todo armonioso ambos aspectos de nuestra educación matemática.
De todos modos, probablemente se puede afirmar que quien esté plenamente imbuido en ese espíritu de la resolución de problemas se enfrentará de una manera mucho más adecuada a la tarea de transmitir competentemente los contenidos de su programa. Por ello considero importante trazar, aunque sea someramente, las líneas de trabajo que se pueden seguir a fin de conseguir una eficaz preparación en el tema.
La preparación para este tipo de enseñanza requiere una inmersión personal, seria y profunda. No se trata meramente de saber unos cuantos trucos superficiales, sino de adquirir unas nuevas actitudes que calen y se vivan profundamente.
A nuestro parecer, esta tarea se realiza más efectivamente mediante la formación de pequeños grupos de trabajo. El trabajo en grupo en este tema tiene una serie de ventajas importantes:

- proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento, al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación-problema;
- se puede aplicar el método desde diferentes perspectivas, unas veces en el papel de moderador del grupo, otras en el de observador de su dinámica;
- el grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere;
- el trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros;
- el trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

Algunos de los aspectos que es preciso atender en la práctica inicial adecuada son los siguientes:

- exploración de los diferentes bloqueos que actúan en cada uno de nosotros, a fin de conseguir una actitud sana y agradable frente a la tarea de resolución de problemas;
- práctica de los diferentes métodos y técnicas concretas de desbloqueo;
- exploración de las aptitudes y defectos propios más característicos, con la elaboración de una especie de autorretrato heurístico;

- ejercicio de diferentes métodos y alternativas;
- práctica sostenida de resolución de problemas con la elaboración de sus protocolos y su análisis en profundidad.

Como vemos, no sólo este trabajo adquiere significación práctica para el docente, sino también para el estudiante como resolutor de ejercicios. No obstante, Labarrere (1996, pág. 59) asevera que *"…por lo regular el alumno carece de un marco referencial para someter a juicio valorativo los problemas que enfrenta, desde el punto de vista de su corrección y pertinencia —y más adelante enfatiza: en la actualidad los problemas se presentan más a los escolares como algo para resolver que como algo para someter a juicio"*.

Hay un gran problema de fondo, existe una enorme diferencia entre la manera en que nosotros trabajamos la Matemática y la manera en que la ven nuestros alumnos. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de alcanzar a comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos concretos. Primero dominamos una parte, según avanzamos, la intuición se desarrolla, comenzamos a creer que vamos por buen camino. Lo verificamos con ejemplos, buscamos contraejemplos, etc. Cuando creemos saber por qué funciona, probamos a demostrarlo. Este ensayo puede tener o no éxito. Podemos comenzar por un camino equivocado, sufrir algún revés, hacer modificaciones, etc. trabajamos por el método "prueba-error".

Desgraciadamente, nuestros alumnos raras veces tienen la idea de que trabajar la Matemática puede ser así. Aunque parezca raro, es a causa de nuestro profesionalismo, debido a la cantidad de materia que tiene que aprender, estos contenidos se presentan de manera organizada y coherente, no genética. Como resultado de esto, pueden "dominar" mejor la materia, pero sufren algunas consecuencias funestas. Como el manejar la Matemática parece fácil en nosotros, al ver lo difícil que es para ellos los alumnos se sienten incapaces y frustrados. No tienen idea de que nosotros, también, hemos de esforzarnos para entender Matemática nueva y, lo que es aún más importante, no tienen idea de que "entender" Matemática, significa hacerse las preguntas hasta que las cosas tengan sentido; en vez de ello, para los alumnos significa reproducir pasivamente lo que se les ha enseñado.

Una primera aproximación a las estrategias de resolución de problemas.

Las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos en metas y obtener una solución. Las estrategias para la resolución de problemas incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente.

A. Los métodos heurísticos.

Los **métodos heurísticos** son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas por los resolutores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican las vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución.

De acuerdo con Monero y otros (1995) **los procedimientos heurísticos** son acciones que comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo como, por ejemplo, reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus principales elementos (p. 20).

Mientras que Duhalde y González (1997) señalan que un **heurístico** es "un procedimiento que ofrece la posibilidad de seleccionar estrategias que nos acercan a una solución" (p. 106).

Los métodos heurísticos pueden variar en el grado de generalidad. Algunos son muy generales y se pueden aplicar a una gran variedad de dominios, otros pueden ser más específicos y se limitan a un área particular del conocimiento. La mayoría de los programas de entrenamiento en solución de problemas enfatizan procesos heurísticos generales como los planteados por Polya (1965) o Hayes (1981).

Los métodos heurísticos específicos están relacionados con el conocimiento de un área en particular. Este incluye estructuras cognoscitivas más amplias para reconocer los problemas, algoritmos más complejos y una gran variedad de procesos heurísticos específicos.

Chi y colaboradores (1981, 1982), señalan que entre el conocimiento que tienen los expertos resolutores de problemas están los "esquemas de problemas". Estos consisten en conocimiento estrechamente relacionado con un tipo de problema en particular y que contiene:

- **Conocimiento declarativo**: principios, fórmulas y conceptos.
- **Conocimiento procedimental**: conocimiento acerca de las acciones necesarias para resolver un tipo de problema en particular.
- **Conocimiento estratégico**: conocimiento que permite, al individuo resolutor del problema, decidir sobre las etapas o fases que debe seguir en el proceso de solución.

Diversos investigadores han estudiado el tipo de conocimiento involucrado en la resolución de un problema, encontrándose que los resultados apoyan la noción de que la eficiencia en la resolución de problemas está relacionada con el conocimiento específico del área en cuestión (Mayer, 1992; Stenberg, 1987). En este sentido, estos autores coinciden en señalar que los tipos de conocimiento necesarios para resolver problemas incluyen:

- Conocimiento declarativo: por ejemplo, saber que un kilómetro tiene mil metros.
- Conocimiento lingüístico: conocimiento de palabras, frases, oraciones.
- Conocimiento semántico: dominio del área relevante al problema, por ejemplo, saber que si Alvaro tiene 5 pesos más que Javier, esto implica que Javier tiene menos pesos que Alvaro.
- Conocimiento esquemático: conocimiento de los tipos de problema.
- Conocimiento procedimental: conocimiento del o de los algoritmos necesarios para resolver el problema.
- Conocimiento estratégico: conocimiento de los tipos de conocimiento y de los procedimientos heurísticos.

Ejemplo de problema.

Alvaro tiene un fuerte. Javier tiene tres pesos más que Alvaro. ¿Cuántos pesos tiene Javier?

Cuadro 2.
Tipos de conocimiento requeridos para resolver un problema según Stenberg (1987)

Paso	**Tipos de conocimiento**	**Ejemplos**
Representación del problema	Lingüístico	Javier tiene tres pesos más que Alvaro significa: J = A + 3.
Traducción	Declarativo	Un fuerte equivale a 5 pesos.
Integración	Procedimental	Problema de comparación, consistente en dos subunidades y una supraunidad.
Solución del problema	**Tipos de conocimiento**	
Planificación	Estratégico	El objetivo es sumar 3 más 5.
Ejecución	Algorítmico	Procedimientos para contar.

Entre los procedimientos heurísticos generales se pueden mencionar los siguientes:

- **Trabajar en sentido inverso (*working backwards*)**. Este procedimiento implica comenzar a resolver el problema a partir de la meta o metas y tratar de transformarlas en datos, yendo de la meta al principio. El procedimiento heurístico es utilizado en geometría para probar algunos teoremas; se parte del teorema y se trabaja hacia los postulados. Es útil cuando el estado-meta del problema está claro y el inicial no.
- **Subir la cuesta (*hill climbing*)**. Este procedimiento consiste en avanzar desde el estado actual a otro que esté más cerca del objetivo, de modo que la persona que resuelve el problema, al encontrarse en un estado determinado, evalúa el nuevo estado en el que estará después de cada posible movimiento, pudiendo elegir aquel que lo acerque más al objetivo. Este tipo de procedimiento es muy utilizado por los jugadores de ajedrez.
- **Análisis medios-fin (*means-ends analysis*)**. Este procedimiento permite al que resuelve el problema trabajar en un objetivo a la vez. Consiste en descomponer el problema en submetas, escoger una para trabajar, y solucionarlas una a una hasta completar la tarea eliminando los obstáculos que le impiden llegar al estado final. Según Mayer (1983), el que resuelve el problema debe hacerse las siguientes preguntas: ¿cuál es mi meta?, ¿qué obstáculos tengo en mi camino?, ¿de qué dispongo para superar estos obstáculos? En el estudio de Larkin, McDermott, Simon y Simon (1980), se encontró que los estudiantes de un curso introductorio de física utilizaban el análisis medios-fin para resolver problemas, mientras que los físicos más expertos utilizaban otro procedimiento que evitaba la creación de muchas metas.

B. Los algoritmos.

Los algoritmos son procedimientos específicos que señalan paso a paso la solución de un problema y que garantizan el logro de una solución siempre y cuando sean relevantes al problema.

Monereo y otros (1995) señalan que un procedimiento algorítmico es una sucesión de acciones que hay que realizar, completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema como, por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón (p. 20).

Por otra parte, Duhalde y González (1997) señalan que un algoritmo es una prescripción efectuada paso a paso para alcanzar un objetivo particular. El algoritmo garantiza la obtención de lo que nos proponemos (p. 106).

De esta manera, el algoritmo se diferencia del heurístico en que este último constituye sólo "una buena apuesta", ya que ofrece una probabilidad razonable de acercarnos a una solución. Por lo tanto, es aceptable que se utilicen los procedimientos heurísticos en vez de los algorítmicos cuando no conocemos la solución de un problema.

C. Los procesos de pensamiento divergente.

Los procesos de pensamiento divergente permiten la generación de enfoques alternativos a la solución de un problema y están relacionados, principalmente, con la fase de inspiración y con la creatividad.

La adquisición de habilidades para resolver problemas ha sido considerada como el aprendizaje de sistemas de producción que involucran tanto el conocimiento declarativo como el procedimental. Existen diversos procedimientos que pueden facilitar o inhibir la adquisición de habilidades para resolver problemas, entre los cuales se pueden mencionar:

- Ofrecer a los estudiantes representaciones metafóricas.
- Permitir la verbalización durante la solución del problema.
- Hacer preguntas.
- Ofrecer ejemplos.
- Ofrecer descripciones verbales.
- Trabajar en grupo.

- Utilizar auto-explicaciones.

Factores que afectan la resolución de problemas.
Desde la perspectiva del enfoque cognoscitivo, se han revisado los factores que influyen en el proceso de resolución de problemas. Existen algunas categorías que permiten agrupar estos factores en: relacionados con los procesos dependientes del sujeto y ambientales.

a) Factores relacionados con los procesos.
Los procesos mentales desarrollados por los individuos, mientras resuelven un problema, han sido objeto de estudio por parte de los investigadores del paradigma cognoscitivo. Por ejemplo, la mayor parte de las investigaciones en el área de la matemática, directa o indirectamente, tienen por objeto analizar y generar modelos que reflejen los procesos subyacentes a la ejecución de los sujetos.

Dentro de este marco se encuentran los trabajos de Suppes y Groen, quienes desde 1967 se han dedicado a explorar cómo los niños de los primeros grados de educación básica resuelven problemas de suma con números menores de diez. Estos autores han examinado varios modelos y, a partir de sus trabajos, se han estudiado muchos otros procesos aritméticos, como la sustracción, la multiplicación, la división, las operaciones con fracciones.

Tales modelos se han extendido para intentar explicar otros procesos.

En el análisis de los procesos involucrados en la resolución de problemas, es la aritmética mental (análisis cronométrico) la técnica que mejor información ha generado. En esencia, esta técnica consiste en medir el tiempo requerido por un sujeto para dar respuesta a un problema. Se parte del supuesto de que este tiempo está en función de los procesos cognoscitivos involucrados para resolver el problema.

El estudio de Groen y Parkman (1972) ilustra, de alguna manera, este tipo de análisis. En su estudio, estos autores presentaron a niños de primer grado problemas de adición y les pidieron emitir la respuesta en el tiempo más breve posible. Los autores comprobaron que los datos obtenidos se ajustaban, en primer lugar, al algoritmo simple de la suma, el cual consiste en tomar el valor del sumando mayor e ir añadiendo hacia arriba el número de veces que indica el sumando menor, por ejemplo, 4 + 2 = 6, el niño cuenta 4, 5, 6 y, en segundo lugar, al algoritmo de contar a partir de 1, comenzando por el primer sumando, así 1 y 5 es 6 porque el niño cuenta 1, 2, 3, 4, 5, 6. Los resultados también indicaron que las estrategias de conteo que se desarrollan antes de la escolaridad, juegan un papel importante en la determinación de los procedimientos utilizados en la escuela y los métodos que los niños emplean no son necesariamente los mismos que se les enseñan a través de la instrucción.

b) Factores dependientes del sujeto.
Clásicamente, se ha considerado que las características de los individuos tienen un papel importante en el éxito o fracaso en la resolución de problemas. Algunos factores son el conocimiento y la experiencia previa, la habilidad en la lectura, la perseverancia, las habilidades de tipo espacial, la edad y el sexo.

En la actualidad, existe una tendencia orientada hacia la construcción de modelos que representan las diferencias entre los resolutores de problemas eficientes e ineficientes o las diferencias en la ejecución de la tarea por expertos y novatos, a las cuales se hizo referencia anteriormente. Los individuos expertos poseen mayor información que los novatos, lo cual facilita la representación del problema en términos de esquemas, estructuras, procedimientos y métodos heurísticos. Las representaciones abstractas habilitan a los expertos para enfrentar con mayor eficiencia los problemas.

c) Factores ambientales.
Existe un gran número de factores externos que pueden afectar la ejecución en la resolución de problemas. Sin embargo, la comunidad de educadores en el área de la matemática está de acuerdo en concentrar su esfuerzo en factores relacionados con la instrucción para desarrollar

estrategias expertas de pensamiento, para enseñar el uso de herramientas específicas de pensamiento y para entrenar en el uso de reglas generales y específicas de naturaleza heurística.

Las estrategias expertas de pensamiento pueden ser utilizadas independientemente del tipo y de la naturaleza del problema y se orientan hacia el desarrollo de un pensamiento original, divergente y de actitudes positivas hacia la resolución de problemas.

Las herramientas específicas de pensamiento son estrategias que tienden a equipar al sujeto que resuelve el problema, con un conjunto de habilidades que supuestamente intervienen favorablemente, aunque su eficiencia no ha sido consistentemente comprobada.

Los métodos instruccionales diseñados para el entrenamiento en estrategias heurísticas generales o específicas han sido propuestos por Polya (1965). Entre las estrategias heurísticas específicas están: simplificar el problema, trabajar en sentido inverso, etc.; sin embargo, este tipo de estrategia es útil sólo en casos muy particulares. Las estrategias heurísticas generales, como ya señalamos anteriormente, se pueden utilizar en un amplio rango de problemas, siendo las principales el análisis medios-fin, la planificación y la organización de la información.

Metodos para el análisis de procesos.

Analizar procesos en el área de la resolución de problemas es una tarea que presenta algunas dificultades metodológicas, particularmente por el hecho de que los procesos no son observables sino inferibles a partir de la ejecución del sujeto que resuelve el problema. Las metodologías existentes para el análisis de procesos se han desarrollado, fundamentalmente, en el campo de la matemática, siendo algunas de ellas las siguientes: la aritmética mental, el análisis de protocolos, los estudios clínicos o de casos, la entrevista individual y el análisis de los patrones de errores.

a) La aritmética mental.

Los análisis del tiempo de reacción se han aplicado con éxito en el examen de tareas simples y relativamente directas tales como juzgar “más que” y “menos que”, juzgar si una ecuación numérica simple es correcta o no, o calcular hechos numéricos de un solo dígito. Pero en estas tareas, la ejecución sigue un conjunto bastante estricto y limitado de reglas o algoritmos, y se realizan rápidamente sin mucho procesamiento consciente por parte del individuo que las ejecuta.

La técnica supone la existencia de modelos hipotéticos del tiempo y de los pasos requeridos para resolver el problema, el cual se divide en pequeñas unidades discretas denominadas operaciones. Uno de los supuestos principales es que el tiempo requerido para resolver un problema está en función del número de pasos involucrados.

Las limitaciones de los estudios cronométricos tienen que ver con algunos de los supuestos siguientes: 1) los individuos no siempre son consistentes en el uso de las estrategias que utilizan, aunque se trate de problemas idénticos o similares y 2) no existe una comprobación lo suficientemente robusta que evidencie que los tiempos para cada paso sean constantes.

b) El análisis de protocolos.

Cuando las tareas son más complejas, cuando hay varios pasos que realizar, cuando se pueden seguir estrategias alternativas de solución o cuando las pausas y reconsideraciones son usuales en el transcurso de una solución, los tiempos de reacción no constituyen un método apropiado de análisis. Para examinar la ejecución de los individuos en este tipo de tarea más compleja, se utiliza la técnica del análisis de protocolos.

Los esquemas de protocolos se refieren a la producción de las secuencias de pasos de las acciones observables desarrolladas por un individuo cuando resuelve un problema. Estos esquemas de pasos han sido utilizados en forma extensiva en las áreas de la inteligencia artificial (IA) y en la enseñanza de la matemática. En IA, el análisis de protocolos tiene como propósito el descubrimiento de las regularidades de la conducta de quien resuelve el problema. Los protocolos, por lo general, se traducen en programas que simulan, a través del computador, el comportamiento ideal del sujeto.

En el área de la matemática, los protocolos tienen como propósito realizar análisis cualitativos que permitan describir las estrategias útiles o documentar acerca de su nivel de efectividad. Ya en 1967, Kilpatrick diseñó un protocolo riguroso que sirvió de paradigma a muchos otros desarrollados a posteriori. En dicho protocolo se esquematizan diversas conductas heurísticas consideradas importantes en la resolución de problemas matemáticos. El nivel de análisis debe ser lo más preciso posible y una vez definida la secuencia, ésta puede convertirse en símbolos los cuales, posteriormente, sirven como fuente de datos para análisis estadísticos.

Aunque los protocolos codifican básicamente conductas observables en secuencia, éstos pueden ser enriquecidos por otras técnicas complementarias tales como “pensar en voz alta” o las “autoexplicaciones”. Es decir, la conducta implícita puede ser explicitada por el individuo. Las técnicas complementarias deben ser consideradas con cierta cautela, pues en niños pequeños las verbalizaciones suelen ser bastante limitadas y cargadas de omisiones y distorsiones. Se recomienda su uso en adultos y en estudiantes de grados superiores.

c) Los estudios clínicos o de casos.

Esta técnica de análisis ha sido promovida por la escuela rusa. Kantowski (1978) describe en qué consiste: 1) el diseño no es experimental, 2) se trata de un estudio longitudinal, 3) se intenta captar procesos y cómo estos se desarrollan, 4) el docente no es una variable control, por el contrario, constituye un elemento vital del ambiente, 5) los análisis cualitativos de los datos son más importantes que los cuantitativos.

Los estudios clínicos son experimentos desarrollados en ambientes naturales, donde se pretende explorar toda la riqueza y la diversidad que normalmente exige la escuela y los procesos que en ella se desarrollan.

El resurgimiento de la técnica de estudios de casos se debe, entre otras causas, al impulso dado por Piaget, la escuela rusa y las contribuciones de otras disciplinas como la psicología social, la antropología, etc. Esta metodología ha probado ser eficiente para comprobar hipótesis, replicar experiencias y hacer predicciones.

d) La entrevista individual.

Una manera directa de indagar acerca de los procesos es a través de la entrevista. Por lo general, se presentan los problemas a los individuos en forma individual, y a partir de los registros de observación de su comportamiento —algunas preguntas formuladas por el entrevistador y de las respuestas del entrevistado— se infieren los procesos. Existen ciertas limitaciones a esta técnica. Una de ellas es que las explicaciones dadas por los niños no suelen ser muy precisas y, en consecuencia, pueden no reflejar los procesos desarrollados; la otra es que las inferencias extraídas por el entrevistador pueden presentar un alto grado de subjetividad.

e) El análisis de errores.

Esta técnica ha sido muy útil en el diagnóstico de los errores y dificultades encontradas por los niños, sobre todo en la resolución de problemas aritméticos de tipo verbal.

Las destrezas aritméticas involucradas en la resolución de problemas de suma y de resta son procedimentales por naturaleza, por lo que estos tipos de tareas permiten observar, con bastante claridad, errores sistemáticos de tipo procedimental. Los errores de los aprendices son sistemáticos cuando existe un procedimiento que genera el error. Brown y VanLehn (1980) señalan que “en casi todos los casos, se ha encontrado que los errores sistemáticos consisten en desviaciones menores del procedimiento correcto” (p. 380).

Los errores cometidos por los niños en problemas de adición y sustracción han sido clasificados como errores inconscientes, sistemáticos o aleatorios (Brown y Burton, 1978). De estos tres tipos de errores, el error aleatorio es el más difícil de remediar porque no sigue un

patrón determinado, ya que puede deberse a falta de conocimiento sobre hechos básicos o a fallas en el procedimiento.
El estudio de Brown y Burton (1978) tuvo como objetivo examinar ejemplos de patrones de errores generados a partir de un programa diagnóstico simulado por computadora denominado "Buggy". Este programa consiste en una enumeración extensa de errores sistemáticos en los cuales incurren los niños cuando resuelven problemas de sustracción de varios dígitos. Al analizar los detalles de los procedimientos utilizados en problemas de resta, pudieron no sólo predecir la mayoría de los errores cometidos por los estudiantes, sino también identificar el tipo de error y su sistematicidad. Considérense los siguientes ejemplos:

45	78	2924	216
-27	-25	-1751	- 5
22	53	1233	241

Podría decirse que este estudiante sabe algo sobre restar con varios dígitos, pero aplica incorrectamente la regla que indica: "siempre se resta el número menor del número mayor"; en este caso, en particular, el estudiante la aplica sin importar si el número mayor está en la fila de arriba o en la de abajo. Aplicaciones incorrectas de reglas como éstas son las que conducen a los estudiantes a cometer el tipo de error considerado en el ejemplo anterior.
Es importante, entonces, que nosotros, como docentes, estemos atentos a los procedimientos que utilizan nuestros estudiantes para resolver tareas matemáticas como las antes ejemplificadas y resaltar que cuando se aplican reglas o algoritmos para resolver dichas tareas es necesario saber también cuándo se deben aplicar. Aquí entraría en juego no sólo el conocimiento declarativo y el procedimental, sino también el estratégico.

Adquisición y desarrollo de estrategias de resolución de problemas en matemática.
Uno de los principales objetivos de la enseñanza de la matemática, ha sido desarrollar en los estudiantes ciertos niveles de experticia que les permitan resolver problemas de manera eficiente, particularmente aquellos de naturaleza verbal. En tal sentido, tanto la enseñanza como el aprendizaje de la matemática han constituido una preocupación constante de los docentes, los padres y representantes, los estudiantes y los administradores de la educación, no solamente en nuestro país sino también en otros países del mundo. En los Estados Unidos, por ejemplo, uno de los seis objetivos educacionales para el año 2000 es lograr que los estudiantes norteamericanos ocupen el primer lugar, a nivel mundial, en las áreas de matemática y ciencia (Departamento de Educación, Oficina de Investigación Educativa y de Mejoramiento, 1991, pp. 3-4, citado en Mayer, 1992).
En nuestro país, han sido innumerables los esfuerzos por superar las deficiencias de nuestros estudiantes, particularmente en el campo de la matemática. Tales esfuerzos han sido desarrollados desde el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Ciencia (CENAMEC), institución que se ha dedicado por más de veinticinco años a la realización de actividades dirigidas a docentes y estudiantes de los diferentes niveles de nuestro sistema educativo, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, además de otras áreas del saber.
Los resultados de diversos estudios realizados han permitido determinar las dificultades de los estudiantes al resolver problemas. Entre ellas se pueden mencionar las siguientes:

- Poco dominio de procedimientos heurísticos, generales y específicos, para resolver problemas.
- Bajo nivel de análisis o análisis superficial de la situación problemática planteada en el enunciado del problema.

- Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema: representación mental del enunciado del problema, aislamiento de la información relevante, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados, verificación de la solución, revisión y supervisión de todo el proceso de resolución.
- Ausencia de conocimiento metacognoscitivo, lo cual le impide tener conciencia de los procesos y estrategias que utiliza para la resolución del problema y corregirlos en caso de ser necesario.
- Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema.
- Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.
- Tendencia a mantenerse dentro de lo que exige el problema, sin ir más allá de su planteamiento.
- Bajos niveles afectivos y motivacionales hacia la matemática y hacia la resolución de problemas.
- Desconocimiento acerca de los tipos de conocimiento involucrados en la resolución de un problema.
- Desconocimiento de las etapas y de los pasos generales que se pueden seguir para resolver un problema.

Estos hallazgos han constituido el centro de la preocupación por parte de todos aquellos involucrados en la enseñanza de la matemática y se ha concluido que ellos son la causa, en primer lugar, del fracaso consistente y generalizado por parte de los estudiantes en la adquisición de las habilidades matemáticas requeridas en los diferentes niveles del sistema educativo; en segundo lugar, de la dificultad evidente para realizar todas aquellas actividades que impliquen procesos de naturaleza matemática y/o algebraica; en tercer lugar, del desconocimiento de la importancia de la matemática para la vida cotidiana y otras disciplinas; y finalmente, del desconocimiento de que la matemática no sólo constituye un área específica del conocimiento sino que está vinculada con la estructura de pensamiento de los individuos.

El área de la resolución de problemas, específicamente en el campo de la matemática, ha sido objeto de interés por las diferentes corrientes del pensamiento que han dominado la teoría y la práctica educativa. Durante muchos años, el enfoque asociacionista enfatizó los principios generales del aprendizaje, particularmente la ley del efecto y la ley del ejercicio. Tanto la ejercitación como la práctica han tenido un papel fundamental en la historia de la enseñanza de la matemática, especialmente, en la aritmética. En un momento fue el medio principal de instrucción, sin embargo, hoy en día, ambas forman parte del currículo de matemática, aunque acompañadas de experiencias concretas y explicaciones de los principios matemáticos subyacentes.

Desde el punto de vista del enfoque cognoscitivo, sin embargo, se ha enfatizado el papel del razonamiento que permite al sujeto que resuelve el problema, comprenderlo, diseñar un plan, llevarlo a cabo y supervisarlo (Mayer, 1992). Este enfoque, según Schoenfeld (1985), representa un cambio de énfasis en la enseñanza de la matemática ya que en vez de preguntar "¿cuáles procedimientos debe dominar el aprendiz?", la pregunta debe ser: "¿qué significa pensar matemáticamente?". En vez de enfatizarse el producto de la resolución del problema (obtener un resultado correcto), este enfoque sugiere enfatizar el proceso de resolución (qué sucede en la mente del estudiante cuando resuelve un problema).

Problemas de naturaleza verbal.

Existe consenso entre los investigadores en relación con la dificultad que presentan los problemas aritméticos expresados en palabras, es decir, de naturaleza verbal (Hegarty, Mayer y Monk, 1995).

Las teorías sobre la comprensión del lenguaje (Kintsch y van Dijk, 1978; Norman y Rumelhart, 1975) son congruentes con los estudios sobre la estructura textual específica de problemas de tipo verbal. Estos estudios han evidenciado que estos problemas, en aritmética o en álgebra, deben tratarse como un género especial de texto que utiliza el conocimiento del lenguaje del sujeto pero que, en contextos matemáticos, requiere una interpretación especial. Los autores señalan que es la complejidad del texto, más que las operaciones matemáticas involucradas, lo que influye en el procesamiento del problema.

Carpenter (1985) encontró que las principales variables son de naturaleza lingüística, es decir, variables de naturaleza sintáctica o semántica. Entre las variables sintácticas se encuentran el número de palabras, la secuencia de la información y la presencia de algunas palabras claves que puedan sugerir la realización de alguna operación matemática. Sin embargo, este autor considera que las variables semánticas son más importantes porque determinan los procesos utilizados por los aprendices en la resolución de problemas aritméticos de tipo verbal.

Resolver este tipo de problema implica construir una representación de las palabras del problema y encontrar la solución utilizando las reglas de la aritmética o del álgebra. Una de las dificultades que presentan los individuos en la resolución de problemas de tipo verbal parece ser la representación del problema, es decir, salirse del lenguaje (palabras, frases, oraciones) del problema a una representación mental coherente del mismo. Un subcomponente importante en el proceso de representación para problemas de tipo verbal es la traducción de cada oración. Existe cierta evidencia que señala que la habilidad para traducir proposiciones incrementa con la edad.

Otro aspecto en la representación de problemas de tipo verbal es reconocer tipos de problemas. El estudio de Greeno (1980) señala que los niños aprenden a categorizar problemas en tipos, es decir, adquieren lo que se ha denominado “esquemas de problemas”, y en consecuencia, pueden decidir cuál operación matemática realizar para alcanzar la solución del problema.

Hinsley, Hayes y Simon (1977) encontraron que a medida que los estudiantes leen las primeras palabras del enunciado de un problema, tienden a tomar una decisión en relación con el tipo de problema que es. Estos autores pidieron a estudiantes universitarios clasificar diferentes tipos de problemas en categorías. Los resultados permitieron identificar dieciocho categorías, tales como trabajo, movimiento, interés, triángulos, etc. Los sujetos pudieron realizar la tarea de clasificación de los problemas evidenciándose de esta manera que poseen esquemas para problemas de tipo verbal.

Por su parte, Mayer (1981) analizó los problemas de tipo verbal de varios textos de álgebra y encontró cien tipos de problemas básicos. Algunos eran muy comunes (diez veces por cada mil problemas), mientras que otros eran muy poco frecuentes o muy raros (una vez por cada mil problemas). En un estudio posterior, este autor pidió a los estudiantes que leyeran y trataran de recordar una serie de problemas de tipo verbal. Los problemas con alta frecuencia generaron un nivel de recuerdo más elevado que los de baja frecuencia.

Desde el inicio de la década de los ochenta, varios autores se han dedicado al estudio de la estructura semántica de problemas aritméticos verbales. Carpenter y Moser (1984) clasificaron estos problemas en términos de cuatro operaciones básicas: cambiar, combinar, comparar e igualar. Las cuatro operaciones determinan cuatro tipos de problemas cuyo nivel de dificultad diferirá dependiendo de la operación requerida (Ver Cuadro 3).

Los **problemas de cambio** se caracterizan por la presencia de una acción implícita o explícita que modifica una cantidad inicial y pueden resolverse "juntando" o "separando" objetos. En el caso de un problema que implique cambio juntando objetos, hay una cantidad inicial y una acción directa o implícita que causa un incremento en su cantidad. Cuando el cambio es separando objetos, existe un conjunto dado y un subconjunto que debe ser removido del conjunto mayor produciendo un decremento. En ambos casos, los cambios ocurren en el tiempo. Existe una condición inicial (C1) la cual es seguida de un cambio (C2) que produce un resultado final (C3). (Ver Cuadro 3 para los ejemplos que ilustran este tipo de problema).

Cuadro 3
Clasificación de problemas de tipo verbal según Carpenter y Moser (1984)

JUNTAR **CAMBIAR**	**SEPARAR** **CAMBIAR**
a) Connie tenía 5 fichas. Jim le dio 8 más. ¿Cuántas fichas tiene Connie en total?	b) Connie tenía 13 fichas. Le dio 5 a Jim. ¿Cuántas fichas le quedan?
c) Connie tiene 5 fichas. ¿Cuántas fichas más necesita para tener 13?	d) Connie tenía 13 fichas. Le dio algunas a Jim y ahora le quedan 8. ¿Cuántas fichas le dio Connie a Jim?
e) Connie tenía algunas fichas. Jim le dio 5 más y ahora tiene 13 fichas. ¿Cuántas fichas tenía Connie al principio?	f) Connie tenía algunas fichas. Le dio 5 a Jim. Ahora le quedan 8. ¿Cuántas fichas tenía Connie al principio?
COMBINAR	**COMBINAR**
g) Connie tiene 5 fichas rojas y 8 azules. ¿Cuántas fichas tiene en total?	h) Connie tiene 13 fichas. Cinco son rojas y el resto es azul. ¿Cuántas fichas azules tiene Connie?
COMPARAR	**COMPARAR**
i) Connie tiene 13 fichas y Jim tiene 5. ¿Cuántas fichas más tiene Connie que Jim?	j) Connie tiene 13 fichas y Jim tiene 5. ¿Cuántas fichas menos tiene Jim que Connie?
k) Jim tiene 5 fichas. Connie tiene 8 más que Jim. ¿Cuántas fichas tiene Connie?	l) Jim tiene 5 fichas. El tiene 8 fichas menos que Connie. ¿Cuántas fichas tiene Connie?
m) Connie tiene 13 fichas. Ella tiene 5 fichas más que Jim. ¿Cuántas fichas tiene Jim?	n) Connie tiene 13 fichas. Jim tiene 5 fichas menos que Connie. ¿Cuántas fichas tiene Jim?
IGUALAR	**IGUALAR**
o) Connie tiene 13 fichas. Jim tiene 5. ¿Cuántas fichas tiene que ganar Jim para tener tantas fichas como Connie?	p) Connie tiene 13 fichas. Jim tiene 5. ¿Cuántas fichas tiene que perder Connie para tener tantas fichas como Jim?
q) Jim tiene 5 fichas. Si él gana 8, tendrá el mismo número de fichas que tiene Connie. ¿Cuántas fichas tiene Connie?	r) Jim tiene 5 fichas. Si Connie pierde 8 fichas, tendrá tantas fichas como Jim. ¿Cuántas fichas tiene Connie?
s) Connie tiene 13 fichas. Si Jim gana 5 fichas, tendrá tantas como Connie. ¿Cuántas fichas tiene Jim?	t) Connie tiene 13 fichas. Si ella pierde 5, tendrá tantas fichas como Jim. ¿Cuántas fichas tiene Jim?

En los **problemas de cambio**, ya sea éste "juntando" o "separando" objetos, se presentan tres modalidades. En la primera, se da la cantidad inicial y la magnitud del cambio y el sujeto debe obtener el resultado (Connie tenía 5 metras. Jim le dio 8 más. ¿Cuántas fichas tiene Connie en total?). En la segunda, se conoce la cantidad inicial y el resultado y el sujeto debe obtener la magnitud del cambio (Connie tiene 5 metras. ¿Cuántas fichas más necesita para tener 13?). En la tercera modalidad, se desconoce la cantidad inicial y se dan los otros elementos (Connie tenía algunas metras. Jim le dio 5 más y ahora tiene 13 metras. ¿Cuántas fichas tenía Connie al principio?).

En los **problemas de combinació**n se proponen dos cantidades que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo, sin que exista ningún tipo de acción. Los problemas de combinación pueden ser de dos tipos: en el primero se dan dos conjuntos y se pregunta por el resultado (Connie tiene 5 fichas rojas y 8 azules. ¿Cuántas fichas tiene en total?); en el segundo, se da la cantidad de un conjunto y la cantidad total resultante, y se pregunta por la cantidad del otro conjunto (Connie tiene 13 metras. 5 son rojas y el resto es azul. ¿Cuántas fichas azules tiene Connie?).

Los **problemas de comparación** presentan la relación entre dos cantidades distintas, ya sea para establecer la diferencia entre ellas o para hallar una cantidad desconocida a partir de una conocida y la relación entre ellas. Una de las cantidades cumple funciones de “referente” y la otra funciones de “comparado” (Jim tiene 5 metras. Connie tiene 8 fichas más que Jim. ¿Cuántas fichas tiene Connie?). El tercer elemento del problema es la diferencia o la cantidad que excede entre ambos conjuntos. Cada uno de los elementos puede servir de incógnita. Los **problemas de igualación**, por su parte, contienen elementos de los problemas de comparación y de cambio. En ellos se presenta una acción implícita basada en la comparación de dos cantidades distintas. (Para los ejemplos, ver Cuadro 3).

Hegarty, Mayer y Monk (1995) se han dedicado a examinar las razones por las cuales algunos estudiantes tienen éxito al resolver problemas de naturaleza verbal —particularmente aquellos que contienen enunciados de tipo relacional, es decir, oraciones que expresan una relación numérica entre dos variables— encontrando que el proceso de comprensión ocupa un papel importante en la resolución de este tipo de problema.

Estos autores señalan que existen dos maneras de abordar tales problemas por parte de los solucionadores: el *enfoque direct*o y el *enfoque significativo*.

En el **enfoque directo**, el resolutor de problemas selecciona los números y los términos claves de tipo relacional en el enunciado del problema (por ejemplo, “más”, “menos”) y desarrolla un plan de resolución, el cual involucra la combinación de los números en el problema, utilizando las operaciones aritméticas destacadas por las palabras claves; por ejemplo, adición, si la palabra clave es “más” o sustracción, si la palabra clave es “menos”. De esta manera, el resolutor intenta traducir directamente las proposiciones claves en el enunciado del problema a un conjunto de operaciones de cálculo que generarán una respuesta y no construye una representación cualitativa de la situación descrita en dicho enunciado. Se ha encontrado que este enfoque es bastante utilizado por los resolutores menos exitosos. Este método también ha recibido el nombre de “calcule primero y piense después” (Stigler et al, 1990) y como el “método de la palabra clave” (Briars y Larkin, 1984).

En el **enfoque significativo**, el resolutor de problemas traduce el enunciado del problema a un modelo mental de la situación descrita en él. Este modelo mental se convierte, entonces, en la base para la construcción del plan de resolución.

Mayer (1992) resalta la utilidad de diferenciar entre los procesos involucrados en la construcción de una representación de un problema y los implicados en su resolución, ya que la investigación cognoscitiva en el aprendizaje de la matemática algunas veces enfatiza los procesos, tales como, procedimientos de cálculo y estrategias de resolución.

En este sentido, Hegarty, Mayer y Monk (1995) proponen que el proceso de comprensión involucrado en los problemas de naturaleza verbal abarca las siguientes fases: 1) construcción de un texto base, 2) construcción de una representación matemática y 3) construcción de un plan de resolución.

Etapa 1: Construcción de un texto base.

Esta etapa supone que el texto en un problema matemático se procesa por pasos. En cada paso el resolutor lee una oración, es decir, una cláusula que expresa un trozo de información acerca de una de las variables o valores en el problema. En la construcción del texto base, el resolutor debe representar el contenido proposicional e integrarlo con la otra información en su representación del problema. En este proceso, el resolutor puede utilizar conocimiento de los tipos de enunciados que ocurren en problemas matemáticos (Mayer, 1981). Este incluye: **asignacione**s que expresan un valor para una variable, **relaciones** que expresan la relación cuantitativa entre dos variables y **preguntas** que expresan que se desconoce el valor de una determinada variable. Por ejemplo: En el supermercado "A" la margarina cuesta Bs. 65 la panelita. Esto es 5 pesos menos que en el supermercado "B". Si usted necesita comprar 4 panelitas de margarina, ¿cuánto le costará comprarlas en el supermercado "B"?

Asignación 1: Costo de la panelita de margarina en el supermercado "A", Bs. 65.

Relación: Costo de la margarina en el supermercado "B", 5 pesos más que en el supermercado "A".

Asignación 2: Margarina que usted necesita, 4 panelitas.

Pregunta: Costo total de la margarina en el supermercado "B".

Etapa 2: Construcción de una representación matemática.

En esta segunda etapa de comprensión, el resolutor es guiado por el objetivo de resolver un problema matemático y construye una representación. Es en esta etapa que los resolutores se diferencian porque escogen un enfoque diferente: el directo o el significativo.

En el enfoque directo, esta segunda etapa consiste en que el resolutor toma la decisión de si el enunciado procesado contiene un hecho clave, por ejemplo, un número como 65 o una palabra clave como "más" o "menos" en el enunciado del problema sobre las panelitas de margarina. En el enfoque significativo, los resolutores intentan construir un modelo del problema y modifican el formato de su representación: de una basada en proposiciones a otra basada en objetos.

Etapa 3: Construcción de un plan de resolución.

Una vez que el resolutor ha representado la información que cree relevante para la resolución del problema, está listo para planificar los cálculos aritméticos necesarios para resolverlo. En el caso del problema sobre el precio de las panelitas de margarina, el plan correcto es primero añadir 5 pesos al precio de las panelas en el supermercado "A" y entonces multiplicar el resultado de este cálculo por cuatro. Un resolutor que utilice el enfoque directo basará su resolución en palabras claves como "menos" y en los números del problema. Debido a que "menos" se asocia con la sustracción, el resolutor probablemente generará una solución incorrecta, es decir, restará 5 pesos del precio de la panelita de margarina, en lugar de añadírselos.

Para concluir esta sección, es conveniente señalar lo siguiente: los problemas aritméticos de naturaleza verbal son más difíciles de resolver que los presentados en forma matemática, porque demandan del sujeto resolutor del problema el desarrollo de otros procesos diferentes a los del cálculo y la ejecución. Los problemas de naturaleza verbal, como sugieren Hegarty, Mayer y Monk (1995), implican la construcción de un texto base a partir del procesamiento del enunciado del problema, la construcción de una representación matemática, es decir, salirse del lenguaje del problema y utilizar las reglas de la aritmética o del álgebra y, finalmente, la construcción de un plan de resolución que permita obtener la solución del problema.

Estrategias de adición.

Existen tres niveles de estrategias para realizar adiciones y sustracciones: modelamiento directo con objetos o con los dedos, conteo de secuencias y hechos numéricos.

En las operaciones de sumas realizadas por modelación directa, los niños utilizan la estrategia de contar todos. Esta estrategia consiste en utilizar objetos (palitos, granos, entre otros) o los dedos como formas para representar los elementos de los conjuntos. Seguidamente, se comienza a contar todos y cada uno de los elementos de ambos conjuntos unidos. Contar todos los elementos es una estrategia temprana que utiliza el niño. Por ejemplo, para un problema como M + N = ? (3 + 2 = 5), la estrategia del niño es comenzar desde cero, luego incrementar M veces y luego N veces. Diversos estudios realizados han encontrado que un alto porcentaje de niños, entre 6 y 8 años, utilizan esta estrategia la mayor parte del tiempo.

Teóricamente, existen dos formas posibles para desarrollar esta estrategia. Una vez que los conjuntos son construidos, el niño físicamente puede juntar los dos conjuntos y, cuando están unidos, comenzar a contar las unidades; o puede comenzar a contarlas sin unir físicamente los conjuntos. Algunos niños utilizan diversas formas de organización de los elementos, pero estos arreglos no reflejan cambios en la estrategia.

El segundo nivel lo constituye el conteo hacia adelante, es decir, contar partiendo del primer sumando o del sumando mayor. Esta estrategia es más eficiente y menos mecánica que la de modelación directo. El niño se ha dado cuenta de que no es necesario construir la secuencia completa para contar. Contar hacia adelante es una estrategia más sofisticada que la estrategia de simple conteo. Para un problema del tipo M + N = ?, la estrategia es comenzar con M y luego incrementar N veces (contar a partir del primer sumando). Por ejemplo, para 4 + 3 = ?, el niño comienza por “cuatro” y luego cuenta “cinco, seis, siete”, la respuesta es “siete”.

La resolución de problemas aritméticos no sólo se obtiene por modelación o por conteo. Los niños aprenden una cantidad de hechos numéricos tanto en la escuela como fuera de ella y los aplican para resolver problemas diferentes. El estudiante memoriza una respuesta para cada problema simple, tal como 4 es la respuesta a 2 + 2. Hechos de esta naturaleza son aprendidos incluso antes de estudiar la tabla de sumar y se han denominado hechos numéricos conocidos.

La etapa de los **hechos derivados** se refiere a la fase en la cual el estudiante utiliza el conocimiento de algunos hechos numéricos para obtener la respuesta a problemas. Por ejemplo, para el niño que aprendió que 6 + 6 = 12, su recuperación es prácticamente automática. Si posteriormente debe resolver 6 + 8 = ?, lo podrá resolver de la manera siguiente: 6 + 8 = 6 + (6 + 2) = (6 + 6) + 2 = 12 + 2 = 14. Otra manera sería que el alumno ya sabe que 6 + 6 es igual a doce y que para llegar a catorce le faltan dos, así, cuenta doce más uno = trece, más uno = catorce.

Suppes y Groen (1967) propusieron cinco modelos sobre cómo los niños suman dos conjuntos por conteo. La X en cada modelo representa la variable repetida en el conteo.

Cuadro 4

Modelos de adición según Suppes y Groen (1967)

Modelo 1. **X = M + N**	Este modelo sugiere que se cuenta tantas veces como la suma de los números dados. Por ejemplo, 2 + 6 = ?, se podría decir: 1, 2; 1, 2, 3, 4, 5, 6, es 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. La respuesta es 8.
Modelo 2. **X = M**	Este modelo sugiere que al sumar, se cuenta el primer número partiendo del segundo sumando. Por ejemplo, 2 + 6 = ?, se podría decir: 6, 7, 8. La respuesta es 8
Modelo 3. **X = N**	Este modelo sugiere que se cuenta solamente el

	segundo número partiendo del primer sumando. Por ejemplo, 2 + 6 = ?, se podría decir: 3, 4, 5, 6, 7, 8, es decir, se empieza a contar desde 3. La respuesta es 8.
Modelo 4. **X = max (M, N)**	Este modelo sugiere que al sumar, se suma el número mayor partiendo del menor.
Modelo 5. **X = min (M, N)**	Este modelo sugiere que se cuenta el número menor partiendo del mayor.

Estrategias de sustracción.

En las operaciones de sustracción se dan básicamente los mismos niveles que para la adición: modelamiento directo utilizando objetos o los dedos, conteo y recuperación a partir de hechos numéricos. En relación con los dos primeros niveles, los niños pueden utilizar diversas estrategias como las descritas en el cuadro 5.

La estrategia "**separar de**" implica un proceso de sustracción. En primer lugar, se representa la cantidad mayor (minuendo) y, posteriormente, se le quita la cantidad menor (sustraendo). La respuesta se obtiene contando los objetos no separados del conjunto mayor.

Las estrategias de conteo son paralelas a las estrategias por modelamiento directo. La diferencia más importante es que en el modelamiento el niño realiza las operaciones manipulando objetos. Los objetos concretos le brindan más seguridad en el desarrollo de las operaciones, pero el proceso cognoscitivo es similar. En el nivel de conteo, la estrategia paralela a "separar de" es "contar hacia atrás a partir de". El niño toma como punto de partida el número mayor y de allí comienza a contar hacia atrás. Por ejemplo, 8–4 = ?, el niño comienza con 8, menos uno 7, menos uno 6, menos uno 5, menos uno 4. La respuesta es 4. Esta secuencia contiene tantas denominaciones (nombres de números) como indica el número menor (sustraendo). El último número de la secuencia es la respuesta.

La estrategia "**separar a**" es muy similar a la estrategia "separar de", exceptuando que en la primera se van removiendo del conjunto mayor todos los elementos necesarios hasta igualar el número de objetos no removidos con el número de elementos contenidos en el conjunto menor. La respuesta se obtiene contando el número de elementos removidos.

Cuadro 5
Estrategias de sustracción

TIPO	**DESCRIPCIÓN**
MODELAMIENTO DIRECTO	
	Consiste en representar la cantidad mayor usando objetos o dedos. A esta cantidad se le quita la menor. La respuesta es el número de objetos que quedan. Ejemplo: 7 – 4 = ?
	Consiste en separar elementos de la cantidad mayor hasta que queda el número indicado por la cantidad menor. La respuesta se halla contando el número de los elementos separados. Ejemplo: 7 – 4 = ?
	Consiste en representar con objetos la cantidad mayor y luego la menor. A ésta se le

	añaden los objetos necesarios para que sea equivalente a la cantidad mayor. La respuesta se consigue contando el número de elementos añadidos a la cantidad menor. Ejemplo: 7 – 4 = ?
	Consiste en disponer de dos cantidades de objetos en correspondencia uno a uno. La respuesta se obtiene contando los elementos no emparejados. Ejemplo: 7 – 4 = ?
CONTEO	
Contar hacia atrás	Consiste en contar hacia atrás sin ayuda (objetos o dedos) a partir del minuendo tantos pasos como marca la cantidad menor. El último número en la secuencia de conteo es la respuesta. Ejemplo: 7 – 4 = ? Se verbaliza a partir del minuendo (siete), es decir: seis, cinco, cuatro, tres. La respuesta es tres
Contar hacia adelante a partir de un número dado	Consiste en contar a partir del número menor hasta alcanzar el mayor. La respuesta se obtiene contando los números contados para equiparar ambas cantidades. Ejemplo: 7 – 4 = ? Se verbaliza: cinco, seis, siete. Los números contados son tres, por lo tanto, la respuesta es tres.

El último par de estrategias involucra adición. El niño comienza con la cantidad menor y va sumando hasta construir el conjunto mayor. Cuando se trabaja con objetos concretos, el niño coloca un número de objetos igual al número menor dado y va añadiendo objetos al conjunto, uno cada vez, hasta que el conjunto sea igual al número mayor. Contando el número de objetos añadidos se obtiene la respuesta.

La estrategia paralela de conteo se denomina “**contar hacia adelante a partir de un número dado**”, en la cual el niño comienza a contar hacia adelante partiendo del número menor. La secuencia finaliza cuando se alcanza el valor del número mayor. La respuesta se obtiene contando el número de palabras de la secuencia. Por ejemplo, 7 – 3 = ?; tres más uno 4, más uno 5, más uno 6, más uno 7. La respuesta es 4.

Las estrategias de adición y sustracción analizadas representan diversos grados de abstracción. Por ejemplo, las estrategias de modelamiento directo con objetos es un nivel de estrategias relativamente primitivo y de naturaleza concreta que corresponde, según Piaget, a los primeros estadios de desarrollo de la inteligencia. Sin embargo, las estrategias de conteo requieren habilidades que implican la representación del mundo de lo concreto y, por lo tanto, se trata de un nivel más sofisticado.

Esta diferencia entre los niveles y las estrategias propiamente dichas determinará que los niños, dependiendo de su nivel de desarrollo intelectual, maduración, edad, entre otros factores, utilicen una u otra para resolver problemas aritméticos y algebraicos.

Los resultados de investigaciones realizadas señalan que los niños menores tienden a utilizar estrategias de naturaleza concreta (modelamiento directo con objetos o dedos), ya que les permite seguir, con mayor confianza, la secuencia de conteo y chequear el proceso varias veces. Los niños mayores tienden a utilizar estrategias más eficientes en términos de tiempo. Igualmente, los niños cambian las estrategias varias veces durante el proceso de adquisición de una determinada habilidad aritmética o algebraica (Goldman, 1989).

Los niños inician sus procesos de adición con la estrategia de “contar todos”, es decir, representan los dos sumandos mediante objetos o dedos y, posteriormente, cuentan todos los elementos de los conjuntos uno a uno. Una vez adquirida dicha estrategia, los niños recurren a las de conteo, consistentes en contar el segundo sumando partiendo del primero. Una vez consolidada esta estrategia, se encuentran preparados para utilizar otros procedimientos más sofisticados como el Modelo Min, el cual asume que el niño selecciona el sumando mayor y le suma el menor.

En la descripción de los cambios ocurridos durante el desarrollo de los niños, Siegler y Shrager (1983) sugieren una estrategia de selección la cual depende de las características de los individuos. La propuesta supone que los niños, en una primera instancia, tratan de resolver los problemas por recuperación de hechos numéricos almacenados en su memoria. Si este procedimiento no les resulta eficiente, vuelven a intentar resolverlo por el mismo procedimiento de recuperación. Si en este segundo intento fracasan, prueban una estrategia diferente como, por ejemplo, alguna estrategia de conteo. De esta manera, los modelos de conteo se utilizan sólo cuando la recuperación de los hechos almacenados en la memoria no ha sido eficiente para resolver el problema (Carpenter, 1985).

En términos generales, los resultados de las investigaciones pueden resumirse así: 1) los niños inicialmente ensayan estrategias del tipo “contar todos”, que paulatinamente se van disipando para dar origen a otras más eficientes como “contar hacia adelante” y “recuperar hechos numéricos conocidos”, 2) a pesar de que existe una variabilidad considerable en el uso de las estrategias dependiendo del tipo de problema, la estrategia de “contar hacia adelante” presenta un alto porcentaje de uso y perdura a lo largo de varios niveles de desarrollo en los niños examinados.

Lo ideal es lograr que los niños alcancen un repertorio de hechos numéricos que conforme la base para resolver un buen número de problemas. El acceso directo a los hechos numéricos almacenados en el sistema de memoria, presenta problemas de espacio en la capacidad de la memoria a corto plazo (MCP). Una forma de extender la capacidad de esta memoria es desarrollando automaticidad de la respuesta. En la medida en que ciertos procesos se puedan realizar automáticamente, sin necesidad de prestarle atención directa, habrá más espacio disponible en ella para los procesos que sí requieren atención. Para relacionar la automaticidad con el dominio del cálculo, es necesario distinguir entre dos tipos de tareas aritméticas en las que es común el ensayo y la práctica. Por una parte, están los llamados hechos numéricos, es decir, las combinaciones de números que conforman los bloques básicos de todos los cálculos y que son de cuatro tipos: suma, resta, multiplicación y división. Por otra parte, están los algoritmos o procedimientos de cálculo, estas son las secuencias de operaciones que se realizan utilizando los hechos numéricos para llegar a la resolución de problemas más complejos.

La práctica ayuda a que los hechos numéricos se puedan evocar instantáneamente de la memoria a largo plazo (MLP), permitiendo así que la memoria de corto plazo (MCP) pueda funcionar con mayor eficacia. Lo mismo sucede para el acceso automático de procedimientos memorizados o algorítmicos. Si un individuo tiene que reconstruir el procedimiento sobre cómo cambiar fracciones a su menor denominador común cada vez que los necesita, entonces el espacio disponible en la MCP es ocupado por procesos que podrían ser automáticos mediante una práctica apropiada. Así, entonces, la sugerencia es que al menos ciertas destrezas básicas de cálculo –hechos numéricos y algoritmos– necesitan desarrollarse hasta el punto de convertirse en procesos automáticos, de manera que no compitan por el espacio en la MCP con procesos de alto nivel en la resolución de problemas (Resnick y Ford, 1981).

La función del lenguaje.

Desde los inicios de la década de los ochenta, Rimoldi (1984) ha venido examinando el papel que tienen las estructuras lógicas y los sistemas simbólicos en la resolución de problemas. Este autor ha examinado los efectos de la edad, el sexo, el nivel socioeconómico, la pertenencia a grupos culturales diferentes, etc. La mayor parte de los estudios señalan, por una parte, la verificación de la hipótesis que establece la relación entre los conceptos de lenguaje y la estructura lógica y, por la otra, que la no resolución de un problema puede deberse a un uso deficiente o al desconocimiento del lenguaje utilizado en el enunciado.

Este aspecto, sin embargo, no ha sido contemplado en toda su dimensión e importancia por los teóricos clásicos del área de resolución de problemas. En efecto, han sido los investigadores de la comprensión del discurso los que han argumentado y estudiado con más énfasis la relación entre el lenguaje, el sistema simbólico y las estructuras de pensamiento. El lenguaje y el sistema de símbolos constituyen el formato básico de información almacenada en la memoria y éste es un conocimiento que permite comprender y representar el problema. Sin control del sistema simbólico es imposible pretender que un individuo opere satisfactoriamente aunque pueda ser capaz de traducir y comprender la estructura subyacente al problema (Kintsch, 1986).

Se ha observado que la mayor parte de los estudiantes, independientemente del nivel de escolaridad, resuelven menos problemas cuando éstos se presentan en forma verbal que cuando se presentan en forma matemática. Se ha comprobado que en muchas situaciones problema, una de las principales dificultades estriba en transformar el estado inicial, formulado en lenguaje natural, al estado formal en lenguaje matemático. Una vez obtenida la transformación y si ésta es correcta, el problema está prácticamente resuelto.

Kintsch (1987) descubrió tres posibles fuentes de error al resolver problemas aritméticos sencillos presentados en forma verbal: 1) mal uso o desconocimiento de estrategias aritméticas, falsas concepciones y fracaso en el procedimiento de conteo, 2) comprensión equivocada del problema, principalmente, por factores lingüísticos, y 3) sobrecarga de elementos en la memoria de corto plazo.

Recientemente, Jitendra y Kameenui (1996) han examinado de manera extensiva los patrones de errores cometidos por los estudiantes cuando resuelven problemas de tipo verbal, con el fin de comprender sus procesos de razonamiento y diseñar los procesos de instrucción correspondientes para remediarlos. Éstos van desde errores simples de cálculo, hasta otros más sofisticados derivados de la teoría del análisis de errores en lectura y el procesamiento de la información.

Los errores de cálculo incluyen varias categorías: operación equivocada, algoritmo defectuoso o incompleto, error de agrupamiento, inversión inapropiada, error de identificación, respuesta al azar o error por descuido. Los basados en el análisis de errores en lectura incluyen: errores en comprensión de lectura, ausencia de destrezas en los procesos de codificación, mientras que los errores derivados del procesamiento de información incluyen: dificultades en el lenguaje, representaciones espaciales, conocimiento inadecuado de conceptos y destrezas pre-requisitos, asociaciones incorrectas o aplicación de estrategias irrelevantes.

Metacognición y resolución de problemas.

La investigación en metacognición en el área de resolución de problemas ha tratado de identificar procesos estratégicos que pueden aplicarse a todo tipo de problemas, más que a áreas específicas. Brown (1978) identificó varios procesos estratégicos que los estudiantes deben adquirir para ayudarlos a convertirse en resolutores efectivos de problemas. Estos son:

- Conocer nuestras limitaciones como aprendiz.
- Estar consciente de las estrategias que uno sabe cómo usar y cuándo cada una de ellas es apropiada.
- Identificar el problema a resolver.
- Planificar las estrategias apropiadas.
- Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema.
- Evaluar la efectividad de los pasos anteriores de manera que el resolutor de problemas sepa cuando finalizar de trabajar en el problema.

En el cuadro 6 se indican los pasos a seguir en la resolución de un problema y las preguntas que el resolutor debe hacerse en cada paso con el fin de llevar a cabo un proceso metacognoscitivo en el transcurso de la resolución (Bañuelos, 1995).

Cuadro 6

Etapas y secuencias para desarrollar conocimiento metacognoscitivo para la resolución de problemas según Bañuelos (1995)

Primero	**Comprensión del problema**
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible cumplir las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para hallar la incógnita?, ¿Son insuficientes?, ¿Son redundantes?, ¿Son contradictorias? Represente el problema con una figura. Adopte una notación adecuada. Separe las diferentes partes de las condiciones, ¿Puede ponerlas por escrito?
Segundo	**Concepción de un plan**
Descubrir las relaciones entre los datos y la incógnita. Puede verse obligado a tomar en cuenta problemas auxiliares si no encuentra una relación inmediata. Debe llegar a tener un plan de resolución	¿Se ha encontrado antes con el problema?, ¿Lo ha visto de forma diferente?, ¿Conoce algún problema relacionado?, ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Revise la incógnita. Intente recordar algún problema familiar que tenga una incógnita igual o parecida. ¿Puede replantearse el problema? Si no puede resolver el problema propuesto, intente resolver primero algún problema que se relacione con el mismo. ¿Puede imaginarse un problema más sencillo, relacionado con éste?, ¿Algún problema más general?, ¿más particular?, ¿Análogo? ¿Puede resolver alguna parte del problema? Mantenga sólo una parte de las condiciones, abandone la otra parte. ¿Hasta qué punto se determina entonces la incógnita, cómo puede variar? ¿Podría extraer algo práctico a partir de los datos? ¿Puede pensar en otros datos adecuados para hallar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita, o los datos, o las dos cosas si hace falta, para que la incógnita esté más próxima a los datos nuevos? ¿Ha utilizado todas las condiciones? ¿Ha tomado en cuenta todos los elementos esenciales que intervienen en el problema?
Tercero	**Ejecución del plan**
Llevar a cabo un plan	Cuando lleve a cabo su plan de resolución, compruebe cada paso. ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede

	demostrar que es correcto?
Cuarto	**Verificación**
Examinar la solución obtenida	¿Puede comprobar el resultado? ¿Puede comprobar el razonamiento? ¿Puede percibirlo a simple vista? ¿Puede utilizar el resultado o el método para algún otro problema?

Implicaciones pedagógicas.

La escuela debe mantener viva la curiosidad infantil y la actitud cuestionadora adolescente, creando una atmósfera favorable a las preguntas y los cuestionamientos.

Resolver problemas implica investigar, y para ello es útil el conocimiento organizado del área correspondiente, y su relación con generalizaciones significativas, organizado por el estudiante y aplicado por él a una variedad de contextos.

En tal sentido, la escuela debe proveer no sólo información, y criterios para seleccionarla según cada problema particular a resolver, sino también un bagaje de experiencias diversas entre sí, puesto que hay una relación neta entre tener conciencia de la existencia de un problema en un área y tener experiencia en esa área.

Para que los jóvenes aprendan a resolver problemas, Raths y Wasserman proponen las siguientes alternativas: a) presentar situaciones que exigen aplicar principios. Se presentan también algunos datos y el alumno debe buscar la solución. b) Se presenta la solución del problema y se trata de indagar cómo se ha llegado a ella. c) Se plantea una situación que exige construir hipótesis para hallar posibles soluciones.

Un ejemplo, extraído de dichos autores, es el siguiente. El tema es el efecto de concentración sobre la rapidez de descomposición catalizada del agua oxigenada, y los datos entregados al alumno son los siguientes:

1. El agua oxigenada es una sustancia inestable que se descompone instantáneamente en agua y oxígeno. La rapidez de su descomposición se puede aumentar usando un catalizador adecuado.
2. Elija un catalizador e invente un procedimiento con el cual se pueda observar y medir la rapidez de la reacción. Investigue luego el efecto del cambio de concentración del agua oxigenada sobre la rapidez con que se descompone. Si hay alguna relación definida y es de una cinética de orden inferior, podría teorizarse el mecanismo con que se opera la descomposición.

En esta actividad, el alumno debe aplicar principio a situaciones nuevas. Necesita indagar lo escrito sobre el tema para buscar catalizadores más adecuados. Tendría que inventar un método experimental para observar la reacción. Para llegar a una conclusión sobre el efecto de concentración sobre la rapidez de reacción, registrará e interpretará los datos. Tal vez lo más importante sea determinar el mecanismo íntimo de la reacción, lo que exige el análisis y evaluación de los efectos de concentración. En todo esto, la responsabilidad de la elección y la organización podría bien estar en manos del alumno.

Uno de los aspectos importantes que conviene resaltar en este aparte, es que la resolución de problemas es una actividad conformada por diferentes tipos de procesos y, en este sentido, constituye una vía mediante la cual los individuos utilizan el conocimiento adquirido previamente –declarativo o procedimental– con el fin de satisfacer las demandas de una situación nueva, no familiar.

En nuestro sistema educativo, es ya un hecho establecido que los docentes de áreas en las cuales hay que resolver problemas como matemática, física, química, etc., le asignan gran importancia a la solución correcta; sin embargo, es necesario modificar tal concepción y lograr que los docentes acepten la noción de que: el objetivo fundamental en la enseñanza de resolución de problemas es ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento y procesos que permitirán que éstos alcancen soluciones correctas.

Krulik y Rudnick (1982) sugieren que el docente debe:

- Crear un ambiente apropiado para la resolución de problemas.
- Ofrecer un repertorio amplio y variado de problemas que generen una práctica intensiva y extensiva, además de que representen un reto para los estudiantes.
- Enseñar a los estudiantes a desarrollar estrategias que les permitan leer los problemas en forma analítica.
- Pedir a los estudiantes que inventen sus propios problemas.
- Permitir que los estudiantes trabajen en parejas o en pequeños grupos.
- Promover en los estudiantes el uso de estrategias alternativas: reconocer patrones de problemas, trabajar en sentido inverso, predecir y probar, simular, experimentar, reducir los datos, deducir, etc.
- Hacer preguntas mientras los estudiantes están en el proceso de discusión de los procedimientos para resolver problemas.
- Permitir que los estudiantes revisen sus respuestas.
- Utilizar estrategias que permitan el desarrollo de procesos del pensamiento.
- Hacer que los estudiantes representen, mediante un diagrama de flujo, sus propios procedimientos para resolver problemas.

En el área de la resolución de problemas y, más específicamente, en el área de la matemática, se han desarrollado varios modelos instruccionales: la instrucción directa, la autoinstrucción y la ejecución guiada o aprendizaje dirigido.

La instrucción directa se ha utilizado más frecuentemente para enseñar estrategias propias de una tarea en particular. A los estudiantes se les enseña una secuencia de acción específica y se modela esa secuencia dentro del contexto de la tarea. Este tipo de instrucción se estructura, paso por paso, para asegurar el dominio del procedimiento antes de que el estudiante ejecute la tarea. La ayuda del docente se desvanece gradualmente y se utilizan la práctica y la revisión con el fin de afianzar las estrategias adquiridas.

El entrenamiento en **estrategias autoinstruccionales** implica ofrecer a los estudiantes un conjunto de ayudas verbales diseñadas para recordarles los pasos a seguir en la ejecución de la tarea. Las ayudas verbales se usan como mediadores de las operaciones cognoscitivas y metacognoscitivas y, con frecuencia, se utilizan en un contexto de modelamiento, con el fin de ayudar a los estudiantes a adquirir las secuencias necesarias para alcanzar la solución del problema.

El **aprendizaje dirigido** se centra en la experiencia guiada. Este modelo instruccional intenta inducir a los estudiantes a involucrarse en procesos cognoscitivos y metacognoscitivos utilizados por los expertos. La adquisición de habilidades ocurre en forma progresiva. Básicamente los pasos son: 1) modelamiento de la ejecución de la tarea por parte del docente, 2) uso de procedimientos propios de una ejecución experta y 3) retroalimentación de la ejecución de los estudiantes con el fin de aproximarlos a dicho nivel de pericia.

La enseñanza de los procesos de pensamiento involucrados en la resolución de problemas, debe ofrecer a los estudiantes más que estrategias específicas relativas a una situación problema en particular, herramientas que puedan utilizar en otras situaciones. En síntesis, el objetivo a largo plazo debe ser el de lograr un estudiante estratégico que:

1. Posea un rango amplio y variado de procedimientos que pueda utilizar en cualquier situación.
2. Sea flexible en el uso de procedimientos en situaciones específicas.
3. Se involucre en actividades de supervisión del proceso de resolución de problemas, con el fin de determinar si las actividades que está realizando le permiten alcanzar la solución deseada.

Consejos previos. Nos parece algo apropiado, antes de seguir adelante, presentar el esquema heurístico de Polya, como una manera de tener un plan general, en el que se articulen de forma natural, nuestros propios consejos (ver Polya (1945)).

"Para resolver un problema se necesita:

I. ***Comprender el problema.***

- *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?*
- *¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?*

II. ***Concebir un plan.***

- *¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿ O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?*
- *¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar?*
- *He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?*
- *¿Podrá enunciar el problema en ora forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.*
- *Si no puede resolver e problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?*
- *¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?*

III. ***Ejecución del plan.***

- *Al ejecutar su plan de solución, compruebe cada uno de los pasos.*
- *¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?*

IV. ***Visión retrospectiva.***

- *¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?*
- *Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?"* (pág.19).

La primera conclusión que podemos extraer del Método Heurístico es que se necesita un cierto nivel de desarrollo (al menos específico en Matemática) para poder implementarlo, y que está dirigido a la resolución de problemas matemáticos.
Nos parece que la mejor ayuda que podemos brindarle a los alumnos (a todos) es el de facilitarles las técnicas mentales que podrán usar *después* de finalizados los exámenes finales,

no solo de Matemática y que se adapten mejor a la resolución de problemas. Veremos que el primer paso, radica siempre en crear un esquema en el que hay que:

1. Comprender el problema.
2. Admitir que todos los datos son necesarios (hay que usarlos).
3. No asumir ningún otro dato.

Creemos que la mejor asignatura (aunque no la única) para aprender lo que significa "comprender" es la Matemática. Si bien tratamos de usar todos los datos, esto no siempre nos conduce a la solución y en el caso de la asunción de información no contenida en el problema, podemos añadir que es algo inherente a nuestra personalidad. Para ilustrar esto último, les propondré un problema obtenido de la manera menos convencional posible: en una fiesta.

Papá Pato, Mamá Pata y Nené Patico, huyen de un lobo que se los quiere comer, al llegar al Paraná avistan un ronco, lo que les permite cruzar el río. Cuando llegan a la otra orilla, el Nené Patico dice: *llegamos a salvo los cuatro*. ¿Por qué dijo esto el Patico?

A continuación, exponemos algunas de las maneras que, a nuestro juicio, deben ser tenidas en cuenta por el profesor, a la hora de trabajar en el aula.

1. El papel del profesor como modelo de comportamiento.
2. El profesor como entrenador.
3. Muchas veces, existe más de una solución.
4. Otras veces, no existe solución.
5. Más contenido, no siempre es mejor.
6. Es necesario repetir lo que se les ha dicho.
7. El profesor ¿infalible?

Un problema matemático, tal y como hemos descrito más arriba, puede ser descrito como un "desafío" al pensamiento creativo, original y a la imaginación. Cada persona, puede encontrar un problema, más o menos difícil, en dependencia de su preparación, su dedicación, etc. Esto nos dice, que el número de estrategias que pueden ser desarrolladas para resolver problemas son, probablemente, tantas como variados sean los problemas mismos.

Algunas de las estrategias comúnmente utilizadas, y que han demostrado su efectividad en diferentes situaciones, son las siguientes:

I. Hacer un dibujo.
II. Trabajando "hacia atrás".
III. Conjeturar y probar.
IV. Encontrar un patrón.
V. Hacer una tabla.
VI. Recoger datos.
VII. Usar una computadora o calculadora.
VIII. Usar razonamientos deductivos y/o inductivos.
IX. Resolver un problema análogo más simple.
X. Usar aproximaciones.
XI. Determinar condiciones necesarias y/o suficientes.
XII. Determinar características del objeto.

Ilustraremos estas estrategias con algunos problemas, lo que permitirá hacer un resumen de toda la exposición anterior. Otros ejemplos y problemas vinculados a la Matemática escolar, pueden consultarlos en Posamentier (1996) y Posamentier y Krulik (1996).

I. Figuras o diagramas, son ¨mucho¨ en los problemas geométricos, pero son útiles también en los problemas de movimiento, problemas mixtos y muchos otros que se ¨resisten¨ a ser clasificados de algún tipo específico. Veamos un conocido ejemplo que demuestra aquello que *¨un dibujo vale más que 100 palabras¨*.
   Problema. Juan es más bajo que Pedro, pero más alto que Miguel. Miguel es más bajo que Juan pero más alto que Roberto. ¿Quién es el más alto y quién le sigue en altura?
   Ahora bien, cuando hay más de una variable involucrada, la visualización se hace más complicada, pues con una figura plana o en el espacio la visualización puede ser muy difícil, y construirla puede requerir habilidades para el dibujo que no todos poseemos. No obstante, si las variables involucradas son cuantitativas, muchas de estas dificultades se pueden evitar.
   El término visualización, al que aludíamos arriba, es de uso reciente en Educación Matemática donde su objetivo se enuncia como *“...en la visualización matemática lo que nosotros estamos interesados es precisamente en la habilidad de los estudiantes en dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o con ordenador) /para representar un concepto o problema matemático y utilizar el diagrama para alcanzar la comprensión, y como una ayuda en la resolución del problema ... Visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnología) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la compresión matemática”* (ver Zimmermann y Cunningham (1991)).
   Tomemos como ejemplo, el siguiente problema.
   Tres muchachos, Pedro, Juan y Miguel, tienen entre sí 9 lápices y 6 borradores, o sea, un total de 15 útiles. Pedro tiene 3 borradores y Juan tiene el mismo número de lápices. Juan tiene un útil más que Pedro, que tiene 4. Miguel tiene tantos borradores como Pedro tiene lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro y cuántos tiene Miguel?
   Trazar una figura que represente una situación es más fácil cuando dicha situación es estática. Cuando la situación es dinámica, se hace más difícil de visualizar y por lo tanto de representar. Una manera útil de entender la descripción de una situación dinámica, es recrearla por medio de pantomimas o de simulaciones concretas. Una vez objetivada de esta forma, será mucho más fácil trazar una figura que represente la situación lo suficientemente bien como para que nos sea posible resolver el problema.
   Tomemos como ejemplo el siguiente problema, muy conocido.
   Una hormiga está al final de una escalera de 10 peldaños. Cada día sube tres peldaños y a la noche, cae dos. ¿En cuántos días, la hormiga llegará al final de la escalera?
   Es indudable que un dibujo como el siguiente, permite al escolar, obtener muy fácilmente la respuesta correcta.

Día 8
...
...
...
...
...
Día 2
Día 1

Noche 2
Noche 1

II. Muchas demostraciones en Geometría pueden ser escritas, asumiendo las conclusiones y determinando entonces, cuáles pasos deben preceder al último; así se continúa asta que se llega al comienzo de la prueba. Una ilustración de la aplicación de esta técnica en un problema no geométrico, es el de resolver una ecuación cuadrática factorizando.
Problema. Escribir una ecuación cuadrática cuyas raíces sean 2 y -3.

III. Remitimos al lector al trabajo Nápoles (1998a), para una aplicación de esta técnica. No obstante, podemos abundar diciendo que una estrategia como la de Conjeturar y Probar (que puede hacerse por tanteo sistemático o por búsquedas exhaustivas, esto es, desechando sobreentendidos, lo que ayuda a disminuir el número de respuestas probables). Podemos ilustrar esta estrategia con el siguiente problema.
Seis muchachos compraron bebidas en una máquina expendedora que sólo acepta monedas de 25 centavos. La máquina vende gaseosas a 50 centavos y licuados a 1 peso. Si los muchachos gastaron en total 16 monedas en seis bebidas, ¿cuántas gaseosas y cuántos licuados compraron?

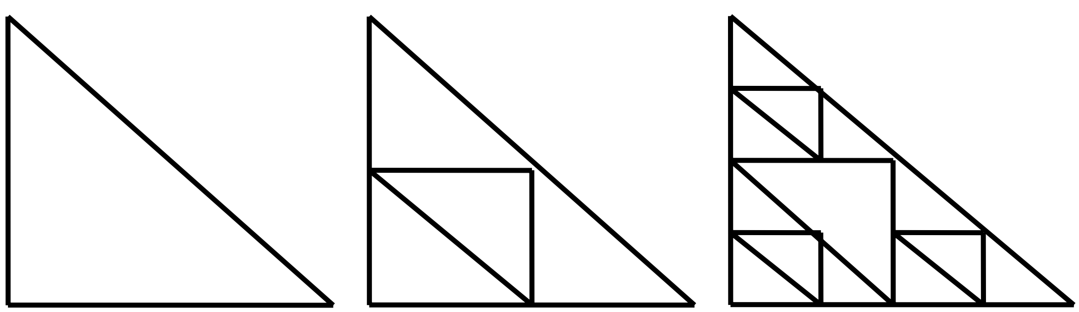
IV. Encontrar un patrón en una sucesión de números puede ser muy difícil. No existe una única regla en este caso. Los patrones en una sucesión no siempre son únicos.
Problema. Encontrar el próximo número en la sucesión 2,4,8,16,31.
Escribamos el siguiente triángulo numérico:

2 3 4
2 4 7 11
2 4 8 15 26
2 4 8 16 31 **57**

¿Por qué? Si consideramos el número máximo de regiones formadas al dibujar rectas por puntos dados en una circunferencia, notaremos el siguiente patrón.

Número de puntos sobre una circunferencia	**Número de regiones formadas**
2	3
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57

V. Consideremos el triángulo de Sierpinski, obtenido al ir eliminando, en cada paso, el triángulo equilátero central, de cada triángulo equilátero dado. Es decir:



1 2 3 ...

Problema. ¿Cuál es el área de la región sombreada, en cada etapa? ¿Cuál es el perímetro total de la región sombreada, en cada etapa?

Etapa	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*n*
Área	**1**	**¾**	**9/16**	**27/64**	**81/256**	$\mathbf{(3/4)^n}$
Perímetro	**1**	**3/2**	**9/4**	**27/8**	**81/16**	$\mathbf{(3/2)^n}$

La dinámica del cambio, está claramente aquí. Mientras el área decrece, el perímetro crece. Como la iteración continúa, *ad infinitum*, el área tenderá a cero, mientras que el perímetro crecerá sin cota. Este problema permitiría la inserción de manera natural, en el aula, de un tema apasionante: *los fractales*. Algunas observaciones y apuntes históricos, así como sus posibles implicaciones didácticas (sobretodo universitarias), pueden ser consultadas en Nápoles 1998b, 1998c, 1998d y 1998e, así como en Nápoles y Escalona 1999a y 1999b.

VI. Mientras que en ocasiones, podemos contestar los problemas con respuestas aproximadas o no numéricas (como el anterior), otras veces se requieren respuestas exactas. Presentaremos algunas estrategias para organizar los datos, que pueden ser usadas, cuando sumas exactas sean necesarias.
Problema. Un billete de 20 pesos es utilizado en un kiosco para comprar mercancías por ese valor exacto. Si se tiene una lista de precios. ¿Qué compra debemos hacer, para sumar exactamente la cantidad requerida?
La estrategia para resolver este tipo de problemas, es descubrir una combinación adecuada de precios, para ello primero combinamos aquellos precios cuyas unidades enteras no sobrepasen 10 pesos. Después, encontrar combinación de centavos que sumen 1.00. En ocasiones, existen varias respuestas correctas y puede no existir ninguna.

VII. Es recomendable cuando es necesario asistir al resolutor en problemas cuya solución puede requerir mucho tiempo de cálculo. Entendido estos de una naturaleza repetitiva, lo cual es perfecto para calcular la solución.

VIII. Generalmente usados en problemas de diversa índole, pero con un rasgo común: es necesario este esquema como parte de la solución, pues es posible distinguir límites que se imponen los distintos elementos, extrayendo conclusiones de la información dada en el enunciado, o aprovechando cualquier otro recurso derivado de dicho enunciado.

Problema. Encontrar los numerales que hacen la siguiente adición correcta:

$$\begin{array}{r} XY \\ \underline{YZ} \\ YZY \end{array}$$

IX. Tomemos la conocida ¨Torre de Hanoi¨, en el que las siguientes reglas deben ser observadas:

- Solo un disco puede ser movido de una varilla a otra, en cada ocasión.
- Un disco mayor, no puede colocarse sobre uno menor.

Problema. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos necesarios H(n) para una Torre de n discos?
Para n pequeño, podemos obtener por manipulación, la siguiente conclusión:

n	**1**	**2**	**3**	**4**
H(n)	1	3	7	15

Es claro entonces que $H(n)=2^n-1$, y la prueba se completa por inducción.

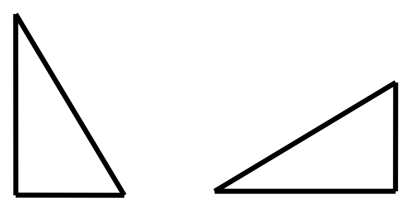
X. En ocasiones, esta estrategia puede ser confundida con las dos anteriores. Presentaremos un problema para ilustrarla.

Problema. ¿Existen números positivos $a,b\in\mathbf{Q}$, pero con $a,b\notin\mathbf{N}$, tal que $a^b=c\in\mathbf{N}$?
Muchos conocerán la proposición ¨*la raíz cuadrada de un número natural, es natural o irracional*¨. Lo mismo se cumple para la raíz n-ésima, y puede ser probada por reducción al absurdo.
Es indudable la relación de esta estrategia y la creación de problemas matemáticos, cf. Cruz, 1998, así el problema anterior puede ser considerado un caso especial del siguiente.
Problema. ¿Existen números positivos $a,b\in\mathbf{R}$, pero con $a,b\notin\mathbf{Q}$, tal que $a^b=c\in\mathbf{Q}$?

XI. La solución del último problema, puede servir, perfectamente, a nuestros propósitos.

XII. Es muy útil esta estrategia, en problemas geométricos sencillos, que estén relacionados con propiedades de polígonos, por ejemplo.

Problema. Dados los triángulos (iguales):



¿Cuántas figuras pueden ser formadas ordenando estos triángulos?

Estrategias no convencionales. Quisiéramos retomar las palabras del ¨**Programa Nacional de Resolución de Problemas**¨ cuando postula: ¨*La Matemática es un modo de pensar, un estilo de razonar. Sirve para decidir si una idea es razonable o al menos para establecer si una idea es probablemente adecuada para lo que se busca. La Matemática es un campo abierto a la exploración y a la investigación y todos los días se producen ideas nuevas y fecundas. Es un modo de pensar que sirve para resolver los problemas de la ciencia, de la administración, de la industria, etc.*¨.
La Resolución de Problemas ha sido considerada una piedra de toque de la Educación Matemática, como ya hemos dicho, desde hace unos 20 años. El **NCTM**[5] de Estados Unidos lo incluyó como un componente fundamental de su **Agenda para la Acción** (1980) y sus

[5] National Council of Teachers of Mathematics.

Estándares Curriculares[6] de 1989. Es de destacar que aparece en este último como ... !el primer standard¡, todos estos hechos han llevado a que la Resolución de Problemas sea un tópico al que se le reserve una especial atención.
En esta sección, vamos a considerar algunas estrategias interesantes, referidas a cómo enfrentar problemas, sin utilizar el patrón usual que pudiera esperarse de un típico estudiante.
Estas estrategias deben entenderse como un primer ¨paso¨ en el desarrollo del pensamiento lógico del estudiante. Por otra parte, las técnicas más tradicionales pueden ser consultadas en Nápoles y Cruz (1999).
Obviamente, la intención es mostrar a nuestros estudiantes, estrategias alternativas que pasen a engrosar su arsenal de herramientas de resolución de problemas.
Un problema matemático, tal y como hemos descrito más arriba, puede ser descrito como un "desafío" al pensamiento creativo, original y a la imaginación. Cada persona, puede encontrar un problema, más o menos difícil, en dependencia de su preparación, su dedicación, etc. Esto nos dice, que el número de estrategias que pueden ser desarrolladas para resolver problemas son, probablemente, tantas como variados sean los problemas mismos.
El siguiente esquema heurístico, toma como base un esquema similar presentado en nuestra tesis de licenciado, y que estaba dirigida a la demostración de teoremas matemáticos en la matemática escolar y partía de la presentada por Müller (1987).

1. **Analice el Problema a resolver.**

- Compruebe que entiende todos los conceptos y expresiones que aparecen en el texto.
- Infórmese sobre los términos desconocidos.
- ¿Puede escribir el problema en forma implicativa? Si es así, ¿cuál es la premisa, cuál es la tesis?
- Construya, si es posible, un esquema. Denótelo en forma adecuada.
- ¿Puede representarse gráficamente el contenido del problema? Si es así, haga un esbozo. Introduzca notaciones apropiadas. Indique formulaciones equivalentes.

2. **Busque medios de demostración adecuados.**

- ¿Ha resuelto anteriormente un problema similar? Si es así, recuerde cómo procedió.
- ¿Conoce problemas que tengan las mismas o similares premisas que el problema dado?
- ¿Conoce problemas que tengan las misma tesis o una tesis similar que el problema dado?
- ¿Cuáles serían las definiciones necesarias?
- ¿Cuáles serían los teoremas y resultados necesarios?
- ¿Cuáles serían los conceptos auxiliares que pueden ser útiles?
- ¿Qué líneas auxiliares pudieran ser útiles para poder aplicar teoremas y resultados conocidos?
- ¿Existen antecedentes históricos sobre la evolución de este problema, o uno similar?

3. **Busque una vía de demostración.**

- ¿Qué resulta de las premisas dadas?
- ¿Qué pudiera resultar directamente de la tesis?
- Analice casos especiales del teorema.
- ¿Qué resultaría de la negación de la tesis?
- Resuelva eventualmente, ejercicios auxiliares.
- Busque relaciones entre consecuencias de las premisas y las condiciones suficientes para la tesis.

---

[6] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.

- ¿Se han utilizado en los razonamientos anteriores todas las premisas?
- Siga una idea que lo conduzca al objetivo o hasta que vea su inutilidad. En este último caso, no tema comenzar otra vez desde el principio.

La Resolución de Problemas y el Descubrimiento por Analogías. Jacques Bernoulli descubrió la suma de varias series infinitas, pero fracasó con la de la suma de los recíprocos de los cuadrados:

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/25 + ...$$

y escribió: *"Si alguien encuentra lo que hasta ahora no han logrado nuestros esfuerzos y nos lo comunica, le estaremos muy agradecidos por ello"*

El problema interesó a Euler, quien después de varios intentos encontró el valor exacto por casualidad, la analogía le había conducido a una conjetura. Primeramente, debemos decir que Euler, antes de conjeturar cuál podría ser la suma de esta y probarlo, intentó obtener una buena aproximación calculando sumas parciales, lo cual es muy meritorio si se tiene en cuenta la lenta convergencia de esta serie.

Veamos lo que hizo Euler. Antes que todo hagamos una puntualización: si una ecuación algebraica tiene término constante unidad, entonces el coeficiente de la potencia de primer grado es la suma con signo contrario de los recíprocos de las soluciones[7]. Consideremos ahora la ecuación senx=0, por Taylor se tiene que:

$$x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ... = 0,$$

como el miembro izquierdo tiene infinitos términos, o sea, es de *"grado infinito"*, no es extraño, dice Euler, que haya una infinidad de raíces: 0, π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, ... pues senx se anula en todos los múltiplos enteros de π. Euler descarta la raíz cero y divide el miembro izquierdo por x (el factor lineal correspondiente a la raíz cero) y obtiene:

$$1 - x^2/2.3 + x^4/2.3.4.5 - x^6/2.3.4.5.6.7 + ... = 0,$$

con raíces π, $-\pi$, 2π, -2π, ... haciendo el cambio x^2=u tenemos:

$$1 - u/3! + u^2/5! - u^3/7! + ... = 0,$$

considerándola una ecuación algebraica y aplicando lo que puntualizamos antes:

$$1/2.3 = (1/\pi^2 + 1/4\pi^2 + 1/9\pi^2 + ...),$$

por lo que:

---

[7] Para hacerse una idea, basta considerar la ecuación de segundo grado (x-a)(x-b)=0, desarrollar, dividir por ab y extender a grados superiores.

$$\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + ...$$

Es decir, la suma de los recíprocos de los cuadrados es igual a $\pi^2/6$. Este resultado (uno de los primeros que obtuvo) estableció a Euler como un matemático de primerísimo rango, a pesar de ser sus argumentos muy criticables (como él mismo reconocía) y, no solo, por la utilización de argumentos finitos en entes infinitos, sino también, porque si la ecuación sen x=0 tuviera ceros no reales, todo el argumento podría ser invalidado.
Este y otros ejemplos aportados por Euler, no permiten dudar de la validez del método por analogía y de los resultados derivados por él. Sin embargo, en la lógica estricta, el método seguido por Euler, como ya dijimos, fue una falacia indebida: aplicó una regla a un caso para el cual esta no estaba formalizada, una regla para ecuaciones algebraicas a una ecuación que no era algebraica. Lógicamente, el paso de Euler no estaba justificado. Sin embargo, la analogía lo justificaba; analogía que tiene en su haber los mejores logros de una ciencia en crecimiento a la que él mismo llamó **"Análisis del Infinito"**.
Las razones de Euler para confiar en su descubrimiento, no son demostrativas. Euler no reexamina los fundamentos de su conjetura, él examina sólo las consecuencias y niega la verificación de ellos como argumentos en pro de su conjetura. Puede decirse que era un método rudo y falaz, pero enriqueció la Matemática de modo considerable.
Pensemos que Euler no estaba interesado en argumentos conceptuales generales, sino en aplicaciones algorítmicas: Euler algebrizó las series y productos infinitos, fracciones continuas y trató habitualmente las series de potencias como polinomios de grado infinito.
Estas razones son, de hecho, inductivas. Esta metodología fue llamada por algunos matemáticos posteriores como *"inducción euleriana"*, siendo no pocos los que usaron este método, íntimamente relacionado con la analogía, inducción y no-contradicción con hechos matemáticos conocidos.
El impulso que le dio esta metodología a la Matemática fue, como ya dijimos, grande, pero también la guió a contradicciones donde no era fácil encontrar la salida, el método no satisface ninguno de los criterios de rigor que exigimos hoy y, sin embargo sus conclusiones son correctas; quizás el mejor ejemplo de esto sea el teorema de Cauchy: *el límite de una serie convergente de funciones continuas, es a su vez continuo*. Cauchy fue el que dio por primera vez una prueba de esto, cuyo resultado se había dado por supuesto en el siglo XVIII, suponiéndose, por tanto, que no precisaba ninguna demostración[8].

Históricamente, el trabajo de Fourier sobre la Teoría del Calor, fue el primero donde se señaló la incorreción de este resultado. Sin embargo, es más conocida la observación de Abel en 1826[9] cuando escribe: ¨*Me parece que hay algunas excepciones al Teorema de Cauchy*¨, utilizando la misma serie que presentó Fourier:

$$\text{sen}\phi - \text{sen}2\phi/2 + \text{sen}3\phi/3 - ...$$

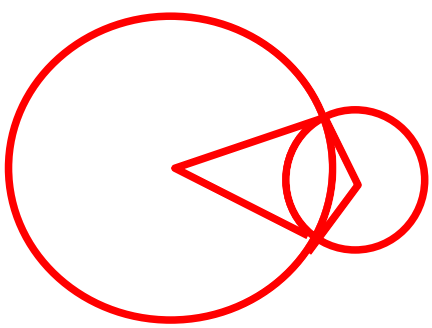
[8] ¨**Cours d´Analyse de L´Ecole Royale Polytechnique**¨, París: de Bure, 1821.

[9] ¨**Letter to Hansteen**¨, en S. Lie et L. Sylow (eds.)-¨**Oeuvres Complétes**¨, vol.2, Christiania: Grondahl, 1881, pp.263-265.

como contraejemplo, situó el verdadero problema en determinar la región de validez de muchos teoremas incorrectamente planteados, pues añadió: ¨*como se sabe, hay muchos más contraejemplos como éste*¨.
¿Debemos renunciar a la inducción en la solución de problemas matemáticos?, la historia muestra la efectividad de este método de trabajo en algunas situaciones cuando extrapolamos correctamente un método determinado, lo fundamental, como lo señaló Abel, está en el buen planteamiento de un problema en lo referente a su región de validez.
Más aún, esta situación se ajusta a las corrientes psicológicas actuales en Educación Matemática, que destacan la importancia que tiene *la participación activa del alumno*, en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La tendencia constructiva, de la que todos tenemos parte, considera que el papel del profesor en la enseñanza es encontrar y ajustar actividades para los estudiantes, de manera que se facilite la construcción del conocimiento por parte del alumno. La perspectiva cognitiva considera que el aprendizaje se genera encadenando el nuevo conocimiento sobre el ya existente. La tendencia sociológica o epistemológica interpreta que la enseñanza es una ayuda a los estudiantes para construir conocimientos a través de problemas que les lleven a examinar sus propias consideraciones sobre lo enseñado (Schatz and Grouws (1992)).
Como se ha podido apreciar, a la hora de resolver un problema (aún de los denominados clásicos) puede utilizarse la Historia de la Matemática como generador de ideas útiles, que permitan considerar métodos de razonamiento inductivo, como la Inducción Euleriana presentada aquí. Esta consideración puede evitar tener que realizar las operaciones deductivas más comunes, a la hora de resolver un problema cerrado y sí, como decíamos antes, considerar procedimientos inductivos que pueden llevarnos a la solución del problema.

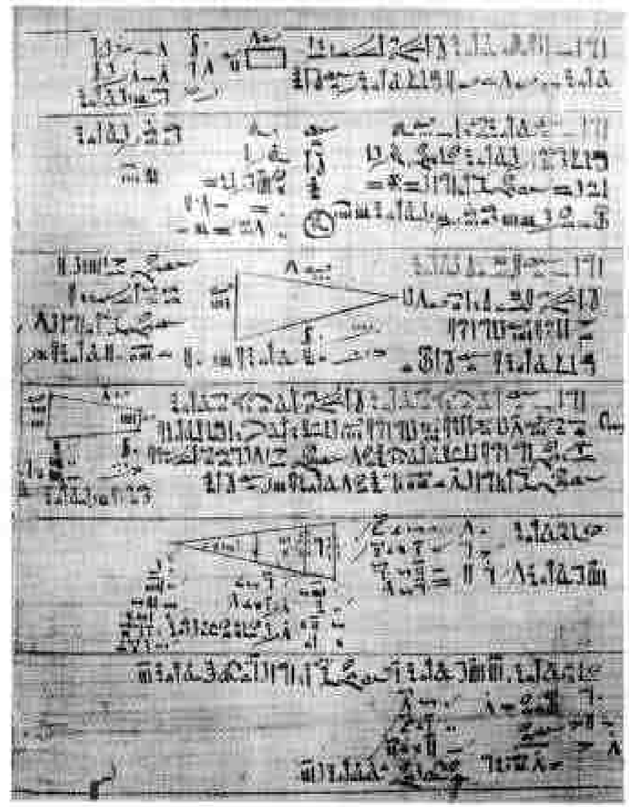
Primero Finales.

Problema 1. Partiendo de un punto P, un oso camina un kilómetro hacia el sur. Cambia entoces de dirección y recorre un kilómetro hacia el ese. Después, dando vuelta de nuevo a la izquierda, recorre un kilómetro hacia e norte para llegar exactamente al punto de partida P. ¿De qué color es el oso? (ver Polya (1945)).



Problema 2. Dibujar dos círculos que se intersectan en dos puntos, de tal forma que la medida del arco determinado sobre un círculo, es dos veces mayor que el arco cortado sobre el otro.

Problema 3. ¿Existen números $a,b\in\mathbf{R}$, pero con $a,b\notin\mathbf{Q}$, tal que $a^b=c\in\mathbf{Q}$?



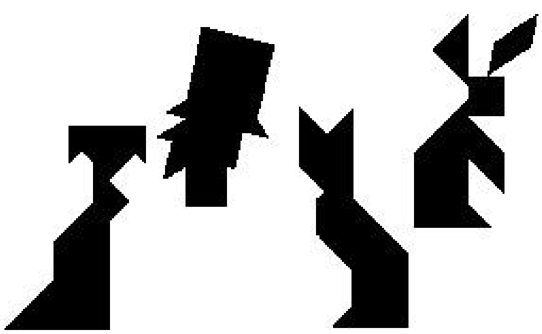
Pasatiempos y Juegos Matemáticos. Los enigmas y pasatiempos matemáticos varían desde los más problemas simples a profundos que todavía están insolubles. La historia entera de la matemática se entreteje con juegos matemáticos que han llevado al estudio de muchas áreas de matemática. Juegos numéricos, entretenimientos geométricos, los problemas de redes y problemas combinatorios, están entre los tipos más conocidos.

El Papiro Rhind muestra que la matemática egipcia antigua, estaba basada principalmente en problemas tipo puzzles. Por ejemplo, el papiro, escrito alrededor de 1850 AC, contiene un tipo bastante familiar de enigma.

Siete casas contienen siete gatos. Cada gato mata siete ratones. Cada ratón había comido siete espigas de granos. Cada espiga de granos habría producido siete hekats de trigo. ¿Cuál es el total de todos éstos?

Problemas similares aparecen en el **"Liber Abaci"** de Fibonacci escrito en 1202 y el conocido *St Ives Riddle* del Siglo XVIII basados en la misma idea (y en el número 7).

La matemática griega produjo muchos enigmas clásicos. Quizás los más famosos son los de Arquímedes en su libro **"El Arenario"** donde él plantea el Problema Ganadero.



Si posee arte diligente y sabio, Oh Extraño, calcule el número de ganado del Sol...

En algunas interpretaciones del problema, el número de ganado se convierte en un número con 206545 dígitos![10].

Arquímedes también inventó una división de un cuadrado en 14 pedazos que llevan a un juego similar al Tangrams haciendo figuras de

[10] Este antiguo problema se reduce a una ecuación diofántica(i.e. una ecuación con soluciones enteras) la cual puede ser planteada como sigue: *El dios sol poseía un ganado compuesto por B,N, M, A (respectivamente) toros blancos, negros, manchados y amarillos y b, n, m, a vacas.* Estos números satisfacen las siguientes nueve ecuaciones $B=(1/2 + 1/3)X+Z$, $b=(1/3 + 1/4)(X+x)$, $X=(1/4 + 1/5)B+Z$, $x=(1/4 + 1/5)(Y+y)$, $y=(1/5 + 1/6)(Z+z)$, $z=(1/6 + 1/7)(B+b)$, $B+b$ es un número cuadrado, $Y+Z$ es un número triangular. Esta se puede reducir a solucionar la Ecuación de Pell $u^2-4729494v^2=1$ y el método de la fracción continua nos da que $u=109931986732829734979866232821433543901088049$, $v=50549485234315033074477819735540408986340$, lo cual nos lleva a una solución del problema original de más de 200 000 dígitos.

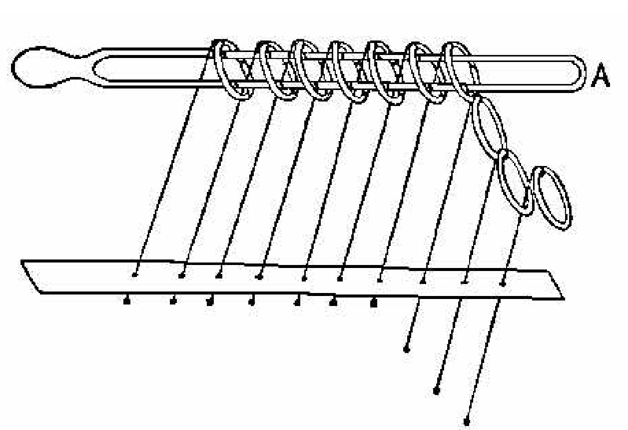
los 14 pedazos. Los Tangrams son de origen chino y requieren poca habilidad matemática. Sin embargo, es interesante ver cuántas figuras convexas usted puede hacer de los 7 pedazos del tangram. Note que el número 7 parece haber sido asociado con propiedades mágicas. Estas tienen una nueva popularidad cuando Dodgson, conocido como Lewis Carroll, introduce los caracteres tipo Alice.

Fibonacci, ya mencionado antes, es afamado por su invención de la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... donde cada número es la suma de los anteriores dos. De hecho, se ha levantado de esta sucesión una riqueza tal en la Matemática, que hoy un Journal se consagra sólo a temas relacionados con dicha sucesión. Sin embargo, la sucesión como tal no aparece en el trabajo de Fibonacci sino sólo el Problema del Conejo.

Un cierto hombre puso un par de conejos en un lugar rodeado en todos los lados por una pared. ¿Cuántos pares de conejos puede obtenerse de ese par en un año, si se supone que todos los meses cada par produce un nuevo par, el cual, a partir del segundo mes se transforma en productivo?

Uno de las menciones más tempranas del Ajedrez en enigmas, está dada por el matemático árabe Ibn Kallikan que, en 1256, propone el problema de los granos de trigo, 1 en el primer cuadrado del tablero de ajedrez, 2 en el segundo, 4 en el tercero, 8 en el cuarto, etc. Uno de los problemas más antiguos que involucra piezas de ajedrez es debido a Guarini di Forli que en 1512 preguntó cómo dos caballos blancos y dos caballos negros podrían intercambiarse, si ellos se sitúan en las esquinas de un tablero 3x3 (usando los movimientos normales de un caballo).

Los cuadrados mágicos involucran todos los números 1, 2, 3,...,n^2 para llenar los cuadrados de una tabla nxn, para que cada fila, cada columna y ambas diagonales principales sumen al mismo número. Ellos se remontan hasta el 2200 AC cuando la China los llamó *lo-shu*. A principios del Siglo XVI, Cornelius Agrippa construyó cuadrados para n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qué asoció con los siete planetas conocido (incluso el Sol y la Luna). El famoso grabado de



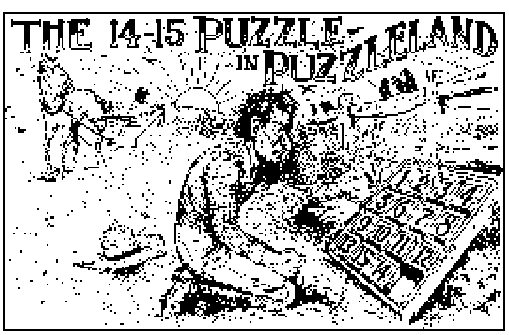
Dürer **"Melancolía"**, hecho en 1514, incluye un cuadrodo mágico.
El número de cuadrados mágicos de un orden dado todavía es un problema sin resolver. Hay 880 cuadrados de rango 4 y 275305224 cuadrados de rango 5, pero el número de cuadrados más grandes, todavía es desconocido.
En el cuadrado de Durero se estudiaron condiciones simétricas y agregó otras como la condición que todas las diagonales (trazadas como si el cuadrado estuviera en un toro) tuvieran el mismo número que las filas y las columnas. Euler estudió este tipo de cuadrado conocido como un cuadrado *pandiagonal*. Ningún cuadrado pandiagonal de orden 2(2n+1) puede existir, pero sí para todos los otros órdenes. Para n = 4 hay 880 cuadrados mágicos de los que 48 son pandiagonal. Veblen en 1908 usó métodos matriciales para estudiar cuadrados mágicos.
Otros inventores de juegos fueron Recorde y Cardan. Cardan inventó un juego que consiste en varios anillos en una barra. Aparece en la edición de 1550 de su libro **"De Subtililate"**. Los anillos fueron colocados para que sólo el anillo A pudiera sacarse sin problemas. Quitar todos los anillos requiere $(2^{n+1}-1)/3$ movimientos si n es impar y $(2^{n+1}-2)/3$ movimientos si n es par. Este problema es similar al conocido problema de las Torres de Hanoi. De hecho Lucas (el inventor de las Torres de Hanoi) da una solución bonita al Enigma del Anillo de Cardan que usa la aritmética binaria.
Tartaglia que con Cardan descubrió la solución algebraica de la ecuación cúbica, era otro inventor famoso de pasatiempos matemáticos. Él inventó muchos problemas aritméticos, y contribuyó a los problemas de pesar masas con el menor número de pesas y problemas del tipo Ferry Boat que ahora tienen soluciones que usan teoría de grafos.
Bachet era afamado como poeta, traductor y matemático de la Academia francesa. Él es mejor conocido por su traducción de 1621 de la **"Arithmetica"** de Diophantus. Éste es el libro que Fermat estaba leyendo cuando él inscribió el margen con su Último Teorema famoso. Bachet, sin embargo, también es afamado como un coleccionista de enigmas matemáticos que él publicó en 1612 **"Problèmes plaisans et délectables qui font par les nombres"**. Contiene muchos de los problemas referidos anteriormente, problemas para cruzar ríos, problemas de pesadas, trucos numéricos, cuadrados mágicos, etc. Aquí presentamos uno de los problemas de pesadas de Bachet.

¿Cuál es el menor número de pesos que pueden usarse en una cacerola de la balanza para pesar cualquier número íntegro de libras de 1 a 40 inclusive, si los pesos pueden ponerse en cualquiera de las cacerolas de la balanza?[11].

Euler es quizás el matemático cuyos enigmas han llevado a las disciplinas matemáticas más profundas. Además de los problemas de cuadrados mágicos y problemas de teoría de los números, él consideró la Gira del Caballo en el tablero

[11] Cuatro pesas de 1, 3, 9 y 27 libras son necesarias.

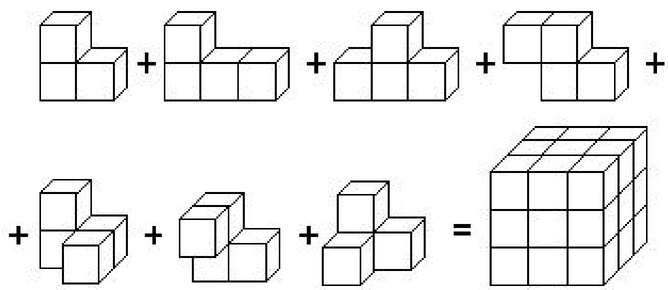
de ajedrez, el problema de los Treinta Seis Funcionarios y los Siete Puentes de Königsberg.
Euler no fue el primero en examinar el problema de la Gira del Caballo. De Moivre y Montmort lo habían analizado y resuelto en los primeros años del Siglo XVIII, después de haber sido propuesto por Taylor. Ozanam y Montucla citan las soluciones de ambos (De Moivre y Montmort). Euler, en 1759 siguiendo una sugerencia de L. Bertrand de Ginebra, fue el primero en hacer un análisis matemático serio de él e introduce conceptos que eran importantes en la teoría de grafos. Lagrange también contribuyó a la comprensión del problema de la Gira del Caballo, como hizo Vandermonde.
El Problema de los Siete Puentes de Königsberg (ver Anexos) anunció el principio de la teoría de grafos y la topología.
El Problema de los Treinta Seis Funcionarios, propuesto por Euler en 1779, pregunta si es posible colocar 6 regimientos que consisten en 6 funcionarios cada uno, en líneas diferentes en un cuadrado de 6x6 para que ninguna línea o regimiento se repita en cualquier fila o columna. El problema es insoluble pero ha llevado a trabajos importantes en combinatoria.
Otro problema famoso de ajedrez es el Problema de las Ocho Reinas. Este problema pregunta de cuántas maneras pueden ponerse 8 reinas en un tablero de ajedrez para que ninguna se ataque. El problema generalizado, de cuántas maneras pueden ponerse n reinas en un tablero de nxn para que ninguna se ataque, fue propuesto por Franz Nauck en 1850. En 1874 Günther y Glaisher describieron los métodos para resolver este problema basado en determinantes. Hay una única solución (salvo simetría) problema 6x6 y el enigma, en la forma de una tabla de madera con 36 agujeros en los que se ponían alfileres, se vendió en las calles de Londres por un penique.
En 1857 Hamilton describió su juego Icosian en una reunión de la Asociación Británica en Dublín. Se vendió a J. Jacques y Hijos, fabricantes de juegos de ajedrez de alta calidad, por £25 y se patentó en Londres en 1859. El juego se relaciona con el problema de la Gira del Caballo de Euler dado que, en la terminología actual, pide un circuito de Hamilton en un cierto grafo. El juego fue un fracaso y se vendieron muy pocas copias.
Otro problema famoso fue el Problema de las Chicas de Escuela debido a Kirkman. El problema, propuesto en 1850, pregunta cómo 15 muchachas de la escuela pueden caminar en 5 filas de 3 integrantes cada una durante 7 días para que ninguna muchacha camine más de una vez con cualquier otra muchacha en la misma fila. De hecho, si n es divisible por 3, nosotros podemos hacer la pregunta más general por n muchachas escolares que caminan durante (n - 1)/2 días para que ninguna muchacha camine más de una vez con cualquier otra muchacha en la misma fila. Soluciones para n=9, 15, se dieron 27 en 1850 y mucho trabajo se hizo después de esto en el problema. Es importante en la teoría moderna de combinatorias.



Alrededor de ese tiempo dos inventores profesionales de enigmas matemáticos, Sam Loyd y Henry Ernest Dudeney, estaban entreteniendo el mundo con un número grande de juegos matemáticos y recreos. El juego más famoso de Loyd fue el *Juego del 15*, el cual ilustra propiedades importantes de permutaciones. Loyd también era famoso por sus enigmas de ajedrez. Él inventó varios enigmas, algunos de los cuales son muy difíciles, que publicó en el primer número del *American Chess Journal*.

Otro pasatiempo muy famoso es el de Torres de Hanoi, inventadas por Edouard Lucas en 1883[12].

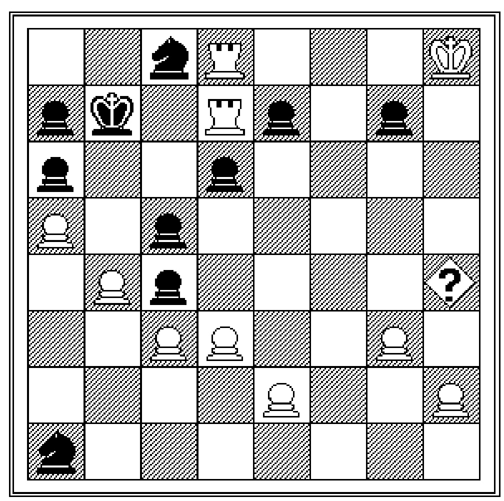
El juego de pentominoes es de más reciente invención. El problema de azulejear un cuadrado 8x8 con un agujero cuadrado en el centro se resolvió en 1935. Este problema fue resuelto por computadora exactamente en 1958, y se demostró que tenía 65 soluciones. En 1953 se introdujeron poliominoes más generales. Todavía es un problema insoluble cuántos poliominoes distintos de cada orden hay. Hay 12 pentominoes, 35 hexominoes y 108 heptominoes (incluyendo uno bastante dudoso con un agujero en el medio!). Los enigmas con polyominoes fueron inventados por Solomon W. Golomb, matemático e ingeniero eléctrico en la Universidad de California Del Sur.



Hay una versión 3-dimensional de pentominoes donde se usan cubos como los elementos básicos en lugar de los cuadrados. Un prisma de 3x4x5 rectangular puede hacerse de los pentominoes 3-dimensional. Estrechamente relacionado a éstos son los Cubos de Soma de Piet Hein. Esto consiste en 7 pedazos, 6 pedazos que consisten en 4 cubos pequeños y uno de 3 cubos pequeños. El objetivo de este juego es congregar un cubo de 3x3x3. ¡Esto puede hacerse de hecho de 230 maneras esencialmente diferentes!.

Un juego ligeramente más viejo (1921) pero todavía un juego de cubo es debido a P.A. MacMahon y lo llamó Enigma de los 30 Cubos Coloreados. Hay 30 cubos que tienen todas las posibles permutaciones de 6 colores para sus caras. (Puede demostrar usted que hay exactamente 30 cubos así?). Escoja un cubo al azar y entonces tiene que escoger otros 8 cubos para hacer un cubo de 2x2x2 con el mismo arreglo de colores como el primer cubo escogido. Cada cara del 2x2x2 cubo tiene que ser de un solo color y las caras interiores tienen que emparejar en color.

Raymond Smullyan, un lógico matemático, compuso varios problemas de ajedrez de un tipo muy diferente de aquellos normalmente conocidos. Ellos son conocidos como los problemas de análisis retrógrado (o lógica retrospectiva) y su objeto es deducir la historia pasada de un juego en lugar del futuro de un juego, que es el problema convencional. Los problemas de análisis retrógrado son problemas de lógica matemática[13].

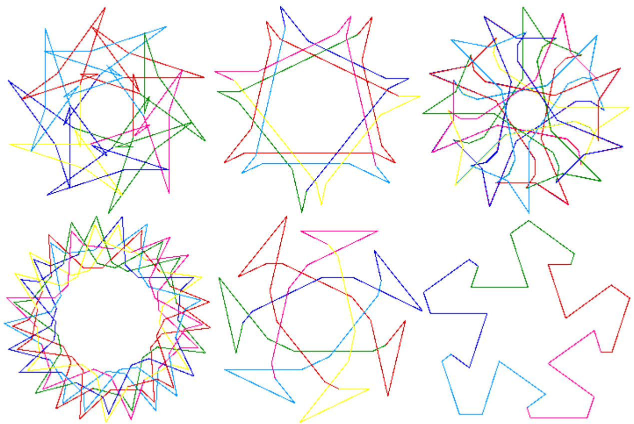


Encuentre la pieza perdida

[12] La leyenda que "acompaña" a este pasatiempo dice que en el Templo de Benares, existe un domo que marca el centro de la Tierra, el cual tiene tres agujas de diamantes del grosor de una abeja y 64 discos de oro, que los sacerdotes mueven de una aguja (torre) a otra, sin superponer uno de mayor diámetro sobre uno menor. Cuando terminen de pasar todos los discos de una torre a otra, el mundo se acabará entre terribles truenos y terremotos ... Como tenemos 2^{64}-1 movimientos, y si suponemos que se invierte un segundo en cada uno (¡), pasar todos los discos de una aguja aotra tomará 590000000000 años¡.

[13] El problema presentado es el primero compuesto por Smullyan, en 1925 cuando contaba con 16 años de edad.

Uno del más importantes inventores y coleccionista de enigmas profesionales modernos es Martin Gardner, quien escribió una columna sumamente buena en *Scientific American* aproximadamente 30 años, deteniéndose hace aproximadamente cinco años. Él publicó algunos de los problemas de análisis retrógrado de ajedrez de Smullyan en 1973. Él también informó de un juego de informática en 1973. Por supuesto, el advenimiento de las computadoras personales ha hecho que tanto la escritura como el juego de juegos matemáticos por computadoras tomaran una nueva dirección importante. El juego que Gardner informó era *Spirolaterals* inventado por Frank Olds con sólo 3 ó 4 líneas de código fuente.



El más famoso de los enigmas más recientes es el del Cubo de Rubik, inventado por el húngaro Ernö Rubik. Su fama es increíble. Inventado en 1974, lo patentó en 1975 y se puso en el mercado en Hungría en 1977. Sin embargo, realmente no empezó como una manía hasta 1981. A través de 1982 se habían vendido 10 millones de cubos en Hungría, más de la población del país. Se estima que se vendieron 100 millones a escala mundial. Realmente es un enigma de teoría de grupos, aunque no muchas personas comprenden esto.
El cubo consiste en 3x3x3 cubos más pequeños que, en la configuración inicial, están coloreado para que las 6 caras del cubo grande estén coloreadas en 6 colores distintos. Los 9 cubos que forman una cara pueden rodarse en un ángulo de 45°. Aunque hay 43,252,003,274,489,856,000 arreglos diferentes de los cubos pequeños, uno solo de estos arreglos es la posición inicial. Resolviendo el cubo, se muestra la importancia de los conjugados y commutadores en un grupo.

A manera de epílogo. Veamos el siguiente problema.

Problema. Sean P(x) y Q(x) dos polinomios con coeficientes "invertidos":

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$
$$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n,$$

donde $a_0,a_n\neq 0$. ¿Cuál es la relación entre las raíces de P(x) y Q(x)? Demuestra tu respuesta.

Un procedimiento de trabajo puede ser el siguiente:

1. Examinar algunos ejemplos sencillos, por ejemplo, ecuaciones lineales y cuadráticas.
2. Conjeturar "las raíces de P(x) son las recíprocas de Q(x)", ó
3. Replantear el problema dado, teniendo en cuenta los razonamientos anteriores: "Sean P(x) y Q(x) dos polinomios con coeficientes invertidos. Demostrar que las raíces de P(x) y Q(x) son recíprocas".
4. Escribir una demostración:

   Teorema. Si P(x) y Q(x) son como antes. Entonces las raíces de Q(x) son las recíprocas de las de P(x)".

   Demostración. Sea r una raíz de P(x), o sea, P(r)=0. Obsérvese que $r\neq 0$ pues $a_0\neq 0$. Además, $Q(1/r)=P(r)/r^n=0$, por o que 1/r es una raíz de Q(x). Recíprocamente, si s es una raíz de Q(x), entones P(1/s)=0. Esto completa la demostración.

El aclarar todos estos pasos, nos facilita, sobretodo, dos cosas:

- Desmistifica la Matemática y la hace más accesible; cuando el alumno ve de dónde proviene la idea, ya no le parece que es como sacarse un as de la manga.
- Las estrategias que subrayábamos anteriormente, se pueden generalizar y ser útiles en otros casos (n matemáticos). El aprender a usarlas, ayuda a los alumnos a mejorar su capacidad de resolver problemas.

Los problemas matemáticos están para resolver, precisamente eso es lo que le da emoción a la Matemática. El introducir a los estudiantes en la resolución de problemas, se lo debemos a aquellos que serán los matemáticos del futuro, a aquellos que utilizarán esta materia, a aquellos que desean desarrollar su intuición matemática y a aquellos que serán los profesores del mañana, es decir, los continuadores de nuestra obra. Esperamos que la resolución de problemas consiga trasmitir a nuestros alumnos la belleza y emoción que encierra la Matemática. En la medida en que adiestremos a nuestros alumnos a pensar independientemente y a *utilizar* los conocimientos de que disponen habremos desarrollado con éxito nuestra tarea como profesores.

Referencias

- Andre, T. (1986). Problem solving and education. En G.D. Phye y T. Andre (Eds.), Cognitive classroom learning. Understanding, thinking, and problem solving. New York: Academic Press.
- Bachelier, L. (1993)-“Le jeu, la chance et le hazard”: Reprint of the 1914 original, Sceaux.
- Ballester, S. et al. (1992)-“Metodología de la enseñanza de la Matemática”, t. 1, Pueblo y Educación, La Habana.
- Bañuelos, A.M. (1995). Resolución de problemas matemáticos en estudiantes de bachillerato. Perfiles Educativos, N° 67, 50-58.
- Beato, J. (1996)-“La cicloide y su propiedad de braquistócrona: una actividad interdisciplinaria”, Épsilon, No. 36, Vol. 12 (3), 407-416.
- Bertoglia, L. (1990)-“Psicología del aprendizaje”, Universidad de Antofagasta, Chile.
- Blanco, L. (1991)-“Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores”, Manuales Unex, No. 11, Madrid.
- Borasi, R. (1986)-“On the nature of problems”, Educational Studies in Mathematics, 17, 125-141.
- Brenes, V. y M. Murillo (1994)-“Algunos objetos de estudio del constructivismo”, pp. 373-378, UNA-UCR-CONICIT, Costa Rica.
- Briars, D.J. y Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. Cognition & instruction, 1, 245-296.
- Brown, J.S. y Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.
- Brown, J.S. y VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. Cognitive Science, 4, 379-426.
- Butts, T. (1980)-“Posing problems property”, in “Problem Solving in School Mathematics” (Yearbook of the NCTM), Stephen Krulich (Ed.), Reston, 23-34.
- Campistrous, L. y C. Rizo (1996)-“Aprende a resolver problemas aritméticos”, Pueblo y Educación, La Habana.

- Carpenter, T.P. (1985). Learning to add and substract: An exercise in problem solving. En E.A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: L.E.A.
- Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and substraction concepts in grades one through three. Journal of Research in Mathematics Education, 15, 170-202.
- Carrer, A. (1979/80)-"Elementary study of a most ancient Mesopotamian game", Atti Accad. Sci. Istit. Bologna Cl. Sci. Fis. Rend. (13) 7 (1), 97-121 (en italiano).
- Charles, R. and F. Lester (1982)-"Teaching problem solving. What, Why, How", Palo Alto, Dale Seymour Publishers.
- Chi, M.T.H. y Glaser, R. (1983). Problem solving abilities. Material mimeografiado.
- Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. Cognitive Science, 5, 121-152.
- Chi, M.T.H., Glaser, R. y Rees, E. (1981). Expertise in problem solving. En R. Sternberg (Ed.), Advances in the psychology of human intelligence. Vol. 1. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Cruz, M. (1998)-"¿Cómo elaborar problemas matemáticos?", Pedagogía'99, ISPJLC, Holguín, Cuba
- Cuadrado, Z., R. Naredo y C. Rizo (1991)-"Matemática 12º grado", Parte 2, Pueblo y Educación, La Habana.
- De la Vega, M.(1984) *Introducción a la psicología cognitiva*, Alianza, Madrid.
- Del Río, J., L. Hernández y M.J. Rodríguez (1992)-"Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica", MARE NOSTRUM, Madrid.
- Dijkstra, S. (1991). Instructional design models and the representation of knowledge and skills. Educational Technology, 31, (6), 19-26.
- Dimand, R.W. and M A Dimand (1992)-"The early history of the theory of strategic games from Waldegrave to Borel", in "Toward a history of game theory", Durham, NC, 15-27.
- Dodgson, C.L. (1958)-"Mathematical recreations of Lewis Carroll", Vol. 1: Symbolic logic and The game of logic, New York.
- Dodgson, C.L. (1958)-"Mathematical recreations of Lewis Carroll", Vol. 2: Pillow problems and A tangled tale (New York, 1958).
- Duhalde, M.E. y González, M.T. (1997). Encuentros cercanos con la matemática. Buenos Aires: Aique.
- Eiss, H.E. (1988)-"Dictionary of mathematical games, puzzles, and amusements", Westport, CT.
- Ewert, P. H. Lambert, J. F. (1932)-The effect of verbal intructions upon the formation of a concept, Part ii, Journal of General psychology, 6, 400 - 411.
- Gagné, E.(1991) *La psicología cognitiva del aprendizaje escolar*, Visor, Madrid.
- Gagné, R.M. y Glaser, R. (1987). Foundations in learning research. En R.M. Gagné (Ed.), Instructional technology: Foundations. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Goldman, S.R. (1989). Strategy instruction in mathematics. Learning Disability Quarterly, 12, 43-55.
- González, F. (1997)-"La transformación inversión como recurso para la solución y confección de problemas geométricos", Tesis de Maestría (material didáctico), ISPJLC, Holguín, Cuba.
- Greeno, J.G. (1980). Trends in the theory of knowledge for problem solving. En D.T. Tuma y F. Reif (Eds.), Problem solving and education. Issues in teaching and research. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Groen, G.J. y Parkman, J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79, 329-343.

- Halmos, P. (1980)-“The heart of the mathematics”, American Mathematical Montlhy, 87, 519-524.
- Hayes, J.R. (1981). The complete problem solver. Philadelphia: Franklin Institute Press.
- Hegarty, M., Mayer, R.E. y Monk, C.A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. Journal of Educational Psychology, 87, 18-32.
- Hilbert, D. (1900)-“Mathematische Probleme”, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenscaften zu Göttingen, Berlín, 253-297.
- Hinsley, D., Hayes, J.R. y Simon, H. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. En M.A. Just y P.A. Carpenter (Eds.), Cognitive processes in comprehension. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Hose, P. A., M.L. Wallace and M.A. Johnson (1983)-“Problem solving as a focus. How? when? whose responsibility?, in “The agenda in action”, NCTM, Virginia, 9-19.
- Humenberger, H. and H.-C. Reichel (1996)-“Problem solving as a continuous principle for teaching. Suggestions and examples”, in “The Art of Problem Solving. A Resource for the Mathematics Teacher”, A.S. Posamentier (de.), Corwin Press, Inc., A Sage Publications Company Thousand Oaks, California.
- Jitendra, A.K. y Kameenui, E.J. (1996). Experts’ and novices’ errors patterns in solving part-whole mathematical word problems. The Journal of Educational Research, 90, (1), 42-51.
- Jungk, W. (1986)-“Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2”, t. 2. Pueblo y Educación, La Habana.
- Kantowski, M.G. (1978). The teaching experiments and soviet studies of problem solving. En I.L. Hatfield y D.A. Bradbard (Eds.), Mathematical problem solving: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics. An exploratory study. Tesis doctoral. Universidad de Stanford, California. Dissertation Abstracts International, 1968, 28, 4380A.
- Kintsch, W. (1986). Learning from text. Cognition & Instruction, 3, 87-108.
- Kintsch, W. (1987). Understanding word problems: Linguistic factors in problem solving. En M. Nagao (Ed.), Language and artificial intelligence. North Holland: Elsevier Science Publisher B.V.
- Kintsch, W. y Greeno, J.G. (1984). Understanding and solving arithmetic word problems. Material mimeografiado.
- Kintsch, W. y VanDijk, T.A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. Psychological Review, 85, 363-394.
- Kraitchik, M. (1953)-“Mathematical recreations”, New York, N. Y.
- Krulik, S. y Rudnick, J.A. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers. Arithmetic Teacher, February, 42-49.
- Labarrere, A. F. (1989)-“¿Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas?”, Pueblo y Educación, La Habana.
- Labarrere, A. F. (1996)-“Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos”, Pueblo y Educación, La Habana.
- Larkin, J.H., McDermott, P., Simon, D.P. y Simon, H.A. (1980). Expert and novice performance in solving physics problems. Science, 208, 1335-1342.
- Lester, F.K. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. En L.L. Hatfield y D.A. Bradbard (Eds.), Mathematical problem solving: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

- Lucas, E. (1960)-“Récréations mathématiques”, Paris.
- Malara, N. e L. Gherpelli (1997)-“Argomentazione e demostrazione in Aritmetica: alcuni risultati di una ricerca”, in “L’ educazione Matematica”, Anno XVIII, Serie V, Vol. 2 (2), 82-102.
- Marzano, R. (1997) *Dimensiones del aprendizaje*, iteso, Guadalajara.
- Mayer, R. E. (1992)-Thinking, problem solving and cognition (2nd edition), New York: Freeman.
- Mayer, R.E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories and templates. Instructional Science, 10, 135-175.
- Mayer, R.E. (1983). Thinking, problem solving and cognition. New York: Freeman.
- Mayer, R.E. (1992). Cognition and instruction: Their historic meeting within educational psychology. Journal of Educational Psychology, 84, (4), 405-412.
- Megía F., M. (1992)-“Proyecto de Inteligencia «Harvard»”, Serie IV-Resolución de Problemas, Ciencias de la Educación Preescolar y Especial, Madrid.
- Miller, G. A. (1956)-“The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information”, Psychological Review, 63, 81-97.
- Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M. y Pérez, M.L. (1995). Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela. Barcelona: Graó.
- Monereo, C.; Castelló, M.; Clariana, M.; Palma, M.; Pérez, M. L. (1998) *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula,* Grao, Barcelona.
- Müller, H. (1987)-“Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática”, ICCP, La Habana.
- Nápoles, J.E. (1998)-“El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideraciones (auto)críticas”, Boletín de Matemáticas V, 53-79.
- Nápoles, J.E. (2000)-“La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones”, Educacao Matemática em Revista-RS, 2, 51-65.
- Nápoles, J.E. (2000)-“La resolución de problemas en la escuela. Consejos preliminares”, Revista Función Continua 8, 21-42.
- Nápoles, J.E. (2001)-“La Fórmula de Herón desde la Historia”, Función Continua, 11, 31-36.
- Nápoles, J.E. (2001)-“La Fórmula de Herón desde la Matemática”, Función Continua, 11, 20-30.
- Nápoles, J.E. y M. Cruz (1999)-“La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones”, Memorias 2do Encuentro Regional de Profesores de Matemática, FACENA, UNNE, Mayo 17-21.
- Newell, A. Simon, H. A. (1972)-Human problem solving, Englewood Cliff, NJ.: Prentice Hall.
- Newell, A. y Simon, H.A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Nickerson, R.; Perkins, D.; Smith, E. (1985) *Enseñar a pensar*, Paidós, Barcelona.
- Nilsson, N. (1971)-Problem solving in artificial intelligence, Mc Graw Hill.
- Nisbet, J. y Shucksmith, J. (1986) *Estrategias de aprendizaje*, Santillana, Madrid.
- Norman, D.A. y Rumelhart, E.E. (1975). Explorations in cognition. San Francisco: Freeman.
- Ore (1953)-“Cardano, the gambling scholar”, Princeton, N. J.
- Parra, B. (1990) "Dos concepciones de resolución de problemas", *Revista Educación Matemática*, vol. 2, núm. 3, diciembre, pp. 22-31

- Parra, B. (1990) "La resolución de problemas en la construcción de esquemas de razonamiento", *Revista Educación Matemática*, vol. 3, núm. 1, abril, pp. 59-61
- Polya, G. (1945)-“How to solve it”, Princeton, Princeton University Press (existe traducción al español: “Cómo plantear y resolver problemas”, Trillas, México, 1997).
- Polya, G. (1954)-“Mathematics and Plausible Reasoning”, 2 vols, Princeton, Princeton University Press.
- Polya, G. (1965). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. Vol. 2. New York: Wiley.
- Polya, G. (1980)-“On Solving Mathematical Problems in High School”, in: “Problem Solving in School Mathematics” (Yearbook of the NCTM), Stephen Krulich (Ed.), Reston.
- Polya, G. (1981)-“Mathematical Discovery”, New York, Wiley.
- Polya, G. (1984) *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.
- Posamentier, A.S. (1996)-“Student! Get ready for the Mathematics for SAT* I. Problem-solving Strategies and Practice Test”, Corwin Press, Inc., A Sage Publications Company Thousand Oaks, California.
- Posamentier, A.S. and J. Stepelman (1996)-“Teaching secondary school mathematics”, Prentice-Hall, Inc., A Simon & Schuster Company, Englewood Clifs, New Jersey.
- Posamentier, A.S. and S. Krulik (1996)-“Teachers’ Prepare your students for the Mathematics for SAT* I. Methods and Problem-solving Strategies”, Corwin Press, Inc., A Sage Publications Company Thousand Oaks, California.
- Presley, M.; Harris, K.; Marks, M. B. (1992) "But good strategy instructors are constructivists!", *Educational Psichology Review*, vol. 4, núm. 1, pp. 3-31.
- Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: L.E.A.
- Rimoldi, H.J. (1984). Solución de problemas: Teoría, metodología y experimentación. Revista de Psicología General y Aplicada, 39, 75-96.
- Rouse Ball, W.W. (1940)-“Mathematical Recreations and Essays”, London.
- Rouse Ball, W.W. and H S M Coxeter (1987)-“Mathematical recreations and essays”, New York.
- Santos, L. M. (1992) "Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas", *Revista Matemática Educativa*, vol. 4, núm. 2, agosto, pp. 16-24.
- Schatz R., M. and D.A. Grouws (1992)-“Mathematics teaching practice and their effects”, en D.A. Grouws (ed.), Handbok of Research on Mathematics Teaching and Learning, NCTM, MacMillan, New York.
- Schneider, I. (1988)-“The marketplace and games of chance in the fifteenth and sixteenth centuries, Mathematics from manuscript to print, 1300-1600”, New York, 220-235.
- Schoenfeld, A. H. (1992)-“Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics”, in D. Grouws (De.) “Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning”, New York, MacMillan.
- Schoenfeld, A. H. (1994)-“Ideas y tendencias en la resolución de problemas”, OMA, Buenos Aires.
- Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.
- Siegler, R. S. y Shrager, J. (1983). Strategy choices in addition: How children know what to do. Trabajo presentado en el décimo octavo Simposio Anual Carnegie sobre Cognición. Pittsburgh, PA.
- Sierpinski, W. (1964)-“Elementary theory of numbers”, Polska Akademia Nauk, Warszawa.

- Sternberg, R.J. (1987). Razonamiento, solución de problemas e inteligencia. En R.J. Sternberg (Ed.), Inteligencia humana, II. Cognición, personalidad e inteligencia. Buenos Aires: Paidós.
- Stigler, J.W., Lee, S.Y. y Stevenson, H.W. (1990). Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Suppes, P. y Groen, G.J. (1967). Some counting models for first grade performance data on simple addition facts. En J.M. Scandura (Ed.), Research in mathematics education. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tarzia, D.A. (1999)-“Como resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática”, Curso UMA´99.
- Thébault, V. (1952)-“Les récréations mathématiques (parmi les nombres curieux): Avec des notes de A. Buquet”, Paris.
- Vera, M. T. (1995) "El aprendizaje por resolución de problemas", en Sanjurjo L. y Vera M., "Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior", Rosario, Homo Sapiens Ediciones.
- Wallas, G. (1926). The art of thought. New York: Harcourt Brace Jovanovich.
- Zimmermann,W. and S. Cunnigham (1991)–“Visualization in Teaching and Learning Mathematical”, Association of América, USA.

ANEXO 1

"Un buen pasatiempo matemático vale más, y aporta más a la matemática, que una docena de artículos mediocres"
John Edensor Littlewood (Mathematician´s Miscellany)

Actividades propuestas como generales, en la preparación de alumnos talentos en Matemática.

Problemas de razonamiento.

a) Enunciados directos.

Juan es más bajo que Pedro, pero más alto que Miguel. Miguel es más bajo que Juan, pero más alto que Roberto. ¿Quién es el más alto y quién le sigue en estatura?

b) Enunciados con inversión de orden.

Rodríguez y Pérez, son más altos que Sánchez. Gómez es más bajo que Pérez, pero más alto que Rodríguez. ¿Quién es el más bajo y quién le sigue en estatura?

c) Enunciados difíciles.

Juan es de mayor estatura que Pedro, pero en contraste, su talla es mayor que la de Miguel. No obstante, si comparáramos los atributos físicos de Miguel, de Juan y de Roberto, nos encontraríamos con que el primero no es tan alto como el segundo, mientras que, tal vez sorprendentemente, Miguel excede en talla al último de los nombrados. ¿Quién es el de estatura más elevada, y quién le sigue en esa variable?

d) Enunciados indeterminados.

Gloria y Virginia pesan más o menos lo mismo. Gloria es más pesada que Ana, quién es más liviana que María. ¿Cuál de estas posibilidades es la más correcta?

e) Tablas numéricas.

Tres muchachos, Pedro, Juan y Miguel, tienen entre sí 9 lápices y 6 borradores, o sea, un total de 15 útiles de escribir. Pedro tiene 3 borradores y Juan tiene el mismo número de lápices. Juan tiene un útil más que Pedro, que tiene 4. Miguel tiene tantos borradores como Pedro tiene lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro y cuántos tiene Miguel?

f) Tablas numéricas con ceros.

En las casas de María, Juan y Paula hay un total de 16 animales domésticos, entre los cuales hay 3 perros, doble número de gatos, y además canarios y loros. En la casa de Juana aborrecen a los perros y a los oros, pero tienen 4 gatos y 2 canarios (con mucho miedo). En la de Paula sólo hay un perro y otros 2 animales, ambos gatos. En la de María tienen 3 canarios y algunos otros animales. ¿Qué otros animales y cuántos de cada uno hay en la casa de María?

g) Tablas lógicas.

Tres niñas está hablando con una simpática señora, que quiere saber cómo se llaman. Una niña tiene puesta una blusa violeta, otra una blusa rosa, y la tercera una blusa blanca. La niña con la blusa violeta dice: "Nos llamamos Blanca, Rosa y Violeta". A continuación, otra niña dice: "Yo me lamo Blanca. Como Ud. puede ver, nuestros nombres son los mismos que los colores de nuestras blusas, pero ninguna de nosotras usa blusas del color de nuestro nombre". La señora sonríe y dice: "Pero ahora ya se como se llaman".

Ver también Problema 6, pág. 44 de (G92b).

h) Simulaciones, diagramas y experimentos.

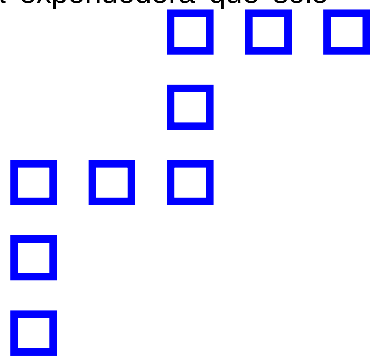
Una hormiga está al final de una escalera de 10 peldaños. Cada día sube tres peldaños y a la noche, cae dos. ¿En cuántos días, la hormiga llegará al final de la escalera ?

i) Ensayo-error.

Seis muchachos compraron bebidas en una máquina expendedora que solo acepta monedas de 25 centavos. La máquina vende refrescos a 50 centavos y licuados a peso. Si los muchachos gastaron un total de 16 monedas en seis bebidas, ¿cuántos refrescos y licuados compraron?

j) Búsquedas exhaustivas.

Coloca los dígitos del 1 al 9, en cada casilla de la figura siguiente, de manera que cada grupo de tres dígitos sumen 13.



Problemas de este tipo, con diferentes figuras geométricas, triángulos, estrellas, etc. aparecen en (P(68)).

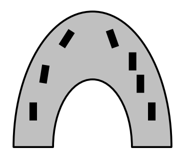
k) Elaboración de problemas.

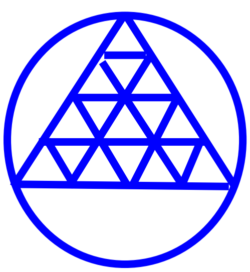
No tenemos aún estrategias definitivas en esta acción, aunque un primer paso puede ser, partir de una representación y elaborar e enunciado de un problema que pueda resolverse con ella. Más adelante las analogías por diferencias y similitudes, pueden contribuir a la obtención de ciertas reglas generales.

Problemas y pasatiempos matemáticos en general.

a) Pasatiempos y puzzles.

1. Con dos cortes rectos, divida la herradura en siete partes, dejando un agujero en cada trozo (ver (G92a)).





2. Dibuje el símbolo griego con una línea continua, haciendo la menor cantidad posible de virajes (ver (G92a)).

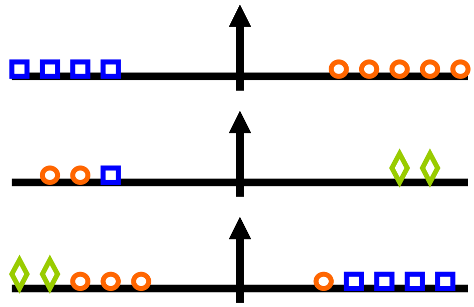
3. Todos los aficionados a los acertijos, conocen el antiguo problema del hombre que tenía que cruzar a un zorro, un ganso y un repollo hasta el otro lado del río en un bote que solo podía levar a dos por vez. Esta historia está construida de manera similar, pero tiene muchas complicaciones.

   El caso es el siguiente. Cuatro hombres se fugaron con sus amadas, pero al llevar a cabo sus planes, se vieron forzados a cruzar un río en un bote que solo podía llevar dos personas a la vez. En el medio de éste, había una pequeña isla. Parece que tanto los hombres como las mujeres eran muy celosos, pues ninguno permitía que su pareja estuviera con alguien del sexo opuesto, a menos que él (o ella) estuviera presente.

   ¿Cuál es la manera más rápida de hacer cruzar el río a todo el grupo?

   Supongamos que el río tiene 200 metros de ancho, y una isla en el medio en la que pueden permanecer todos. ¿Cuántos viajes debe hacer e bote para cruzar a todas las pareas según las condiciones impuestas?

4. Divida un cuadrado formado por 5 unidades de lado, en dos cuadrados. Un detalle adicional puede ser encontrado en (G92a).
5. Teniendo en cuenta que las dos primeras balanzas están en equilibrio, ¿la tercera también lo estará? En caso negativo, ¿cuál debe ser la respuesta?



6. En cierto documento se han encontrado los siguientes cálculos:

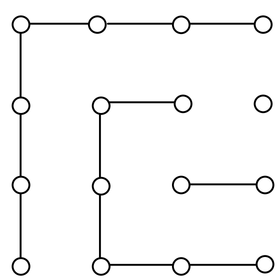
```
  6 * 8 * * *  | * * 9
    * * * 2    |________
  ________
      * 9 * *
      * * 4 *
        * * 4 *
        * * * *
```

¿Puede Ud. recobrar los dígitos faltantes?
Problemas similares pueden ser consultados en (P68).

7. Encuentre los números a y b tal que a+b=y, axb=y. Por supuesto que pueden ser fracciones.
8. Tomando 3 servilletas, cada una de 1 decímetro cuadrado, ¿cuál es el tamaño de la mesa cuadrada más grande que podría cubrirse con éstas, si no pueden ser cortadas. Solo se pueden superponer o doblar.
9. Números Geométricos de Platón (ver (G92a)).
   Hay una antigua descripción de un enorme cubo erigido en el centro de una plaza embaldosada de forma cuadrada. En el piso hay tantos cubos como en el monumento, y todos ellos de la misma medida. Establezca la cantidad de cubos necesaria para construir el monumento y a plaza cuadrada en la que está situado, y habrá Ud. resuelto el gran problema de los Números Geométricos de Platón.

b) Juegos de estrategias.

1. En una mesa circular (o cuadrada), se desarrolla el siguiente juego para dos participantes. Estos deben situar alternativamente monedas de 25 centavos sobre dicha mesa, de tal forma que cuando se ha puesto una moneda, ésta no debe ser movida ni rozada por otra. El juego prosigue, hasta que la mesa esté tan colmada de monedas que sea imposible situar otra moneda. La persona que acomodó la última moneda es el ganador. ¿De qué manera, puede el primer jugador ganar siempre?
   La estrategia es válida en cualquier cantidad de monedas.
2. Puntos y cuadrados.
   En el juego, se ha llegado a la siguiente posición:
   ¿Qué jugada recomienda Ud. al próximo jugador?



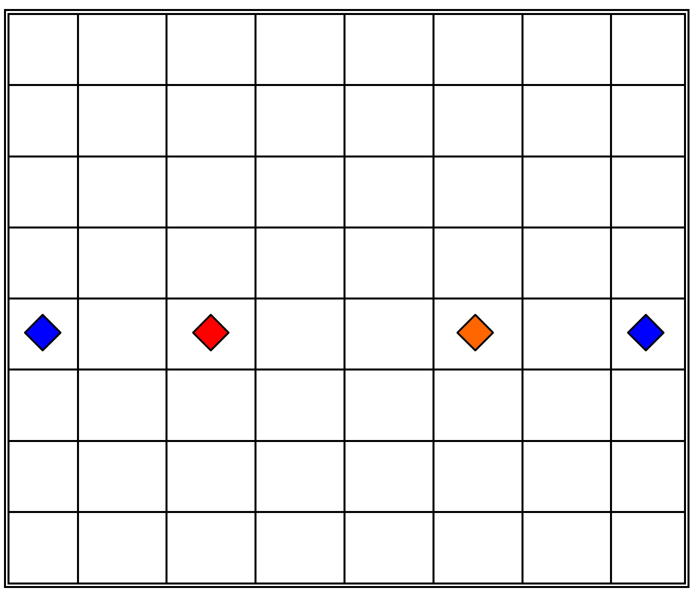
3. Una notable variación de este juego, puede verse en (CG88) y es el siguiente.

Tenemos un número cualquiera de puntos dibujados en un papel. Hay dos jugadores que juegan alternativamente. Una jugada consiste en unir, por medio de una línea dos puntos cualquiera de los que hay dibujados y señalar sobre la línea que hemos dibujado un nuevo punto, donde se quiera. Sin embargo, hay dos limitaciones:

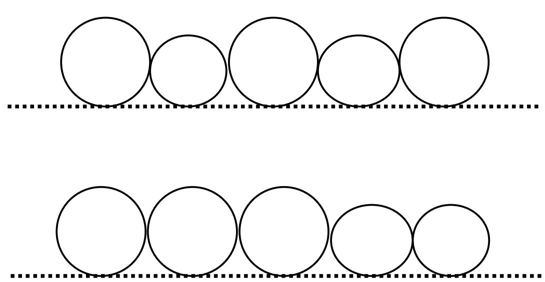
- La línea que dibujemos no puede cortarse consigo misma, ni puede pasar por más puntos señalados que los del principio y el final.
- Ningún punto puede ser el inicio de más de tres líneas.

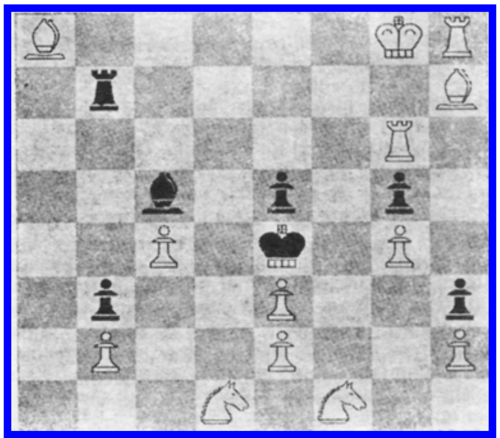
Pierde quien no pueda trazar ninguna línea.
Preguntas de alguna complicación son las siguientes:
Si tenemos n puntos, ¿cuál será el número mínimo y el número máximo de jugadas que se podrán hacer?

4. Consulte el juego *reversi* en (G92b), capítulo 6.
5. Ayude al granjero y a su esposa a atrapar a los pollos (ver (G92a)).
El campo está dividido en 64 cuadrados, delimitados por las plantas de maíz. El juego se desarrolla desplazándose entre las filas de plantas de un cuadrado a otro, de arriba abajo o de izquierda a derecha. Primero el hombre y la mujer (representados por las figuras rojas) se desplazan un cuadrado y luego cada una de las aves (representadas por las figuras azules) hace también un movimiento. El juego prosigue por turnos, hasta que se descubre en cuántos movimientos resulta posible acorralar y atrapar a los pollos. La captura se produce cuando e granjero o su esposa pueden irrumpir en un cuadrado ocupado por una de las aves.



6. Se disponen sobre la mesa tres monedas de 25 centavos y dos de 10, alternándose entre sí como se indica la figura. Debemos disponerlas como se muestra en la figura inferior, haciendo el menor número de movimientos. Un movimiento consiste en apoyar las puntas de los dedos índice y mayor sobre dos monedas en contacto (forzosamente distintas), y hacerlas deslizar sobre la mesa hasta otro lugar de la recta imaginaria que se muestra en línea discontinua.





7. En el siguiente tablero, disponga 8 piezas de modo que no haya dos en la misma fila, columna o diagonal.

Es similar al problema de situar 8 reinas de manera que ninguna ataque a otra (ver (L91)), aunque solo tiene una respuesta correcta (ver (G92a)).

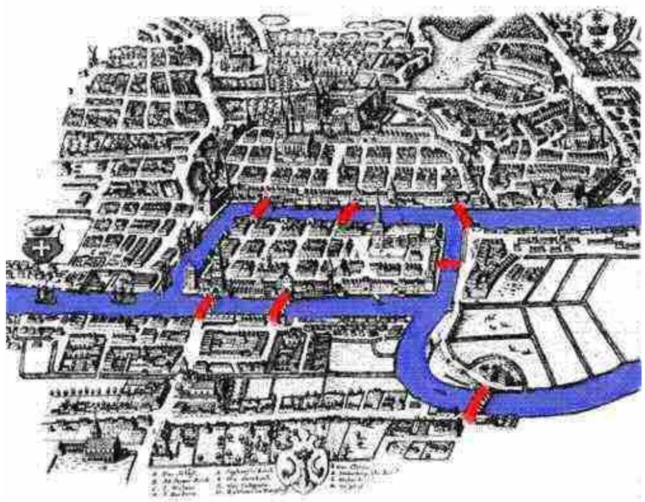
8. Se pide hallar un movimiento de las piezas blancas que *no implique* el mate inmediato del rey negro (ver (G92b)).

9. El Problema de los Puentes de Königsberg (ver (G92a)).

Es conocido el famoso Problema de los Siete Puentes de Königsberg. En (G92a) se presenta una interesante variación de éste.

Königsberg (en el período soviético Kaliningrado), está dividida por el río Pregel en cuatro zonas, incluyendo la isla Kneiphof, tal como lo muestra el mapa adjunto. Hay ocho puentes que conectan las diferentes partes de la ciudad (como ya dijimos, el conocido problema trata de siete, en el mapa hemos añadido el octavo, según la referencia antes citada), y hay un acertijo acerca de ellos que intrigó a los ciudadanos de Königsberg, hace unos 250 años. El paseo ha sido siempre una recreación para los jóvenes. Según los viejos relatos, de una manera u otra, se presentó la pregunta de cuánto llevaría recorrer los puentes. Esto condujo a la sorprendente afirmación de que un recorrido completo de todos los puentes -sin pasar más de una vez por cada uno de ellos-, era imposible.

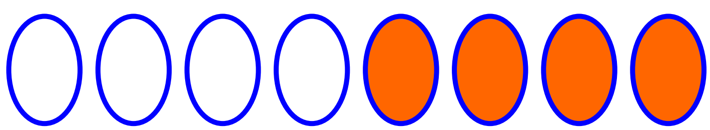
Es un hecho histórico, que un comité de jóvenes visitó a Euler en 1735, para pedirle que resolviera tan conflictivo tema. Un año más tarde, Euler presentó un voluminoso informe a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Allí afirmaba haber demostrado la imposibilidad de recorrer los puentes. Esta conclusión aparece en el Informe de la Academia, 1741, vol.8, y ha sido publicada por muchos matemáticos e historiadores, ya que se ocupa del problema general con n puentes.



El profesor W. Rouse Ball, del Trinity College, discute la antigüedad y los méritos del problema en su obra **"Mathematical Recreations"**. En este caso, no importa si algún indicio histórico puede refutar o no la cantidad de puentes, lo importante es el mismo problema, donde a diferencia del que resolvió Euler, el regreso al punto de partida no forma parte en absoluto del problema. Solo se trata de demostrar, si es posible partir de cierto sitio de la ciudad y llegar a otro sitio, pasando una sola vez por todos los puentes.
Se pide encontrar de cuántas maneras es posible hacerlo, y cuál es la ruta más corta.

10. Un problema de sobremesa.

Levante dos copas adyacentes a la vez y en cuatro movimientos cambie las posiciones de manera que se alternen copas llenas con copas vacías (ver (G92a)).



1 2 3 4 5 6 7 8

c) Problemas semánticos.

1. ¿Quién gana, el perro o el gato? (ver (G92a)).

Un gato y un perro corren una carrera de cien metros y luego regresan. El perro avanza tres metros a cada salto y el gato solo dos, pero Marlene da tres saltos por cada dos de Terry. Ahora bien, en estas condiciones, ¿cuáles son los posibles resultados de la competencia?

2. De qué se puede llenar un tonel para que pese menos.
3. El sobrino enfermo (ver (G92a)).

El tío Reuben estaba en la gran ciudad para visitar a su hermana Mary Ann. Caminaban juntos cuando pasaron ante un gran hotel, "Antes de alejarnos", dijo Reuben a su hermana, "me gustaría detenerme un momento y preguntar por un sobrino enfermo que vive en este hotel".

"Bien", replico Mary Ann, "como yo no tengo ningún sobrino enfermo del que deba preocuparme, me volveré a casa. Podemos continuar nuestro paseo esta tarde".
¿Cuál era la relación de Mary Ann con ese misterioso sobrino?
4. Otro problema "familiar".
"Ese que está ahí", dice un chico a otro refiriéndose a alguien en una foto, "es el único sobrino de mi único tío".
¿Qué relación tenía ese chico con el de la foto?

d) Problemas varios.

1. Se tienen 16 monedas y que aparentemente son idénticas. Sin embargo, una de ellas es falsa, y puede ser reconocida por tener menor peso que las demás. Si utiliza una balanza de dos platos, ¿cuál es el menor número de pesadas necesarias, para encontrarlas? (ver (CG88) para este problema y otras variaciones interesantes).
2. En diez frascos de píldoras, cada uno con un número determinado de ellas, pero que no conocemos, hay uno que está lleno de píldoras envenenadas, si las buenas pesan 1 gramo y estas, 0.9, ¿cómo determinar el frasco en una sola pesada? Se usa una balanza de un solo plato.
3. Una habitación está cerrada y posee una bombilla incandescente, si afuera de la misma hay tres interruptores y solo uno de ellos sirve para prender la luz, ¿cómo hacer para averiguar cuál de ellos es el útil, sabiendo que la puerta solo puede abrirse una sola vez, después de accionados los interruptores?[14]
4. Imaginemos que despegó de Leningrado[15] un dirigible rumbo al norte. Una vez recorridos 500 km. en esa dirección, cambió de rumbo y puso proa al este. Después de volar en esa dirección 500 km., hizo un viraje de 90º y recorrió en dirección 500 km. Luego viró hacia el oeste, y después de cubrir una distancia de 500 km., aterrizó. Si tomamos como punto de referencia Leningrado, se pregunta cuál es la situación del lugar de aterrizaje del dirigible (ver (P68)).
5. Una tribu de caníbales atrapó a tres intrépidos exploradores, uno de los cuales, por una lesión, tenía los ojos vendados, es decir, no veía absolutamente nada. Los caníbales, por una rara afición, eran amantes de los problemas, así que les propusieron a los exploradores, que podían salvar sus vidas si acertaban el color del sombrero, que les sería colocado, con las siguientes condiciones:

- Estarían colocados en fila india, de tal modo que el último, vería los dos sombreros anteriores, el del medio solo el del primero, y éste, no vería ninguno (aquí fue colocado el que tenía los ojos vendados).
- Los sombreros fueron tomados de una bolsa en las que había 3 sombreros negros y dos blancos.

Al ser interrogado el último, éste no pudo responder, el del medio, tampoco, mientras que el que tenía los ojos vendados, dijo correctamente el color de su sombrero. ¿De qué color era su sombrero?
6. Los Platos de Hanoi[16].

---

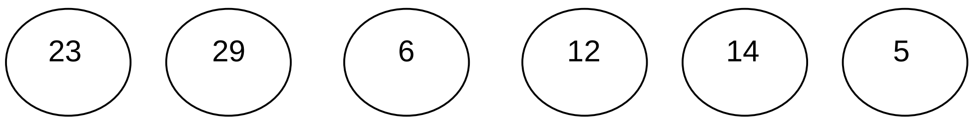
[14] Resuélvalo con 4 bombillas incandescentes.
[15] Actualmente Sans Petersburgo.
[16] En alusión al conocido juego Las Torres de Hanoi.

Colocar tres platos uno al lado del otro, después ponga en uno de los platos extremos, 5 monedas de diferentes diámetros. La tarea consiste en trasladar las monedas al tercer plato, observando las reglas siguientes:

- Se puede cambiar una moneda en cada movimiento.
- No se puede colocar una moneda mayor, encima de una menor.
- Provisionalmente, pueden colocarse monedas en el plato intermedio, observando las dos reglas anteriores, pero al final, todas las monedas deben encontrarse en el tercer plato siguiendo el orden inicial.

¿Cuál es el número mínimo de movimientos necesarios para lograrlo?

7. ¿Por qué el eje delantero de una diligencia, se desgasta y se calienta más que el trasero?
8. En las cinco cestas siguientes hay huevos, en unas cestas hay huevos de gallina, en las otras de pato. Su número está indicado en cada cesta. "Si vendo esta cesta -meditaba el vendedor- me quedarán el doble de huevos de gallina que de pato". ¿A qué cesta se refiere el vendedor? (ver P(68)).

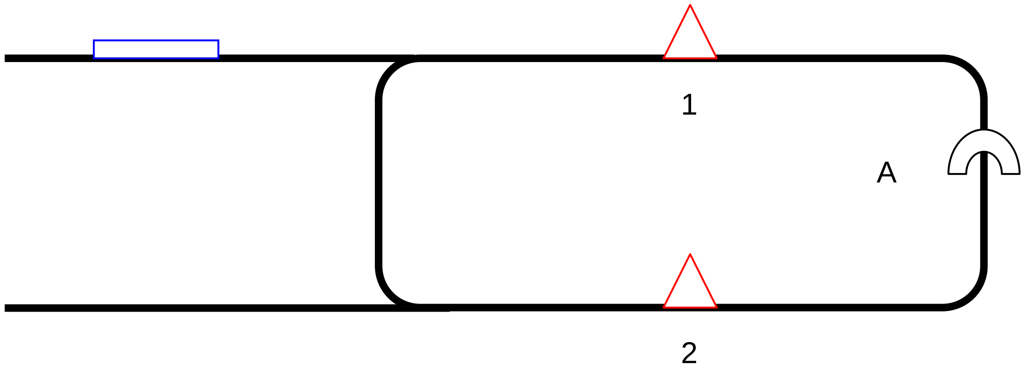


9. Se tienen tres caños para agua, uno de 4cms de diámetro interno y los otros dos de 2cms, ¿por donde sale más agua, por el de 4 cm., o por los dos de 2 cm.?

10. Se tiene un cinturón de tela, cuyos extremos estaban cortados al sesgo, formando un ángulo de 45º, como se muestra en la figura. Si queremos guardar el cinturón de forma que los extremos queden rectos y forme un rectángulo de grosor uniforme, ¿cómo hacerlo? (ver (G92b)).

11. A dice que B miente. B dice que C miente. C dice que tanto A como B mienten. ¿Quién miente y quién dice la verdad? (Lewis Carroll en (G92b)).
12. En la figura, el túnel (designado con la letra A) es lo bastante grande para permitir el paso de la locomotora (rectángulo azul) pero no el de los vagones (triángulos rojos). El problema consiste en servirse de la locomotora para intercambiar las posiciones de los coches 1 y 2, quedando la locomotora en la posición inicial. Se pueden usar los dos extremos de la locomotora para remolcar o empujar, y también es posible acoplar los vagones entre sí, para operar con ambos a la vez. Los vagones no pueden ser empujados y hacer cambiar las agujas de modo que el vagón use una vía y la locomotora otra.

    Encontrar la solución que exija menos operaciones intermedias. Por operación entendemos todo movimiento de la máquina entre dos paradas, suponiendo, como es lógico, que para invertir el sentido de la marcha o enganchar o desenganchar un vagón, antes es preciso efectuar una parada. Las maniobras de las agujas no se cuenta como operación.



13. Se dice que Inmanuel Kant era de costumbres tan regulares, que los habitantes de Königsberg aprovechaban su paso para poner en hora sus relojes.
    Una tarde, Kant tuvo la desagradable sorpresa de encontrarse con que el reloj de su casa se había parado. Era evidente que su criado, que tenía el día libre, se había olvidado de darle cuerda. El gran filósofo no se atrevió a ponerlo en hora porque su reloj de bolsillo estaba en reparación, y no tenía modo de saber la hora exacta. Poco después se fue caminando hasta la casa de su amigo Schmidt, un comerciante que vivía a un par de kilómetros de su casa. Al entrar en la casa de su amigo se fijó en la hora que marcaba un reloj de pared que estaba en el pórtico.
    Tras pasar algunas horas en casa de Schmidt, Kant se fue y regresó a su casa por el mismo camino por el que había venido. Paseaba, como siempre, con el mismo paso constante y regular que no había cambiado en veinte años. No tenía la menor idea de cuánto había tardado en hacer el camino de regreso, pues Schmidt se había mudado recientemente y Kant no había cronometrado aún el trayecto. Sin embargo, apenas llegó a su casa, puso el reloj en hora.
    ¿Cómo pudo saber Kant qué hora era exactamente?
14. Roberto quiere un terreno, absolutamente horizontal, delimitado por cuatro líneas rectas. Dos de esas rectas están exactamente dirigidas norte-sur, las otras dos exactamente este-oeste y cada una mide exactamente 1 000 metros. ¿Puede comprar Roberto ese terreno en México? (P97).
15. Roberto tiene 10 bolsillos y 44 monedas de plata. Quiere poner las monedas en los bolsillos repartiéndolas de tal modo que cada bolsillo contenga un número diferente de monedas. ¿Puede hacerlo? (P97).
16. Juan tiene una cadena de oro con 6 eslabones. Desea alojarse en un hotel con cuyo propietario ha convenido en pagar un eslabón diario. Si al final estuvo hospedado 6 días, ¿cuál es el mínimo número de eslabones que tuvo que abrir?
17. Beremiz y su amigo Salim llegan en un camello, a un viejo albergue de caravanas donde tres hombres discutían acaloradamente, al interrogarlos se supo por qué discutían. Eran tres hermanos que recibieron en herencia 35 camellos. Según la voluntad del padre, al hermano mayor le corresponde

la mitad, al segundo hermano una tercera parte y al pequeño a novena parte. Si la mitad, la tercera y la novena parte de 35 no son enteras, ¿cómo Beremiz pudo ayudarlos? (ver (T95)).

18. Beremiz y su amigo, se encuentran con un rico jeque que había sido robado y abandonado en el desierto. Beremiz tenía 5 panes y su amigo, tres. El jeque les pidió dividir equitativamente el pan, y les prometió recompensarlos con 8 monedas de oro al llegar a Bagdad. Al llegar cumplió su promesa y le entregó 5 mondas de oro a Beremiz y tres a Salim, a lo que objetó Beremiz que a él le correspondían 7 y a su amigo una. ¿En qué se basa Beremiz para hacer esta afirmación? (ver (T95)).
19. En una partida de vino, se tienen 21 vasijas iguales de las cuales: 7 están llenas, 7 mediadas y 7 vacías. Quieren repartirse estas 21 vasijas entre tres amigos de modo que cada uno de ellos reciba el mismo número de vasijas y la misma cantidad de vino, ¿cómo hacerlo? (ver (T95)).
20. Tres visitantes pagan una comida de 30 pesos aportando la misma cantidad, sin embargo, hubo un error de cálculo y solo costaba 25, así que le fueron devueltos 5 pesos, uno de ellos entregó un peso a sus amigos y él mismo tomó uno, los dos restantes, después de consultar con una mirada a sus compañeros, los entregó como propina al sirviente. En ese momento, uno de los amigos exclamó: *Con este asunto del pago de los treinta pesos, nos hemos armado un lío mayúsculo*.
    ¿Un lío?, preguntó otro. *No lo veo ...*
    Te lo mostraré, replicó el primero, *Cada uno de nosotros pagó en realidad solo 9 pesos, o sea, 27 en total. Sumando a estos 27, os dos que dimos de propina, tenemos 29. ¿Dónde está el otro peso?*
21. Se tienen 8 perlas, una de las cuales es más liviana que las otras. ¿Cómo descubrir ésta en solo dos pesadas, con una balanza de dos platos? (P95).
22. En una carrera de caballos, entre dos competidores, gana aquel cuyo caballo llegue último. Cuando dan la largada ambos permanecen sin moverse del lugar, ante la posibilidad de que esta situación se prolongara indefinidamente, consultan al más sabio del pueblo. Después de un cierto arreglo, al dar la largada nuevamente, ambos competidores salen a la máxima velocidad. ¿Cómo logró resolver la situación el anciano?
23. En tres frascos iguales y cerrados, se tienen las siguientes etiquetas, **maní, chocolate** y **maní y chocolate**. Si sabemos que ninguna etiqueta corresponde al contenido del frasco respectivo, ¿cómo podemos situar cada etiqueta correctamente, abriendo un solo frasco, y extrayendo solo un elemento de su contenido?

ANEXO 2

Problemas Resueltos.

1. El vaso de agua y el vaso de vino.

Tenemos un vaso con agua y un vaso con vino. Tomamos una cucharadita de agua del primer vaso, la echamos en el segundo y removemos, con lo que tendremos una mezcla homogénea de vino con un poco de agua. A continuación, con la misma cuchara, tomamos una cucharadita de esta mezcla y la echamos en el vaso de agua.

¿Habrá más vino en el vaso de agua que agua en el vaso de vino, o viceversa?

Respuesta:

La apariencia engañosa es la siguiente: al vino le echamos una cucharada de agua pura, mientras que al agua le echamos una cucharada de vino aguado, luego habrá más agua en el vino que vino en el agua. Pero este razonamiento es falso, porque al vaso de agua, cuando le echamos la cucharada de vino aguado, le falta la cucharada de agua que hemos quitado previamente. Razonando de la forma debida, resulta evidente que habrá la misma cantidad de agua en el vino que de vino en el agua: a cada vaso le hemos quitado una cucharada de líquido y luego se la hemos añadido, es decir, cada vaso contiene al final de la operación la misma cantidad de líquido que al principio, luego lo que al vaso de vino le falte de vino lo tendrá de agua, y viceversa.

2. ¿Cuántos años tiene?

A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La contestación fue compleja:

- Tomad tres veces los años que tendré dentro de tres años, restadles tres veces los años que tenía hace tres años y resultará exactamente los años que tengo ahora.

¿Cuántos años tiene ahora?

Respuesta:

La solución aritmética es bastante complicada, pero el problema se resuelve con facilidad si recurrimos al álgebra y planteamos una ecuación. Designaremos con la letra **x** el número de años buscado. La edad 3 años después se expresará por **x+3**, y la edad de 3 años antes por **x-3**. Tenemos la ecuación $3(x+3)-3(x-3)=x$

Despejando la incógnita, resulta $x=18$.

El aficionado a los rompecabezas tiene ahora 18 años.

Comprobémoslo: Dentro de 3 años tendrá 21; hace 3 años tenía sólo 15.

La diferencia $3.21-3.15=63-45=15$, es decir, igual a la edad actual del aficionado a los rompecabezas.

3. Las atribuciones de Robinson.

Si le abandonaran en una isla desierta y le dieran a elegir entre un martillo y una caja de clavos ¿que escogería?

Imagínese, además, que la isla está llena de árboles, y un buen día se declara un incendio en la punta norte. Para colmo de males, sopla un persistente viento del norte, por lo que el fuego amenaza con barrer toda la superficie de la isla en pocos minutos. La vegetación es tan tupida que no hay un solo rincón en tierra en que un hombre pueda resguardarse de las llamas. Podría tirarse al mar mientras durara el incendio, pero no se lo vamos a poner tan fácil: el agua está infestada de tiburones.

¿Qué haría?

Respuesta:
Mucha gente elige el martillo, sin pensar que un martillo es fácil de suplir con una piedra, mientras que una caja de clavos tendría una gran utilidad y es difícil suplir por otros métodos de ensamble.
En cuanto al incendio, la solución sería provocar un nuevo fuego hacia la mitad de la isla y mantenerse entre ambos frentes de llamas. Cuando el primero llegara a la mitad, el segundo ya habría consumido el resto de la vegetación y el fuego se apagaría por falta de combustible.
4. Calcetines y guantes.
En una misma caja hay 10 pares de calcetines de color café y 10 pares negros, y en otra caja hay 10 pares de guantes de color café y otros tantos pares negros. ¿Cuántos calcetines y guantes es necesario sacar de cada caja, para conseguir un par de calcetines y un par de guantes de un mismo color (cualquiera)?
Respuesta:
Bastan 3 calcetines, porque 2 serán siempre del mismo color. La cosa no es tan fácil con los guantes, que se distinguen no sólo por el color, sino porque la mitad de los guantes son de la mano derecha y la otra mitad de la izquierda. En este caso hará falta sacar 21 guantes. Si se sacan menos, por ejemplo 20, puede suceder que los 20 sean de una mano (por ejemplo, 10 de color café de la mano izquierda y 10 negros de la mano izquierda).
5. Los misioneros y los caníbales.
Tres misioneros y tres caníbales han de cruzar un río en una barca en la que sólo caben dos personas. Los tres misioneros saben remar, pero solo uno de los caníbales sabe hacerlo. Por otra parte, han de efectuar el traslado de forma que en ningún momento los caníbales superen en número a los misioneros, pues en tal caso se los comerían.
¿Cuál es el mínimo número de viajes que habrán de efectuar para cruzar todos al otro lado sin que los caníbales se coman ningún misionero, ni lleguen siquiera a mordisquearlo?
Respuesta:
Designando con una m a cada uno de los misioneros, con una c a los caníbales que no reman y con ç al caníbal que rema, tendrán que cruzar de la siguiente forma (evidentemente, los números impares son viajes de ida y los pares de vuelta):

1. cç	2. ç
3. cç	4. ç
5. mm	6. mc
7. mç	8. mc
9. mm	10. ç
11. cç	12. ç
13. cç	

6. Un guardarropa surtido
Todas mis camisas son blancas menos dos, todas son azules menos dos y todas son rosas menos dos.
¿Cuántas camisas tengo de cada color?
Respuesta:

Si todas son blancas menos dos, entre azules y rosas sólo hay dos, es decir una de cada una. Repitiendo el mismo razonamiento para las rosas o azules, se ve que sólo hay una camisa blanca, una azul y una rosa. Esta es la solución obvia pero cabe otra más sofisticada: tengo dos camisas, y ninguna de las dos es ni blanca ni azul ni rosa (por ejemplo: una amarilla y otra verde). Todas menos dos, es decir cero son blancas, cero son azules y cero son rosas.

7. El abuelo y el nieto.

Lo que voy a contar sucedió en 1932. Tenía yo entonces tantos años como expresan las dos últimas cifras del año de mi nacimiento. Al poner en conocimiento de mi abuelo esta coincidencia, me dejó pasmado al contestarme que con su edad ocurría lo mismo. Me pareció imposible.

- Claro que es imposible -añadió una voz-.

Pues es completamente posible. Mi abuelo me lo demostró. ¿Cuántos años teníamos cada uno de nosotros?

Respuesta:

A primera vista puede creerse, efectivamente, que el problema está mal planteado; parece como si el nieto y el abuelo fueran de la misma edad. Sin embargo, las condiciones exigidas por el problema se cumplen fácilmente, como vamos a verlo ahora mismo.

El nieto, evidentemente, ha nacido en el siglo XX. Las dos primeras cifras del año de su nacimiento, por consiguiente, son 19; ése es el número de centenas. El número expresado por las cifras restantes, sumado con él mismo, debe dar como resultado 32. Es decir, que este número es 16: el año de nacimiento del nieto es 1916, y en 1932 tenía 16 años.

El abuelo nació, claro está, en el siglo XIX; las dos primeras cifras del año de su nacimiento son 18. El número duplicado, expresado por las restantes cifras, debe sumar 132. Es decir, que su valor es igual a la mitad de este número, o sea a 66. El abuelo nació en 1866, y en 1932 tenía 66 años.

De este modo, el nieto y el abuelo tenían, en 1932, tantos años como expresan las dos últimas cifras de los años de su nacimiento.

8. La cadena.

A un herrero le trajeron 5 trozos de cadena, de tres eslabones cada uno, y le encargaron que los uniera formando una cadena continua.

Antes de poner manos a la obra, el herrero comenzó a meditar sobre el número de anillos que tendría necesidad de abrir y forjar uno nuevo. Decidió que le haría falta abrir y cerrar cuatro anillos.

¿No es posible efectuar este trabajo abriendo y forjando un número menor de anillos?

Respuesta:

Puede cumplirse el trabajo encargado, abriendo sólo tres eslabones. Para ello es preciso soltar los tres eslabones de uno de los trozos y unir con ellos los extremos de los cuatro trozos restantes.

Problemas Propuestos.

1. Diógenes y los tres jóvenes.

Iba Diógenes por el bosque con su linterna en la mano, cuando se encontró con Flora.

- ¿Qué buscas, Diógenes? -le pregunto la diosa primaveral.

A lo que el filósofo contestó con su famosa frase:

- Busco un hombre.

- Pues aquí cerca hay uno -díjole la diosa-, pero no bastará la luz de tu linterna para reconocerlo, ya que está en compañía de dos faunos de apariencia totalmente humana.
»Son dos faunos muy singulares, pues mientras uno siempre dice la verdad, el otro miente invariablemente. En cuanto al hombre verdadero, como es habitual entre los de vuestra voluble especie, unas veces dice la verdad y otras miente, de forma imprevisible.
»Sigue, oh, Diógenes, por este camino y hallarás a los tres jóvenes, que se llaman Jacinto, Narciso y Lirio. Puedes hacerles dos preguntas, de las que se contestan diciendo sí o no; las dos preguntas se las puedes hacer al mismo, o bien una a un joven y otra a otro, como prefieras. Si de este modo averiguas cuál de los tres es el hombre, premiaré tu ingenio dándote mi protección, y la Naturaleza te será propicia.
Como es bien sabido, Diógenes vivió en un tonel, en armonía con la Naturaleza y sin necesidades urbanas, por los que es de suponer que superó la prueba.
¿Cómo lo hizo?
Ayuda: las dos preguntas pueden ser,

a. de tus compañeros, es Narciso el que más probablemente contestaría con la verdad a una pregunta?
b. Si le preguntara al otro fauno si Jacinto es el hombre, me diría que sí?

En cada caso analizar distintas posibilidades.
2. Los veintiún bocadillos.
Pedro, Felipe y Saturio están preparando bocadillos para una excursión. Tienen veintiún panecillos y un trozo de queso. Cuando llevan hecho siete bocadillos, se dan cuenta de que, si siguen poniendo la misma cantidad de queso en cada uno, no habrá bastante para todos, y deciden reducir a la mitad la cantidad de queso por bocadillo. Aún así, sólo consiguen hacer siete bocadillos más, y quedan siete panecillos sin queso.
Sin partir ningún bocadillo ni panecillo, ¿Cómo harán el reparto de forma que a cada uno de los tres le toque la misma cantidad de pan y de queso?
Respuesta:
Un posible reparto es: 3e 1m 3p, 3e 1m 3p, 1e 5m 1p (e= bocadillo con ración de queso entera, m con media ración, p panecillos sin queso), y otro 2e 3m 2p, 2e 3m 2p, 3e 1m 3p.
3. La unidad.
¿Cómo expresar la unidad, empleando al mismo tiempo las diez primeras cifras?
Respuesta: 148/296 + 35/70 = 1.

Otros Problemas.
Las perlas del rajá.
En el capítulo XXIII del texto "*El hombre que calculaba"* de Malba Tahan, está planteado un problema conocido como las ***perlas del rajá:***
Un rajá dejó a sus hijas un cierto número de perlas y determinó que la división se hiciera del siguiente modo:
La hija mayor se quedaría con una perla y un séptimo de lo que quedara.
La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante, la tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedar. Y así sucesivamente.
Las hijas más jóvenes presentaron demanda ante el juez alegando que por este complicado sistema de división resultaban fatalmente perjudicadas.

El juez, que, según reza la tradición, era hábil en la resolución de problemas, respondió prestamente que las reclamantes estaban engañadas y que la división propuesta por el viejo rajá era justa y perfecta.
Y tenía razón. Hecha la división, cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas.
Se pregunta :

- *¿cuántas perlas había?*
- *¿cuántas eran las hijas del rajá?*

Cuando este ejercicio se propone a alumnos de Metodología de las Matemáticas la solución que dan se fundamenta en el álgebra y, en realidad, el álgebra proporciona una solución rápida al problema.
¿Qué no conocemos en el enunciado?: El total de perlas a repartir.
Llamémosle n. Trabajando con este n como si fuese un número se obtiene:

- Número de perlas que recibe la primera hija 1 + (n-1)/7 = (n+6)/7.
- Número de perlas que recibe la segunda hija 2 + (6n-20)/49.
- Puesto que todas las hijas reciben el mismo número de perlas 2 + (6n-20)/49 = (n+6)/7.
- Resolviendo la ecuación se obtiene como resultado n = 36.

Los otros desconocidos se descubre ahora inmediatamente.
Este ejercicio (que los alumnos descubran que con distintos contextos el ejercicio es el mismo, supone una buena comprensión del enunciado) está propuesto en un texto de matemáticas de 2º curso de bachillerato del profesor S. Segura Domenech publicado por la Editoral Ecir en 1959. Dice así:
Un padre ordenó en su testamento que al hijo mayor se le diera 1.000 pesos más un décimo del resto de sus bienes. Al segundo hijo 2.000 pesos . más un décimo de lo que quedara por repartir. Y así sucesivamente a cada hijo se le daban 1.000 pesos . más que al anterior y la décima parte de lo que quedaba. Al terminar la repartición resultó que la herencia se había repartido por completo y que a todos los hijos les había correspondido la misma cantidad. Hallar el valor de la herencia y el número de hijos.
Los alumnos a los que iba dirigido este ejercicio tenían 11 ó 12 años y a esta edad el álgebra, por elemental que sea, supone un nivel de abstracción al que no puede llegar la mayoría de estos alumnos.
Los alumnos deben confiar en su profesor, que no es tan malo ni tan tonto, como para proponer un ejercicio que no puedan resolverlo.
¿Cómo se podía entonces resolver este ejercicio?
En el texto mencionado la solución está "narrada con palabras" y simplificar las narraciones puede ser una metodología adecuada para llegar al álgebra, pero no se utiliza el álgebra en su resolución, sólo la aritmética.
En efecto, nos preguntamos:

- ¿Qué criterios se utiliza para repartir la herencia?

miles de pesetas + parte del resto.
y si la herencia se reparte totalmente:

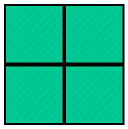
- ¿Qué pasa con el último hermano? ¿Cuál es su herencia?

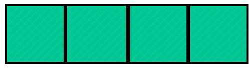
y

- ¿El penúltimo hermano?¿Cuánto vale la *parte del resto* que debe añadirse a sus *miles de pesetas* para formar el total de su herencia? ¿Cuánto queda del resto para el hermano menor?

El problema de Isis.

Demostrar que los dos únicos números que miden a la vez el área y el perímetro de un rectángulo de dimensiones enteras son 16 y 18.

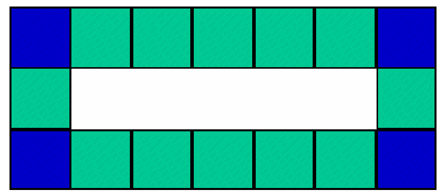




Este es un ejercicio que ha sido estudiado y resuelto de muchas formas distintas (Revista Suma, junio 1996, págs 25-31).

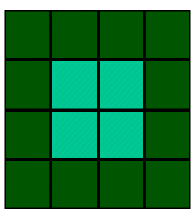
Una lectura atenta del enunciado nos permitiría darnos cuenta de que los números buscados establecen una igualdad entre el número de unidades de área y el número de unidades de longitud .

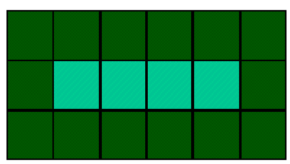
Si con una unidad de área intentamos medir la superficie de un rectángulo y empezamos situando las unidades de área sobre los bordes del rectángulo.



Observamos que cada unidad de área se corresponde con una unidad de longitud excepto en las esquinas, en las que una unidad de área se corresponde con dos unidades de longitud.

Si debemos tener tantas unidades de área como de perímetro, hemos de colocar "dentro del borde" cuatro unidades más de área, que a su vez deben constituir otro rectángulo, lo cual sólo puede hacerse en dos formas:

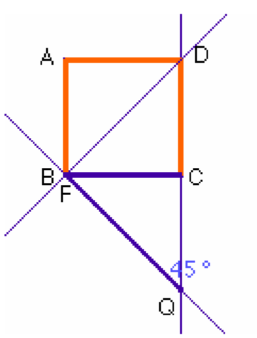


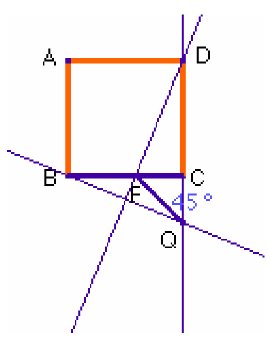


Trabajando con unidades de área estas figuras, visualizamos la solución.

Un Problema en torno al Cuadrado.

Sea ABCD un cuadrado y F un punto cualquiera del lado BC. Se traza por B la perpendicular a la recta DF que corta a la recta DC en Q.



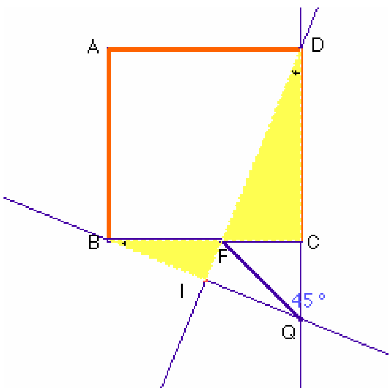


¿Cuánto mide el ángulo FQC?

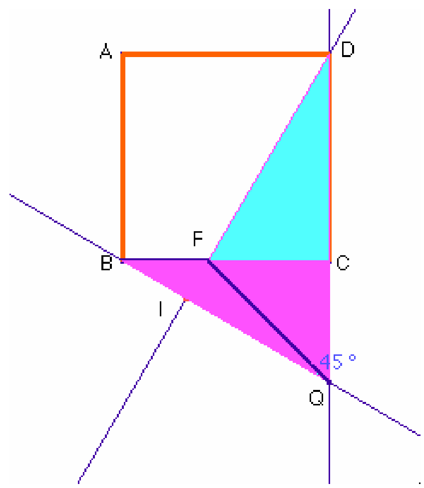
Transcribiendo geométricamente el enunciado con Cabri II y midiendo el ángulo pedido se obtiene la figura de la derecha.

Utilizando las posibilidades del Cabri II o de cualquier otro programa de Geometría Dinámica animamos el punto **F** y observamos que la medida del ángulo no varía.

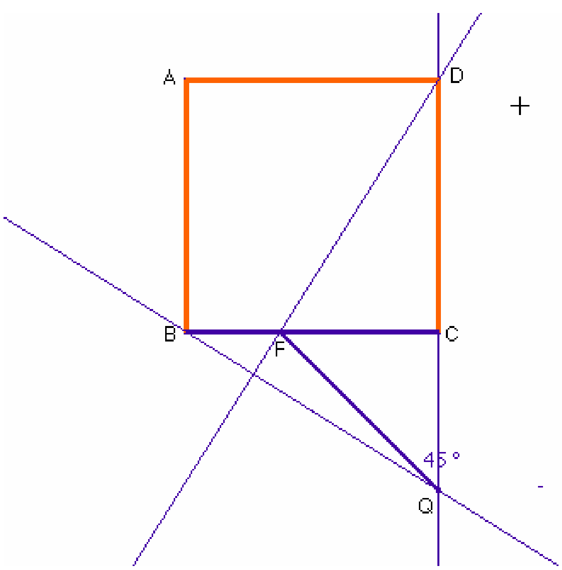
Desde el conocimiento de la solución (45º) resolver el problema sería demostrar que los segmentos **CF** y **CQ** son iguales.
¿Pero estos segmentos qué son? La observación de la figura nos muestra que son catetos de dos triángulos rectángulos: **CDF** y el **BCQ**.
Estos dos triángulos son iguales:
Tienen un lado igual: **CB = CD**
Ambos son rectángulos
Los ángulos **CBQ** y **CDF** son iguales ya que ambos son complementarios de los ángulos **BFI** y **DFC**, iguales por ser opuestos por el vértice.
Entonces, se tiene



Camino a seguir para la resolución del problema:
1. Resolver el problema con Cabri II.
1.1. Entender el enunciado
1.2. Transcribir geométricamente el enunciado.
1.3. Medir el ángulo pedido con Cabri II
1.4. Observar que la solución del problema es independiente de la elección del punto F en el segmento



2. Observaciones desde el problema resuelto:
2.1. Si el ángulo FQC mide 45º ¿cómo es el triángulo FQC?
2.2. ¿Hay otro triángulo que tenga también como lados FC o CQ?
2.3. ¿Cómo son los triángulos FCD y BCR?

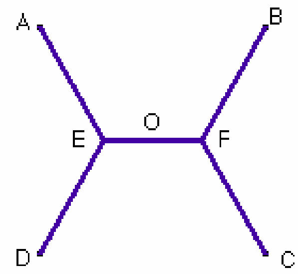


2.4. Escribe, desde las observaciones realizadas el camino a seguir para resolver el problema

CONSTRUYENDO CARRETERAS

Ejemplo de aplicación del programa de ordenador CABRI II a la resolución de un problema.

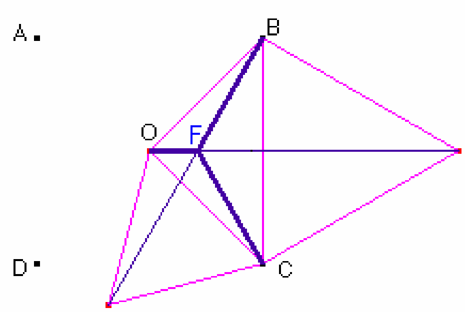
Cuatro ciudades se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de lado 20 km. La Comunidad ha decidido construir unas carreteras que permita comunicarlas entre sí. A la empresa constructora se le ha pedido que realice un trazado lo más corto posible para reducir al máximo el costo. ¿Cuál debe ser el trazado?
Las soluciones primeras que se dan son:



	OF=	OF + 2*BF=
1	0,8000	5,4648
2	0,7667	5,4661
3	0,6667	5,4741
4	0,8667	5,4643

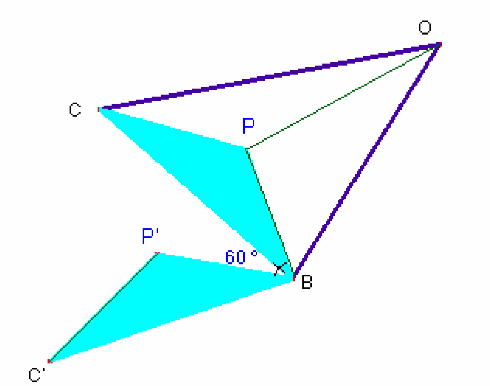
¿Se puede mejorar el trazado?
En busca de la solución, la primera idea fue experimentar haciendo mediciones utilizando las posibilidades de CABRI II.
Esta actividad nos permitió conjeturar sobre cuál debería ser el camino buscado.
La simetría de esta figura nos hizo intuir que resolver el problema equivalía a determinar un punto F, interior al triángulo OBC, para el cual **la suma de distancias a los vértices fuese mínima.**
El problema quedaba reducido a ¿Cuál debe ser el trazado vial más corto entre tres ciudades? Equivalente al problema matemático: encontrar un punto F, interior a un triángulo OBC (acutángulo), tal que: OF + FB + FC mínimo
Si P es un punto cualquiera, interior al triángulo OBC:

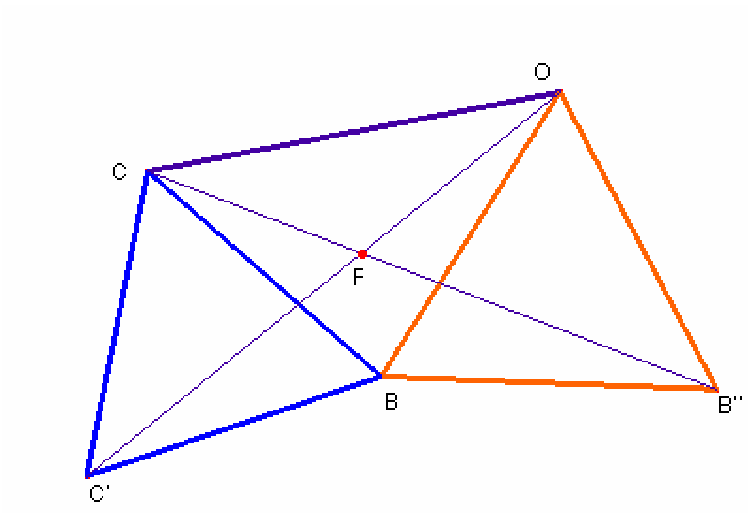
OP + PB + PC = OP + PP' + P'C'

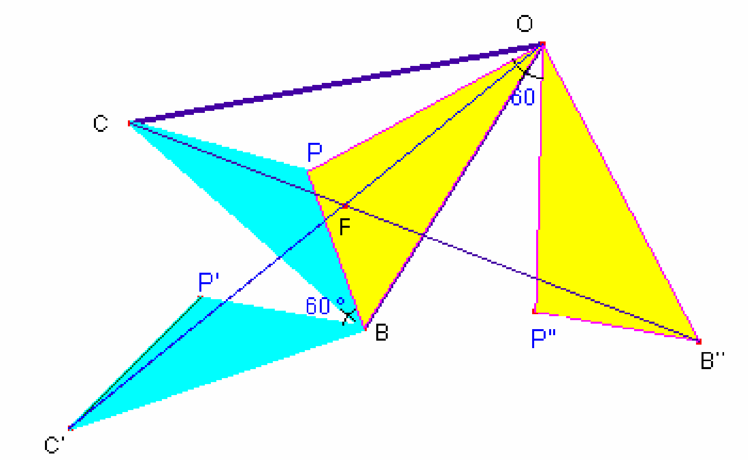


	OF=	OF + 2 * FB=
1	0,8453	5,4641

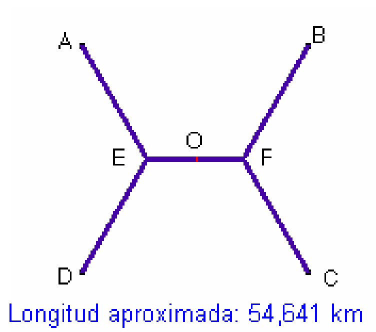
(Por construcción, ya que hemos girado el triángulo CPB, 60º alrededor de B en sentido positivo)
El hecho de que OP + PP' + P'C' sea mínimo equivale a que los puntos O, P, P', C' estén alineados. Para que esto ocurra, los ángulos OPB, OPC y CPB deben medir 120º.
Luego, el problema, volvería a reducirse a encontrar un punto interior F del triángulo que cumpliese la condición anterior.







La construcción anterior nos indica la forma de determinar F. El punto buscado estaría en el segmento que une O con C'
Repitiendo la construcción anterior, también estaría en el segmento CB''.
Por tanto, la intersección de ambos segmentos es el punto buscado.
Analizando la figura hecha, podemos observar que: los puntos O, B, B'' y B, C, C' son vértices de triángulos equiláteros, construidos sobre los lados del triángulo originales.
Resumiendo, para construir el punto F cuya suma de distancias a los vértices de un triángulo sea mínima, bastará construir, sobre dos lados del triángulo dado, sendos triángulos equiláteros y unir los vértices no comunes al triángulo dado y al triángulo equilátero construido. La intersección de estos dos segmentos nos da el punto buscado F.
Volviendo a nuestro problema de las carreteras, la simetría termina el problema:



La cabra pastando[17].

Una cabra está atada con una cuerda en el borde externo de un corral circular de 24 m de perímetro.

La longitud de la cuerda es la mitad del perímetro del corral. ¿qué superficie de cuerda puede alcanzar la cabra?

Este problema es en apariencia sencillo, sin embargo no es tan simple y, para resolverlo vamos a tener que recurrir a algunas estrategias de resolución de problemas.

Para abordarlo es conveniente que:

a) dibujes un diagrama de la situación. No es tan fácil.
b) inténtalo utilizando un tubo cilíndrico y un hilo.

La superficie dibujada no se parece a ninguna de las formas planas cuya área conoces.

ESTRATEGIA: Imagínate un problema parecido pero más sencillo.

Cambia el corral circular por uno cuadrado del mismo perímetro.

Ahora el problema es bastante más sencillo. Dibuja un diagrama de la situación actual.

Observa que las regiones que se forman son sectores circulares cuyos radios y amplitudes respectivas puedes deducir fácilmente.

Cambia el cuadrado por un octógono y repite el proceso.

La edad de Alfredo

Alfredo, ¿sabes que yo tengo cuatro veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tienes tú ahora? ¿Sabes también que cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, tendremos entre los dos 114 años?

¿Qué edad tiene Alfredo? y ¿yo?

Sugerencia: lee con atención, piensa en la diferencia de edad entre ambos y en que los años pasan para los dos igual. Utiliza ecuaciones si te hace falta.

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS POR NIVELES DE DIFICULTAD

Nivel de dificultad 1.

1. En la película "La jungla de cristal 2", el malo propone a McCane y a su amigo un problema. Para desactivar una bomba tienen que colocar sobre una maleta una garrafa con 4 litros de agua, pero sólo disponen de una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros, ¿cómo lo resuelven?
2. Tres amigos tienen 21 botes de coca-cola, 7 de ellos están llenos, 7 vacíos y 7 llenos hasta la mitad exactamente. ¿Cómo deben repartirse los botes para que los tres se lleven el mismo número de botes y la misma cantidad de coca-cola? (No se puede trasvasar de un bote a otro).
3. ¿Cómo te las ingeniarías para cortar en 8 trozos iguales un disco de papel, dando sólo tres cortes rectos?

Nivel 2.

1. Un excursionista sale de su casa a las 4 de la tarde para subir a una montaña. Hasta la base de la montaña el terreno es llano y avanza a 4 km/h, subiendo va a 3 km/h y bajando a 6 km/h. Si regresa a las 10 de la noche, ¿cuántos kms ha recorrido en total?

---

[17] http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/taller/taller.htm#RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2. ¿Cuántas veces a lo largo de un día las agujas de un reloj forman un ángulo recto?
3. Tres cervezas, 7 refrescos y una ración de calamares cuestan 2800 pts; 4 cervezas, 10 refrescos y una ración cuestan 3400 pts. ¿Cuánto habrá que pagar por una cerveza, un refresco y una ración?

Nivel 3.
1. *El problema de Newton* .
En un campo la hierba crece en todas partes con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días y 30 vacas en 60 días. ¿Cuántas vacas serían necesarias para comerse toda la hierba en 96 días?
2. Una brigada está formada por 6 armadores y un carpintero. Cada armador gana 20.000 pesos y el carpintero 3.000 pesos más que el salario medio de los miembros de la brigada incluido el mismo. ¿Cuánto ganaba el carpintero?
3. Un coche va por una carretera a velocidad constante. En un momento dado pasa por delante de un poste kilométrico que tiene un número de dos cifras. Al cabo de una hora pasa por delante de otro poste que curiosamente tiene las mismas dos cifras pero en orden inverso.
Su sorpresa es enorme cuando al cabo de otra hora pasa por otro poste que lleva las mismas cifras separadas por un cero. ¿A qué velocidad va el coche?

ANEXO 3

La actividad subconsciente en la resolución de problemas[18].

Miguel de Guzmán

Calibrar exactamente el grado de importancia en la labor creativa, de resolución de problemas, de los movimientos subconscientes e inconscientes es una tarea nada sencilla, pues implica tratar de adentrarse en lo más recóndito y misterioso de la mente humana.

Para muchos matemáticos de gran éxito creativo la influencia de la actividad subconsciente en sus procesos mentales aparece como algo totalmente patente y decisivo. Es interesante observar que la oposición mayor a esta convicción provenga precisamente de algunos psicólogos que opinan que los matemáticos y otros científicos, así como muchos artistas, se engañan en la interpretación ingenua de sus experiencias.

A través de unas cuantas especulaciones tal vez un tanto aventuradas, pero no sin fundamento, trataré de apuntar un principio de explicación de los fenómenos experimentados y descritos por grandes matemáticos, que en medida más modesta son también compartidos por prácticamente todos los que se enfrascan con interés en problemas más sencillos.

En nuestro complicado mecanismo mental confluyen simultáneamente y de modo natural y espontáneo actividades de muy diverso tipo. Los dinamismos del conocimiento son muchos y muy variados: sensaciones, imágenes subyacentes, memorias, surcos de inferencia, patrones de reconocimiento.... que se presentan con un tipo de conciencia gradual que va desde la plena atención consciente a un aspecto determinado hasta la percepción difusa que casi desaparece o que permanece en la total penumbra, aun así influyendo tal vez fuertemente en la marcha del pensamiento.

Por otra parte la coloración afectiva de nuestra mente proporciona un profundo impacto sobre nuestro pensamiento y sobre su posible eficacia o ineficacia. Los deseos, ansiedades, repugnancias, miedos.... son intensas fuerzas que también condicionan de modo decisivo nuestra actuación mental.

Al final de la obra se apunta hacia formas diferentes de tratar de estimular de modo activo la interacción de las potencialidades subconscientes de nuestro mecanismo mental a las que muy de ordinario no permitimos que se involucren en nuestra labor creativa.

¿Actividad subconsciente? Algunos testimonios de grandes matemáticos

Para cualquier matemático que se entrega con entusiasmo a la tarea de resolver los problemas específicos de su área, la importancia del subconsciente es tan evidente que le resulta chocante encontrar entre los psicólogos quienes la nieguen frontalmente.

La obra de R. Weisberg *Creatividad. El genio y otros mitos* (Barcelona, Labor, 1987) constituye un intento de «desmitificación» de lo que él considera una concepción errónea del proceso creativo. Frente a descripciones e intentos de explicación, como los que veremos a continuación, de matemáticos como Poincaré, Hadamard, y otros científicos y artistas, la concepción de Weisberg, en sus propias palabras «carga el énfasis en la dependencia de los actos

[18] http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html

creativos respecto de la experiencia previa y en la gradual evolución de una respuesta creativa basada en la experiencia pasada. No han de darse grandes saltos de la intuición, sean conscientes o inconscientes. Por el contrario, la acción creadora es lenta y progresiva, o "incremental", como se dirá en este libro: en ella, la forma habitual de tratar un problema va evolucionando gradualmente hasta convertirse en algo nuevo» (Prólogo).

Es verosímil que quienes niegan la realidad de una actividad subconsciente importante en la resolución de problemas quieran con ello expresar su convicción de la imposibilidad de hablar del tema con un mínimo de rigor científico.

Con todo, también hay psicólogos bien acreditados que muy razonablemente optan más bien por no esconder el problema bajo la alfombra. Así se expresan Lindsay y Norman en su *Introducción a la psicología cognitiva* (Madrid, Tecnos, 1986, p.666), al tratar de los mecanismos del pensamiento:

> Los seres humanos son conscientes de sus propias acciones y pensamientos. Esta conciencia o autoconciencia es un aspecto fundamental de la conducta mental humana, pero se entiende poco. Sabemos poco sobre la función de la conciencia, poco de las operaciones que no son conscientes: los procesos del pensamiento subconsciente. Sospechamos que los procesos conscientes son fundamentales para la elección inteligente, para el aprendizaje, para la conducción del organismo. Sospechamos que existen numerosos procesos subconscientes que operan sin esta conducción consciente durante un tiempo, pero que deben buscar periódicamente supervisión y dirección. Todo lo que sabemos sobre el pensamiento consciente y subconsciente es muy especulativo. Sin embargo, el estudio del pensamiento es demasiado importante para dejarlo a un lado. Es un área de gran importancia para la psicología y para todos nosotros. Quizá *el* tema más importante de la psicología.

En esta quinta parte vamos a examinar brevemente el papel que eso un tanto misterioso que constituye la actividad subconsciente parece jugar en la resolución de problemas. El tema es tan importante que, incluso aunque no se pueda afinnar sobre él nada con rigor, vale la pena intercambiar experiencias con seriedad.

A continuación trataremos de ver desde un punto de vista práctico lo que se puede sugerir razonablemente a fin de favorecer activamente su ayuda. Como en todo el resto de este trabajo, pero aquí mucho más, no trato de realizar una investigación científica que conduzca a una colección de proposiciones que se hayan de considerar fuera de toda duda. Mi intención fundamental es transmitir, de la forma más útil posible, un conjunto de experiencias derivadas de la observación por muchos años del trabajo propio y de otros muchos alumnos y colegas en la resolución de problemas.

Algunos testimonios de grandes matemáticos

Afortunadamente ha habido algunos matemáticos de primera magnitud que han expresado con claridad su experiencia sobre el tema que nos ocupa. Otros incluso se han adentrado en él mucho más a fondo a fin de dar con su explicación más profunda. Los dos estudios introspectivos más iluminadores ya clásicos han sido escritos por H. Poincaré, en una famosa conferencia en 1908 ante la Sociedad de Psicología de París, muchas veces reproducida (puede verse, por ejemplo, en castellano, «La creación matemática» en Morris Kline (compilador), *Matemáticas en el mundo moderno, pp.* 14-17, Madrid, Blume, 1974) y por J. Hadamard en su famosa obra *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton Univ. Press, 1945) (una edición asequible en Dover, Nueva York, 1954). La lectura de estas obras puede ayudar extraordinariamente a formarse una idea de las vivencias que los más grandes matemáticos y otros muchos más modestos experímentan en sus enfrentamientos con verdaderos retos intelectuales.

A continuación, tomados de estas y otras obras, se presentan unos cuantos testimonios interesantes para nuestra exploración.

El mayor genio de la matemática, Gauss, escribía así refiriéndose en una carta a cierto teorema de teoría de números que había tratado de probar, sin éxito, durante varios años:

> Finalmente, hace dos días, lo logré, no por mis penosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como tras un repentino resplandor de relámpago, el enigma apareció resuelto. Yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que conectó lo que yo sabía previamente con lo que hizo mi éxito posible.
>
> (De una carta comentada en *Revue des questions scientifiques,* octubre 1886, p. 575. Citado por Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field,* cap.1)

Por su parte, Hamilton, en 1858, describe con las siguientes palabras su hallazgo de los cuaterniones, tras quince años de infructuosos esfuerzos:

> Mañana será el quince aniversario de los cuaterniones. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan *i, j, k* [los nuevos números que hacen el papel de *i* de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años.

En su conferencia ante la Sociedad de Psicología de París, Poincaré, después de relatar pormenorizadamente unas cuantas experiencias muy significativas de su propio trabajo matemático, analiza su experiencia a fondo:

> En este momento me fui de Caen, donde vivía entonces, para formar parte de una excursión geológica organizada por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; al llegar a Coutances nos subimos en un autobús, para no sé qué paseo. En el momento en que ponía el pie en el escalón, me vino la idea, sin que tuviese relación, me pareció, con lo que había estado pensando, de que las transformaciones que yo había utilizado para definir las funciones fuchsianas son idénticas a las de la geometría no euclídea. No lo comprobé, no tuve tiempo; después, apenas me senté en el autobús reanudé la conversación, pero de pronto tuve una completa seguridad. Al volver a Caen comprobé el resultado con la mente descansada para tranquilidad de mi conciencia.
>
> Estos son los hechos. Ahora veamos las reflexiones que nos sugieren. El yo inconsciente o yo subliminal, como se dice, juega un papel esencial en la creación matemática. Esto se deduce de todo lo

> precedente. Pero ordinariamente el yo subliminal se considera como puramente automático. Ahora bien, hemos visto que el trabajo matemático no es un simple trabajo mecánico que se confiaría a una máquina, por muy perfeccionada que se imagine. No se trata solamente de aplicar reglas y de elaborar el mayor número de combinaciones con unas leyes fijas. Las combinaciones obtenidas de este modo serían extremadamente numerosas, inútiles y embarazosas. El verdadero trabajo del creador consiste en escoger entre estas combinaciones, a fin de eliminar las inútiles o, sobre todo, no tomarse el trabajo de hacerlas. Las reglas que deben conducir a esta elección son extremadamente sutiles y delicadas. Es casi imposible enunciarlas con un lenguaje preciso. Se sienten más bien que se formulan. En tales condiciones, ¿cómo es posible imaginar una criba capaz de aplicarlas mecánicamente?
>
> Entonces se nos presenta una primera hipótesis. El yo subliminal no es en forma alguna inferior al yo consciente. No es puramente automático, es capaz de discernimiento, posee tacto, delicadeza; sabe escoger, sabe adivinar. ¿Cómo diría? Adivina mejor que el yo consciente, puesto que logra llegar allí donde éste fracasó. En una palabra, ¿no es superior al yo consciente?

Hadamard, por su parte, dedica una gran parte de su libro a explorar el tipo de actividad subconsciente que acompaña al trabajo creativo en matemáticas y en otros campos. La efectividad del papel del subconsciente y su modo de acción es uno de los objetivos principales de su investigación.

> Que esas iluminaciones súbitas que pueden ser llamadas inspiraciones no pueden producirse meramente por azar es ya evidente por lo que hemos dicho: no puede haber duda alguna de la necesaria intervención de algún proceso mental previo desconocido para quien inventa; en otros términos de un proceso inconsciente. Más aún, después de haber visto, como veremos en muchos lugares en lo que sigue, el inconsciente en acción, apenas puede surgir duda alguna en lo que se refiere a su existencia.

El libro de Hadamard apareció en 1945. En 1946 G. H. Hardy, uno de los más grandes analistas del siglo xx, escribía en *Mathematical Gazette* (vol. 30, [1946], pp.111-115) una interesante recensión sobre él en la que aportaba al tema elementos nuevos procedentes de su propia experiencia. La recensión de Hardy puede verse reproducida recientemente en *The Mathematical Intelligencer* (vol. 5 [1983], pp.60-63). He aquí algunos de sus párrafos relativos a la actividad subconsciente.

> Los hechos principales enumerados [en los primeros capítulos de Hadamard, sobre el inconsciente] parecen fuera de toda discusión. Que la actividad inconsciente juega a menudo un papel decisivo en el descubrimiento; que períodos de esfuerzo inefectivo son a menudo seguidos, después de intervalos de descanso o distracción, por momentos de súbita iluminación; que estos destellos de inspiración son solamente explicables como resultado de actividades que el individuo no ha advertido; la evidencia acerca de todo esto parece abrumadora.
>
> [...]
>
> El curso típico de los hechos es más o menos como sigue. Hay un estadio de actividad plenamente deliberada, posiblemente con algunos

> resultados aunque ciertamente insatisfactorios [...] Luego viene un descanso, completo o parcial, impuesto o deliberado, el resultado de otra ocupación o dedicación a otros problemas diferentes, seguido por un momento de iluminación repentina. Luego viene un segundo período de esfuerzo consciente, esta vez con éxito, en el cual las líneas maestras de la solución aparecen claras. Luego, muy probablemente tras una larga espera, el estadio final que Hadamard llama de «precisión» en el cual los resultados son «formalmente escritos» y puestos en orden, un proceso cansino y de segundo orden, pero esencial. Estos cuatro períodos parecen constituir el mínimo, pero por supuesto puede haber más; las experiencias de Poincaré fueron bastante más complicadas y tuvo al menos dos momentos de inspiración inesperada.
>
> [...]
>
> «Invención es discernimiento, elección» [son palabras de Poincaré] pero ¿dónde y cómo se hace esta elección? Esta es la cuestión más enigmática, y yo no puedo dejar de percibir que ni Poincaré ni Hadamard en absoluto apunten claramente hacia una respuesta satisfactoria. Parece claro que nuestras actividades inconscientes han tenido que incluir algún proceso de selección, puesto que la mayor parte de nuestras combinaciones inconscientes nunca se elevan a nuestra conciencia en absoluto...

Otra aportación muy interesante al mismo tema nos la proporciona otro de los grandes analistas de época reciente, J. E. Littlewood. En *The Mathematical Intelligencer* (vol. 1 [1978], pp. 113-119) se publicó una interesante conferencia titulada *The Mathematician's Work of Art* en la que Littlewood glosaba con su humor característico diferentes aspectos psicológicos y prácticos del trabajo del matemático creador.

> La incubación es el trabajo del subconsciente durante el tiempo de espera, que puede durar varios años. La iluminación, que puede ocurrir en una fracción de segundo, es la manifestación de la idea creativa en la ciencia. Esto ocurre casi siempre cuando la mente está en un estado de relajación y suavemente ocupada con asuntos ordinarios.
>
> [...]
>
> La iluminación implica alguna relación misteriosa entre el subconsciente y el consciente, de otro modo tal manifestación no podría darse. ¿Qué es lo que enciende la bombilla en el momento oportuno?

En la obra de Hadamard antes citada aparece una interesante carta de Einstein sobre su modo de trabajo que, aunque en su mayor parte se dedica a describir los tipos de fenómenos que acompañan su trabajo mental, también indica claramente su opinión de que entre la plena conciencia, un «concepto límite», y la inconsciencia existe amplio espacio para otros estados de la mente en su trabajo creativo:

> [...]
>
> A) Las palabras o el lenguaje, escritas o habladas, no parecen jugar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades psíquicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son ciertos signos e imágenes, más o menos claras, que pueden ser *voluntariamente* reproducidas y combinadas.

> Hay, por supuesto, una cierta conexión entre estos elementos y conceptos lógicos relevantes. Es también claro que el deseo de llegar finalmente a conceptos conectados lógicamente es la base emocional de este juego más bien vago con los elementos antes mencionados. Pero desde un punto de vista psicológico, este juego combinatorio parece ser el rasgo esencial en el pensamiento productivo -antes de que haya ninguna conexión con construcción lógica en palabras o en otras clases de signos que pueda ser comunicada a los otros.
>
> B) Los elementos antes mencionados son, en mi caso, de tipo visual y algunos de tipo muscular. Las palabras convencionales u otros signos han de ser buscados con trabajo solamente en una segunda fase, cuando el juego asociativo mencionado está suficientemente establecido y puede ser reproducido a voluntad.
>
> C) De acuerdo con lo dicho, el juego con los elementos mencionados se dirige a ser análogo a ciertas conexiones lógicas que uno está buscando.
>
> [...]
>
> E) A mí me parece que lo que usted llama plena conciencia es un caso límite que nunca puede ser alcanzado plenamente. Esto me parece estar conectado con el hecho llamado la estrechez de la conciencia (Enge des Bewusstseins).
>
> Apéndice II de J. Hadamard, *An Essay on The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton Univ. Press, 1945).

En una publicación muy reciente, *The Emperor's New Mind* (Oxford Univ. Press, 1989), Roger Penrose relata una experiencia muy interesante a propósito del descubrimiento y explicación de cierto aspecto de la teoría de los agujeros negros. Aquí aparece un elemento nuevo, el surgimiento desde la actividad subconsciente y posterior olvido de una luz muy peculiar que vino a resolver un importante problema:

> [...]
>
> La experiencia de una idea que viene «como un relámpago», bajo tales circunstancias -con un fuerte sentimiento de convicción en lo que se refiere a su validez- no me es desconocida.
>
> Tal vez valga la pena referir un ejemplo particular de esta situación, que tiene un punto curioso de interés adicional. En el otoño de 1964 yo había estado pensando sobre el problema de las singularidades relativas a los agujeros negros [...]. Un colega (Ivor Robinson) había venido de EUA de visita y teníamos una conversación interesante acerca de un tema totalmente diferente cuando íbamos calle abajo hacia mi despacho en el Birbeck College en Londres. La conversación se detuvo momentáneamente para cruzar una calle lateral, y comenzó de nuevo en la otra acera. Evidentemente, durante estos pocos momentos, una idea se me ocurrió, pero luego, ¡la conversación que siguió la borró de mi mente!
>
> Más tarde, después de que mi colega se había marchado, volví a mi despacho. Recuerdo haber tenido una extraña sensación de alegría, por algo de lo que no podía dar razón. Comencé a recorrer en mi mente todas las cosas variadas que me habían sucedido durante el día, intentando encontrar qué era lo que había causado esta alegría. Después de eliminar numerosas posibilidades inadecuadas, finalmente

> me vino a la mente el pensamiento que había tenido al cruzar la calle ¡un pensamiento que me había alegrado momentáneamente al proporcionarme la solución al problema que había estado rumiando en el trasfondo de mi cabeza! Aparentemente era el criterio que se necesitaba -lo que yo llamé más tarde una «superficie atrapada»- y entonces no me llevó mucho tiempo esbozar el esquema de una demostración del teorema que había estado buscando (Penrose, 1965). Incluso entonces, pasó algún tiempo antes de que la demostración fuera formulada de una forma completamente rigurosa, pero la idea que había tenido mientras cruzaba la calle había sido la clave. (A veces pienso qué habría ocurrido si alguna *otra* experiencia de alegría sin trascendencia me hubiera sucedido durante aquél día. ¡Tal vez nunca hubiera recordado la idea de la superficie atrapada!)

La anécdota anterior me lleva a otro tema referente a la inspiración y a la intuición *(insight),* a saber, que los criterios estéticos son enormemente valiosos para formarnos nuestros juicios. En las artes, podría uno afirmar que son los criterios estéticos los que dominan sobre todo. La estética en las artes es un tema muy extenso y los filósofos han dedicado vidas enteras a su estudio. Podría argüirse que en la matemática y en las ciencias tales criterios son meramente incidentales, dominándolo todo el criterio de la *verdad.* Sin embargo, parece imposible separar uno del otro al considerar los temas de la inspiración y la intuición. Mi impresión es que la fuerte convicción de la *validez* de un relámpago de inspiración (no fiable al ciento por ciento, debería añadir, pero al menos más fiable que sólo el azar) está conectada muy fuertemente con sus cualidades estéticas. Una idea bella tiene una probabilidad mucho mayor de ser una idea correcta que una idea fea. Esa al menos ha sido mi propia experiencia, y sentimientos semejantes han sido expresados por otros. Por ejemplo, Hadamard (1945, p. 31) escribe:

> «... es claro que ningún descubrimiento o invento significativo puede tener lugar sin la *voluntad* de encontrar. Pero con Poincaré vemos algo más, la intervención del sentido de belleza que juega su papel como un *medio* indispensable de encontrar. Hemos alcanzado la doble conclusión siguiente: que la invención es elección; que esta elección se halla gobernada de forma imperativa por el sentido de belleza científica».

Más aún, Dirac (1982), por ejemplo, no se recata de decir que fue su *profundo sentido de belleza* lo que le permitió adivinar su ecuación para el electrón mientras otros la habían buscado en vano.

> Por mi parte puedo ciertamente atestiguar acerca de la importancia de las cualidades estéticas en mi propio pensar, por una parte en relación con la *convicción* que uno sentiría con ideas que podrían posiblemente pasar por *inspiradoras* y por otra en lo que se refiere a las conjeturas más *rutinarias* que habrían de hacerse continuamente, a medida que uno percibe que avanza hacia una meta esperada.
>
> [...]
>
> Me parece claro que la importancia de los criterios estéticos se aplica no sólo a los enjuiciamientos instantáneos de la inspiración, sino también a los enjuiciamientos mucho más frecuentes que continuamente hacemos en el trabajo matemático (o científico). ¡Argumentos rigurosos constituyen ordinariamente el *último paso!* Antes de ellos uno tiene que hacer muchas conjeturas y para éstas las convicciones estéticas son

> enormemente importantes, siempre sujetas a argumentos lógicos y hechos conocidos.
>
> [...]

¿Cuál es entonces mi visión acerca del papel del *inconsciente* en el pensamiento relativo a la inspiración? Admito que el tema no está tan claro como me gustaría que estuviera. Esta es un área en la que el inconsciente parece ciertamente jugar un papel vital, y tengo que convenir con la visión de que los procesos inconscientes son importantes. He de estar de acuerdo también en que no puede ocurrir que la mente inconsciente esté simplemente haciendo emerger ideas al azar. Tiene que haber un proceso de selección impresionantemente poderoso que permita que la mente consciente se deje perturbar solamente por ideas que *tienen alguna probabilidad.* Yo sugeriría que estos criterios de selección, fundamentalmente *estéticos,* de alguna manera, han sido ya fuertemente influidos por deseos conscientes (del modo como el sentimiento de fealdad acompañaría los pensamientos matemáticos que son inconsistentes con principios generales ya establecidos).

Las citas podrían multiplicarse. En 1902-1905 la revista *L'Enseignement Mathématique* llevó a cabo y publicó una interesante encuesta sobre los métodos de trabajo de los matemáticos. Entre sus muchas preguntas hay unas cuantas que se refieren directamente a los mecanismos del pensamiento en el descubrimiento matemático y que constituye una rica fuente de información que aún está por analizar con la profundidad que merece.