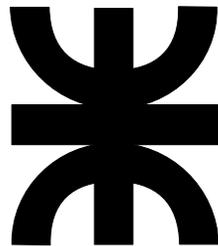


***FUNDAMENTOS DE LA PROBABILIDAD Y
LA ESTADISTICA***

Ing. Alfredo Rojas Lagarde

Dr. Adrian Canzian

Colaboración: Ing. Laura Gelsi



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL GENERAL PACHECO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS**

Agradecemos al Lic. Hugo Fernandez y al Dr. Horacio Bosch la revisión que hicieron de este trabajo y sus valiosos comentarios.

Los Autores

PROLOGO

He sido honrado por el Director del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad Regional General Pacheco para escribir estas líneas presentando el texto "Fundamentos de la Probabilidad y la Estadística" cuyos autores son el Ingeniero Alfredo Rojas Lagarde y el Licenciado Adrian Canzian.

No soy especialista en ninguna de las dos disciplinas que el título antes consignado expresa, razón por la cual esta introducción carecerá de los habituales comentarios y elogios de todo prólogo sobre la importancia y trascendencia de tal o cual teorema, la originalidad de su tratamiento, la necesidad imperiosa de los conceptos de la estadística para la ingeniería y todo lo que suele ser escrito en estos casos.

Todo eso, sencillamente lo doy por hecho porque lo que sí voy a hacer es escribir sobre Rojas, como habitualmente me dirijo a él y sobre Adrián. Cuando el lector sepa de quienes se trata, las distintas consideraciones técnicas de todo prólogo estarán superadas.

Con respecto a Rojas, lamento tener que remontarme al pasado pero ni Rojas ni yo podemos sustraernos al paso del tiempo. Mi más remoto recuerdo sobre él se sitúa en la Facultad de Ingeniería donde yo trajinaba pasillos y aulas como alumno y Rojas lo hacía como uno de los más respetados docentes de aquellos dorados años universitarios anteriores a 1966.

Después de mucho tiempo y yo ya definitiva e irreversiblemente ligado afectiva y laboralmente a la Universidad Tecnológica Nacional y ocupando la jefatura del Departamento de Matemática en la Facultad Regional nombrada, recibo la inesperada visita de Rojas. Me pedía -¡él a mí!- si podía colaborar con el Departamento en Algebra o en alguna otra asignatura. Sus razones para alejarse del lugar en el que lo conocí eran exactamente las mismas por las que yo ya lo había hecho. Cuando se pierde la escala humana y los alumnos pasan a ser simples números de legajo, el contrato implícito que hace que la vida del Profesor Universitario sea rica y plena se pierde y se corre el riesgo de entrar en una rutina en donde máquinas de enseñar repiten año a año ante pasivos oyentes, algo cuya sumatoria debería ser el contenido de una materia.

Por supuesto agoté esfuerzos que felizmente fueron exitosos porque Rojas pasó desde ese momento a integrar el cuadro de Profesores de la Facultad y, sobre todo, pasó a constituirse en un referente para el quehacer docente.

Cada vez que pude o puedo ya que ambos seguimos en la brecha me reúno con él porque aparte del culto por el humor y sus infaltables cigarrillos siempre la conversación evoluciona hacia ideas básicas de universidad, docencia, investigación, ingeniería, desarrollo, etcétera, temas que son de nuestro común interés y preocupación. Normalmente estas reuniones comienzan cuando me toma del brazo, me lleva hacia un sitio en el que supone que nadie escucha y, complotando, me dice "¿qué podemos hacer para mejorar esto?"

Debe decirse que Rojas no fue el número uno de una importantísima empresa de esas que ahora se dicen multinacionales por la sencilla razón que no quiso serlo. Prefirió, mejor dicho, optó por ser INGENIERO dedicándose de lleno a las disciplinas que hacen a este texto aplicándolas a todo aquello de interés para la empresa, evitando así la carga no técnica que necesariamente implica la gestión y la conducción.

Debe decirse también que en una oportunidad me pidió organice un seminario sobre simulación de tráfico telefónico. Así lo hice y, siguiendo su pedido, limité a algo así como seis los inscriptos porque quería trabajar con papel y lápiz, sobre una mesa con interlocutores que pudiesen seguirle el tren. Creo que allí demostró que las centrales de la entonces compañía telefónica estaban mal dimensionadas. Jamás pidió retribución alguna por este seminario. Sencillamente lo consideró una obligación de su parte. ¡Menudo ejemplo!

Esas charlas con toda esa experiencia junto a un rigor emergente de aquella universidad que no vuelve y sobre todo, valores compartidos sobre los temas ya expresados me permitieron esclarecer ciertas ideas básicas que ya son, por lo menos para mí, cuerpo de doctrina. Debo agradecerlo.

¿Puede alguien rebatir que ninguna universidad es más que su cuerpo de profesores?

¿Puede alguien discutir que la infraestructura y el equipamiento son inútiles si no hay cerebros en aptitud de aprovecharlos?

¿Puede aceptarse jugar a la investigación y al desarrollo?

¿Puede exigirse un ejercicio a los alumnos que no haya sido previamente resuelto por el docente?

¿Puede darse clase improvisando?

¿Puede un Profesor Universitario no ser capaz de escribir, por lo menos, el contenido de sus clases?

Por supuesto esta lista puede extenderse pero no vale la pena hacerlo porque la ejemplificación debería estar lograda.

Rojas es ejemplo de todo eso. Y doy un paso más. Fue capaz de asistir como un alumno cualquiera a las clases de Teoría de Campos porque necesitaba entender bien algunos temas relacionados con la teoría de la relatividad y supo que quien la dictaba era un físico de primer nivel, colega y amigo.

Creo que en esa vitalidad, ansias de saber y amor por su trabajo se encierra un secreto de vida que todos deberíamos imitar.

Adrian por su parte arribó a nuestra Facultad Regional con su título de Licenciado en Física y dados los primeros pasos en investigación. Comenzó su actuación como docente y, por sus méritos obtuvo una beca de la Universidad Tecnológica Nacional para doctorarse.

Tiene una línea de investigación definida, comienza a ser conocido y, lo que es aún mejor, reconocido en la misma y en lo que atañe a estas líneas debe decirse que ha logrado una empatía muy importante con Rojas, que como podrá imaginarse con certeza, no acepta fácilmente colaboradores.

Él y otros en similares condiciones académicas son el futuro para la Universidad. Una profunda satisfacción llena el pecho cuando lo que se ha ido atesorando durante años de estudio, investigación, desarrollo y experiencia es aceptado y recibido y queda la certeza de que ha valido la pena haber elegido este camino.

"Fundamentos de la Probabilidad y la Estadística" seguramente reúne la enorme experiencia profesional y docente de Rojas y los nuevos aires emergentes del cuarto nivel que transita Adrián. Es posible que, en beneficio de la ingeniería, no utilice algunos recursos emergentes de modas matemáticas o de cultores a ultranza del rigor - debería decirse de la oscuridad- pero me atrevo a afirmar que seguramente será un magnifico texto para todo aquel que desee trabajar esas disciplinas.

Por último y seguramente quien haya leído toda esta introducción ya lo sabe, pero en ocasiones es necesario decirlo para que perdure, somos varios los que experimentamos el legítimo orgullo de considerarnos amigos de Alfredo Rojas Lagarde; Rojas, como le decimos todos los que verdaderamente lo sentimos como amigo, Adrián entre ellos.

Jorge J. L. Ferrante
Octubre 2006

DE LOS AUTORES

Ing. Alfredo Rojas Lagarde

Ingeniero Civil. Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.

Bachelor of Science in Electrical Engineering. University of Michigan.

Profesor Asociado (regular) de Probabilidad y Estadística. Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.

Jefe de Cátedra de Probabilidad y Estadística. Facultad Regional Gral. Pacheco. Universidad Tecnológica Nacional.

Profesor Titular (ordinario) de Álgebra y Geometría Analítica y de Probabilidad y Estadística. Facultad Regional Gral. Pacheco. Universidad Tecnológica Nacional.

Gerente de Proyectos Especiales. División Ingeniería de la Compañía Standard Electric Argentina.

Consultor de la División de Ingeniería de Telefonía de Siemens y Sitsa.

Dr. Adrian Canzian

Doctor de la Universidad de Buenos Aires. Rama Ingeniería.

Licenciado en Ciencias Físicas. Facultad de Ciencias exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Profesor Adjunto (ordinario) de Álgebra y Geometría Analítica y de Probabilidad y Estadística. Facultad Regional Gral. Pacheco. Universidad Tecnológica Nacional.

Índice

- “Racconto” sobre conjuntos (CNJ).
 - Observaciones. CNJ 1
 - Definición. CNJ 1
 - Igualdad de conjuntos. CNJ 3
 - Subconjuntos. CNJ 3
 - Diagramas de Venn. CNJ 4
 - Unión de conjuntos. CNJ 5
 - Intersección de conjuntos. CNJ 5
 - Distributividad de la intersección de conjuntos con respecto a la unión. CNJ 7
 - Distributividad de la unión de conjuntos con respecto a la intersección. CNJ 8
 - Universo. CNJ 8
 - Complementación de un conjunto. CNJ 9
 - Dualización de la complementación. CNJ 10
 - Resta de conjuntos. CNJ 10
 - Fórmulas misceláneas. CNJ 11

- “Racconto” sobre Técnicas de Conteo (TC).
 - Asociaciones de opciones independientes. TC 1
 - Variaciones simples. TC 2
 - Permutaciones simples. TC 3
 - Combinaciones simples. TC 3
 - Números combinatorios. TC 4
 - Variaciones con repetición. TC 4
 - Permutaciones con repetición. TC 5
 - Binomio de Newton. TC 6

- Probabilidad Elemental (NP).
 - Experimento aleatorio - Universo o Espacio Muestral - Sucesos. NP 1
 - Definición clásica de probabilidad (Laplace). NP 2
 - Definición empírica de probabilidad (Von Mises). NP 4
 - Tentativa de definición axiomática de probabilidad (Borel – Kolmogoroff). NP 6
 - Distribución de probabilidades. NP 9
 - Consecuencias directas de la definición. NP 9
 - Distribuciones condicionales. NP 10
 - Probabilidad compuesta. NP 11
 - Sucesos independientes. NP 12
 - Aplicaciones. NP 14
 - Teorema de Bayes. NP 20
 - Resumen de principales fórmulas. NP 22
 - Observación. NP 23
 - Ejercicios. NP 24

- Variables y Distribuciones Unidimensionales (VAU).

Introducción.	VAU 1
Universo o espacio muestral.	VAU 1
Función de Distribución (F de D). Definición.	VAU 2
Propiedades de la F de D.	VAU 3
Ejemplos de F de D.	VAU 7
Distribuciones discretas.	VAU 10
Distribuciones continuas.	VAU 12
Función de probabilidad (f de p).	VAU 13
Función de densidad (f de d).	VAU 14
Cambio de variable aleatoria.	VAU 15
Valor medio de una variable aleatoria.	VAU 17
Varianza y desviación típica de una variable aleatoria.	VAU 21
Teorema de Tchebycheff	VAU 25
Apéndices.	VAU 27
Ejercicios.	VAU 32

- Nociones sobre Variable Aleatoria y Distribuciones n – Dimensionales (VAM).

Introducción.	VAM 1
Variables aleatorias n - dimensionales.	VAM 1
Universo y distribución de probabilidad multidimensionales.	VAM 1
Función de Distribución (F de D) de una variable n - dimensional.	VAM 3
Propiedades de las F de D bidimensionales.	VAM 5
Distribuciones marginales.	VAM 7
Variables aleatorias independientes.	VAM 9
Aplicaciones.	VAM 10
Distribuciones discretas bidimensionales.	VAM 11
Distribuciones continuas bidimensionales.	VAM 13
Función de probabilidad de una distribución bidimensional.	VAM 15
Función de densidad de una distribución bidimensional.	VAM 16
Suma de variables aleatorias.	VAM 18
Producto de variables aleatorias.	VAM 18
Aplicaciones.	VAM 19
Teorema.	VAM 22
Valor medio y varianza de la media aritmética de n - variables aleatorias, todas independientes entre sí y tales que todas tengan el mismo valor medio y la misma varianza.	VAM 22
Consecuencia principal del teorema de Tchebycheff.	VAM 23
Observación.	VAM 25
Apéndices.	VAM 26
Ejercicios.	VAM 32

- Distribuciones Binomial, de Poisson y Normal (BNP).

Distribución binomial.	BNP 1
Aplicación de la distribución binomial a un proceso de inspección por atributos.	BNP 2
Distribución de Poisson.	BNP 7
Aplicaciones de la distribución de Poisson.	BNP 9
Distribución normal.	BNP 10
Suma de variables aleatorias normales.	BNP 14
Teorema central del límite: Versión de Linderberg.	BNP 14
Versión de Liapunoff.	BNP 15

	Consideraciones adicionales sobre las F de D normales.	BNP 17
	Aplicaciones de las F de D normales.	BNP 21
	Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal.	BNP 26
	Apéndices.	BNP 30
	Ejercicios.	BNP 32
-	Distribuciones χ^2, t y F (JtF).	
	Observación.	JtF 1
	Distribución χ^2 ("Ji" cuadrado).	JtF 1
	Teorema.	JtF 4
	Distribución t de Student.	JtF 4
	Distribución F de Snedecor.	JtF 8
-	Inferencia Estadística. Estimación puntual de parámetros (IE).	
	Concepto de inferencia estadística.	IE 1
	Repetición reiterada de un mismo experimento. Valor medio observado y varianza observada.	IE 2
	Estimación puntual de parámetros.	IE 3
	Estimación de parámetros por el método de máxima verosimilitud.	IE 6
	Apéndice.	IE 8
	Ejercicios.	IE 10
-	Inferencia Estadística. Intervalos de Confianza (IC).	
	Generalidades.	IC 1
	Intervalo de confianza para el valor medio de una variable aleatoria correspondiente a una distribución cualquiera de probabilidad en el caso de disponerse de una muestra grande.	IC 1
	Intervalo de confianza para el valor medio de una variable aleatoria correspondiente a una distribución normal.	IC 5
	Intervalo de confianza para la diferencia de los valores medios correspondientes a dos distribuciones normales distintas pero que tienen la misma varianza.	IC 7
	Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal.	IC 8
	Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos distribuciones normales.	IC 10
	Problemas sobre intervalos de confianza.	IC 13
-	Inferencia Estadística. Prueba de Hipótesis Estadísticas (PH).	
	Definiciones.	PH 1
	Conceptos principales.	PH 1
	Prueba de hipótesis para el valor medio de una variable aleatoria correspondiente a una distribución cualquiera de probabilidad cuando se dispone de una muestra grande.	PH 11
	Aplicación.	PH 14
	Prueba de hipótesis para el valor medio de una variable aleatoria correspondiente a una distribución normal.	PH 15
	Prueba de hipótesis para la varianza de una variable aleatoria correspondiente a una distribución normal.	PH 18

Prueba de hipótesis para el parámetro de una distribución binomial.	PH 19
Prueba de hipótesis para el parámetro λ de una distribución de Poisson.	PH 21
Comparación de distribuciones teóricas y experimentales.	PH 24
Problemas sobre pruebas de hipótesis.	PH 29

- **Correlación y Regresión (CR).**

Correlación lineal.	CR 1
Curvas de aproximación.	CR 5
Método de los mínimos cuadrados.	CR 6
Rectas de regresión.	CR 7
Aplicaciones.	CR 11
Regresión curvilínea.	CR 15
Observaciones.	CR 17
Apéndice.	CR 18
Ejercicios sobre correlación y regresión.	CR 19

- **Procesos Aleatorios de Poisson (PP).**

Definición de proceso puntual.	PP 1
Definición de un proceso estacionario de Poisson.	PP 1
F de D de un proceso estacionario de Poisson.	PP 2
Variable aleatoria correspondiente a varios intervalos consecutivos.	PP 5
Cantidad de eventos en un intervalo fijo.	PP 8
Aplicaciones al cálculo de tamaños de stocks de repuestos.	PP 10

- **Bibliografía.**