INFERENCIA ESTADISTICA

PRUEBA DE HIPOTESIS ESTADISTICAS

PH I

Definiciones

a. Una hipótesis estadística es una suposición que se hace sobre la F. de D. de una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio.

b. Una prueba de hipótesis es un procedimiento que determina si la hipótesis en cuestión debe o no ser rechazada.
Se anticipa que el no rechazo de una hipótesis no implica necesariamente su aceptación. Más sobre esto más adelante.

PH II

Conceptos Principales

PH II.1

Sea un experimento aleatorio con permanencia estadística. Sea X la variable aleatoria asociada al mismo.
Para introducir las nociones básicas de la prueba de hipótesis, se considerará el caso de que la hipótesis a probar, también llamada hipótesis nula, tenga una única posible hipótesis alternativa.
Sea la hipótesis nula:

$$H_0 : \text{X tiene una f. de d. } f_0^X(x)$$

y la hipótesis alternativa:

$$H_1 : \text{X tiene una f. de d. } f_1^X(x) .$$

Dadas estas hipótesis, imagínese para H_0 el siguiente mecanismo de rechazo / no rechazo:

1º. Se particiona a x (al conjunto de los números reales) en dos conjuntos. A uno de ellos se lo llamará “región de no rechazo” (NR) y al otro “región crítica” (RC). Esta partición por el momento se considera arbitraria (ver ejemplo en figura PH II.a).
2º. Se efectúa una única vez el experimento. Llámese x al resultado. Si x ∈ RC se rechazará a H_0, y si x ∈ NR no se la rechazará.

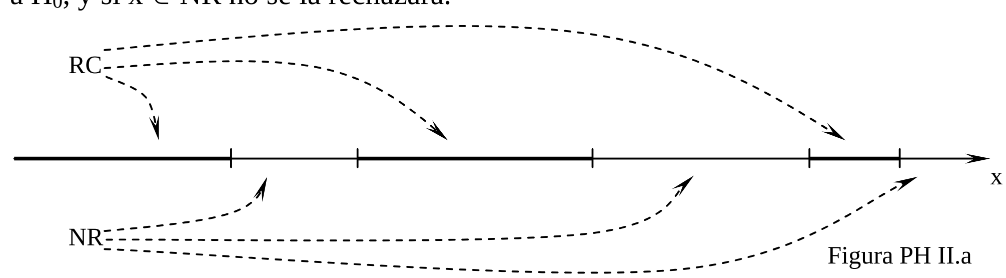


Figura PH II.a

Notar que al definir este mecanismo de rechazo / no rechazo no se entró en consideraciones acerca de si es bueno o malo. Otro mecanismo, evidentemente malo, sería tirar una moneda y rechazar a H_0 si sale cara.
Al proceder de la manera indicada, pueden cometerse dos tipo de errores.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Error tipo I: rechazar a } H_0 \text{ siendo cierta}\\ \text{Error tipo II: No rechazar a } H_0 \text{ cuando es falsa}\end{array}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

Recordando que el no rechazo de H_0 se produce cuando $x \in NR$, y que el rechazo de dicha hipótesis se produce cuando $x \in RC$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{P(I) = P(Cometer error tipo I) = P(Rechazar } H_0 \text{ siendo cierta) =}\\ \quad = \text{P}(x \in \text{RC siendo } H_0 \text{ cierta) =}\\ \quad = \text{P}(x \in \text{RC cuando X tiene una f. de d. } f_0^X(x)).\end{array}\right\} \quad \textbf{[2]}$$

A esta P(I) se lo llamará también "<u>nivel de significación</u>" de la prueba.
Igualmente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{P(II)=P(Cometer error tipo II) = P(No rechazar a } H_0 \text{ cuando es falsa) =}\\ \quad = \text{P}(x \in \text{NR siendo } H_0 \text{ falsa) = P}(x \in \text{NR siendo } H_1 \text{ cierta) =}\\ \quad = \text{P}(x \in \text{NR cuando X tiene una f. de d. } f_1^X(x)).\end{array}\right\} \quad \textbf{[3]}$$

Evidentemente, a distintas elecciones de zonas críticas RC corresponden distintos valores para P(I) y P(II). Según es obvio, el mecanismo de rechazo / no rechazo más arriba indicado será tanto mejor cuanto menores sean los valores de P(I) y P(II), y por lo tanto el diseño de un proceso de prueba de hipótesis se reduce a elegir una región crítica (a particionar el eje x) de manera tal que P(I) y P(II) sean "lo menor posible".
Desgraciadamente, es imposible disminuir simultáneamente a P(I) y P(II). Dada esta circunstancia, lo que generalmente se hace es tomar un valor convencional (generalmente 0,05) para el nivel de significación de la prueba P(I). Una vez fijado este valor, entre todas las regiones que den P(I) = 0,05 se elige a aquella que dé un P(II) mínimo.

PH II.2

<u>Ejemplo</u>

a. Supóngase que:

H_0 = La variable X tiene una f. de d. $f_0^X(x)$

H_1 = La variable X tiene una f. de d. $f_1^X(x)$

siendo $f_0^X(x)$ y $f_1^X(x)$ las indicadas en la figura PH II.b.

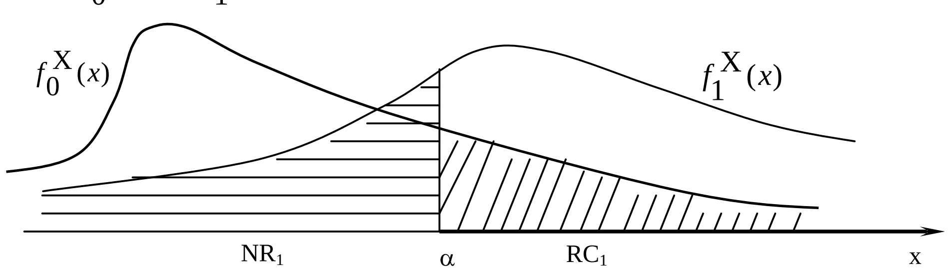


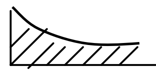
Figura PH II.b

Considérese la región crítica:

$$RC_1 : x > \alpha$$

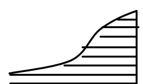
En este caso (ver **[2]** y **[3]**):

$P_{RC\,1}$ (I) = P(x $\in$ RC$_1$ cuando X tiene una f. de d. $f_0^X(x)$) =

$$= \int_{\alpha}^{\infty} f_0^X(x)dx = \text{Área}$$  de figura PH II.b

$P_{RC\,1}$ (II) = P(x $\in$ NR$_1$ cuando X tiene una f. de d. $f_1^X(x)$) =

= P(X $\le \alpha$ cuando X tiene una f. de d. $f_1^X(x)$) =

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} f_1^X(x)dx = \text{Área}$$  de figura PH II.b

b. Evidentemente, al variar α varía RC$_1$ y varían $P_{RC\,1}$ (I) y $P_{RC\,1}$ (II). Si α aumenta, disminuye $P_{RC\,1}$ (I) pero aumenta $P_{RC\,1}$ (II), y viceversa.
Si, tal como indicado en PH II.1, se toma $P_{RC\,1}$ (I) = 0,05, el valor de α queda fijado, lo que a su vez fija el valor de $P_{RC\,1}$ (II).

c. Considérese ahora la región crítica (ver figura PH II.c):

$$RC_2 : a < x \le b$$

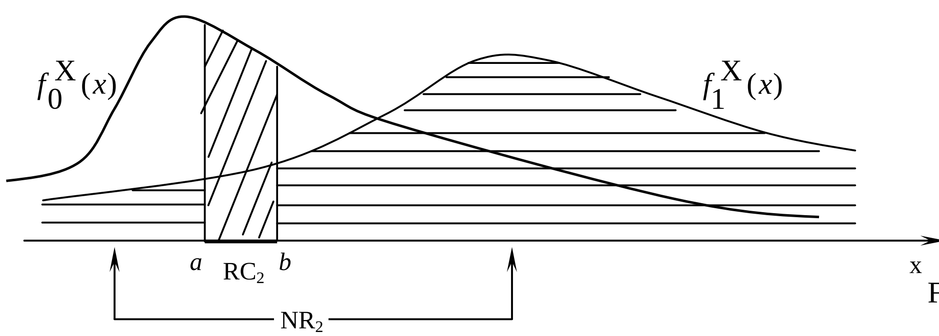
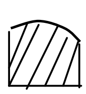


Figura PH II.c

En este caso:

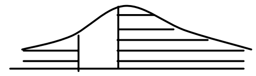
P_{RC2} (I) = P(x $\in$ RC$_2$ cuando X tiene una f. de d. $f_0^X(x)$) =

= P(a < X $\le b$ cuando X tiene una f. de d. $f_0^X(x)$) =

$$= \int_{a}^{b} f_0^X(x)dx = \text{Área}$$  de figura PH II.c

P_{RC_2} (II) = P(x $\in$ NR$_2$ cuando X tiene una f. de d. $f_1^X(x)$) =

= P(X $\le a \cup$ X > b cuando X tiene una f. de d. $f_1^X(x)$) =

$$= \int_{-\infty}^{a} f_1^X(x)dx + \int_{b}^{\infty} f_1^X(x)dx = \text{Área}$$  de figura PH II.c

d. Supóngase ahora que α (figura PH II.b) y a y b (figura PH II.c) hayan sido elegidos de manera tal que:

$$P_{RC\ 1}(I) = P_{RC\ 2}(I) = 0{,}05$$

Se ve a simple vista que se tendrá que:

$$P_{RC\ 1}(II) < P_{RC\ 2}(II)$$

y por lo tanto RC$_1$ es una región crítica mejor que RC$_2$.

Más aún, observando atentamente las funciones $f_0^X(x)$ y $f_1^X(x)$, se llega a la conclusión de que entre todas las regiones críticas tales que P(I) = 0,05 se tiene que aquella que implica un P(II) mínimo es precisamente la RC$_1$.

Por lo tanto, queda terminado el problema del diseño del proceso de rechazo / no rechazo de la hipótesis H$_0$. Si el resultado del experimento cae en RC$_1$, la hipótesis será rechazada.

PH II.3

a. Hasta el momento, el rechazo o no rechazo de la hipótesis nula se efectuaba en base al resultado de un único experimento.

Esto no es motivo de horrorizarse, ya que en la práctica dicho único experimento puede hacerse tan exhaustivo como se quiera mediante el artificio de considerar como experimento único a un conjunto formado por una gran cantidad de experimentos elementales.

Por ejemplo, supóngase que interese verificar la hipótesis nula:

H$_0$: La variable X tiene una f. de d. normal (0 , 1)

teniéndose como hipótesis alternativa:

H$_1$: La variable X tiene una f. de d. normal (1 , 1)

Supóngase que rechazar o no a H$_0$ en base a una única realización del experimento no parezca reunir suficientes garantías (lo cual es en realidad cierto ya que puede probarse que con un nivel de significación P(I) = 0,05 se obtiene P(II) = 0,7422 para una RC óptima). Ver figura PH II.d.

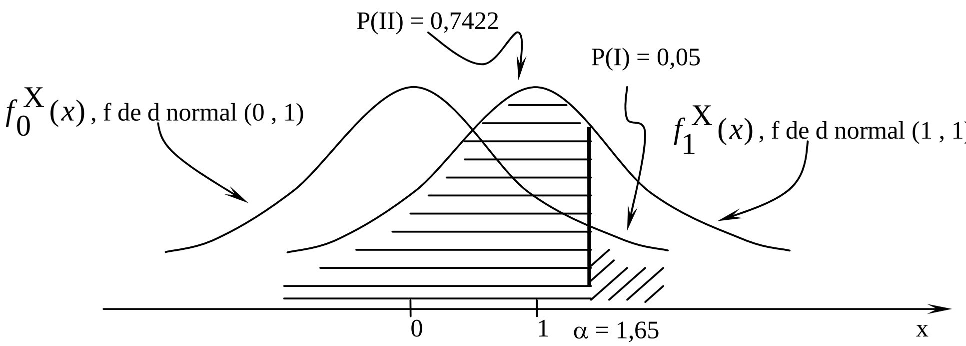


Figura PH II.d

Se harán entonces, digamos, nueve realizaciones del experimento primitivo y con ellas se formará un único experimento compuesto, cuya respuesta será el valor asumido por:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_9}{9}$$

siendo X_1, ..., X_9 las variables correspondientes a cada realización del experimento primitivo.

Como las X_i son todas normales, se tendrá que $\overline{X}$ tendrá también una F. de D. normal. Sus parámetros serán:

$$m_{\overline{X}} = m \qquad\qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{3} = \frac{1}{3}$$

Entonces:

H_0 cierta (X normal (0 , 1)) $\Leftrightarrow$ H_0^* cierta ($\overline{X}$ normal (0 , $1/3$))

H_1 cierta (X normal (1 , 1)) $\Leftrightarrow$ H_1^* cierta ($\overline{X}$ normal (1 , $1/3$))

Entonces, el rechazo / no rechazo de H_0^* implicará el rechazo / no rechazo de H_0. El problema primitivo queda pues mutado en la prueba de H_0^*, hipótesis que tiene como alternativa a H_1^*.

Según se verá, una decisión a que se llegue en base a esta nueva situación será mucho más "seria" que la decisión basada en una única realización del experimento primitivo.

Examinando las f. de d. $f_0^{\overline{X}}(x)$ y $f_1^{\overline{X}}(x)$ (ver figura PH II.e), resulta evidente que para probar a H_0^* la región crítica volverá a ser del tipo:

$$RC : x > \alpha$$

quedando únicamente por averiguar el valor de α.

Trabajando en un nivel de significación P(I) = 0,05, y teniendo en cuenta que si H_0^* es cierta se tiene que $\overline{X}$ tiene un F. de D. normal (0 , $1/3$), resulta que:

$$0{,}05 = P(I) = P(\underbrace{\overline{X}}_{\text{normal }(0\,,\,1/3)} > \alpha) = P\left(\underbrace{\frac{\overline{X} - 0}{1/3}}_{\text{normal }(0\,,\,1)} > \frac{\alpha - 0}{1/3}\right)$$

De la tabla de la función normal (0 , 1) sale entonces que: $\dfrac{\alpha - 0}{1/3} = 1{,}65$

con lo que resulta que: $\alpha = \dfrac{1{,}65}{3} = 0{,}55$

Se calculará ahora P(II). Si H_1^* es cierta, se tiene que $\overline{X}$ tiene una f. de d. normal (1 , $1/3$), y entonces:

$$P(II) = P(\overline{X} < \alpha) = P(\underbrace{\overline{X}}_{\text{normal }(1\ ,\ 1/3)} \leq 0{,}55) = P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}-1}{1/3}}_{\text{normal }(0\ ,\ 1)} \leq \frac{0{,}55-1}{1/3}\right) = P\left(\frac{\overline{X}-1}{1/3} \leq -1{,}35\right) = 0{,}0885$$

Entonces, al pasar de una realización única del experimento primitivo a nueve realizaciones de dicho experimento consideradas como un experimento único, se tiene que el valor de P(II) baja de 0,7415 a 0,0885, para un nivel de significación constante igual a 0,05.
El motivo de esto es el hecho de que las desviaciones típicas de las variables usadas en el experimento compuesto son tres veces menores que las de las variables usadas en el experimento primitivo, lo que causa el efecto ilustrado en las figuras PH II.d y PH II.e.

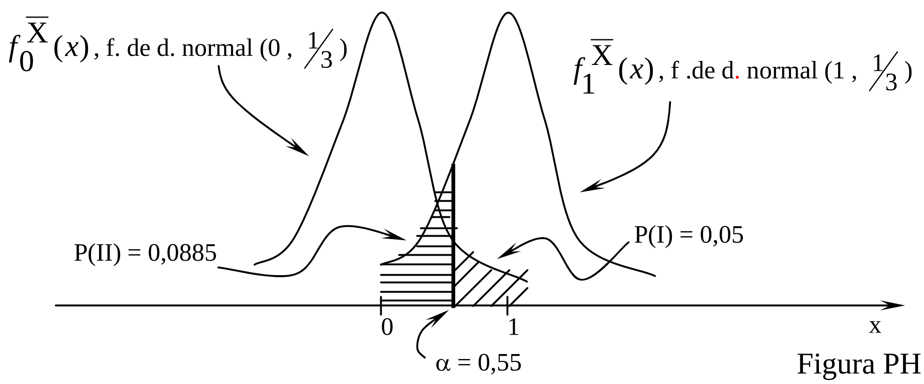


Figura PH II.e

PH II.4

Hasta ahora se ha considerado el caso de que la hipótesis nula tenga una única alternativa. Este caso se presenta muy poco en la vida real, donde generalmente a una hipótesis nula pueden corresponder muchas alternativas.
Considérese el caso de un fabricante de herramientas cuya producción normal sea tal que a la dureza de las mismas pueda hacerse corresponder una variable aleatoria X con f. de d. normal (10 ; 1). El proceso de fabricación es tal que la varianza permanece prácticamente constante. El fabricante ha introducido una variante en la aleación del metal, y desea verificar que dicha variante no ha bajado la dureza de sus herramientas.
Si se hubieran hecho 100 pruebas de dureza antes de variar la aleación, se tendría que la variable aleatoria correspondiente a la dureza promedio tendría una f. de d. normal (10 ; $1/\sqrt{100}$).
Si se hacen 100 pruebas de dureza después de variar la aleación, se tendría que la variable aleatoria correspondiente a la dureza promedio tendría una f. de d. normal (m ; $1/\sqrt{100}$), siendo m el valor medio (desconocido) de la dureza. (Observar que se supuso que la varianza no cambió).
Lo que al fabricante le interesa entonces es probar la hipótesis nula:

$H_0 = \overline{X}$ tiene una f. de d. normal (10 ; $1/\sqrt{100}$)

teniendo como conjunto de hipótesis alternativas:

$\{H^*\} = \{\overline{X}$ tiene una f. de d. normal (m ; $1/\sqrt{100}$)$\}$, $\forall\ \ 0 < m < 10$

Notar que de estas hipótesis alternativas sólo una puede eventualmente ser verdadera (la que corresponde a la nueva dureza de las herramientas <u>en caso de que en efecto la dureza haya cambiado</u>), pero como no se la conoce, es necesario tener en cuenta todas las alternativas del conjunto.
Se tiene entonces la situación indicada en la figura PH II.f.
Examinando esta figura, resulta evidente que debe elegirse una región crítica del tipo:

$$RC : x < \alpha$$

ya que en caso de ser falsa H_0, para cualquiera de las hipótesis alternativas que sea la cierta, esta región crítica dará un valor mínimo para P(II).
Suponiéndose que se trabaje con un nivel de significación P(I) igual a 0,05 se tiene que:

$$0{,}05 = P(I) = P(\underbrace{\overline{X}}_{\text{Normal }(10\,;\,1/10)} < \alpha) = P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}-10}{1/10}}_{\text{Normal }(0\,;\,1)} < \frac{\alpha-10}{1/10}\right)$$

lo que implica que sea:

$$\frac{\alpha-10}{1/10} = -1{,}65$$

de donde:

$$\alpha = 1/10\ (-1{,}65) + 10 = 9{,}835$$

La hipótesis H_0, será pues rechazada o no según que $\overline{X}$ asuma un valor menor o mayor que 9,835.

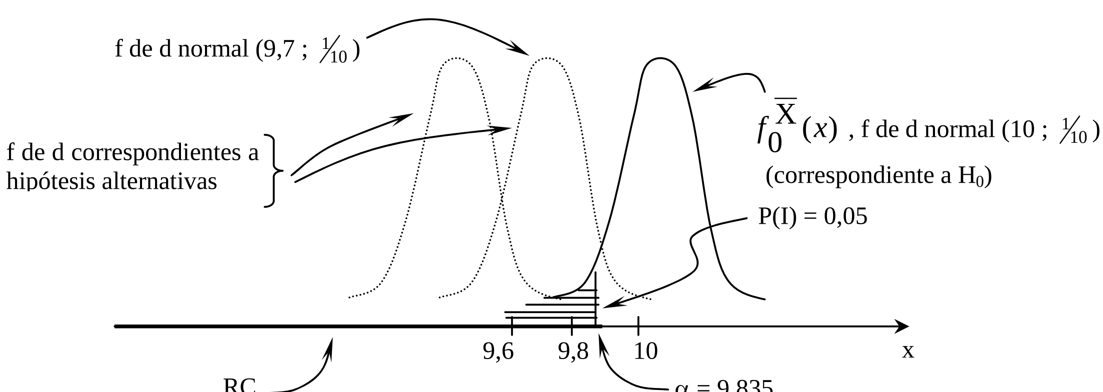


Figura PH II.f

Supóngase que el cambio en la aleación hubiera disminuido la dureza de las herramientas. En este caso H_0 sería falsa y una de las hipótesis alternativas sería cierta. Entonces, para cada posible valor de m candidato a ser cierto que tendrá un valor de P(II) distinto, el cual está dado por.

$$P(II) = P(\underbrace{\overline{X}}_{\text{Normal }(m\,;\,1/10)} > 9{,}835) = P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}-m}{1/10}}_{\text{Normal }(0\,;\,1)} > \frac{9{,}835-m}{1/10}\right) = 1 - P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}-m}{1/10}}_{\text{Normal }(0\,;\,1)} \leq 10\cdot(9{,}835-m)\right)$$

Graficando a P(II) vs *m* se obtiene lo indicado en la figura PH II.g.

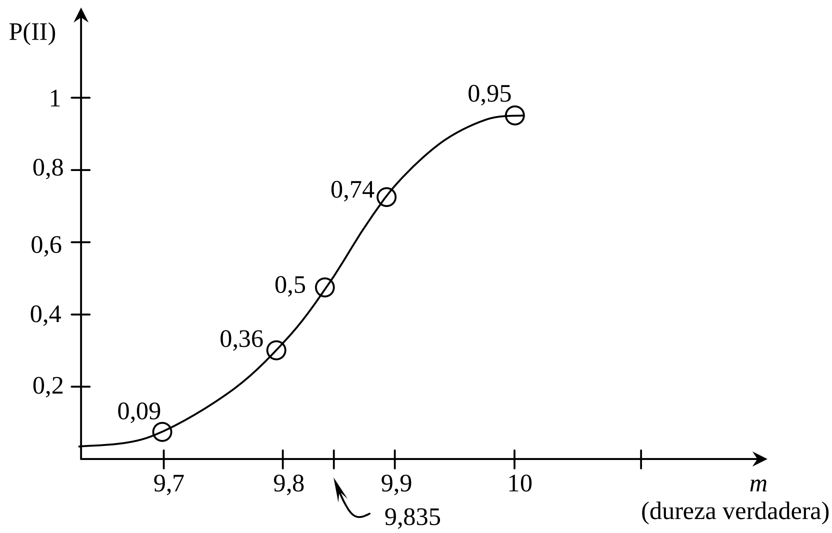


Figura PH II.g

Este gráfico da una idea de la sensibilidad del experimento. Por ejemplo, si la dureza de las herramientas baja de 10 a 9,8, hay una probabilidad igual a 0,36 de "aceptar gato por liebre", es decir de declarar por cierta la hipótesis H_0 cuando en realidad no lo es.
Si esto constituye una catástrofe, entonces habrá que aumentar la sensibilidad del experimento aumentando n (es decir, efectuando más mediciones de dureza).
En cambio si el hecho de que la dureza baje de 10 a 9,8 no presenta mayores problemas, pero si los presenta el que baje de 10 a 9,7, el experimento tiene una sensibilidad adecuada ya que existe una probabilidad de sólo 0,09 de declarar válida a H_0 cuando en realidad no lo es.

PH II.5

a. Sea el caso de un fabricante de ejes cuya producción es tal que al diámetro de los ejes pueda asociarse a una variable aleatoria X con f. de d. normal (100 ; 0,01).
El fabricante y sus clientes se encuentran muy satisfechos con dicha producción. Con ese fin, cada tanto se hace un ensayo consistente en medir 25 ejes. Se pide indicar como se deben usar dichas mediciones para determinar si los parámetros de la f. de d. han cambiado o no.

b. Si los parámetros no han cambiado, se tiene que la variable aleatoria $\overline{X}$ correspondiente al promedio de las medidas tendrá una f. de d. normal (100 ; $^{0,01}/_{\sqrt{25}}$).
Por lo tanto, al fabricante le interesa probar la hipótesis nula:

$$H_0 : \overline{X} \text{ tiene una f. de d. normal } (100 ; \ ^{0,01}/_{\sqrt{25}})$$

teniéndose como conjunto de hipótesis alternativas:

$$\{H^*\} = \{ \overline{X} \text{ tiene una f. de d. normal que NO ES } (100 ; \ ^{0,01}/_{\sqrt{25}})\}$$

Volviendo a principios básicos, se recuerda que el diseño de una prueba de hipótesis se reduce a la elección de una región crítica, resultado de una partición del eje x.

En los problemas anteriores, las regiones críticas consistían todas en semirrectas únicas del eje x (es decir del tipo $x < \alpha$ ó $x > \alpha$).
Esto no puede ocurrir en el presente caso por las razones indicadas a continuación, las cuales están ilustradas en la figura PH II.h.

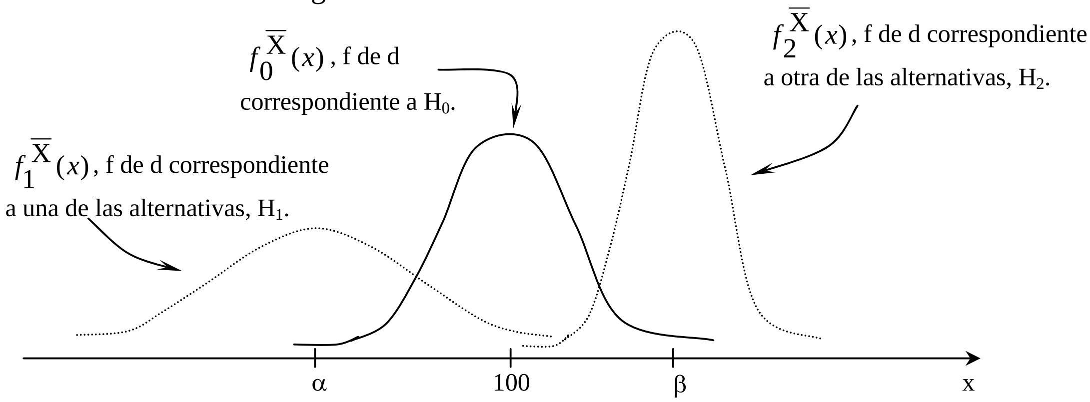


Figura PH II.h

1º. Si existiese el peligro de que la f. de d. primitiva (correspondiente a H_0), $f_0^{\overline{X}}(x)$, evolucionara hacia $f_1^{\overline{X}}(x)$, la región crítica que daría un P(II) mínimo sería del tipo $x < \alpha$.

2º. Si existiese peligro de que la f. de d. primitiva evolucionara hacia $f_2^{\overline{X}}(x)$, la región crítica que daría una P(II) mínimo sería del tipo $x > \beta$.

3º. Si se adopta una región crítica del tipo $x < \alpha$ y la f. de d. primitiva $f_0^{\overline{X}}(x)$ evolucionara hacia $f_2^{\overline{X}}(x)$ se tendría que la probabilidad de no rechazar a H_0 cuando es falsa disminuiría en vez de aumentar.

Este estado de cosas es debido a que en el problema actual no se sabe "el lado por donde puede venir el enemigo", cosa que se conocía en los problemas anteriores.
Entonces, para "proteger ambos flancos" se dividen las "defensas", teniéndose así que la región crítica constará de dos subregiones $x < \gamma_1$ y $x > \gamma_2$ (ver figura PH II.i) que cubren las "colas" de $f_0^{\overline{X}}(x)$.

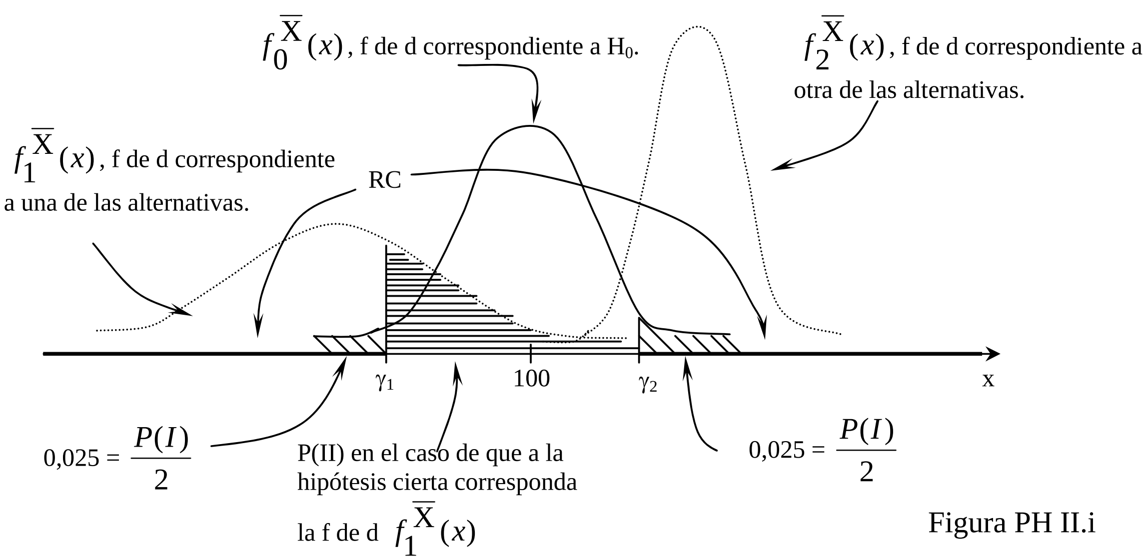


Figura PH II.i

Se obtendrá así lo siguiente:

1º. P(I) = 0,05

2º. Si a la hipótesis verdadera correspondiera la f de d $f_1^{\overline{X}}(x)$ se tendrá:

$$P(II) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_1^{\overline{X}}(x)dx$$

Este valor es superior al que se obtendría si dicha hipótesis fuera la única alternativa posible (en cuyo caso toda la defensa estaría a la izquierda).

3º. Igualmente, si a la hipótesis cierta correspondiera la f. de d. $f_2^{\overline{X}}(x)$ se tendría que:

$$P(II) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_2^{\overline{X}}(x)dx$$

4º. Supóngase cierta la hipótesis alternativa a la cual corresponda la f. de d. $f_3^{\overline{X}}(x)$ indicada en la figura PH II.j.

En este caso se tendrá un P(II) muy grande, y casi con seguridad no se rechazará a H_0 cuando en realidad sea falsa.

Esto no crea mayores problemas ya que en una producción cuya f. de d. sea $f_3^{\overline{X}}(x)$ será probablemente satisfactoria.

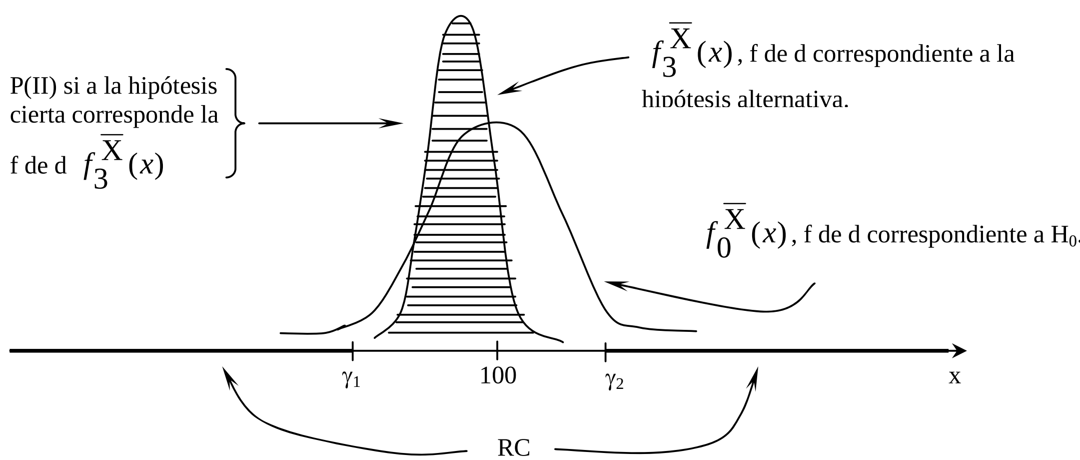


Figura PH II.j

En otras palabras: el mecanismo de prueba indicado detecta bastante bien cambios en la producción que puedan ser peligrosos, pero su sensibilidad ante cambios más o menos inocuos es escasa o nula.

PH II.6 (Muy importante)

a. Casi siempre es el operador quien determina la magnitud del error tipo I que está dispuesto a aceptar. Generalmente establece una magnitud pequeña, digamos P(I) = 0,05 ó P(I) = 0,01. Por lo tanto la probabilidad de rechazar erróneamente una hipótesis nula cierta es baja.

Entonces se dice que la decisión de rechazar a H_0 en base a los resultados obtenidos es una conclusión fuerte.
Por otra parte, el aceptar a H_0 en base a no haberla rechazado constituye una conclusión débil ya que la probabilidad P(II) de no rechazar a H_0 cuando en realidad es falsa puede ser bastante alta (ver figuras PH II.d y PH II.j).

b. En muchos casos, la prueba de hipótesis puede conducir a decisiones importantes. En estos casos la elección de las hipótesis nulas debe ser hecha buscando siempre la seguridad, es decir en base a una conclusión fuerte.
Por ejemplo: supóngase que un nuevo proceso industrial parezca ser mejor que el que está en uso pero que el reemplazo sea muy caro. En este caso se tomará como hipótesis nula:

H_0 : El nuevo proceso NO es mejor que el anterior.

Entonces, el hecho de que H_0 sea rechazada con, digamos, un nivel de significación de 0,01 implica que se decida que H_0 es falsa, y que por lo tanto el nuevo proceso es mejor que el anterior, siendo igual a 0,01 la probabilidad de haber hecho una decisión errónea.

PH III

Prueba de hipótesis para el valor medio de una variable aleatoria correspondiente a una distribución cualquiera de probabilidad cuando se dispone de una muestra grande

PH III.1

a. Supóngase que se efectúe una cantidad n grande de repeticiones independientes de un experimento, y sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables asociadas a dichos experimentos. Evidentemente, todas estas variables tienen un mismo valor medio m y una misma desviación típica σ.
Por ser n grande se tiene (ver **[5]** de BNP VII.1) que:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

tiene una distribución aproximadamente normal (m ; $\sigma/\sqrt{n}$) **[1]**

y por lo tanto la variable:

$$\frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

tendrá una distribución aproximadamente normal (0 ; 1). **[2]**

Por lo visto en **b** de BNP VII.I:

$$m_{\overline{X}} = m \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{[3]}$$

b. Sea la hipótesis nula:

$$H_0 : m = 50 \quad , \quad \sigma = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\overline{X}} = 50 \quad , \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

y el conjunto de hipótesis alternativas:

$$H_1 : \quad m < 50 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\overline{X}} < 50$$

Supóngase que se efectúen n = 100 repeticiones del experimento, lo que se considera suficientemente grande como para que sea válido lo indicado en **[2]**.

Supóngase que al realizar esos n = 100 experimentos se haya obtenido $\bar{x}$ = 49,65. Se pide indicar si en base a este resultado se debe rechazar o no la hipótesis H_0 con un nivel de significación P(I) = 0,05.

Evidentemente, como las alternativas de H_0 son H_1: $m_{\overline{X}} < 50$, la región crítica del caso estará ubicada totalmente a la izquierda de la región de no rechazo (se está en una situación similar a la indicada en PH II.4). Llamando α al punto frontera entre ambas regiones se tiene entonces que:

$$P(I) = P(\overline{X} < \alpha) = 0{,}05 \Leftrightarrow P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}-50}{2/\sqrt{100}}}_{\text{Normal }(0\ ;\ 1)} < \frac{\alpha-50}{2/\sqrt{100}}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{\alpha-50}{0{,}2} = -\,1{,}645$$

por tabla N(0 ; 1)

y entonces resulta que:

$$\alpha = -\,0{,}2 \cdot 1{,}645 + 50 = 49{,}671$$

siendo entonces la región crítica:

$$RC: \ \overline{X} < 49{,}671$$

y como en el experimento se obtuvo:

$$\bar{x} = 49{,}65 \notin RC$$

se tiene entonces que no debe rechazarse a H_0 con un nivel de significación igual a 0,05. (conclusión débil).

c. Supóngase ahora que los verdaderos valores de m y σ hubieran sido 49 y 8 respectivamente. En este caso sería:

$$P(II) = P(\text{No rechazar a } H_0 \text{ siendo } m = 49 \text{ y } \sigma = 8) = P(\bar{x} \text{ no caiga en RC}) =$$

$$= P(\overline{X} > 49{,}671) = P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}-49}{8/\sqrt{100}}}_{\text{Normal }(0\ ;\ 1)} > \frac{49{,}671-49}{8/\sqrt{100}}\right) = 1 - F_{N(0\ ;\ 1)}(0{,}839) = 0{,}2$$

PH III.2

Supóngase ahora que la hipótesis nula hubiera sido:

$$H_0 : m = 50 \quad , \quad \sigma = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad m_{\overline{X}} = 50 \quad , \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

y el conjunto de hipótesis alternativas:

$$H_1 : m \neq 50 \qquad \Leftrightarrow \qquad m_{\overline{X}} \neq 50$$

Se está pues en una situación análoga a la indicada en PH II.5.
Se dividirá a la región crítica en dos subregiones situadas respectivamente a la izquierda y derecha de la región de no rechazo.
Sea α_1 el punto frontera entre la subregión crítica de la izquierda y la región de no rechazo y sea α_2 el punto frontera entre la subregión crítica de la derecha y la región de no rechazo.
Entonces será:

$$\frac{P(I)}{2} = 0{,}025 = P(\overline{X} < \alpha_1) \Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{X}-50}{2/\sqrt{100}} < \frac{\alpha_1 - 50}{2/\sqrt{100}}\right) = 0{,}025 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 - 50}{0{,}2} = -\,1{,}96 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -\,1{,}96 \cdot 0{,}2 + 50 = 49{,}608$$

$$\frac{P(I)}{2} = 0{,}025 = P(\overline{X} > \alpha_2) \Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{X}-50}{2/\sqrt{100}} > \frac{\alpha_2 - 50}{2/\sqrt{100}}\right) = 0{,}025 \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{\overline{X}-50}{2/\sqrt{100}} \leq \frac{\alpha_2 - 50}{2/\sqrt{100}}\right) = 0{,}975 \Leftrightarrow \frac{\alpha_2 - 50}{2/\sqrt{100}} = 1{,}96 \Leftrightarrow \alpha_2 = 50{,}392$$

y resulta entonces que la región crítica será:

$$RC : \overline{X} < 49{,}608 \cup \overline{X} > 50{,}392$$

y si en el experimento se obtuvo:

$$\bar{x} = 49{,}65 \notin RC$$

se tiene entonces que no hay motivo para rechazar la hipótesis nula H_0. (conclusión débil).

PH III.3

Observaciones:

1º. En todo lo antedicho en este párrafo PH III se ha supuesto conocida la desviación típica σ de las variables involucradas. En la práctica a menudo esto no ocurre, y para no ser objeto de parálisis, lo corriente es usar la estimación de σ indicada en **[7]** de IE IV:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{n-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

2º. Si bien lo descripto hasta ahora es el procedimiento usual en el caso de muestras grandes, también es aplicable al caso de muestras chicas a condición de que procedan de una población con una distribución normal (ya que la suma de una cantidad cualquiera de variables normales es también normal), pero en este caso sería necesario conocer el valor exacto de σ.
Sin embargo, para el caso de muestras chicas existe un procedimiento mucho más satisfactorio (ver PH V), que no requiere el conocimiento previo del valor exacto de la desviación típica.

PH IV

Aplicación

a. Sean dos procesos A y B de fabricación de un mecanismo. A la vida útil de los mecanismos fabricados según A corresponde una variable aleatoria X normal (m_X ; 3) y a la vida útil de los mecanismos fabricados por B corresponde una variable aleatoria Y normal (m_Y ; 4).
El proceso A es bastante más barato que el B, pero este último tiene una buena ventaja sobre el A desde el punto de vista de las ventas.
El fabricante decide que si puede llegar a una conclusión fuerte con un nivel de significación P(I) = 0,01 de que $m_Y - m_X > 2$, adoptará el proceso B, y que de lo contrario adoptará el A.
Con el fin de llegar a una decisión instala dos pequeñas líneas piloto de fabricación, una empleando el proceso A y la otra empleando el proceso B.
Se fabrican 100 ejemplares del mecanismo con cada línea, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x} = 50$, $\bar{y} = 55$.
Indicar cuál será el proceso que adoptará el fabricante.

b. Póngase:

$$Z = Y - X$$

Se obtendrá la antedicha conclusión fuerte a favor del proceso B cuando se rechace la hipótesis nula:

$$H_0: m_{\overline{Z}} = m_{\overline{Y}} - m_{\overline{X}} < 2$$

cuyas hipótesis alternativas son:

$$H_1: m_{\overline{Z}} = m_{\overline{Y}} - m_{\overline{X}} \geq 2$$

Evidentemente, de ser H_0 cierta la región crítica estará ubicada totalmente a la derecha de la región de no rechazo.
Llámese α al punto frontera entre ambas regiones.
Entonces:

$$P(I) = P(\overline{Z} > \alpha) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(\underbrace{\frac{\overline{Z}-2}{\sigma_{\overline{Z}}}}_{\text{Normal }(0\,;\,1)} > \frac{\alpha-2}{\sigma_{\overline{Z}}}\right) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(\frac{\overline{Z}-2}{\sigma_{\overline{Z}}} < \frac{\alpha-2}{\sigma_{\overline{Z}}}\right) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

y por lo tanto, de la tabla de la F. de D. normal (0 ; 1) se obtiene:

$$\frac{\alpha - 2}{\sigma_{\overline{Z}}} = 2{,}33 \Rightarrow \alpha = 2 + 2{,}33\ \sigma_{\overline{Z}}$$

teniéndose entonces que la región crítica será:

$$\text{RC}:\ \overline{\text{Z}} = \overline{\text{Y}} - \overline{\text{X}} > 2 + 2{,}33\,\sigma_{\overline{Z}} \qquad \textbf{[1]}$$

c. Se tiene que:

$$\sigma^2_{\overline{\text{Z}}} = \sigma^2_{\overline{\text{X}}} + \sigma^2_{\overline{\text{Y}}} = \frac{\sigma^2_{\text{X}}}{n} + \frac{\sigma^2_{\text{Y}}}{n} = \frac{3^2}{100} + \frac{4^2}{100} = 0{,}25 \Rightarrow \sigma_{\overline{\text{Z}}} = 0{,}5$$

y entonces por **[1]** se tiene que :

$$\text{RC}:\ \overline{\text{Y}} - \overline{\text{X}} > 2 + 2{,}33 \cdot 0{,}5 = 3{,}115$$

Como el resultado experimental arrojó $\bar{x} = 50$, $\bar{y} = 55$ se tiene que:

$$55 - 50 = 5 \in \text{RC}$$

y por lo tanto se rechaza la hipótesis H_0 con un nivel de confiabilidad de 0,01.
El fabricante aceptará pues usar el proceso de fabricación B, y la probabilidad que tiene de haber hecho una decisión errónea es P(I) = 0,01.

PH V

Prueba de hipótesis para el valor medio de una variable aleatoria correspondiente a una distribución normal

PH V.1

Ver IC III.1 **a** y **b**.

PH V.2

a. Sea la hipótesis nula:

$$H_0:\ m_{\text{X}} = 10 \iff m_{\overline{\text{X}}} = 10$$

y sea el conjunto de hipótesis alternativas:

$$H_1:\ m_{\text{X}} > 10 \iff m_{\overline{\text{X}}} > 10$$

Supóngase que se efectúen n = 22 pruebas, y que su resultado sea:

$\bar{x}$ = 13,71 s = 3,468

Se pide indicar si la hipótesis nula H_0 debe o no ser rechazada, con un nivel de significación P(I) = 0,05.

b. Se tiene (ver **[2]** de IC III) que:

$$T = \sqrt{n-1}\,\frac{\overline{X} - m_{\overline{X}}}{S}$$

tiene una distribución t de Student con n – 1 = 22 – 1 = 21 grados de libertad.
Evidentemente, como las alternativas de H_0 son H_1 : $m_{\overline{X}} > 10$, en este caso la región crítica estará totalmente a la derecha de la región de no rechazo. Sea α el punto frontera entre ambas regiones. Entonces:

$$P(I) = P(\overline{X} > \alpha) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(\underbrace{\sqrt{22-1}\,\frac{\overline{X}-10}{S}}_{\substack{Distribución \\ t\ de\ Student}} > \sqrt{22-1}\,\frac{\alpha-10}{S}) = 0{,}05 \Rightarrow$$

Valor asumido por S

$$\Leftrightarrow \sqrt{21}\,\frac{\alpha-10}{S} = 1{,}721 \Rightarrow \alpha = \frac{1{,}721 \cdot 3{,}468}{\sqrt{21}} + 10 = 11{,}3024$$

Por tabla de distribución t de Student

y por lo tanto la región crítica será:

RC : $\overline{X} > 11{,}3024$

Como en el experimento se obtuvo:

$\bar{x}$ = 13,71 ∈ RC

resulta que la hipótesis nula H_0 debe ser rechazada.

PH V.3

Supóngase ahora que la hipótesis nula hubiera sido:

H_0: $m_X = 10 \Leftrightarrow m_{\overline{X}} = 10$

y que el conjunto de hipótesis alternativas fuera:

H_1: $m_X < 10 \Leftrightarrow m_{\overline{X}} < 10$

Este caso sería tratado igual que el indicado en PH V.2 pero ubicando la región crítica totalmente a la izquierda de la región de no rechazo.

PH V.4

Supóngase ahora que la hipótesis nula hubiera sido:

H_0: $m_{X} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\overline{X}} = 10$

y que el conjunto de hipótesis alternativas fuera:

H_1: $m_{X} \neq 10 \quad \Leftrightarrow \quad m_{\overline{X}} \neq 10$

Este caso también sería tratado igual que el indicado en PH V.2, pero dividiendo la región crítica en dos subregiones ubicadas respectivamente a la izquierda y derecha de la región de no rechazo.

PH VI

Prueba de hipótesis para la varianza de una variable aleatoria correspondiente a una distribución normal

a. Sean n repeticiones independientes de un experimento aleatorio, a las cuales corresponden las variables aleatorias normales $X_1, \ldots, X_n$, todas con el mismo valor medio m y la misma varianza σ^2. Sea:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \textbf{[1]}$$

Por lo indicado en JtF III se tiene que:

La variable $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad. **[2]**

b. Supóngase que se efectuaron 20 pruebas y que la variable S^2 asumió el valor:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0{,}145 \qquad \textbf{[3]}$$

Sea la hipótesis nula:

H_0: $\sigma_0^2 = 0{,}01$

y el conjunto de hipótesis alternativas:

H_1: $\sigma_1^2 > 0{,}01$

Se pide verificar la hipótesis H_0 con un nivel de significación igual a 0,05 en base al resultado obtenido en **[3]**.

c. Suponiendo que H_0 sea cierta, se tiene que la variable $\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ tendrá una distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad.

Si en la realización del experimento S^2 asume un valor s^2 tal que $\frac{ns^2}{\sigma_0^2}$ constituya un valor "patológicamente" alto, tal que difícilmente sea asumido por $\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$, existe una fuerte presunción de que H_0 sea falsa.

En cambio tiene una fuerte posibilidad de que sea cierta la hipótesis H_1, la cual por suponer que $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ implica que $\frac{nS^2}{\sigma_1^2}$ sea un valor que "mas razonablemente" puede ser asumido por $\frac{nS^2}{\sigma_1^2}$.

Lo antedicho supone que en la pruebe de hipótesis de H_0, la región crítica de los valores asumidos por S^2 deben estar completamente a la derecha de la región de no rechazo.

Entonces, si α es el punto frontera entre ambas regiones:

$$\text{P(I)} = \text{P}\left(\underbrace{\frac{nS^2}{\sigma^2}}_{\chi^2 \text{ con } 20-1 \text{ grados de libertad}} > \alpha\right) = 0{,}05 \;\Rightarrow \alpha = 30{,}14$$

Ver tabla de distribución χ^2

y por lo tanto la región crítica será si H_0 es cierta:

$$\text{RC}: \frac{nS^2}{\sigma^2} > 30{,}14$$

Como el resultado experimental obtenido fue:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{20 \cdot 0{,}145}{0{,}01} = 29 \notin \text{RC} \qquad \textbf{[4]}$$

se tiene que no debe rechazarse a H_0 con un nivel de significación igual a 0,05.

PH VII

<u>Prueba de hipótesis para el parámetro p de una distribución binomial</u>

PH VII.1

a. Sea p la probabilidad de que ocurra un cierto suceso A en un experimento aislado. Supóngase que se efectúen $n = 50$ repeticiones independientes de dicho experimento y sea c la cantidad de veces que ocurrió A en dichas $n = 50$ repeticiones. Por ejemplo, supóngase que resultó c = 10.

Sea la hipótesis nula:

H_0: $p = 0{,}1$

y el conjunto de hipótesis alternativas:

H_1: $p > 0{,}1$

y supóngase que se quiera verificar la hipótesis H_0 con un nivel de significación igual a 0,05.

b. En el nomograma de la figura PH VII.a, trácese una recta que una a $p = 0{,}1$ con $P(x \leq c) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. En el punto en que esta recta corte a la curva $n = 50$, determínese el valor de c que corresponde a dicho punto de corte. Resultó $c = 8$.
Por lo tanto, de ser $p = 0{,}1$ (H_0 cierta) existe una probabilidad igual a 0,95 de que X, cantidad de ocurrencias del suceso, sea igual o inferior a 8, y por lo tanto, una probabilidad igual a $1 - 0{,}95 = 0{,}05$ de que X sea mayor que 8, lo que implica que la región crítica del experimento sea:

$$RC : X > 8$$

Como experimentalmente se encontró que:

$$x = 10 \in RC$$

se rechaza la hipótesis nula H_0.

PH VII.2

Supóngase ahora que con la misma hipótesis nula anterior:

H_0: $p = 0{,}1$

el conjunto de las hipótesis alternativas hubiera sido:

H_1': $p < 0{,}1$

Nomograma para el cálculo de:

$$P(\mathrm{X} \le c) = \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

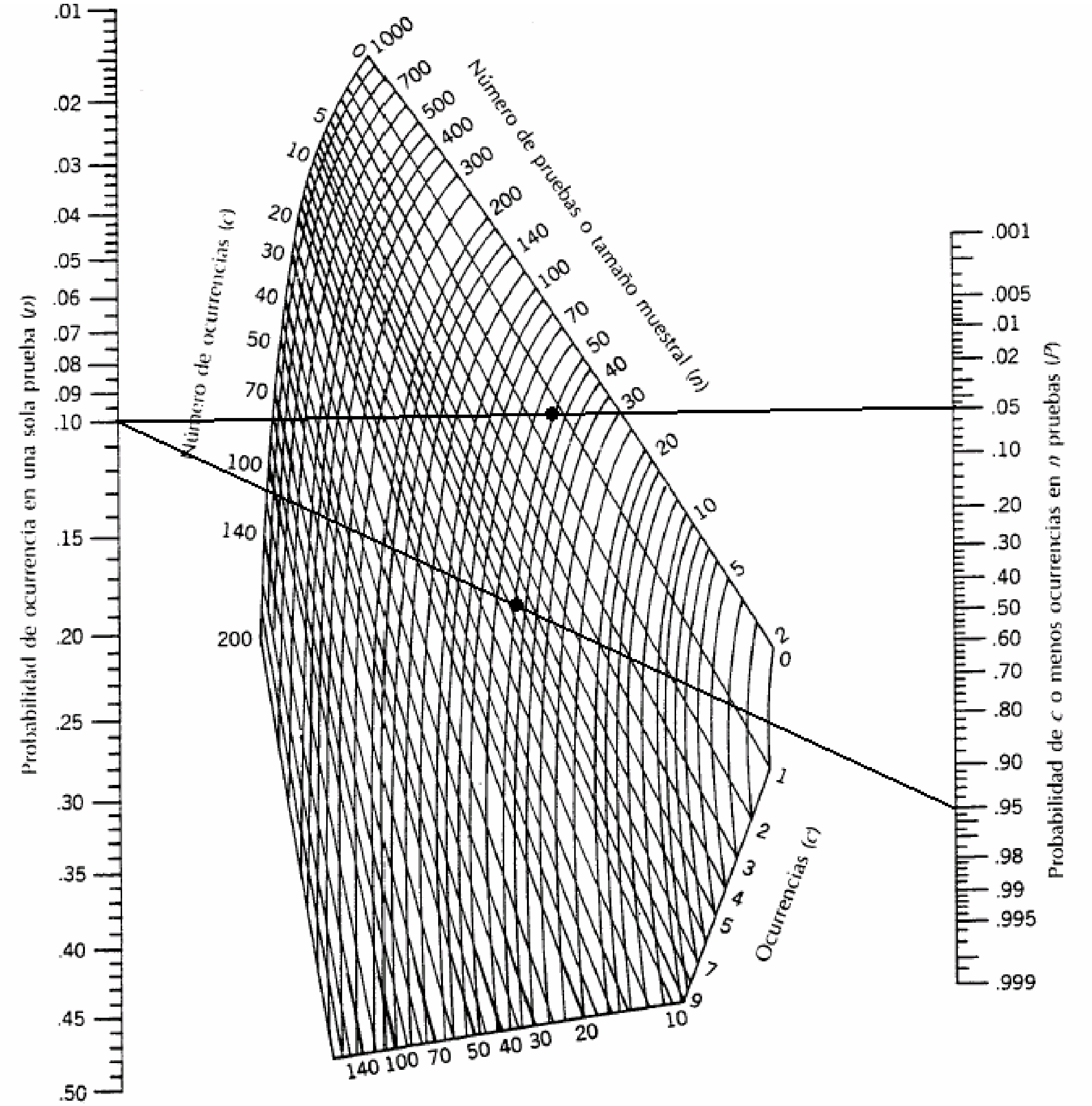


Figura PH VII.a

En el nomograma de la figura PH VII.a, trácese una recta que una a p = 0,1 con $P(X \leq c) = 0{,}05$. En el punto en que esta recta corte a la curva $n = 50$, determínese el valor de c que corresponda a dicho punto de corte. Resultó c = 1,5.
Por lo tanto, de ser p = 0,1 (H_0 cierta) existe una probabilidad igual a 0,05 de que X sea menor o igual que 1,5 (es decir de que sea X = 0 ó X = 1), lo que implica que la región crítica del experimento sea:

$$RC' : X \leq 1$$

Como experimentalmente se encontró que:

$$x = 10 \notin RC'$$

en este caso no se rechazará a la hipótesis nula H_0.

PH VII.3

En el caso de que n sea grande, más allá del alcance del nomograma, y de que p no sea muy próximo a 0 o a 1, la variable x correspondiente a la cantidad de ocurrencias, será aproximadamente normal (Teorema de Lindeberg) cayéndose así en el caso analizado en PH III.
Se tendrá entonces que la hipótesis nula será.

$$H_0: \quad m_{\overline{X}} = p \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$$

PH VIII

<u>Prueba de hipótesis para el parámetro λ de una distribución de Poisson</u>

a. Sea una variable X que tiene la distribución de Poisson. Supóngase que experimentalmente se ha encontrado un valor x = 4.
Sea la hipótesis nula:

H_0: $\lambda = 2$

y el conjunto de hipótesis alternativas:

H_1: $\lambda > 2$

Supóngase que se desee verificar a H_0 con un nivel de significación igual a 0,05.

b. Evidentemente, la región crítica estará totalmente a la derecha de la región de no rechazo. Sea x el punto frontera entre ambas regiones.

Debe ser:

$$P(I) = P(X \geq x) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \sum_{i=x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i}}{i!} \leq 0{,}05$$

Buscando en la tabla de la figura PH VIII.a para $\lambda = 2$ el mayor x para el cual $P(X \geq x) \leq 0{,}05$ se encuentra $x = 6$.
Por lo tanto la región crítica será:

$$RC : X \geq 6$$

Como el valor hallado experimentalmente fue:

$$x = 4 \notin RC$$

no hay motivo para rechazar la hipótesis nula H_0 con un nivel de significación igual a 0,05.

$$\mathbf{P(X \geq x)} = \sum_{i=x}^{i=\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i\ !}$$

x	λ = 0.2	λ = 0.3	λ = 0.4	λ = 0.5	λ = 0.6
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	.1812692	.2591818	.3296800	.393469	.451188
2	.0175231	.0369363	.0615519	.090204	.121901
3	.0011485	.0035995	.0079263	.014388	.023115
4	.0000568	.0002658	.0007763	.001752	.003358
5	.0000023	.0000158	.0000612	.000172	.000394
6	.0000001	.0000008	.0000040	.000014	.000039
7			.0000002	.000001	.000003

x	λ = 0.7	λ = 0.8	λ = 0.9	λ = 1.0	λ = 1.2
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	.503415	.550671	.593430	.632121	.698806
2	.155805	.191208	.227518	.264241	.337373
3	.034142	.047423	.062857	.080301	.120513
4	.005753	.009080	.013459	.018988	.033769
5	.000786	.001411	.002344	.003660	.007746
6	.000090	.000184	.000343	.000594	.001500
7	.000009	.000021	.000043	.000083	.000251
8	.000001	.000002	.000005	.000010	.000037
9				.000001	.000005
10					.000001

x	λ = 1.4	λ = 1.6	λ = 1.8	λ = 1.9	λ = 2.0
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	.753403	.798103	.834701	.850431	.864665
2	.408167	.475069	.537163	.566251	.593994
3	.166502	.216642	.269379	.296280	.323324
4	.053725	.078813	.108708	.125298	.142877
5	.014253	.023682	.036407	.044081	.052653
6	.003201	.006040	.010378	.013219	.016564
7	.000622	.001336	.002569	.003446	.004534
8	.000107	.000260	.000562	.000793	.001097
9	.000016	.000045	.000110	.000163	.000237
10	.000002	.000007	.000019	.000030	.000046
11		.000001	.000003	.000005	.000008

x	λ = 2.5	λ = 3.0	λ = 3.5	λ = 4.0	λ = 4.5	λ = 5.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	.917915	.950213	.969803	.981684	.988891	.993262
2	.712703	.800852	.864112	.908422	.938901	.959572
3	.456187	.576810	.679153	.761897	.826422	.875348
4	.242424	.352768	.463367	.566530	.657704	.734974
5	.108822	.184737	.274555	.371163	.467896	.5559507
6	.042021	.083918	.142386	.214870	.297070	.384039
7	.014187	.033509	.065288	.110674	.168949	.237817
8	.004247	.011905	.026739	.051134	.086586	.133372
9	.001140	.003803	.009874	.021363	.040257	.068094
10	.000277	.001102	.003315	.008132	.017093	.031828
11	.000062	.000292	.001019	.002840	.006669	.013695
12	.000013	.000071	.000289	.000915	.002404	.005453
13	.000002	.000016	.000076	.000274	.000805	.002019
14		.000003	.000019	.000076	.000252	.000698
15		.000001	.000004	.000020	.000074	.000226
16			.000001	.000005	.000020	.000069
17				.000001	.000005	.000020
18					.000001	.000005
19						.000001

Figura PH VIII.a
Distribución de Poisson

PH IX

Comparación de distribuciones teóricas y experimentales

PH IX.1

a. Hasta el momento, el problema que se ha encarado consistía en rechazar o no hipótesis hechas sobre parámetros correspondientes a distribuciones cuya forma general era conocida. Sin embargo, puede ocurrir que no se esté seguro acerca de dicha forma general.

Ejemplo 1º: Los buques mercantes de un cierto tipo estuvieron expuestos durante 400 días a todo tipo de accidentes. Sea X la cantidad de accidentes que ocurren en un barco determinado durante esos 400 días. Supóngase que se hayan registrado los siguientes datos:

Cantidad de accidentes (X)	0	1	2	3	4	5	6
Cantidad de barcos con X accidentes	1448	805	206	34	4	2	1

Se pregunta si estos datos justifican o no la hipótesis de que X tiene una distribución de Poisson.

Ejemplo 2º: Sea R la variable aleatoria correspondiente a la resistencia de un cierto tipo de conductor eléctrico.
Supóngase que al sacar 20 muestras se obtuvieron los siguientes valores:

9,8	14,5	13,7	7,6	10,5	9,3	11,1	10,1	12,7	9,9
10,4	8,3	11,5	10,0	9,1	13,6	12,9	10,6	8,9	9,5

Se pregunta si estos datos justifican o no la hipótesis de que R tiene una distribución normal.

Ejemplo 3º: Se probaron 20 tubos de rayos catódicos y sus vidas en meses arrojaron los siguientes valores:

7,2	37,8	49,6	21,4	67,2	41,1	3,8	8,1	23,2	72,1
11,4	17,5	29,8	57,8	84,6	12,8	2,9	42,7	7,4	33,4

Se pregunta si estos datos justifican o no la hipótesis de que la variable V correspondiente a la duración de los tubos tiene una distribución exponencial.

Notar que en todos estos ejemplos se tenía un “pálpito” previo acerca de cual era la distribución del caso, y lo que se preguntaba era si dicho “pálpito” era justificado o no.

PH IX.2

a. Sea el siguiente caso:
En la realización de un experimento aleatorio, según una cierta hipótesis H_0 la variable aleatoria X puede asumir los valores $x_1, \ldots, x_k$, siendo $P(X = x_i) = p_i$. A estas probabilidades se las llamaran probabilidades teóricas.
Sean n repeticiones de dicho experimento y sean $n_1, \ldots, n_k$ las cantidades de veces que aparecen los resultados $x_1, \ldots, x_k$ respectivamente. Evidentemente será $n_1 + \ldots + n_k = n$.
Sea la variable:

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \qquad \textbf{[1]}$$

que, a primera vista, puede ser una medida adecuada de la discrepancia en valor absoluto entre los valores medios teóricos np_i y los obtenidos en la muestra.
Un teorema muy importante debido a K. Pearson establece que si la hipótesis H_0 es cierta, cuando n tiende a infinito la distribución de V tiende a una distribución χ^2 con $k-1$ grados de libertad.
Evidentemente esto también ocurrirá aproximadamente para n suficientemente grande.
Por lo tanto la hipótesis nula será rechazada con un nivel de significación igual a 0,05 cuando la variable V asuma un valor superior a $\chi^2_{0,05;k-1}$.

b. Por ejemplo:
Se tira un dado 6000 veces y los resultados obtenidos son:
$n_1 = 800$ $n_2 = 1080$ $n_3 = 950$ $n_4 = 1086$ $n_5 = 1304$ $n_6 = 780$
Sea la hipótesis:
H_0: El dado es perfecto $\Leftrightarrow p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$
Entonces según **[1]** es:

$$v = \frac{1}{1000}(200^2 + 80^2 + 50^2 + 86^2 + 304^2 + 220^2) = 197{,}112 \qquad \textbf{[2]}$$

y como según la tabla de χ^2 para $\alpha = 0{,}05$, $k = 6 - 1 = 5$ es:

$$\chi^2_{0,05;5} = 11{,}07$$

se tiene entonces la región crítica:

$$RC : V > 11{,}07$$

Como el valor obtenido en **[2]** cae dentro de esta región crítica se tiene que debe rechazarse a H_0.

PH IX.3

a. En el ejercicio anterior se proponía una distribución teórica completa, y el problema consistía en tratar de averiguar si los datos experimentales podían o no provenir de dicha distribución.
Ahora se propondrá una distribución teórica de la cual se ignora uno de sus parámetros, y el problema consistirá en tratar de averiguar si los datos experimentales pueden o no provenir de dicha distribución. El valor del parámetro que se considerará será su estimación máximo verosímil hallada en base a los datos experimentales obtenidos.

b. Sea el mismo ejemplo 1º indicado en PH IX.1.
Si la distribución es en efecto la de Poisson se tiene que (ver **[1]** de IE IV):

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{0\cdot 1448 + 1\cdot 805 + 2\cdot 206 + 3\cdot 34 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1}{1448 + 805 + 206 + 34 + 4 + 2 + 1} = 0{,}5404$$

Se tiene que en este caso es:

$$n = 1448 + 805 + 206 + 34 + 4 + 2 + 1 = 2500$$

$\hat{p}_0$ = p(X = 0) = $e^{-0,5404}$ = 0,5825 $\Rightarrow$ $n\hat{p}_0$ = 1456

$\hat{p}_1$ = p(X = 1) = $e^{-0,5404}$(0,5404) = 0,3148 $\Rightarrow$ $n\hat{p}_1$ = 787

$\hat{p}_2$ = p(X = 2) = $e^{-0,5404}\dfrac{(0,5404)^2}{2!}$ = 0,0850 $\Rightarrow$ $n\hat{p}_2$ = 213

$\hat{p}_3$ = p(X = 3) = $e^{-0,5404}\dfrac{(0,5404)^3}{3!}$ = 0,0153 $\Rightarrow$ $n\hat{p}_3$ = 38

$\hat{p}_{4,5,6} = 1 - p(X \leq 3) = 1 - (0,5825 + 0,3148 + 0,0850 + 0,0153) = 0,0024 \Rightarrow n\hat{p}_{4,5,6} = 6$ **[3]**

$$v = \frac{(1448-1456)^2}{1456} + \frac{(805-787)^2}{787} + \frac{(206-213)^2}{213} + \frac{(34-38)^2}{38} + \frac{(7-6)^2}{6} = 1,273412$$

En este caso hay 5 sumandos y uno de los parámetros de la distribución es inferido en base a los resultados experimentales.
Según Pearson en este caso la distribución de V será χ^2 con $(n-1)-1 = n-2$ grados de libertad, es decir con tres grados de libertad.
Como según la tabla de χ^2 para $\alpha = 0,05$ y $k = 3$ es:

$$\chi^2_{0,05;3} = 7,81$$

resulta una región crítica:

$$RC : V > 7,81$$

y como resultó:

$$1,273412 \notin RC$$

no se rechaza la hipótesis de que los datos experimentales obtenidos pertenecen en efecto a una distribución de Poisson.

c. Observación importante:
Notar que en **[3]** se refundieron en una sola categoría las estimaciones de P(X = 4), P(X = 5) y P(X = 6), considerándose en su lugar a la estimación de P(X = 4 $\cup$ X = 5 $\cup$ X = 6) a la que simbolizó como $\hat{p}_{4,5,6}$.
Esto se debe a lo siguiente (ver P. Hoel "Introduction to Mathematical Statistics", pág. 167):
"La experiencia y las investigaciones teóricas indican que este método de prueba de "hipótesis es generalmente satisfactorio siempre que (ver **[1]**) $n_i \geq 5\ \forall i$ y $k \geq 5$.
"Si algún $n_i < 5$, conviene reunir en una sola a "celdas" adjuntas hasta que se cumpla lo "arriba indicado".

PH IX.4

a. Hasta el momento se han considerado únicamente casos en que las distribuciones eran discretas.
Supóngase que los valores asumidos por la variable continua X hayan sido tales que:

X	$X \le 9{,}5$	$9{,}5 < X \le 10$	$10 < X \le 10{,}5$	$10{,}5 < X \le 11$	$11 < X \le 11{,}5$	$11{,}5 < X \le 12$	$12 < X \le 12{,}5$	$12{,}5 < X \le 13$	$13 < X \le 13{,}5$	$13{,}5 < X \le 14$	$14 < X \le 14{,}5$
Veces	1	0	2	1	1	2	0	4	7	6	13

X	$14{,}5 < X \le 15$	$15 < X \le 15{,}5$	$15{,}5 < X \le 16$	$16 < X \le 16{,}5$	$16{,}5 < X \le 17$	$17 < X \le 17{,}5$	$17{,}5 < X \le 18$	$18 < X \le 18{,}5$	$18{,}5 < X \le 19$	$19 < X \le 19{,}5$	$19{,}5 < X \le 20$
Veces	14	15	13	24	15	19	23	22	12	12	7

X	$20 < X \le 20{,}5$	$20{,}5 < X \le 21$	$21 < X \le 21{,}5$	$21{,}5 < X \le 22$	$22 < X \le 22{,}5$	$22{,}5 < X \le 23$	$23 < X \le 23{,}5$	$23{,}5 < X \le 24$	$24 < X \le 24{,}5$	$24{,}5 < X \le 25$	$X > 25$
Veces	6	8	6	4	2	2	0	3	0	0	1

$n = 250$

Haciendo los cálculos del caso resulta:

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 17{,}0 \qquad \hat{\sigma}^2_{\mathrm{X}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 7{,}1 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\mathrm{X}} = 2{,}7$$

Sea la hipótesis nula:
H_0: los datos provienen de una distribución normal.
Divídanse los datos experimentales en 5 categorías:

A_1: $X \le 12$ A_2: $12 < X \le 15$ A_3: $15 < X \le 18$ A_4: $18 < X \le 21$ A_5: $X > 21$

Teóricamente, si H_0 es cierta:

$$p_1 = P(A_1) = P(X \le 12) = F_{N(0,1)}\left(\frac{12-17}{2{,}7}\right) = 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad np_1 = 7{,}5$$

$$p_2 = P(A_2) = P(12 < X \le 15) = F_{N(0,1)}\left(\frac{15-17}{2{,}7}\right) - F_{N(0,1)}\left(\frac{12-17}{2{,}7}\right) = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad np_2 = 50$$

$$p_3 = P(A_3) = P(15 < X \le 18) = F_{N(0,1)}\left(\frac{18-17}{2{,}7}\right) - F_{N(0,1)}\left(\frac{15-17}{2{,}7}\right) = 0{,}41 \quad \Rightarrow \quad np_3 = 102{,}5$$

$$p_4 = P(A_4) = P(18 < X \le 21) = F_{N(0,1)}\left(\frac{21-17}{2{,}7}\right) - F_{N(0,1)}\left(\frac{18-17}{2{,}7}\right) = 0{,}24 \quad \Rightarrow \quad np_4 = 72{,}5$$

$$p_5 = P(A_5) = 1 - P(X \le 21) = 1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{21-17}{2{,}7}\right) = 0{,}07 \quad \Rightarrow \quad np_5 = 17{,}5$$

Experimentalmente se obtuvo:

n_1 = Veces que ocurrió $X \le 12$ = 7
n_2 = Veces que ocurrió $12 < X \le 15$ = 49
n_3 = Veces que ocurrió $15 < X \le 18$ = 109
n_4 = Veces que ocurrió $18 < X \le 21$ = 67
n_5 = Veces que ocurrió $X > 21$ = 18

y aplicando la fórmula **[1]** resulta:

$$v = \frac{(7-7{,}5)^2}{7{,}5} + \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(109-102{,}5)^2}{102{,}5} + \frac{(67-72{,}5)^2}{72{,}5} + \frac{(18-17{,}5)^2}{17{,}5} = 0{,}82$$

En este caso hay 5 sumandos y <u>dos de los parámetros de la distribución (m y σ) son inferidos en base a los resultados experimentales</u>.
<u>Según Pearson en este caso la distribución de V será χ^2 con $(n - 1) - 2 = n - 3$ grados de libertad</u>, es decir con dos grados de libertad.
Como según la tabla de χ^2 para $\alpha = 0{,}05$ y $k = 2$ es:

$$\chi^2_{0,05;2} = 5{,}99$$

resulta que la región crítica es:

$$\text{RC: } V > 5{,}99$$

y como resultó:

$$v = 0{,}82 \notin \text{RC}$$

resulta que no se rechaza la hipótesis nula, que consistía en que los datos experimentales provenían de una distribución normal.

PH IX.5

Se hace notar lo siguiente:
1º. En PH IX.2 la hipótesis nula consistía en una distribución teórica completamente especificada, y si la variable V indicada en **[1]** constaba de k sumandos, su distribución era una distribución χ^2 con $k - 1$ grados de libertad.
2º. En PH IX.3 la hipótesis nula consistía en una distribución teórica en la cual <u>un</u> parámetro era estimado en base a los datos experimentales recogidos, y si la variable V indicada en **[1]** constaba de k sumandos, su distribución era una distribución χ^2 con $(k - 1) - 1$ grados de libertad.
Generalizando:
Si la hipótesis nula consiste en una distribución teórica en la cual r parámetros son estimados en base a los datos experimentales recogidos, y si la variable V indicada en **[1]** consta de k sumandos, su distribución será una distribución χ^2 con $(k - 1) - r$ grados de libertad.

Problemas sobre pruebas de hipótesis

PH 1 Sea X la variable aleatoria correspondiente a la vida de una producción de tubos fluorescentes. Probados 100 tubos resultó $\bar{x}$ = 1570 y s = 120. Se pide verificar la hipótesis:
H_0: $m_X = 1600$
siendo la hipótesis alternativa:
H_1: $m_X < 1600$
con un nivel de significación igual a 0,05.

PH 2 Una universidad afirma que sus profesores cobran en promedio $ 7200 anuales, con una desviación típica de $ 2000. En una muestra al azar de 400 profesores se encontró un promedio de $ 6000 anuales. Se pide:
a) Con un nivel de significación igual a 0,05, verificar si la afirmación de la facultad es cierta.
b) Si el sueldo medio anual verdadero fuera de $ 6000 con la misma desviación típica, indicar el error tipo II que se cometería al aceptar la afirmación de la facultad.

PH 3 Un fabricante de arandelas afirma que el espesor de las mismas sigue una ley normal (1 ; 0,1). Se toman 100 arandelas y resulta que el espesor promedio resultó 0,99.
Con un nivel de significación de 0,05, comprobar la afirmación del fabricante.

PH 4 Sea un nuevo producto farmacéutico que tiene una cierta toxicidad. El proceso de fabricación determina una distribución para la toxicidad a la cual corresponde una variable aleatoria normal T.
Se sabe que una toxicidad de 130 ya es ligeramente nociva, y el fabricante desea tener una probabilidad igual a 0,99 de que el 99,9% de las píldoras que salen al mercado no superen dicho valor. Con ese fin analizó 10000 píldoras, lo que arrojó un resultado de $\bar{t}$ = 97 y s = 10.
Indicar si este resultado determina o no que el fabricante logró su objetivo.

PH 5 Una máquina embolsadora de papas debe estar regulada para embolsar 112 Kg / bolsa por lo menos. Un inspector sospecha de dicha regulación, toma 8 bolsas al azar y obtiene los siguientes resultados:

115 110 109 107 108 102 111 113

Indicar si las sospechas del inspector son justificadas o no.

PH 6 Una máquina ha producido arandelas de 0,05 cm de espesor. Para comprobar si la máquina sigue en buenas condiciones se toma una muestra de 10 arandelas resultado $\bar{x}$ = 0,0515 cm y s = 0,003 cm. Supóngase que la distribución del espesor de las arandelas es normal. Se pide averiguar si la máquina está o no en buenas condiciones de ajuste con un nivel de significación igual a 0,05.

PH 7 En una chimenea se ha instalado un sistema de precipitación de sólidos con el cual se cree que la concentración de los mismos bajará de 1,8 g/m^3 a 0,6 g/m^3. Puesto en marcha el nuevo sistema se efectuaron 10 mediciones cuyos resultados fueron:

0,6 0,62 0,63 0,64 0,65 0,66 0,66 0,67 0,73

¿Cree Usted que el nuevo sistema cumple con lo deseado?

PH 8 De un conjunto de 17 plantas, 9 de ellas fueron sometidas a un tratamiento químico, y el número de frutas que dieron fue respectivamente:

17 27 18 25 27 29 27 23 17

A las 8 plantas restantes no se las sometió a ningún tratamiento y su rendimiento en frutos fue:

16 16 20 16 20 17 15 21

Indicar si puede considerarse que el tratamiento fue eficaz.

PH 9 Sea X la variable aleatoria correspondiente al nivel mental de los alumnos de la universidad A, y sea Y la variable aleatoria correspondiente al nivel mental de los alumnos de la universidad B. Se toman 20 alumnos de la universidad A y 22 de la B. Se halló $\bar{x} = 90$, $s_X^2 = 100$, $\bar{y} = 110$ y $s_Y^2 = 80$.

Se desea saber con un nivel de significación igual a 0,01 si hay una diferencia significativa entre los alumnos de esas dos universidades.

PH 10 Sea un proceso de fabricación de bombas de luz con las cuales se obtiene una calidad tal que a lo sumo el 1 % de las bombas resultan malas. Se introduce una modificación en el proceso de fabricación que, se espera, no altere dicha calidad. Se fabricaron 300 bombas con la nueva modificación de las cuales 5 resultaron malas. Se pide:

a) Determinar si se puede establecer conclusivamente que ha habido un deterioro en la calidad con un nivel de significación igual a 0,05.
b) Usando la región crítica hallada para a), hallar P(II) si la calidad de las bombas bajó del 1 % de malas a 2 % de malas.

PH 11 Se quiere verificar la hipótesis de que el nacimiento de varones sigue la ley binomial con p = ½ . En una muestra de 100 000 nacimientos resultaron 48 600 varones y 51 400 mujeres. Indicar si este resultado confirma o no la hipótesis con un nivel de significación de 0,005.

PH 12 La flor de una cierta planta de adorno puede venir de 4 colores distintos. Un experimento sobre 217 plantas arrojó los siguientes resultados:

Color:	A	B	C	D
Cantidad:	120	48	36	13

Según las leyes de la genética la probabilidad de aparición de dichos colores es:
$P(A) = 9/16$, $P(B) = 3/16$, $P(C) = 3/16$ y $P(D) = 1/16$.

Indicar si los resultados obtenidos concuerdan con esta ley con un nivel de significación de 0,05.

PH 13 Sea una muestra de 60 circuitos impresos bastante complejos.
Aparecieron:

Con 0 falla: 32 circuitos
Con 1 falla: 15 circuitos
Con 2 falla: 9 circuitos
Con 3 falla: 4 circuitos

Indicar si las cantidades de fallas de este tipo de circuito sigue una ley de Poisson con $P(1) = 0{,}05$.

PH 14 Se supone que la duración de las llamadas telefónicas tienen una duración exponencial negativa:

$$P(T < t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Se hacen 100 llamadas, y sus y sus duraciones respectivas fueron tales que:

$T \leq 1 : 42$	$1 < T \leq 2 : 21$	$2 < T \leq 3 : 12$
$3 < T \leq 4 : 12$	$4 < T \leq 5 : 7$	$T > 5 : 6$

Supóngase que el promedio de duración de dichas llamadas haya sido $\bar{t}$ = 1,98 minutos. Se pide hallar con un nivel de significación igual a 0,05 si los datos obtenidos provienen en efecto de una distribución exponencial negativa.