PROCESOS ALEATORIOS DE POISSON

PP I

Definición de Proceso Puntual

a. Tómese un instante cualquiera como origen de la variable tiempo. Llámese t_0 a dicho instante. Supóngase que los instantes t_1, t_2, …, posteriores a t_0, caractericen la aparición de eventos. Por ejemplo, los instantes en que abonados de una gran central telefónica levantan su tubo para iniciar una llamada.
Se dirá que se está frente a un proceso puntual cuando la duración de cada uno de los intervalos $[t_0\ ,\ t_1]$, $[t_1\ ,\ t_2]$, … esté dada por un experimento aleatorio (que puede o no ir cambiando de intervalo en intervalo).

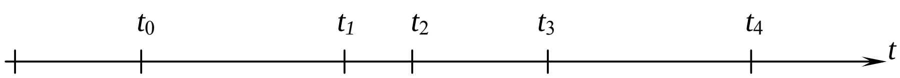


Fig. PP I.a

b. En forma rigurosa:
Sea el intervalo $-\infty < t < \infty$. Se dice que se está en presencia de un proceso puntual cuando, previa la elección de un valor t_0, se determina una sucesión:

$$t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$$

tal que cada intervalo $[t_{i-1}\ ,\ t_i]$ sea el resultado de un experimento aleatorio.
En lo sucesivo, se llamará T_i a la variable aleatoria que se asocie a la duración del intervalo $[t_{i-1}\ ,\ t_i]$, $(i = 1, 2, \ldots)$.
Como $t_{i-1} \le t_i\ \forall\ i$, se tiene que entonces debe ser:

$$P(\mathrm{T}_i < 0) = 0 \qquad \forall\ i$$

PP II

Definición de un proceso estacionario de Poisson

a. Se llama proceso estacionario de Poisson a todo proceso puntual tal que:

$$\left.\begin{array}{l}
1^{\circ}.\ \text{Todas las } \mathrm{T}_i \text{ sean independientes entre sí.} \\
2^{\circ}.\ \text{Todas tengan una misma F de D, es decir que:} \\
\qquad P(\mathrm{T}_1 \le x) = P(\mathrm{T}_2 \le x) = \ldots = \mathrm{F}^{\mathrm{T}}(x) \\
3^{\circ}.\ P(\mathrm{T}_i > x + h \,/\, \mathrm{T}_i > x) = P(\mathrm{T}_i > h)\ ,\ \forall\ x \ge 0,\ \forall\ h > 0,\ \forall\ i \\
4^{\circ}.\ P(\mathrm{T}_i \le 0) = 0,\ \forall\ i
\end{array}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

b. Se analizarán un poco en el plano intuitivo las implicaciones de esta definición.

A fin de facilitar las cosas, se supondrá que t_1, t_2, ..., son los instantes en que aparecen los eventos consistentes en que los abonados de una gran central telefónica levantan su tubo para iniciar una llamada.

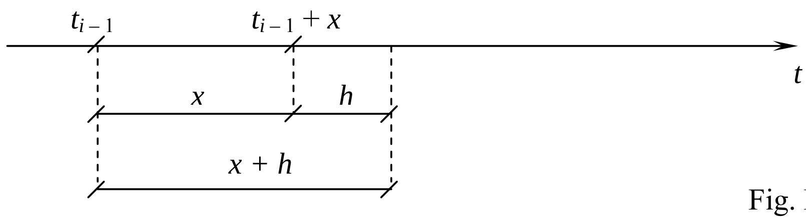


Fig. PP II.a

Supóngase (ver la figura PP II.a) que en el instante t_{i-1} haya aparecido el evento $i - 1$. En ese instante se inicia el intervalo al cual corresponde la variable T_i, y que terminará en el instante t_i que corresponde a la aparición del evento i.

Si partiendo de t_{i-1} se ha llegado a un instante $t_{i-1} + x$ sin que haya aparecido en evento i, la condición tercera de **[1]** indica que la probabilidad de que no aparezca dicho evento dentro del próximo período de duración h no depende de x. Es decir que la probabilidad de "supervivencia" del intervalo en curso (de no aparición de un nuevo evento) durante el próximo h es la misma a cualquier "edad" de dicho intervalo. <u>Por lo tanto, el hecho de que hace mucho que no haya aparecido un evento no "apura" ni "retarda" la aparición del próximo</u>.

La condición tercera de **[1]** indica que las causas que tienden a hacer aparecer eventos son inmutables en el tiempo.

La condición cuarta implica que $P(\mathrm{T}_i = 0) = 0$, y por lo tanto las causas antedichas son tales que se tiene una probabilidad nula de que ocurran dos eventos simultáneamente (aunque ello sea posible).

c. Ejemplos de fenómenos físicos que constituyen (más o menos aproximadamente) procesos estacionarios de Poisson son:

- La ya citada iniciación de llamadas en una gran central telefónica.
- La descompostura de unidades en una flota de camiones.
- La llegada de clientes a una estación de servicio.
- La fisión de partículas radioactivas.
- etc.

PP III

<u>F de D de un proceso estacionario de Poisson</u>

a. La condición tercera indicada en **[1]** de PP II establece que:

$$\frac{P(\mathrm{T}_i > x + h \cap \mathrm{T}_i > x)}{P(\mathrm{T}_i > x)} = P(\mathrm{T}_i > h) \; ; \; \forall \, x \geq 0, \;\; \forall \, h > 0 \qquad \textbf{[1]}$$

y como:

$$\{T_i > x + h\} \cap \{T_i > x\} = \{T_i > x + h\}$$

se tiene que:

$$\frac{P(T_i > x+h)}{P(T_i > x)} = P(T_i > h)\ ; \quad \forall\ x \geq 0,\ \ \forall\ h > 0 \qquad \textbf{[2]}$$

$P(T_i > x + h) = P(T_i > x)\ P(T_i > h)\ ;\ \forall\ x \geq 0,\ \ \forall\ h > 0$

Entonces, como $P(T_i \leq x) = F^T(x) \quad ; \quad \forall\ i$:

$$\begin{aligned} 1 - F^T(x + h) &= [1 - F^T(x)][\ 1 - F^T(h)] = \\ &= 1 - F^T(x) - F^T(h) + F^T(x)F^T(h) \qquad ; \qquad \forall\ x \geq 0,\ \ \forall\ h > 0 \end{aligned}$$

$F^T(x + h) = F^T(x) + F^T(h) - F^T(x)F^T(h) \qquad ; \qquad \forall\ x \geq 0,\ \ \forall\ h > 0$

$$\frac{F^T(x+h) - F^T(x)}{h} = \frac{F^T(h)}{h}[1 - F^T(x)] \quad ; \quad \forall\ x \geq 0,\ \ \forall\ h > 0 \qquad \textbf{[3]}$$

Supóngase una $F^T(x)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\text{o}}.\ \ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F^T(h)}{h} = c, \qquad c \text{ finito} \\ \\ 2^{\text{o}}.\ F^T(x) \text{ diferenciable para todo } x > 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{[4]}$$

Entonces, haciendo $h \to 0^+$ en **[3]** resulta que:

$$\frac{d}{dx}F^T(x) = c\ [1 - F^T(x)] \qquad \forall\ x > 0$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son:

$$F^T(x) = 1 - ke^{-cx} \quad , \quad \forall\ x > 0 \ \ ;\ k = \text{constante arbitraria} \qquad \textbf{[5]}$$

Para empezar, puede probarse que en esta expresión debe ser $c > 0$, ya que sólo así se tiene que $\lim\limits_{x \to \infty} F^T(x) = 1$.

En segundo lugar, en dicha expresión debe ser $k = 1$, pues de lo contrario se tendría que $\lim\limits_{x \to 0^+} F^T(x) = 1 - k \neq 0$. Como además según la condición cuarta de **[1]** de PP II es $F^T(0) = 0$, se tiene que si $k \neq 1$ resultaría que $F^T(x)$ no sería en $x = 0$ continua por la derecha, en contradicción con una de las condiciones que debe cumplir toda F de D.

Por lo tanto será:

$$F^T(x) = 1 - e^{-cx} \quad ; \quad c > 0 \quad \forall\ x > 0$$

Como las condiciones segunda y cuarta de **[1]** de PP II indican respectivamente que todas las variables T tienen la misma F de D, $F^T(x)$, y que $F^T(x) = 0$ para $x \le 0$, se tiene entonces que:

$$P(T_i \le x) = F^T(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{para } x > 0 \text{ y } c > 0 \end{cases} \qquad \textbf{[6]}$$

b. Observación:
Se acaba de probar que toda F de D correspondiente a un proceso de Poisson, y que cumpla con las condiciones **[4]**, ha de ser del tipo indicado en **[6]**.
Queda entonces la duda de si un proceso de Poisson admite otro tipo de F de D (que no cumpla con las condiciones **[4]**). Puede probarse (con mucho trabajo) que en efecto toda F de D correspondiente a un proceso de Poisson ha de ser forzosamente del tipo indicado en **[6]**.

c. De **[6]** se deduce que:

$$f^T(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le 0 \\ c\,.\,e^{-cx} & \text{para } x > 0 \text{ y } c > 0 \end{cases} \qquad \textbf{[7]}$$

Entonces:

$$m_{T_i} = \int_{-\infty}^{\infty} x f^T(x)dx = \int_0^{\infty} xce^{-cx}dx = \frac{1}{c}\ ; \qquad \forall\ i \qquad \textbf{[8]}$$

por otra parte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^T(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 ce^{-cx}dx = \frac{2}{c^2}$$

y entonces :

$$\sigma^2_{T_i} = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2}\ ; \qquad \forall\ i \qquad \textbf{[9]}$$

La expresión de **[8]** indica que conocido el valor medio m_{T_i} de los intervalos entre eventos queda determinada la constante *c* del proceso, con lo que queda totalmente especificada la F de D correspondiente al mismo.
Al aumentar *c* disminuye m_{T_i} , y por lo tanto disminuye el valor de los intervalos entre eventos, resultando así que aumenta la frecuencia de estos.
Por lo tanto, la constante *c* es una medida de las causas (inmutables) que tienden a hacer que aparezcan eventos.

PP IV

Variable aleatoria correspondiente a varios intervalos consecutivos

a. Sea T_i la variable aleatoria correspondiente al intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.
Sea T_{i+1} la variable aleatoria correspondiente al intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Etc.
Póngase:

$$T_{i,i+1} = T_i + T_{i+1} \qquad \textbf{[1]}$$

Entonces:

$$P(T_{i,i+1} \le x) = \iint\limits_{\{(\mu,\eta)\,/\,\mu+\eta\le x\}} f^{T_{i,i+1}}(\mu,\eta)\,d\mu\, d\eta \qquad \textbf{[2]}$$

Como según la condición primera de **[1]** de PP II se tiene que T_i y T_{i+1} son independientes, y como según **[7]** de PP III es:

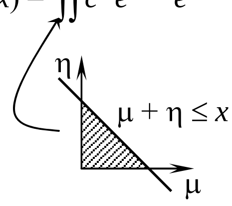
$$f^{T_i}(x) = f^{T_{i+1}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le 0 \\ c\,.\,e^{-cx} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

se tiene que:

$$f^{T_{i,i+1}}(\mu,\eta) = f^{T_i}(\mu)\, f^{T_{i+1}}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mu \le 0 \text{ ó } \eta \le 0 \\ c^2\,.\,e^{-c\mu}\,.\,e^{-c\eta} & \text{para } \mu > 0 \text{ y } \eta > 0 \end{cases}$$

Entonces, por **[2]**:

$$F^{T_{i,i+1}}(x) = P(T_{i,i+1} \le x) = \iint c^2 e^{-c\mu} e^{-c\eta}\, d\mu\ d\eta =$$



$$= \int_{\mu=0}^{x} ce^{-c\mu} d\mu \int_{\eta=0}^{x-\mu} ce^{-c\eta} d\eta = 1 - e^{-cx} - cxe^{-cx} \ , \qquad \text{para } x > 0$$

y además:

$$F^{T_{i,i+1}}(x) = 0 \ , \qquad \text{para } x \le 0$$

[3]

Entonces:

$$f^{T_{i,i+1}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le 0 \\ c^2 \,.\, x \,.\, e^{-cx} & \text{para } x > 0 \end{cases} \qquad \textbf{[4]}$$

b. De manera similar, si:

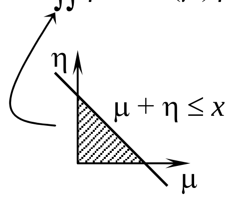
$$T_{i\,,\,i+1\,,\,i+2} = T_i + T_{i+1} + T_{i+2} = T_{i\,,\,i+1} + T_{i+2}$$

se tiene que:

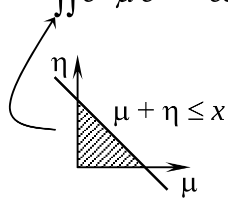
$$F^{T_{i,i+1,i+2}}(x) = P(T_i + T_{i+1} + T_{i+2} \le x) = P(T_{i\,,\,i+1} + T_{i+2} \le x) =$$

$$= \iint_{\{(\mu,\eta)/\,\mu+\eta\le x\}} f^{T_{i,i+1,i+2}}(\mu,\eta)\,d\mu\;d\eta =$$

$$= \iint f^{T_{i,i+1}}(\mu)\, f^{T_{i+2}}(\eta)\,d\mu\quad d\eta =$$



$$= \iint c^2 \mu\, e^{-c\mu} c e^{-c\eta}\, d\mu\; d\eta = 1 - e^{-cx} - cxe^{-cx} - \frac{(cx)^2}{2!} e^{-cx} \quad \text{,para } x > 0$$



y además:

$$F^{T_{i,i+1,i+2}}(x) = 0 \qquad\qquad , \text{ para } x \le 0$$

[5]

de donde:

$$f^{T_{i,i+1,i+2}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } \; x \le 0 \\ \dfrac{c\,(cx)^2\, e^{-cx}}{2\,!} & \text{para } \; x > 0 \end{cases} \qquad \textbf{[6]}$$

c. Continuando con el mismo algoritmo, si:

$T_{i\,,\,i+1\,,\,...,\,i+n} = T_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+n}$ $(n+1$ intervalos)

se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} F^{T_{i,i+1,\ldots,i+n}}(x) = P(T_{i\,,\,i+1,\,...,\,i+n} \le x) = P(T_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+n} \le x) = \\ \qquad = 1 - e^{-cx} - cxe^{-cx} - \ldots - \dfrac{(cx)^n}{n!}e^{-cx} \quad , \quad \text{para } x > 0 \\ \text{y además:} \\ F^{T_{i,i+1,\ldots,i+n}}(x) = 0 \qquad\qquad , \quad \text{para } x \le 0 \end{array}\right\} \textbf{[7]}$$

de donde:

$$\left. f^{T_{i,i+1,\ldots,i+n}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le 0 \\ \dfrac{c\,(cx)^n\,e^{-cx}}{n!} & \text{para } x > 0 \end{cases} \right\} \textbf{[8]}$$

d. Por **[8]** de PP III:

$$\left.\begin{array}{l} m_{T_{i,i+1,\ldots,i+n}} = m_{(T_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+n})} = \\ \qquad = m_{T_i} + m_{T_{i+1}} + \ldots + m_{T_{i+n}} = \dfrac{n+1}{c} \qquad (n+1 \text{ intervalos}) \end{array}\right\} \textbf{[9]}$$

Por **[9]** de PP III, y por ser T_i, T_{i+1}, ..., T_{i+n} independientes:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^2_{T_{i,i+1,\ldots,i+n}} = \sigma^2_{(T_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+n})} = \\ \qquad = \sigma^2_{T_i} + \sigma^2_{T_{i+1}} + \ldots. + \sigma^2_{T_{i+n}} = \dfrac{n+1}{c^2} \qquad (n+1 \text{ intervalos}) \end{array}\right\} \textbf{[10]}$$

PP V

Cantidad de eventos en un intervalo fijo

a. Sea el intervalo $]\alpha\ ,\ \beta]$, <u>abierto por la izquierda</u> indicado en la figura PP V.a. Sea t_i el instante en que se produce el primer evento posterior al instante α, lo que implica que t_{i-1} sea anterior o coincida con α.

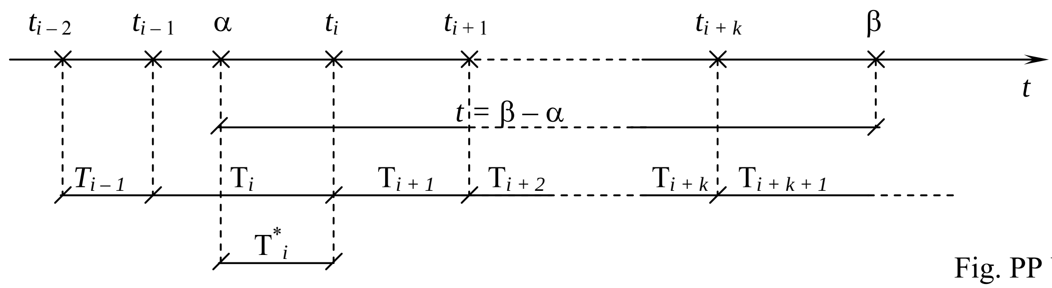


Fig. PP V.a

Si se llama T^*_i a la variable asociada a la duración del intervalo $]\alpha\ ,\ t_i]$ se tiene que:

por condición tercera de **[1]** de PP II

$$P(T^*_i > x) = P[T_i > x + (\alpha - t_{i-1}) \,/\, T_i > (\alpha - t_{i-1})] = P(T_i > x)$$

lo que implica que T^*_i y T_i tengan una misma F de D.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} &P(T^*_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+k} \leq \beta - \alpha) = P(T_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+k} \leq \beta - \alpha) = \\ &\qquad = P(T_{i,\, i+1,\, \ldots,\, i+k} \leq \beta - \alpha) = F^{T_{i,i+1,\ldots i+k}}(\beta - \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

Ver **[7]** de PP IV

b. Por otra parte, <u>si se llama X a la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de eventos que ocurren en $]\alpha\ ,\ \beta]$</u> se tiene que:

$$P(X \geq k+1) = P(\text{En }]\alpha\ ,\ \beta] \text{ se produzcan } k+1 \text{ ó mas eventos}) =$$

$$= P(\text{En }]\alpha\ ,\ \beta] \text{ terminen } k+1 \text{ ó mas intervalos}) =$$

$$= P(T^*_i + T_{i+1} + \ldots + T_{i+k} \leq \beta - \alpha) = F^{T_{i,i+1,\ldots i+k}}(\beta - \alpha)$$

Por **[1]**

Resumiendo:

$$P(X \geq k+1) = F^{T_{i,i+1,\ldots i+k}}(\beta - \alpha) \qquad \textbf{[2]}$$

Similarmente:

$$P(\mathrm{X} \geq k) = \mathrm{F}^{\mathrm{T}_{i,i+1,\ldots i+k-1}}(\beta - \alpha) \qquad \textbf{[3]}$$

c. Entonces, se tiene (ver figura PP V.b) que:

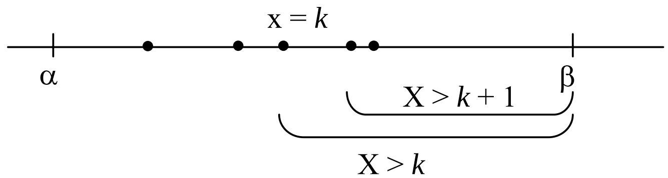


Fig. PP V.b

$$(\mathrm{X} \geq k) = (\mathrm{X} = k) \cup (\mathrm{X} \geq k+1)$$

y por lo tanto:

$$P(\mathrm{X} = k) = P(\mathrm{X} \geq k) - P(\mathrm{X} \geq k+1)$$

Es decir que:

Por **[7]** de PP IV

$$P(\mathrm{X} = k) = \mathrm{F}^{\mathrm{T}_{i,i+1,\ldots i+k-1}}(\beta - \alpha) - \mathrm{F}^{\mathrm{T}_{i,i+1,\ldots i+k}}(\beta - \alpha) =$$

$$= \left\{1 - e^{-c(\beta-\alpha)} - c(\beta-\alpha)e^{-c(\beta-\alpha)} - \ldots - \frac{[c(\beta-\alpha)]^{k-1}}{(k-1)!}e^{-c(\beta-\alpha)}\right\} -$$

$$- \left\{1 - e^{-c(\beta-\alpha)} - c(\beta-\alpha)e^{-c(\beta-\alpha)} - \ldots - \frac{[c(\beta-\alpha)]^{k-1}}{(k-1)!}e^{-c(\beta-\alpha)} - \frac{[c(\beta-\alpha)]^{k}}{k!}e^{-c(\beta-\alpha)}\right\} =$$

$$= \frac{[c(\beta-\alpha)]^{k} e^{-c(\beta-\alpha)}}{k!}$$

Resumiendo:

$$P(\mathrm{X} = k) = \text{Probabilidad de k eventos en }]\, \alpha , \beta \,] = \frac{[c\tau]^{k} e^{-c\tau}}{k!}, \quad \text{siendo } \tau = (\beta - \alpha) \qquad \textbf{[4]}$$

c. Esta es la misma distribución de Poisson vista en el capítulo BNP. Notar que ahora ha aparecido por un camino totalmente distinto del paso al límite de una distribución binomial que allí se empleó.
Entonces por lo visto en el capítulo BNP:

$$m_{\mathrm{X}} = \sigma^2_{\mathrm{X}} = c\tau \quad , \qquad \text{siendo } \tau = (\beta - \alpha) \qquad \textbf{[5]}$$

d. Supóngase que el evento inmediatamente anterior al instante α haya ocurrido en el instante t_{i-1}. Allí pues se inicia un intervalo al cual corresponde la variable T_i (ver figura PP V.a).

Ocurrirá un evento en el instante α si dicha variable asume exactamente el valor $(\alpha - t_{i-1})$. Como T_i es una variable continua, la probabilidad de que esto ocurra es nula. Por lo tanto:

$$P(\text{Ocurra un evento exactamente en } \alpha) = 0 \qquad \textbf{[6]}$$

Entonces:

$$P(k \text{ eventos en } [\alpha , \beta]) = P[k \text{ eventos en } [\alpha , \beta] \cap (\text{Evento en } \alpha \cup \overline{\text{Evento en } \alpha})] =$$

$$= \underbrace{P(k \text{ eventos en } [\alpha , \beta] \cap \text{Evento en } \alpha)}_{= 0 \text{ por } \textbf{[6]}} + P(k \text{ eventos en }]\alpha , \beta]) \qquad \textbf{[7]}$$

y por **[4]** y **[7]** resulta que :

$$\left. \begin{aligned} & P(k \text{ eventos en } [\alpha , \beta]) = P(k \text{ eventos en }]\alpha , \beta]) = \\ & \qquad = P(X = k) = \frac{[c\tau]^k e^{-c\tau}}{k!} \quad , \qquad \tau = (\beta - \alpha) \end{aligned} \right\} \textbf{[8]}$$

PP VI

Aplicaciones al cálculo de tamaños de stocks de repuestos

PP VI.1 Ejemplo 1º (Este ejemplo ha sido extraído de la obra de M. Girault: “Introduction aux processus de Poisson”).

a. Sean 30 puestos de trabajo servidos por 30 máquinas. Se ha comprobado que estas máquinas se descomponen a intervalos que constituyen un proceso de Poisson, siendo la media de descompostura de 10 máquinas semanales.
Cada fin de semana se mandan a arreglar las máquinas descompuestas durante la semana, y se reciben, adecuadamente reparadas, las que se habían descompuesto la semana anterior.
Se pide indicar el stock de máquinas necesario para tener una probabilidad máxima de 0,02 de que ningún puesto de trabajo quede fuera de servicio.

b. Al fin de cada semana, la cantidad de máquinas fuera de servicio es la cantidad de descomposturas que tuvieron lugar en dos semanas, ya que todavía no reingresaron las máquinas que vienen de ser reparadas durante la semana anterior.
Si X es la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de descomposturas que tienen lugar en el intervalo:

$$]\text{fin de semana } n \text{ , fin de semana } n + 2]$$

y si N es el stock total de máquinas, lo que pide el problema es hallar el menor N tal que:

$$P(N - X < 30) \leq 0{,}02$$

o, lo que es lo mismo, el menor N tal que:

$$P(X > N - 30) \leq 0{,}02 \qquad \textbf{[1]}$$

c. Considerando por otra parte que X corresponde a la cantidad de eventos que ocurren en un intervalo fijo, se tiene por **[7]** de PP V que:

$$\left.\begin{array}{l} P(\mathrm{X} > N - 30) = \displaystyle\sum_{k=N-30+1}^{\infty} \frac{[c\tau]^k e^{-c\tau}}{k!} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{siendo } \tau = \text{duración del intervalo} \end{array}\right\} \quad \textbf{[2]}$$

El valor medio de X es el valor medio de las descomposturas que se producen en dos semanas. Teniendo en cuenta que, según los datos del problema se descomponen 10 máquinas semanales como promedio, se tiene que un "reflejo fiel" de la realidad será poner:

$$m_{\mathrm{X}} = 2.10 = 20 \qquad \textbf{[3]}$$

Como por **[5]** de PP V se tiene por otra parte que:

$$m_{\mathrm{X}} = c.\tau \qquad \textbf{[4]}$$

Resulta entonces por **[2]**, **[3]** y **[4]** que:

$$P(\mathrm{X} > N - 30) = \sum_{k=N-30+1}^{\infty} \frac{[20]^k e^{-20}}{k!} \qquad \textbf{[5]}$$

Entonces, por **[1]** y **[5]** resulta que la solución del problema consiste en hallar el menor N tal que:

$$P(\mathrm{X} > N - 30) = \sum_{k=N-30+1}^{\infty} \frac{[20]^k e^{-20}}{k!} \leq 0{,}02$$

d. En la obra de T. C. Fry "Probability and its engineering uses", páginas 465 a 467 está tabulada la función:

$$^{\infty}\Pi'_{v} = \sum_{k=v}^{\infty} \frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!}$$

En dicha tabla figuran los parámetros $^{\infty}\Pi'_{v}$, ε y v, pudiéndose con los valores de dos de ellos cualesquiera hallar el valor del tercero.

En el presente caso, entrando con ε = 20 y $^{\infty}\Pi'_{v}$ = 0,013475 (primer valor inferior a 0,02 cuando ε = 20), resulta $v = 31$.

Por lo tanto, debe tomarse:

$$N - 30 + 1 = 31$$

lo que implica que la cantidad de máquinas debe ser:

$$N = 60 \text{ máquinas}$$

PP VI.2 Ejemplo 2º

a. Se ha vendido un generador con garantía por cinco años.
Una de sus partes, sujeta a rotura, cuesta \$ 1,5 si se la fabrica al mismo tiempo que el generador, y cuesta \$ 4 si se la fabrica especialmente.
Las fallas de dicha pieza ocurren "a la Poisson", a razón de una cada 10 años como promedio.
Si el generador se para por falta de repuestos durante el período de garantía, el fabricante deberá proveerlo y además pagar \$ 20 de multa.
Se pide indicar cual es la cantidad de repuestos de dicha pieza que el fabricante debe proveer junto con el generador para obtener la alternativa mas económica.

b. En este caso, si Y es la cantidad de roturas que ocurren en el intervalo:

$$\left[\begin{matrix} \text{Primer instante} \\ \text{de la garantía} \end{matrix} , \begin{matrix} \text{Ultimo instante} \\ \text{de la garantía} \end{matrix} \right]$$

se obtiene por **[7]** y **[5]** de PP V que:

$$\left.\begin{aligned} & P(\mathrm{Y} = k) = \frac{(c\tau)^k}{k!} e^{-c\tau} \\ & m_{\mathrm{Y}} = c.\tau \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

Tomando al año como unidad de tiempo se tiene que:

1º. $\tau = 5$

2º. Por **[8]** de PP III es:

$$c = \frac{1}{m_{\mathrm{T}}} = \frac{1}{\text{Valor medio de los intervalos entre roturas}} = \frac{1}{10}$$

y entonces es:

$$c\ \tau = \frac{1}{10} \cdot 5 = 0{,}5$$

y por **[1]** resulta que:

$$\left.\begin{aligned} & P(\mathrm{Y} = k) = \frac{(0{,}5)^k e^{-0{,}5}}{k!} \\ & m_{\mathrm{Y}} = 0{,}5 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[2]}$$

c. Sea r la cantidad de piezas de repuesto fabricadas al mismo tiempo que el generador.
Sea Z la variable aleatoria correspondiente al gasto incurrido por el fabricante en concepto de fabricación de repuestos y multas.

Entonces, si $Y \le r$, es decir si la cantidad de roturas es menor o igual que la cantidad de repuestos entregados junto con el generador se tiene que:

$$P(Z = 1{,}5\, r) = P(Y = 0 \cup \ldots \cup Y = r) = \sum_{k=0}^{r} P(Y = k) \quad ; \; k \le r \qquad \textbf{[3]}$$

Si $Y > r$, es decir si hay más roturas que el stock inicial de repuestos, se tendrá que:

$$P[Z = 1{,}5\, r + (k - r)(20 + 4)] = P(Y = k) \quad , \qquad k > r \qquad \textbf{[4]}$$

Entonces:

m_Z = = Valor medio del costo de repuestos y multas =

$$= 1{,}5\, r\, P(Z = 1{,}5\, r) + \sum_{k=r+1}^{\infty} [1{,}5r + (k - r)(20 + 4)]\; P[Z = 1{,}5\, r + (k - r)(20 + 4)] =$$

Por **[3]** y **[4]**

$$= 1{,}5\, r \sum_{k=0}^{r} P(Y = k) + \sum_{k=r+1}^{\infty} [1{,}5r + 24(k - r)]\; P(Y = k) =$$

$$= 1{,}5\, r \sum_{k=0}^{r} P(Y = k) + 1{,}5\, r \sum_{k=r+1}^{\infty} P(Y = k) + 24 \sum_{k=r+1}^{\infty} k\, P(Y = k) - 24\, r \sum_{k=r+1}^{\infty} P(Y = k) =$$

$$= 1{,}5\, r \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k)}_{1} + 24 \sum_{k=r+1}^{\infty} k\, P(Y = k) - 24\, r \sum_{k=r+1}^{\infty} P(Y = k) =$$

$$= 1{,}5\, r + 24 \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kP(Y = k)}_{= m_Y = 0{,}5 \;;\; \text{Ver } \textbf{[2]}} - \sum_{k=0}^{r} kP(Y = k) \right] - 24\, r \sum_{k=r+1}^{\infty} P(Y = k) =$$

$$= 1{,}5\, r + 12 - 24 \left[\sum_{k=0}^{r} kP(Y = k) + r \sum_{k=r+1}^{\infty} P(Y = k) \right]$$

Resumiendo:

$$m_Z = = 12 + 1{,}5\, r - 24 \left[\sum_{k=0}^{r} kP(Y = k) + r \sum_{k=r+1}^{\infty} P(Y = k) \right] \qquad \textbf{[5]}$$

d. De las tablas de T. C. Fry puede obtenerse:
$P(Y = k)$, en página 458

$\sum_{k=r+1}^{\infty} P(\mathrm{Y} = k)$, en página 463

En primer lugar (de página 458):

$P(\mathrm{Y} = 0) = 0{,}60653$; $P(\mathrm{Y} = 1) = 0{,}30327$; $P(\mathrm{Y} = 2) = 0{,}07581$

$P(\mathrm{Y} = 3) = 0{,}01263$; $P(\mathrm{Y} = 4) = 0{,}00158$

y entonces:

R	$\sum_{k=0}^{r} kP(\mathrm{Y} = k)$	$\sum_{k=r+1}^{\infty} P(\mathrm{Y} = k)$	m_{Z} = (por **[5]**)
0	0	0,39347	12
1	0,30327	0,09026	4,05
2	0,45489	0,01438	3,385
3	0,49278	0,00175	4,549
4	0,49910	0,00017	6,0053

Con lo que resulta que la solución mas económica es proveer dos repuestos junto con el generador (costo igual a $ 3,385).