

OPTIMIZACIÓN DE LA CALIDAD DEL AGUA EN ESTUARIOS: APLICACIÓN DEL MÉTODO ESPECTRAL

STOKLAS, C.¹; CORTÍNEZ, V.^{1,2,3} Y DOMINGUEZ, P.²

1: Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA)
Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Bahía Blanca
11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: stoklas@frbb.utn.edu.ar,

2: Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: pdoming@uns.edu.ar,

3: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
e-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar,

Resumen.

La descarga no controlada de efluentes urbanos en estuarios puede afectar los niveles de calidad de agua. Resulta conveniente efectuar predicciones sobre la variación de estos niveles en determinadas zonas de interés y evitar así situaciones críticas que deban luego ser remediadas. Se propone un enfoque basado en un Método Espectral aplicado a las ecuaciones de dispersión de contaminantes con el objeto de conocer valores máximos de concentración en determinadas zonas de interés y, reducir tiempos computacionales en la simulación de cada nuevo escenario de diseño.

Para ello se formula un problema hidrodinámico y de transporte de contaminantes mediante el método de elementos finitos empleando el programa de simulación FlexPDE. Dicha simulación se combina con un método de optimización, desarrollado bajo un ambiente de programación en Matlab, que busca aquel diseño que mejor cumpla con los objetivos y restricciones ambientales y/o económicos establecidos.

Palabras clave: Modelo Hidrodinámico, Modelo de Transporte de Contaminantes, Problema Adjunto, Método Espectral, Diseño Óptimo, Método de Elementos Finitos.

1. INTRODUCCIÓN

Generalmente, los efluentes de origen domiciliario son tratados en plantas de depuración y descargados en cuerpos de agua aledaños mediante tuberías o emisarios submarinos. Sin embargo, muchas veces los niveles de concentración de éstos superan la capacidad de resiliencia del medio natural receptor ocasionando un impacto negativo sobre el mismo. Es por ello que deben realizarse estudios de impacto ambiental dirigidos a evitar o reducir daños que pueden sufrir tanto los sistemas ecológicos como humanos. Una forma factible de hacerlo es empleando herramientas de predicción sobre la variación de los indicadores de calidad de aguas en determinadas zonas de interés y evitar así situaciones críticas que deban luego ser remediadas. El desarrollo de las técnicas computacionales ha permitido que los modelos

matemáticos se conviertan en una herramienta cualitativa y cuantitativamente eficiente para tal estudio. Para realizar un diseño adecuado, es necesario determinar un procedimiento matemático que establezca objetivos y restricciones tanto del punto de vista ambiental como económico, y luego plantear un método adecuado para la estimación de dichas restricciones que permita tomar las decisiones adecuadas en forma automática. Esto lleva al concepto de diseño óptimo. Consiste en simular diferentes escenarios posibles futuros, seguido por un proceso de selección de aquel que resulte más conveniente respecto de los objetivos propuestos. La definición adecuada de los objetivos, va a responder a un juicio de valor sobre la importancia relativa de los aspectos económicos y ambientales puestos en juego. Por ejemplo, se puede establecer minimizar costos y asegurar a su vez condiciones ambientales mínimas o, visto desde otro extremo, minimizar los efectos nocivos hacia el medio ambiente, manteniendo el costo dentro de las posibilidades presupuestarias.

Particularmente, el modelo matemático aquí empleado se basa en la solución, mediante el método de Elementos Finitos, de las ecuaciones bidimensionales hidrodinámicas para aguas poco profundas y de transporte de sustancias disueltas. Con el objeto de disminuir los tiempos computacionales que demanda la evaluación de las funciones objetivo y sus restricciones, se han desarrollado diferentes estrategias. Entre ellas la utilización de Funciones de Influencia asociadas al problema Adjunto de transporte de sustancias junto con distintas técnicas de optimización tales como, búsqueda aleatoria, método basado en gradiente y un proceso conocido como “recocido simulado”, aplicado al diseño de descargas de efluentes en ríos, bajo condiciones hidrodinámicas estacionarias [1,2,3,4]. Sin embargo, cuando el cuerpo receptor es un estuario, las condiciones hidrodinámicas cambian ya que presenta un comportamiento inherentemente dinámico (y periódico) debido al efecto de las mareas. Aprovechando esta condición, se realizó una aproximación basada en el Método de Perturbación en las ecuaciones hidrodinámicas. Esto permitió formular el problema de naturaleza no lineal, de difícil solución, como dos sistemas lineales independizados de la variable temporal, acelerando aún más los tiempos de cálculo computacional [5, 6, 7].

A diferencia de los trabajos hasta aquí mencionados, donde las restricciones fueron obtenidas mediante funciones de influencia, es de gran interés, sobre todo en escenarios de carácter periódico, poder conocer los niveles máximos espaciales y temporales de concentración. Si bien el enfoque adjunto resultó ser considerablemente efectivo para una clase determinada de problemas de diseño, su dependencia temporal limita la solución a valores medios temporales de concentración, los cuales se obtienen una vez que el modelo alcanza su estado estacionario. En el presente trabajo se desarrolla un enfoque basado en un Método Espectral aplicado a las ecuaciones de dispersión de contaminantes con el objeto de obtener, por un lado los valores máximos de concentraciones en determinadas zonas de interés, y por otro reducir aún más los tiempos computacionales que demanda la simulación de cada nuevo escenario de diseño en busca de aquel que mejor cumpla con los objetivos y restricciones establecidos. Para ello se plantea a modo de ejemplo un problema de diseño óptimo, donde la evaluación de sus restricciones (concentraciones) es resuelta de tres formas: Utilizando el problema de transporte temporal, haciendo uso de la funciones de influencia del problema adjunto y finalmente mediante el método espectral. Se comparan tales resultados y se efectúa un análisis de los distintos resultados numéricos obtenidos por cada enfoque.

2. PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

Se considera, a manera de ejemplo, una situación en la cual existen 2 emisarios submarinos descargando efluentes domiciliarios con una concentración de 8×10^7 y 6×10^7 NMP/100ml* m^3/s CF respectivamente (Figura 1). Se pretende proteger, desde el punto de vista ambiental, ciertas zonas dentro del estuario que pueden tener especial interés desde el punto de vista recreativo, económico o ecológico. Con tales valores, las concentraciones medias temporales en las 3 zonas de resguardo ambiental Z_i ($i=1,2,3$) en un ciclo de marea, no cumplen con los valores admisibles fijados en 2000 NMP/100ml de CF, por lo que debe reducirse la carga contaminante mediante la construcción de plantas de tratamiento.

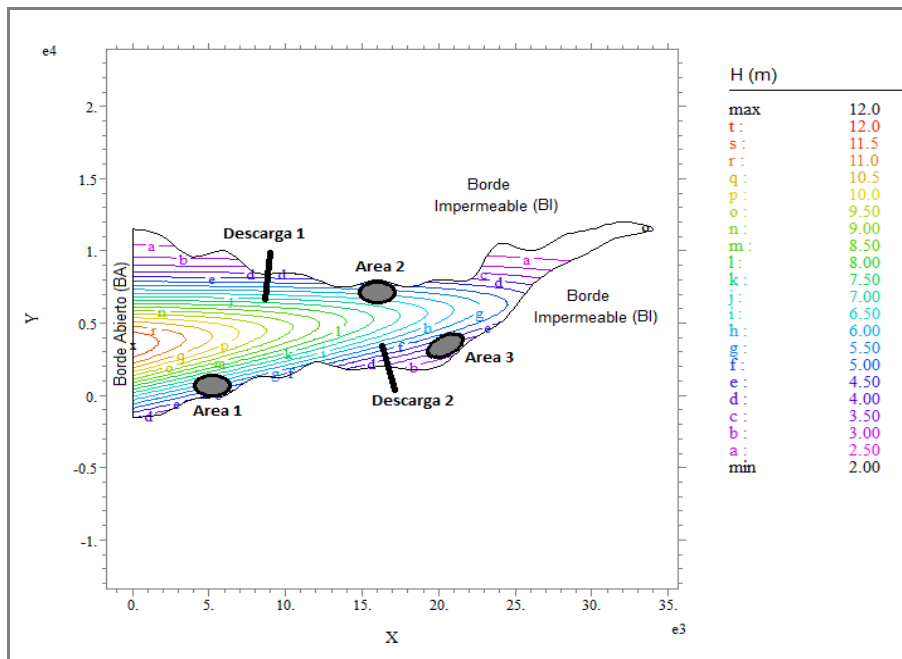


Figura 1: Estuario y batimetría bajo análisis.

Bajo este escenario, es posible establecer el grado de depuración de cada una determinando coeficientes de reducción β_j (>0), de manera tal que la descarga efectiva de los emisarios sea $\beta_j M_j$, siendo M_j ($j=1, 2$) la tasa de flujo másico. El problema consiste entonces, en obtener tales coeficientes pudiéndose plantear, por ejemplo, de la siguiente manera: Se desean determinar los β_j que minimizan el costo económico asegurando niveles de concentración aceptables. A manera simplificada, el costo puede suponerse proporcional a la diferencia entre los flujos másicos sin tratar y los tratados. De esta forma la expresión matemática a resolver se determina de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } FO(\beta_j) = \sum_{j=1}^{ND} M_j^2 (1 - \beta_j)^2, \quad (1)$$

$$\text{Sujetas a } C_{CF_i} < C_{CF_{adm}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

donde C_{CF} corresponde a la concentración máxima temporal de Coliformes fecales en la zona protegida i -ésima, y ND el número de descargas.

3. MODELO TEÓRICO

Para conocer los niveles de concentración en cada área, se desarrolla a continuación el problema de transporte que permite relacionar tales magnitudes, en cada punto y durante el período de tiempo de interés, con las corrientes y con las descargas de efluentes. Consiste en la formulación de dos modelos matemáticos: el hidrodinámico, para obtener las velocidades de la corriente, y el de dispersión, para determinar las concentraciones a partir del conocimiento de las corrientes, del ingreso de contaminantes al cuerpo de agua desde el exterior del sistema y de las reacciones que allí se dan. El problema en sí es tridimensional y variable, lo que lo hace difícil de abordar. Es por ello que en el desarrollo de estos se efectúa una serie de hipótesis de simplificación y soluciones aproximadas.

3.1. Modelo hidrodinámico

La velocidad de las corrientes periódicas en el estuario se obtiene mediante una aproximación basada en el método de perturbación sobre las ecuaciones de aguas poco profundas 2D, junto con sus correspondientes condiciones de borde. Este método permite formular el problema de naturaleza no lineal como dos problemas lineales consecutivos.

Como generalmente los estuarios son forzados en la boca por una marea semidiurna ($\eta_{ext} = \eta_0 \cos(\omega t)$), la solución de estos sistemas conduce a la siguiente aproximación:

$$\vec{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_{1c} \cos \omega t + \mathbf{V}_{1s} \sin \omega t + \mathbf{V}_{2c} \cos 2\omega t + \mathbf{V}_{2s} \sin 2\omega t \quad , \quad (3)$$

donde las componentes de la velocidad horizontal \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_{1c} , \mathbf{V}_{1s} , \mathbf{V}_{2c} y \mathbf{V}_{2s} son funciones de (x,y) . Tales ecuaciones fueron resultas mediante el método de elementos finitos [6]. Luego, conociendo las corrientes mareales definidas en (3) es posible formular el problema de transporte de contaminantes de esta forma:

3.2. Modelo de dispersión de contaminantes

La evolución de la concentración de una sustancia en el estuario se puede modelar mediante la siguiente ecuación gobernante (promediada según Reynolds):

$$\frac{\partial(CH)}{\partial t} + H(\vec{V} \cdot \nabla C) - \text{div}(KH \nabla C) + C\sigma H = \sum_{j=1}^{ND} M_j \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \quad , \quad (4)$$

$$-KH \left. \frac{\partial C_f}{\partial n} \right|_{BI} = 0 \quad C|_{BA} = 0 \quad C(x, y, 0) = 0 \quad , \quad (5)$$

donde \vec{V} corresponde a las velocidades horizontales promediadas en la vertical determinadas en (3), $H(x,y)$ es la profundidad del estuario, K el coeficiente de dispersión, C la concentración de Coliformes fecales (CF), σ la constante de degradación, $M_j(x,y,t)$ es la tasa de flujo másico de la j -ésima descarga, ND número de descargas, δ la función

Delta de Dirac, \bar{x}_j es la ubicación de la descarga. Las condiciones de borde asociadas a este problema (5) asumen flujo nulo en los márgenes de la costa y en la boca del estuario no existe concentración de CF. La condición inicial es nula. (ver Figura ilustrativa 1). La ecuación (4) constituye la ecuación de dispersión bidimensional [3].

4. MODELO ADJUNTO DE DISPERSIÓN

Es posible obtener fórmulas analíticas para la determinación de las concentraciones de CF en las zonas protegidas, mediante la utilización de los llamados coeficientes de influencia g_{ij} asociados a la expresión (4). Tales coeficientes miden el efecto que tiene un flujo unitario de contaminante de la tubería de descarga j sobre cada área protegida i . Así, la concentración media en las zonas protegidas, en términos de estos coeficientes se puede determinar de la siguiente manera:

$$\overline{Cf}_i \stackrel{def}{=} \frac{\int_{\tau}^{T_f} \int_{\Omega_i} Cf \, d\Omega_i \, dt}{(T - \tau)\Omega_i} = \sum_{j=1}^N \int_0^{T_f} M_j(t) g_{ij}(t) dt \quad (i = 1, 2, 3) , \quad (6)$$

donde τ corresponde al tiempo en el cual se ha alcanzado la oscilación estacionaria y Ω_i es el área de la zona protegida i -ésima.

Considerando las condiciones de borde e iniciales definidas en (5), estos coeficientes g_{ij} surgen de calcular funciones de influencia G_i obtenidas convenientemente a partir del problema adjunto de transporte [6], de forma tal que verifiquen la siguiente ecuación diferencial:

$$-H \frac{\partial(G_i)}{\partial t} - H(\vec{V} \cdot \nabla G_i) - \text{div}(KH \nabla G_i) + G_i H \sigma = P_i(x, y), \quad (7)$$

donde:

$$P_{ni} = \begin{cases} \left[(T_f - \tau)\Omega_i \right]^{-1} & \text{Si } (x, y) \in \Omega_i \text{ y } t \in (\tau, T_f) \\ 0 & \text{Si } (x, y) \notin \Omega_i \text{ y } t \notin (\tau, T_f) \end{cases}, \quad (8)$$

$$KH \frac{\partial(G_i)}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad G_i \Big|_{BA} = 0 \quad G_i(x, y, T_f) = 0 , \quad (9)$$

siendo G_i , las funciones de influencia asociadas a CF en la i -ésima zona protegida.

Con tales fórmulas analíticas, el proceso de diseño óptimo definido en (1-2) puede ser resuelto ahorrando un notable tiempo computacional ya que, para obtener los coeficientes de influencia es necesario resolver el problema de contorno dado por las ecuaciones (7-9) tantas veces como zonas protegidas se consideren, por única vez. Este enfoque resulta ser considerablemente efectivo para una clase restringida de problemas de diseño.

5. METODO ESPECTRAL

Una magnitud de gran interés en el problema planteado, corresponde a las concentraciones máximas espaciales y temporales. Aprovechando la periodicidad hidrodinámica que presenta el problema (3) es posible conocer la variación de la concentración aproximando el flujo másico mediante una serie de Fourier, de la siguiente manera:

$$M_j(t) = \sum_{r=0}^R [m_{c_{rj}} \cos(r\omega t) + m_{s_{rj}} \sin(r\omega t)], \quad (r = 0, 1, \dots, R), \quad (10)$$

donde $m_{c_{rj}}$ y $m_{s_{rj}}$ son constantes y R corresponde a la cantidad total de componentes consideradas en la representación de las funciones periódicas. Sustituyendo la serie (10) en la ecuación de transporte (4) y considerando su linealidad, es posible expresar la concentración CF de la siguiente manera:

$$CF(x, y, t) = \sum_{j=1}^{ND} \sum_{r=0}^R [m_{c_{rj}} c_{c_{rj}}(x, y, t) + m_{s_{rj}} c_{s_{rj}}(x, y, t)], \quad (11)$$

donde las funciones $c_{c_{rj}}(x, y, t)$ y $c_{s_{rj}}(x, y, t)$ verifican las siguientes ecuaciones desacopladas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial CF_{c_{rj}} H}{\partial t} + H(\bar{V}_r \nabla CF_{c_{rj}}) - \text{div}(KH \nabla CF_{c_{rj}}) + CF_{c_{rj}} \sigma H &= \cos(r\omega t) \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \\ \frac{\partial CF_{s_{rj}} H}{\partial t} + H(\bar{V}_r \nabla CF_{s_{rj}}) - \text{div}(KH \nabla CF_{s_{rj}}) + CF_{s_{rj}} \sigma H &= \sin(r\omega t) \delta(\bar{x} - \bar{x}_j) \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente cada una de estas ecuaciones puede ser resuelta a partir de una serie de Fourier, de la siguiente manera:

$$c_{c_r}(x, y, t) = \sum_{l=0}^L [a_{c_l} \cos(l\omega t) + a_{s_l} \sin(l\omega t)], \quad (13)$$

$$c_{s_r}(x, y, t) = \sum_{l=0}^L [b_{c_l} \cos(l\omega t) + b_{s_l} \sin(l\omega t)], \quad (14)$$

donde a_{c_l} , a_{s_l} , b_{c_l} y b_{s_l} son funciones de (x, y) y L corresponde a la cantidad total de componentes consideradas. Este enfoque implica un gran ahorro de tiempo de cálculo en la evaluación de las restricciones definidas en (2).

6. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Con las ecuaciones mostradas pueden construirse dos modelos computacionales. El primero de ellos consiste en la determinación de las corrientes de marea a partir de (3), con sus correspondientes condiciones de borde. Una vez determinadas las mismas debe resolverse el problema de dispersión mediante el método de Elementos Finitos [8] a los efectos de calcular

el problema de diseño óptimo. Bajo ambiente de programación en Matlab [9] este problema puede ser abordado de tres formas. La primera corresponde a la simulación del problema directo de transporte (3-4) de forma repetida para cada alternativa, verificando el cumplimiento de las restricciones del problema y comparando la función objetivo hasta encontrar la mejor opción (1-2). En la segunda forma, las restricciones del problema se determinan mediante el uso de funciones de influencia obtenidas convenientemente a partir del problema adjunto del modelo de transporte definido en (7-9). Este cálculo se realiza una sola vez y por cada zona protegida. Luego la concentración media temporal es calculada con la expresión (6) y comparada para cada alternativa de diseño con las restricciones definidas en (2) hasta obtener (1). Finalmente el último enfoque corresponde al cálculo de la evolución de la concentración de CF mediante la expresión (11), haciendo uso de un sistema independiente del tiempo, que se basa en la obtención por única vez de componentes en serie de Fourier definidos en (13-14). De esta forma se evalúa cada escenario posible verificando en cada caso el cumplimiento de las restricciones ambientales y su función objetivo (1-2).

La precisión de los resultados obtenidos por cada uno de los enfoques mencionados y los tiempos totales de cálculo, son analizados a continuación.

7. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para la situación explicada en el apartado 2 se muestran los resultados obtenidos con la solución del problema directo de transporte mediante el MEF. En la Figura 2 se observa la distribución de CF generada por la descarga de efluentes, indicados con cruces negras, donde los niveles de concentración media temporal en las tres zonas protegidas (3321, 4571 y 4000 NMP/100ml respectivamente) indicadas con círculos negros, no cumplen con los valores de admisibilidad. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la necesidad de implementar plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas.

Si el problema de diseño es calculado con el problema directo de transporte de contaminantes, el tiempo computacional requerido para obtener la concentración en cada zona protegida resultará ser muy elevado, ya que debe calcularse la evolución hasta obtener el estado oscilatorio estacionario. Para el ejemplo bajo análisis cada cálculo de este tipo demora aproximadamente 80 minutos. Vale decir que el tiempo total corresponde al producto entre la simulación del problema de transporte por la cantidad de iteraciones, lo que lo convierte en un enfoque computacionalmente caro por su vasta demanda en tiempo de cálculo. El uso del modelo adjunto de dispersión para la determinación de las concentraciones medias temporales es mucho más expeditivo, ya que el cálculo de las funciones de influencia $G_i(x,y,t)$ para cada una de las zonas protegidas se realiza una sola vez. La ventaja de este enfoque es que le otorga independencia al proceso de búsqueda del diseño óptimo. El proceso se realiza haciendo uso de las fórmulas analíticas (6) para evaluar las restricciones, lo cual hace innecesaria la resolución de un problema diferencial para cada iteración, minimizándose notablemente los tiempos de cómputo. El tiempo total necesario en el ejemplo analizado, para calcular por única vez las funciones $G_i(x,y,t)$ para las tres zonas protegidas, es aproximadamente 7 horas. Sin embargo este enfoque está limitado a obtener únicamente los valores de las concentraciones medias temporales.

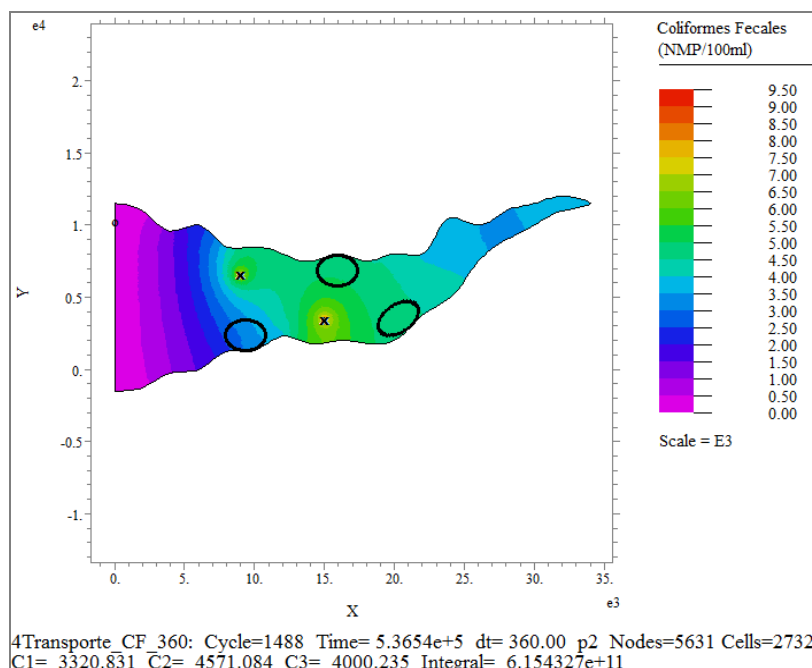


Figura 2: Niveles de Concentración de CF en el Estuario (condición inicial).

Sin embargo resulta de interés, en problemas cuya hidrodinámica presenta características oscilatorias, determinar los valores máximos de las concentraciones en las áreas protegidas. Es posible obtener este dato empelando el Método Espectral y con ello reducir aún más los tiempos totales de cálculos. De esta forma, se calcula por única vez las componentes de las ecuaciones (13-14) con una demora aproximadamente de 60 minutos. Una vez obtenidas, la evaluación de las restricciones del problema de diseño se realizan calculando (11).

Teniendo en cuenta la situación del estuario bajo análisis se efectuaron comparaciones, entre cada uno de los enfoques, de los valores de concentración media temporal para cada una de las zonas protegidas, a los efectos de mostrar la precisión de los mismos. Estos resultados se muestran en la Tabla 1, donde se observa que la diferencia porcentual entre el problema directo y el adjunto para cada zona es del 0,4%, 1,4% y 1,5% respectivamente, y del 2,1%, 2,9% y 2,9% con el método espectral. Tales valores son consistentes ya que el error entre los mismos no supera el 3%.

		Problema Directo de Transporte	Enfoque Adjunto	Método Espectral
Concentración media temporal de Coliformes Fecales (NMP/100ml)	Zona 1	3321	3336	3390
	Zona 2	4571	4635	4704
	Zona 3	4000	4061	4117

Tabla 1: Comparación entre valores de concentraciones medias en zonas protegidas (condición inicial).

A continuación se presentan los resultados del ejemplo de diseño óptimo presentado en el

apartado 2, donde se obtuvieron los factores de reducción de cada planta depuradora que hacen mínima la función de costo. El tiempo total de cálculo de cada uno, junto con las soluciones obtenidas se muestran en la Tabla 2.

		Enfoque Adjunto	Método Espectral
Concentración media temporal de Coliformes Fecales (NMP/100ml)	Zona 1	1902	1791
	Zona 2	1977	1981
	Zona 3	1650	1802
Factores de reducción en las tasas de vertido	β_1	0,84	0,69
	β_2	0,19	0,14
Función Objetivo $(1 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s} * \text{NMP}/100\text{ml})^2$		0,2526	0,3278

Tabla 2: Resultados del diseño de optimización.

El procedimiento de optimización para ambos enfoques tarda segundos (evaluando un poco más de 400 escenarios). Si bien el costo obtenido con el primero es el menor, éste se obtuvo de evaluar las restricciones ambientales con las concentraciones medias temporales, lo que no asegura que durante todo el período se cumplan con los límites de admisibilidad. Sin embargo tales valores sí se verifican con el enfoque Espectral. En la Figura 3 se comparan las historias temporales de concentración simuladas con los valores óptimos de cada enfoque para la zona protegida 3 (en el resto de las zonas el comportamiento es similar). Se observa que después de un transitorio se alcanza una situación de oscilación estacionaria, que es la que tiene interés analizar, donde los valores máximos obtenidos con el Método Espectral no superan los 2000 NMP/100ml de CF, no ha sí las calculadas con los valores obtenidos por el Enfoque Adjunto.

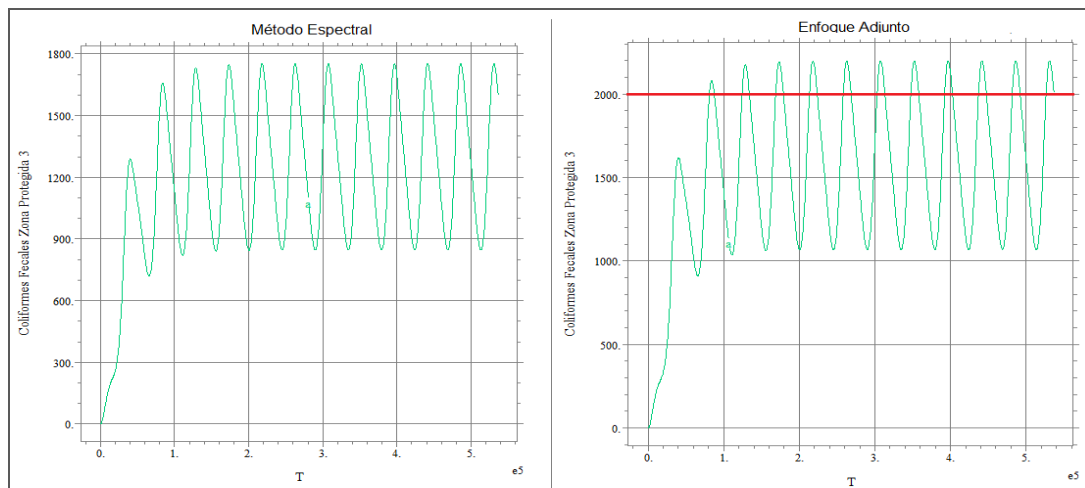


Figura 3: Comparación de la historia temporal de concentración de CF en la zona protegida 3.

Debido a la independencia temporal que brinda el desarrollo en series de Fourier, el cálculo para obtener las componentes es 7 veces más rápido que el utiliza el Problema

Adjunto para obtener las funciones de influencia.

8. CONCLUSIONES

Ambos enfoques presentan ventajas, dependiendo del problema de diseño en que se los considere. La aplicación del Método Espectral en un ejemplo de diseño óptimo mediante el MEF para situaciones periódicas resultó ser eficiente, ya que requiere poco tiempo de cálculo computacional. Además permite conocer valores máximos (o mínimos) de admisibilidad, y los resultados obtenidos se encuentran dentro de los márgenes de error aceptables. Por tal motivo, la utilización de este enfoque en problemas de oscilación periódica donde se requiera la simulación de diferentes escenarios es apropiada, permitiendo abordar la solución para diversos enfoques de diseño ambiental. Sin embargo el desarrollo en series de Fourier requiere un trabajo analítico importante. Por otra parte el uso del enfoque Adjunto del problema de transporte es válido para una amplia variedad de problemas, incluidos los que presentan características periódicas. En tal sentido, deben considerarse valores de admisibilidad de mayor restricción, a los efectos de garantizar que los niveles de concentración se encuentren dentro de los límites aceptables durante todo un período de tiempo.

REFERENCIAS

- [1] Stoklas, C. y Cortínez, V. Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en ríos. *Mecánica Computacional*. Vol. 30. pp. 3577-3594. ISSN: 1666-6070. (2011a).
- [2] Stoklas, C. y Cortínez, V. Un Modelo Computacional para el Estudio de Contaminación en Cuerpos de Aguas Poco Profundas. *Contaminación Atmosférica e Hídrica en Argentina*. pp, 523-532. ISBN: 978-950-42-0136-6. (2011b).
- [3] Stoklas, C. y Cortínez, V. Diseño Óptimo de Plantas de Tratamiento de Aguas Residuales. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*. Vol. 3, pp. 327-330. ISSN 2314-3282. (2011c).
- [4] Stoklas, C. y Cortínez, V. Estrategia de optimización para la toma de decisiones en el diseño de plantas de depuración de efluentes urbanos. *Gestión y Tratamiento Integral del Agua*. ISBN: 978-987-1253-76-0. (2012).
- [5] Cortínez, V., Stoklas, C. y Dominguez, P. “Control Óptimo de Descargas de Aguas Residuales Urbanas en Estuarios”. *Contaminación Atmosférica e Hídrica en Argentina*. Tomo III. pp, 733-746. ISBN: 978-950-42-0136-2. (2015).
- [6] Cortínez, V., Stoklas, C. y Dominguez, P., “Control óptimo de vertidos industriales o urbanos en estuarios dominados por mareas”, *Mecánica Computacional*, Vol. 34, pp. 3223–3236, (2016).
- [7] Stoklas, C. y Cortínez, V. y Domínguez, P. “Calidad de agua en estuarios: control óptimo de descargas de efluentes domiciliarios”. *VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, pp. (2017).
- [8] FlexPDE PDE, Copyright ©, Solutions Inc. www.pdesolutions.com, (2015).
- [9] Matlab. R2010a The Math Works, Inc. (www.mathworks.com), (2010).