

LA UTILIZACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DEL TRÁFICO URBANO Y SUS CONSECUENCIAS AMBIENTALES

DOMINGUEZ, PATRICIA N.^{1,2} Y CORTÍNEZ, VÍCTOR H.^{1,2,3}

1: Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina,
pdoming@uns.edu.ar

2: Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA),
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca,
11 de abril 461, Bahía Blanca, Argentina,
vcortine@frbb.utn.edu.ar

3: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET

Resumen. *Uno de los mayores problemas de las ciudades modernas es la congestión de tráfico debido a que origina demoras en el traslado de personas y bienes entre distintos puntos de la misma e inconvenientes para todos los habitantes. Entre las consecuencias directas de la congestión pueden citarse las pérdidas económicas, la contaminación atmosférica y el ruido urbano. Se ha trabajado sin pausa desde mediados del siglo pasado para tratar de solucionar el problema del transporte urbano en busca de ciudades que proporcionen calidad de vida para los habitantes y movilidad eficiente para peatones, ciclistas y vehículos particulares y de transporte público. En este sentido, debido a la gran cantidad de variables que intervienen, el estudio del tráfico urbano mediante modelos matemáticos ha sido uno de los principales puntos de interés. Esto se debe a la capacidad de tales modelos para predecir el comportamiento de los conductores bajo determinadas circunstancias y así poder estimar patrones de flujo vehicular en arterias de la ciudad, velocidad de circulación y tiempos de viaje. En este trabajo se presenta una reseña de los diferentes enfoques utilizados para estudiar el tráfico urbano y el efecto del mismo sobre el medioambiente. En particular, se describen algunos aportes realizados por los autores en esta temática.*

Palabras clave: Tráfico urbano, congestión, contaminación atmosférica, contaminación acústica, MEF.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las ciudades modernas ha traído como un aspecto inherente, la aparición o agudización de diversos inconvenientes cuya complejidad hace necesario un estudio científico a efecto de darles solución. En particular, la congestión del tráfico se ha constituido en uno de los mayores problemas a resolver.

Los vehículos que más contribuyen a la congestión del tráfico urbano son los automóviles particulares, cuyo incremento ha sido particularmente notorio a partir de las últimas décadas del siglo pasado. Si bien un vehículo de transporte colectivo tiene un efecto en la congestión equivalente al de tres automóviles, hay que considerar que el mismo traslada

50 pasajeros y un automóvil 1,5 personas en promedio, por eso, cada ocupante del automóvil produce 11 veces la congestión atribuible a un pasajero del transporte colectivo [1].

Tanto los pasajeros de los vehículos particulares como los que realizan sus traslados mediante transporte público no solo sufren el aumento de tiempo de viaje debido a la congestión sino también consecuencias económicas. Los viajeros de vehículos particulares ven aumentado el costo operativo debido al incremento en el consumo de combustible y los ciudadanos que utilizan el autobús sufren el aumento de la tarifa del mismo. En este caso, en un sistema congestionado, para proveer la misma capacidad de transporte que en condiciones de circulación fluida, se requieren más unidades con sus respectivos conductores, trayendo como consecuencia tarifas más elevadas [1].

Los niveles sonoros en las grandes urbes alcanzan valores que generan molestia y en algunos casos afectan la salud ya que son causa de estrés, falta de concentración e insomnio, entre otras. Dichos niveles dependen fundamentalmente del flujo vehicular, al que se suman además, el ruido producido por la construcción, los centros de recreación, los vendedores ambulantes, etc.

De la misma manera los vehículos emiten a través de sus escapes, diversas sustancias tóxicas, tales como monóxido de carbono, óxidos de azufre y de nitrógeno, plomo y compuestos orgánicos volátiles, cuyos valores de concentración en el aire dependen del flujo vehicular y de las condiciones meteorológicas. La congestión de tránsito agrava la situación al provocar una disminución de la velocidad y un incremento de la permanencia en la red que aumentan, directamente, la emisión de gases contaminantes.

Debido a las intrínsecas relaciones entre tráfico y medioambiente, una estrategia integrada para atacar los problemas en forma conjunta conduce a soluciones más eficientes que la aplicación de medidas aisladas para combatir cada uno de ellos en forma separada. En la Figura 1 se muestran las relaciones entre los modelos generalmente utilizados para obtener niveles sonoros y concentración de contaminantes gaseosos en la ciudad, y los datos suministrados por los programas de modelación de tráfico vehicular.

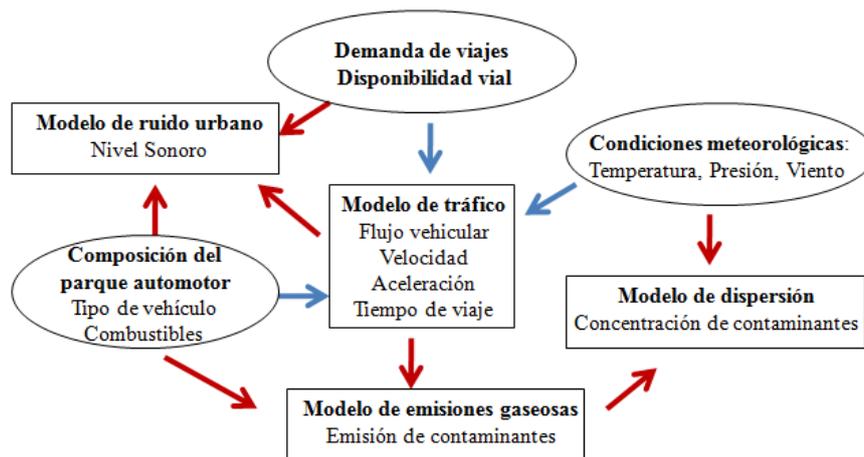


Figura 1. Relaciones entre modelos de tráfico y ambientales.

Asimismo, las ciudades se encuentran en constante expansión y las modificaciones en el uso del suelo tales como la incorporación y/o cambio de ubicación de un centro comercial, un aeropuerto, un nuevo desarrollo residencial, entre otros, requieren la implementación de los cambios correspondientes en la red de tráfico para posibilitar el transporte de personas y mercaderías hacia y desde los mismos. Esto implica la elaboración de proyectos para la evaluación y la selección de la infraestructura vial adecuada. Algunos de estos cambios permiten implementaciones a corto plazo, tales como los programas para optimizar el uso de vehículos particulares y la sincronización de semáforos para reducir la congestión, mientras que otros requieren plazos largos y más costosos. Entre estos últimos, por ejemplo, pueden citarse la adición de nuevos tramos de autopistas, puentes y pasos sobre ríos y vías férreas. Cualquiera sea el caso, el proceso de planificación de los sistemas de transporte, así como su impacto para la comunidad y el medioambiente, es imprescindible para la correcta valoración de tales proyectos.

El diseño de una red de transporte o de su modificación es una tarea interdisciplinaria que involucra una serie de aspectos urbanísticos, económicos, técnicos y medioambientales, y se desarrolla en varios pasos. Cuanto mayores son los cambios que se requieren en la red de tráfico, tanto más importante es la etapa de planificación y evaluación de alternativas y debido a la cantidad de variables e intereses que intervienen en el proceso, la utilización de programas matemáticos computarizados de simulación y optimización se convierte en una herramienta indispensable.

2. MODELACIÓN DEL TRÁFICO URBANO

2.1. Características del tránsito en las ciudades

En forma precisa, la congestión de tráfico puede entenderse como “la condición que prevalece si la introducción de un vehículo en un flujo de tránsito aumenta el tiempo de circulación de los demás” [1]. Dicha congestión se manifiesta en la reducción de la velocidad de circulación y en el incremento de las colas y las detenciones. Estas demoras se traducen, justamente, en el incremento del tiempo de viaje para que los habitantes efectúen los traslados urbanos normales.

En la Figura 2 se pueden ver los diagramas de las relaciones fundamentales entre las variables que intervienen en la descripción del tráfico, de acuerdo a la teoría de Greenshields [2, 3]. Estas relaciones, que nos permiten entender el fenómeno de la congestión, han sido modificadas posteriormente por diferentes autores tanto para facilitar el tratamiento matemático como para adecuarlos a la realidad de las diferentes comunidades [4].

A partir de una relación lineal entre la velocidad v (km/h) y la densidad k (veh/km) (Figura 2a) se obtienen las relaciones entre velocidad y flujo (veh/h) (2b) y entre densidad y flujo (2c), conocido este último como diagrama fundamental.

Como se puede observar en este diagrama, el flujo, es decir, la cantidad de vehículos que pasan por un punto dado en la unidad de tiempo, crece desde un valor cero hasta que se hace máximo para una cierta densidad crítica k_c y luego comienza a disminuir mientras la

densidad sigue aumentando hasta alcanzar la densidad de embotellamiento ke . El flujo máximo que se puede alcanzar en un tramo de calle se denomina capacidad C y no es un valor fijo ya que condiciones de la calzada, atmosféricas (lluvia, niebla, etc.) o características de manejo (una calle de iguales características topológicas no tiene la misma capacidad en ciudades europeas que sudamericanas o asiáticas) modifican este valor. La pendiente de la recta oa corresponde a la velocidad a flujo libre v_f y las pendientes de las rectas ob y oc a las velocidades medias para las correspondientes densidades.

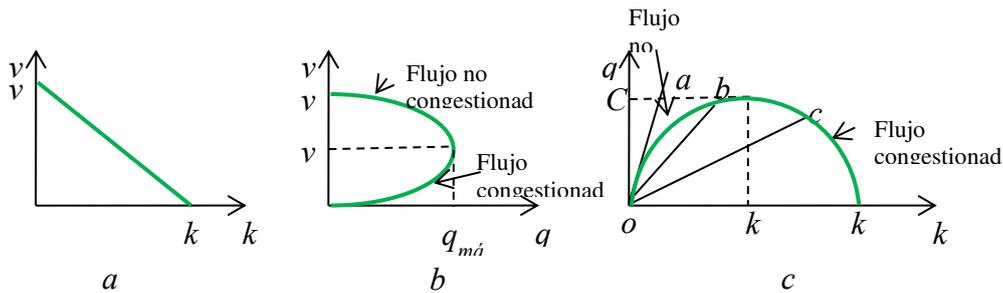


Figura 2. Relaciones fundamentales entre las variables que describen el tráfico vehicular.

A partir de estas relaciones entre las variables que entran en juego, es posible construir una función del tiempo de viaje con respecto al flujo en cada tramo, relación elemental sobre la que se basa la modelación del tráfico urbano. Una forma simplificada de tal función, que facilita el tratamiento computacional por ser una función monótona creciente, es la que se muestra en la Figura 3c). A este tipo pertenece la conocida función BPR [5] ampliamente utilizada en la modelación del tránsito.

Cabe señalar aquí que en las ciudades, a diferencia de las rutas o de los tramos de autopistas, el comportamiento del tráfico está fuertemente determinado por las intersecciones de calles (cruces a nivel, rotondas, etc.), semaforizadas o no.

2.2. Redes de transporte urbano

Una red de tráfico es un conjunto de vías y sus intersecciones que permiten la circulación de personas [6]. La representación de esta red involucra la abstracción de los elementos físicos de la vialidad, tales como calles e intersecciones, y la simulación del movimiento de objetos (personas, vehículos). Para modelar la ciudad, ésta se divide en zonas de características semejantes en las cuales se ubica un centroide que condensa la actividad de la zona en cuanto a generación y atracción de viajes (Figura 3a). Matemáticamente los elementos de la red se definen mediante un grafo dirigido de arcos (o tramos) y nodos. Los nodos representan tanto los centroides de zonas como las intersecciones entre calles. Los arcos pueden identificar a una calle o a un conjunto de ellas, que permiten la circulación entre dichos nodos (Figura 3b). Los arcos tienen asociada una función de costo o tiempo de viaje (Figura 3c). Para ir de un nodo a otro se pueden utilizar diferentes caminos o rutas, construidas como secuencias de arcos dirigidos. El tiempo total de viaje

entre dos nodos, por una ruta determinada, se calcula mediante la suma de los tiempos de recorrido de cada arco de la misma. Por supuesto, existen distintos niveles de representación de redes de acuerdo al detalle requerido por el objetivo que se busca [6, 7].

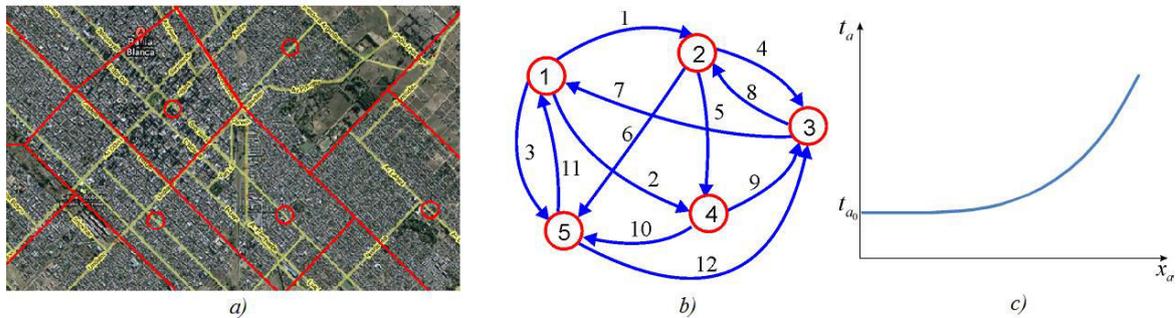


Figura 3. a) Zonas y centroides en una ciudad, b) grafo dirigido que representa una red de transporte, c) función de tiempo o costo de viaje.

Conociendo la cantidad de viajes entre puntos de origen y destino, la disponibilidad vial y adoptando algún criterio de elección de rutas por parte de los conductores, es posible determinar la cantidad de personas o de vehículos por unidad de tiempo, que puede esperarse viajen en un determinado segmento de la red de transporte. Este problema se denomina “asignación de viajes” y, a continuación, se explican someramente los enfoques más utilizados para resolverlo. Asimismo, en la Figura 4 se puede ver un esquema de los modelos que permiten estudiar éste y otros problemas del transporte urbano.

2.3. El problema de asignación de tráfico. Modelo discreto tradicional

La asignación de viajes a la red de transporte requiere definir algún algoritmo que permita elegir, entre todos los caminos posibles, los que se usarán para ir de un punto a otro de la ciudad, es decir establecer claramente los criterios mediante los cuales los conductores eligen los caminos a utilizar.

En este sentido, a mediados del siglo pasado, Wardrop [7] enunció un principio que fundamenta la mayoría de los enfoques utilizados actualmente en el estudio del tráfico urbano. Tal principio, conocido como “Equilibrio de Usuario” (EU) postula que los conductores eligen los caminos que minimizan su tiempo de viaje (o su costo), asumiendo que todos los usuarios se comportan de igual manera y que poseen un conocimiento total de las características de la red. Estos modelos llevan a plantear programas de optimización donde las variables son los flujos vehiculares en los arcos, siendo la relación entre flujo y tiempo de viaje una función del tipo de la mostrada en la Figura 3c).

En las ciudades modernas las redes de transporte suelen ser muy grandes, por ejemplo la red de Chicago tiene aproximadamente 13000 nodos y 39000 arcos, y la de Filadelfia 13500 nodos y 40000 arcos. En estos casos, la cantidad de variables involucradas, hace que los mencionados modelos se vuelvan muy costosos, no solo computacionalmente, sino también desde el punto de vista de la disponibilidad de los datos requeridos. En la

búsqueda de alternativas a la solución de este problema surgen los modelos espacialmente continuos que se exponen en la sección siguiente.

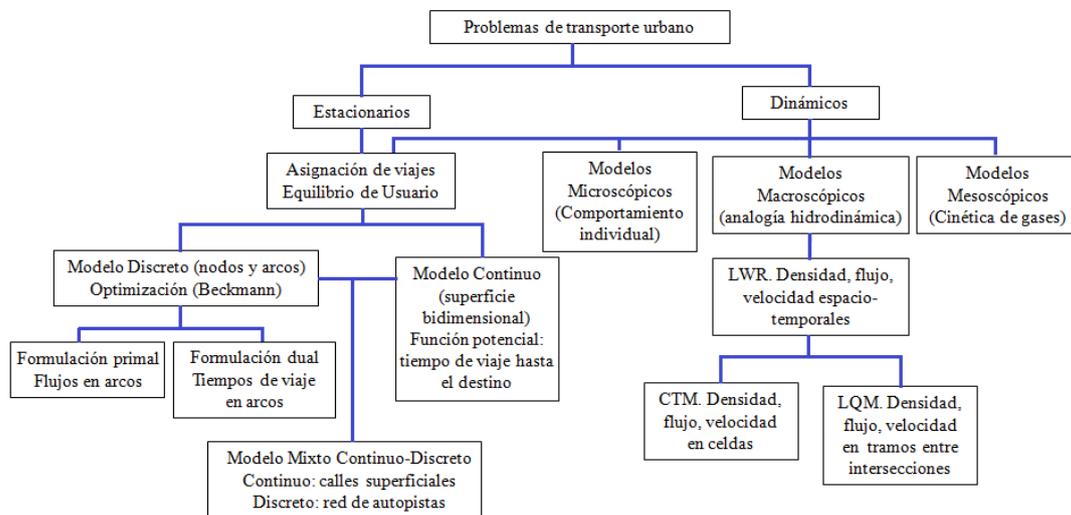


Figura 4. Modelos de tráfico urbano.

2.4. Modelos continuos para el problema de asignación

Este enfoque se basa en la idea de que la variación, en áreas cercanas, de la demanda, de las características del tráfico y del tiempo de viaje hasta el punto de destino, es pequeña cuando se la compara a las diferencias del sistema entero. De esta forma se asume que dicha variación puede ser formulada como infinitesimal y las variables del problema se suponen distribuidas continuamente en el espacio. Por ejemplo, en lugar de utilizar como variables al flujo vehicular en cada calle, éste se formula como un campo de densidad de flujo. De igual manera, el tiempo de viaje desde cualquier punto de la ciudad hasta un destino determinado puede especificarse mediante una función continua de la distancia a recorrer y de la congestión vehicular.

Tal tipo de formulación tiene una serie de ventajas entre las que pueden citarse las siguientes: a) en algunos casos simples el problema continuo conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales que tiene solución analítica; b) en casos más complicados es posible emplear métodos bien conocidos en la literatura de la mecánica del continuo tales como el método de Elementos Finitos o Diferencias Finitas; c) hace innecesarias ciertas hipótesis irreales establecidas para el modelo discreto tal como la definición artificial de centroides de zonas; d) la representación continua en redes grandes es más fácil de interpretar. Asimismo, este enfoque permite disminuir considerablemente la cantidad de variables del problema ya que, en este caso, las mismas no están determinadas por las calles e intersecciones físicas de la red, sino que se definen de acuerdo al método adoptado para resolver el problema continuo. A su vez, esta disminución de variables se corresponde directamente con la reducción del tiempo de cálculo computacional.

Los autores de este trabajo hemos desarrollado un modelo continuo, a partir de la

formulación dual del problema de optimización discreta de Beckmann (Figura 4), en el cual la variable es el tiempo de viaje desde cualquier punto del dominio hasta el destino [8]. Una de las características del modelo propuesto es la posibilidad de considerar la anisotropía de la red, es decir, tener en cuenta las características de la circulación de acuerdo a la dirección y el sentido, situación no contemplada en modelos continuos existentes. Asimismo, otra característica distintiva con respecto a otros modelos continuos es que, una vez resuelto el problema es posible recuperar los valores de flujo, tiempo de recorrido y velocidad en cada arco de la red, datos fundamentales para el cálculo de emisiones de ruido y de contaminantes gaseosos.

2.5. Modelo mixto continuo-discreto

En la actualidad, el transporte urbano en las grandes ciudades está determinado por la existencia de una red troncal de autopistas superpuesta a la red de calles comunes. Siguiendo este concepto, hemos desarrollado en los últimos años un modelo mixto continuo-discreto que permite modelar la red principal de autopistas, de manera detallada, mediante un modelo discreto y las calles superficiales de la ciudad mediante un modelo continuo. Ambos sistemas se conectan en los puntos de intercambio (rampas) donde los usuarios pueden optar por usar las autopistas o las calles comunes para llegar a su destino. El modelo propuesto se define a partir de ecuaciones de continuidad en los nodos y del principio de conservación de vehículos, mediante una función potencial que cumple el principio de Wardrop [9].

3. DISEÑO ÓPTIMO DE REDES DE TRANSPORTE URBANO

El proyecto de modificación o ampliación de la red urbana de transporte parte de la definición de objetivos que atañen a la sociedad en su conjunto. A su vez, el logro de tales objetivos depende de una serie de factores entre los cuales es fundamental el conocimiento y la consideración del comportamiento individual de los usuarios de dicha red, quienes tienen sus propios objetivos. Es decir, se plantea una cuestión donde la toma de decisiones presenta dos intereses, muchas veces contrapuestos, que deben compatibilizarse. Esto ha llevado a plantear el problema de diseño de redes de transporte urbano de una manera jerárquica que puede resolverse mediante programas de optimización en dos niveles.

En el caso de problemas de transporte urbano, en el nivel superior aparecen los objetivos que atañen a la sociedad en su conjunto, tales como optimizar el funcionamiento de la red, minimizar accidentes, minimizar los niveles de contaminación acústica y atmosférica en zonas residenciales, maximizar ingresos por peaje, etc. Estos objetivos involucran la estimación del flujo vehicular, del tiempo de viaje y de las velocidades de circulación en cada tramo de la red, que se calculan en el nivel inferior mediante modelos de tráfico urbano que garantizan el cumplimiento del primer principio de Wardrop.

Las cuestiones ambientales pueden ser consideradas en estos problemas como función principal a optimizar, por ejemplo minimizar concentraciones de contaminantes o nivel de ruido en determinadas zonas, o como restricciones a cumplir en la optimización de otras funciones. En este caso, por ejemplo, se podría intentar maximizar flujos en ciertas

arterias sujeto a que no se superen valores admisibles de nivel sonoro o concentración de contaminantes en dicha zona o en toda la red [9, 10].

4. TRANSPORTE PÚBLICO

En el proceso de planificación del transporte luego de obtener los datos de generación de viajes de cada zona y realizar la distribución hacia las otras zonas, se requiere conocer la partición modal, es decir, cuántos de los viajes se realizarán por transporte público (autobuses, trenes, subtes, otros) y cuántos por automóviles privados, para continuar luego con el proceso de asignación ya comentado.

De acuerdo a la equivalencia entre transporte público y privado mencionada en la introducción, queda claro que si se lograra transportar a la mayoría de los usuarios de una red urbana mediante un servicio público la congestión disminuiría, y consecuentemente la contaminación.

En la planificación del transporte público intervienen una gran cantidad de aspectos, entre ellos la elección de tecnologías, la determinación de demandas y la definición funcional del sistema (recorridos, frecuencias, tablas de horarios). Existe un amplio estudio en este sentido [11] y se ha trabajado mucho en la optimización de recorridos y frecuencias, sin embargo en la mayoría de los trabajos no se considera el comportamiento de los vehículos particulares entre los cuales circulan los autobuses, hecho más conflictivo aún si no existen carriles especiales.

Por otra parte, cuando se estudia el tráfico urbano en general, se suele asimilar los autobuses a una cierta cantidad de automóviles. Si bien esto puede resultar conveniente en una primera aproximación, la existencia de un autobús en una calle congestionada produce un fenómeno que Lattanzio et al. [12] describen como “embotellamiento móvil”. Este concepto es el que utilizan Gasser et al. [13], quienes modelan el tráfico vehicular de acuerdo a la teoría LWR [14, 15] y la trayectoria de los autobuses con una teoría de segundo orden del tipo “seguir al líder”, considerando la interacción entre ambos tipos de vehículos. Se analiza el flujo mixto en un circuito completo del recorrido del autobús.

Los autores del presente trabajo hemos utilizado estos conceptos en el estudio de la dinámica del tráfico urbano, tal como se expone en la sección siguiente.

5. DINÁMICA DEL TRÁFICO URBANO

Algunos fenómenos, tal como el control de semáforos o el acceso a las autopistas, requieren modelos dinámicos que puedan proporcionar información detallada en el tiempo.

En este sentido, se han propuesto diferentes enfoques que, desde el punto de vista de la escala espacial, pueden clasificarse como microscópicos, mesoscópicos y macroscópicos (Figura 4). Los primeros están basados en el comportamiento de vehículos individuales y “seguir al líder” siendo entre ellos el más conocido “autómatas celulares”. Estos modelos brindan mucho detalle pero también requieren gran cantidad de información. Los modelos mesoscópicos están basados en la cinética de gases y describen dinámicas de distribución de velocidades de los vehículos, es decir, son enfoques probabilísticos. Por otra parte, los

enfoques macroscópicos se centran en captar las relaciones globales del flujo de tránsito tales como velocidad de los vehículos, flujo y densidad vehicular. Estos son modelos de flujos continuos basados en analogías hidrodinámicas y surgen a partir de la teoría de Lighthill y Whitham [14] y Richards [15] o teoría LWR, que describe el comportamiento de ondas cinemáticas en un medio continuo. Este tipo de modelo viene gobernado mediante ecuaciones diferenciales a derivadas parciales hiperbólicas. Asimismo, se han estudiado diversas formas para modelar el comportamiento en intersecciones con caminos convergentes o divergentes [16].

Como simplificaciones tendientes a disminuir el tiempo de cálculo computacional de los modelos LWR han surgido otros modelos tales como el Cell Transmission Model (CTM) que discretiza el continuo en celdas [4], y más recientemente, el Link Queue Model (LQM) [17]. Este último enfoque modela la dinámica en los tramos y en las intersecciones considerando aspectos de importancia tales como paradas y arranques. Asimismo, dicho modelo representa un avance frente a otros anteriores basados en tramos, ya que, a los efectos de calcular los flujos máximos de salida o recepción en cada tramo, utiliza el diagrama fundamental de manera simplificada. A su vez, dichos flujos son modificados para definir los flujos entre un tramo y otro, considerando condiciones de continuidad y de interacción en intersecciones. El problema se reduce a un sistema de tantas ecuaciones diferenciales ordinarias como tramos existan en la red, donde las variables fundamentales corresponden a las densidades promediadas espacialmente en cada uno de ellos.

Recientemente, los autores de este trabajo hemos utilizado el modelo LQM en la optimización de ciclos de semáforos sobre una avenida, considerando además, la interacción con vehículos de transporte público [18]. En este caso, coexisten en el modelo dos enfoques diferentes que interactúan entre sí. En el caso de los autobuses, se utiliza un enfoque lagrangiano considerando su escasa cantidad en relación a los vehículos particulares, los cuales se modelan, a su vez, mediante un enfoque euleriano.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una breve reseña sobre los modelos que se utilizan en el estudio del tráfico urbano tanto en el aspecto estático como dinámico para buscar soluciones al problema de la congestión y sus consecuencias económicas y ambientales. Dichos modelos pueden predecir el comportamiento de los usuarios de las redes de transporte ante cambios en las condiciones de circulación, ya sea a corto o largo plazo, y por lo tanto permiten evaluar el costo de dichas modificaciones antes de efectivizarlas. Debido a las estrechas relaciones entre tráfico y medio ambiente, la mejor solución es aquella que considera el problema en su conjunto, proponiendo un diseño óptimo de la red en cuanto a costos de viaje u otros objetivos, sujeto siempre a restricciones ambientales.

A nuestro juicio, entre las opciones más eficientes para el control de la congestión de tráfico, tanto desde el punto de vista económico como de implementación, figuran la coordinación de semáforos y la optimización del transporte público. Estas dos problemáticas constituyen los ejes centrales de nuestra investigación, actual y en un futuro cercano, en esta temática.

REFERENCIAS

- [1] I. Thomson y A. Bull. *La congestión de tránsito urbano: causas y consecuencias económicas y sociales. Serie recursos naturales e infraestructura. Informe Técnico 25*, Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), Santiago de Chile, (2001).
- [2] B.D. Greenshields, "The photographic method of studying traffic behavior. In: *Proceedings of the 13th annual meeting of the highway research board*, pp. 382-399. (1934).
- [3] B.D. Greenshields, "A study of traffic capacity. In: *Proceedings of the 14th annual meeting of the highway research board*, pp. 448-477. (1935).
- [4] C.F. Daganzo, "The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory". *Transportation Research Part B* 28 (4). pp. 269-287, (1994).
- [5] U.S. Bureau of Public Roads. *Traffic Assignment Manual*. U.S. Department of Commerce. Washington D.C., (1964).
- [6] R.A. Fernandez, *Elementos de la teoría del tráfico vehicular*, Lom Ediciones, ISBN: 978-956-319-816-4, Santiago de Chile, (2008).
- [7] Y. Sheffi, *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with mathematical programming methods*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1984).
- [8] V.H. Cortínez y P.N. Dominguez. "Un modelo de difusión anisótropa para el estudio del tráfico urbano". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 29(1), 1-11, (2013).
- [9] P.N. Dominguez y V.H. Cortínez, "Un método continuo-discreto para el diseño óptimo de sistemas de transporte urbano", *Mecánica Computacional Vol XXXI*, pp. 3335-3355 (2012).
- [10] P. N. Dominguez, M. C. Vidal, V. H. Cortínez. Diseño óptimo de redes de transporte urbano considerando aspectos medioambientales. *Mecánica Computacional Vol. XXVIII*, 2599-2624, (2009).
- [11] S. Li, Modelling and management of multi-modal urban traffic, Tesis doctoral, University College London, (2016).
- [12] C. Lattanzio, A. Maurizi y B. Piccoli, "Moving bottlenecks in car traffic flow: A PDE-ODE coupled model". *SIAM Journal mathematical analysis* 43 (1), 50-67, (2011).
- [13] I. Gasser, C. Lattanzio y A. Maurizi, "Vehicular traffic flow dynamics on a bus route". *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 11 (3), 925-942, (2013).
- [14] M.J. Lighthill y G.B. Whitham, "On kinematic waves: II. A theory of traffic flow on long crowded roads". *Proceedings of the Royal Society of London A* 229 (1178), 317-345, (1955).
- [15] P. I. Richards, "Shock wave on the highway". *Operations Research* 4 (1), 42-51, (1956).
- [16] G. Coclite, M. Garavello y B. Piccoli, "Traffic flow on a road network". *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 36 (6), 1862-1886, (2005).
- [17] W-L Jin, "A link queue model of network traffic flow". arXiv preprint arXiv:1209.2361, (2013).
- [18] P. N. Dominguez y V. H. Cortínez, "Un enfoque de optimización para el control de semáforos". XII Congreso de Ingeniería del Transporte, Valencia, España. DOI: <http://dx.doi.org/1p.0.4995/ /CIT2016.2016.2262>, (2016)