



**Editorial de la Universidad  
Tecnológica Nacional**

# Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en aguas poco profundas.

TESISTA: Lic. Cecilia Inés STOKLAS

DIRECTOR: Dr. Víctor Hugo CORTÍNEZ

Tesis presentada para acceder al grado académico de Magíster en Ingeniería  
Ambiental

Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA)

Facultad Regional BAHÍA BLANCA  
Universidad Tecnológica Nacional – U.T.N.  
Argentina

Bahía Blanca, Octubre de 2011

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional – edUTecNe

<http://www.edutecne.utn.edu.ar>

[edutecne@utn.edu.ar](mailto:edutecne@utn.edu.ar)

© [Copyright] La Editorial de la U.T.N. recuerda que las obras publicadas en su sitio web son de libre acceso para fines académicos y como un medio de difundir la producción cultural y el conocimiento generados por docentes universitarios y autores auspiciados por las universidades, pero que estos y edUTecNe se reservan el derecho de autoría a todos los fines que correspondan.



Esta tesis ha sido dirigida por el **Dr. Víctor Hugo CORTÍNEZ**, Profesor Titular del departamento de Mecánica y Director del Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA) de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca.

La presente tesis ha sido defendida el 12 de diciembre de 2011 en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, ante el jurado conformado por el **Dr. Walter LEGNANI**, Profesor Titular de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional; el **Dr. Elbio PALMA**, Profesor Asociado del Departamento de Física de la Universidad Nacional del Sur; el **Ing. Mario SEQUEIRA**, Profesor Titular del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

## DICTAMEN FINAL DE DEFENSA ORAL DE TESIS

En la ciudad de Bahía Blanca a los 12 días del mes de diciembre de 2011, a las 14 horas, en las dependencias áulicas de la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional, se reúne el Jurado designado por el Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional (Res. 1431/2011), para dictaminar sobre la tesis de la Licenciada en Organización Industrial Cecilia Inés STOKLAS, para optar al título de MAGISTER EN INGENIERÍA AMBIENTAL, titulada UN ENFOQUE DE OPTIMIZACIÓN PARA EL CONTROL DE VERTIDO DE EFLUENTES URBANOS EN AGUAS POCO PROFUNDAS, dirigida por el Dr. Víctor H. Cortínez, Profesor de la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional.

Son miembros del Jurado: el Dr. Walter LEGNANI, Profesor Titular de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional; el Dr. Elbio PALMA, Profesor Asociado del Departamento de Física de la Universidad Nacional del Sur; el Ing. Mario SEQUEIRA, Profesor Titular del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y el Dr. Víctor CORTÍNEZ, quien participa en su carácter de Director de la tesis mencionada con voz y sin voto.

A juicio de este tribunal la investigación ha sido realizada con rigurosidad tanto en el planteo del problema como en el desarrollo de la solución propuesta. La investigación sobre modelos de optimización progresa de manera sistemática. En una primera parte se discuten los modelos físico-matemáticos (ecuaciones hidrodinámicas y de transporte) comentando sobre sus alcances y limitaciones. Posteriormente se introduce rigurosamente la formulación del problema adjunto y se discute su aplicabilidad al modelo de optimización. Finalmente, se exponen los detalles del Modelo Computacional de Diseño Óptimo. Luego del análisis de las herramientas mencionadas, las mismas se emplean en la resolución de un grupo de problemas de interés ingenieril. Los resultados muestran el alto potencial del modelo de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos.

Los materiales y métodos están descriptos detalladamente, incluyendo los modelos matemáticos, y simulaciones computacionales. La Lic. Stoklas elaboró cuidadosamente la teoría general a emplear en la resolución del problema directo y adjunto (ecuaciones básicas, constitutivas y condiciones de borde), aplicó modernos modelos computacionales (elementos finitos) para la resolución de las ecuaciones resultantes, y utilizó novedosas técnicas de optimización para calcular localizaciones de efluentes. Se observa una alta rigurosidad en cada una de las etapas realizadas.

La tesis está bien desarrollada, escrita de manera clara y precisa. El resumen sintetiza las conclusiones obtenidas y en la introducción se plantean claramente la motivación del trabajo, los objetivos generales y particulares y la metodología a emplear. En la discusión general se integraron los resultados alcanzados. La completa y actualizada bibliografía muestra una muy buena utilización de las fuentes de información.

La exposición oral se destacó por la claridad, demostrando la tesista un amplio dominio del tema expuesto. Posteriormente respondió satisfactoriamente todas las preguntas realizadas por el jurado.

Por lo expuesto, los miembros del jurado aprueban la tesis presentada con la máxima calificación: sobresaliente (10).

En consecuencia, este Jurado recomienda que se le otorgue el grado académico de Magíster en Ingeniería Ambiental

Siendo las 16:00 horas se da por terminado el acto, con la firma de los miembros del Jurado en cuatro (4) originales.

*A mis hijas Giovanna y Francesca,  
y a mi esposo Ariel por su  
incondicional apoyo*



---

## AGRADECIMIENTOS

---

Este trabajo de tesis fue posible gracias a la colaboración de todas aquellas personas que de un modo u otro han estado a mi lado y me ayudaron a alcanzar este objetivo. Entre ellas quiero nombrar:

A mi director de tesis, Dr. Víctor H. Cortínez por haber dirigido este trabajo y sobre todo por su dedicación, aporte intelectual, críticas acertadas y su apoyo en todo momento. Trabajar con él ha sido un placer.

A la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, por haberme brindado esta posibilidad académica.

A mis compañeros del Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada de la UTN-FRBB, por su grata compañía y mates cebados.

Al jurado conformado por el Dr. Walter Legnani, el Dr. Elbio Palma y el Ing. Mario Sequeira, por haber evaluado la presente tesis.

A mis padres Olga y Ricardo por su constante apoyo y colaboración.

Finalmente deseo especialmente agradecer a mis hijas Giovanna y Francesca, y a mi esposo Ariel por estar siempre, por su comprensión y por tantas horas de espera. Por ellos vale la pena mejorar día a día.



---

# ÍNDICE

---

<b><u>RESUMEN</u></b> .....	1
<b><u>CAPITULO I: INTRODUCCIÓN</u></b>	
1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA .....	3
1.2. ANTECEDENTES .....	7
1.3. OBJETIVOS DE LA PRESENTE TESIS.....	13
1.4. METODOLOGÍA Y ESTRUCTURA DE LA TESIS .....	14
<b><u>CAPITULO II: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO</u></b>	
2.1. CONTAMINACIÓN DE CUERPOS DE AGUA POR VERTIDOS URBANOS:	
INDICADORES DE CALIDAD DE AGUA .....	17
2.1.1. Caracterización de Aguas Residuales .....	17
2.1.2. Parámetros de calidad del agua.....	18
2.2. SISTEMAS DE TRATAMIENTO DE LOS EFLUENTES URBANOS:	
ESQUEMA DE DISEÑO.....	20
2.2.1. Generalidades .....	20
2.2.2. Esquema de plantas de tratamiento: Variables de diseño .....	22
2.2.3. Determinación de la función de costo de las plantas de tratamiento.....	25
2.3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO .....	27

### **CAPITULO III: FORMULACIÓN DEL MODELO FÍSICO - MATEMÁTICO**

3.1. GENERALIDADES. ....	30
3.2. MODELO HIDRODINÁMICO .....	32
3.2.1. Formulación del problema hidrodinámico bidimensional estacionario.....	32
3.2.2. Ecuación hidrodinámica gobernante.....	35
3.3. MODELO DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS.....	37
3.2.1. Formulación del problema de transporte bidimensional estacionario.....	37
3.2.2. Ecuación de transporte de contaminantes para varias sustancias.....	39
3.4. LIMITACIONES DE LOS MODELOS PROPUESTOS.....	41

### **CAPITULO IV: DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA:**

#### **FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO**

4.1. FUNCIÓN DE GREEN: COEFICIENTES DE INFLUENCIA .....	43
4.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO .....	48

### **CAPITULO V: MODELO COMPUTACIONAL DE DISEÑO ÓPTIMO**

5.1. ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN .....	56
5.1.1. Método de “Recocido Simulado” (Simulated Annealing) .....	57
5.2. PLANTEO DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO .....	59
5.3. PROCEDIMIENTO PARA LA OBTENCIÓN DEL DISEÑO ÓPTIMO .....	60
5.4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL EN FLEXPDE .....	66
5.4.1. Descripción general del programa FlexPDE .....	66
5.4.2. Aspectos principales de la implementación en FlexPDE.....	68

### **CAPITULO VI: RESULTADOS NUMÉRICOS**

6.1. EJEMPLO 1: SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA HIDRODINÁMICO.....	76
6.1.1. Resultados obtenidos mediante el modelo hidrodinámico .....	76
6.1.2. Resultados obtenidos usando función de corriente .....	77
6.2. EJEMPLO 2: UN PROBLEMA DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL .....	79
6.3. EJEMPLO 3: UN PROBLEMA DE TRANSPORTE BIDIMENSIONAL .....	81
6.4. EJEMPLO 4: COMPARACIÓN ENTRE EL MODELO DIRECTO Y EL MODELO ADJUNTO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE .....	85
6.5. EJEMPLO 5: DISEÑO ÓPTIMO DE TRES PLANTAS DE TRATAMIENTO, CONSIDERANDO DOS ZONAS DE RESGUARDO AMBIENTAL .....	88

6.5.1. Evaluación preliminar de contaminación .....	88
6.5.2. Alternativas de diseño .....	90
6.6. EJEMPLO 6: DISEÑO ÓPTIMO DE CUATRO PLANTAS DE TRATAMIENTO, CONSIDERANDO TRES ZONAS DE RESGUARDO AMBIENTAL .....	95
6.7. EJEMPLO 7: DISEÑO ÓPTIMO DE DOS PLANTAS DE TRATAMIENTO, CONSIDERANDO DOS ZONAS DE RESGUARDO AMBIENTAL (APLICACIÓN EN OTRA GEOMETRÍA).....	97
6.8. EJEMPLO 8: DISEÑO ÓPTIMO PARA LA UBICACIÓN DE PLANTAS DE TRATAMIENTO.....	98
<b><u>CAPITULO VII: CONCLUSIONES</u></b> .....	100
<b><u>REFERENCIAS</u></b> .....	108

## ÍNDICE DE ANEXOS

### **ANEXOS:**

ANEXO I: Aguas Residuales .....	116
ANEXO II: Modelos teóricos .....	124
ANEXO III: Función Delta de Dirac .....	135
ANEXO IV: Teorema de la Divergencia y del Gradiente .....	136
ANEXO V: Método de elementos finitos. FlexPDE.....	137
ANEXO VI: Métodos de optimización .....	148
Descriptores del ejemplo de diseño óptimo .....	150
ANEXO VII: Figura 2.1: Composición porcentual de descargas domiciliarias .....	17

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Metodología para la determinación de un diseño óptimo. ....	7
Figura 1.2: Procedimiento para determinar la distribución de contaminantes .....	15
Figura 2.1: Fases del tratamiento de aguas residuales .....	22
Figura 2.2: Esquema de diseño de plantas de tratamiento.....	24
Figura 2.3: Esquema de capacidad de tratamiento.....	24
Figura 3.1: (a) flujo total, (b) flujo promediado, (c) flujo turbulento .....	30

Figura 3.2: Dimensiones de cuerpos de agua poco profundos.....	31
Figura 3.3: Sistema de Coordenadas y Plano de Referencia.....	33
Figura 3.4: Dominio bidimensional del problema hidrodinámico .....	36
Figura 5.1: Algoritmo de “Recocido Simulado” .....	58
Figura 5.2: Proceso de diseño óptimo. ....	65
Figura 5.3: Esquema básico de un archivo descriptor en FlexPDE .....	67
Figura 5.4: Descriptor del FlexPDE.....	67
Figura 5.5: Ejemplo de secuencia BATCH .....	70
Figura 5.6: Esquema de procedimiento utilizado en FlexPDE .....	71
Figura 6.1: Campo de Velocidades (modelo hidrodinámico en función de ETA ....	77
Figura 6.2: Campo de Velocidades (modelo hidrodinámico en función de PSI) .....	78
Figura 6.3: Comparación de velocidades obtenidas con el modelo hidrodinámico propuesto y el modelo basado en funciones de corriente.....	79
Figura 6.4a: Comparación de las soluciones Numérica y Analítica (Comportamiento Difusivo). ....	81
Figura 6.4b: Comparación de las soluciones Numérica y Analítica (Comportamiento Advectivo .....	81
Figura 6.5: Distribución espacial de concentración del contaminante.....	82
Figura 6.6a: Comparación de las soluciones Numérica y Analítica en Zona 1. Variación de la concentración para diferentes valores de K.....	83
Figura 6.6b: Comparación de las soluciones Numérica y Analítica en Zona 2. Variación de la concentración para diferentes valores de K.....	83
Figura 6.7: Distribución espacial de CF en el Río .....	87
Figura 6.8: Distribución espacial de la función de influencia Gcf.....	87
Figura 6.9a: Velocidades Hidrodinámicas.....	89
Figura 6.9b: Distribución de CF.....	90
Figura 6.9c: Distribución de CF. Vista ampliada de las zonas de descarga.....	90
Figura 6.10: Distribución de CF y localización óptima de las descargas .....	93
Figura 6.11: Distribución de DBO y localización óptima de las descargas.....	94
Figura 6.12: Distribución de OD y localización óptima de las descargas.....	94
Figura 6.13: Distribución espacial de CF.....	96
Figura 6.14: Distribución espacial de CF.....	98
Figura 6.15: Esquema de diseño.....	99
Figura A.I.1: Incidencia de los Indicadores sobre el ecosistema.....	119

Figura A.I.2: Parámetros de vuelco de efluentes urbanos para la Provincia de Buenos Aires. (Resolución 336/03).....	121
Figura A.I.3: Etapas para la selección del método de tratamiento .....	122
Figura A.II.2: Difusión de una sustancia en un flujo turbulento.....	130
Figura A.II.3: Representación del ángulo para el cálculo del coeficiente de dispersión.....	132
Figura A.V.1: Representación del proceso de discretización.....	138
Figura A.V.2: Descriptor del FlexPDE.....	138
Figura A.V.3: Gráfico del mallado para regiones con diferentes propiedades.....	140
Figura A.V.4: Gráfico del campo de velocidades.....	141
Figura A.V.5: Pantalla de escritura del programa FlexPDE. Ejemplo 1. ....	142
Figura A.V.6: Gráfico de variación de la profundidad.....	143
Figura A.V.7: Campo vectorial de velocidades.....	144
Figura A.V.8: Valor de la velocidad en una sección del dominio.....	144
Figura A.V.9: Pantalla de escritura del programa FlexPDE. Ejemplo 2.....	145
Figura A.V.10: Distribución espacial de concentración de un trazador.....	146
Figura A.V.11: Campo vectorial del flujo de masa normalizado.....	147
Figura A.V.12: Acercamiento del campo vectorial en el área de descarga.....	147

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Niveles guía para la calidad de agua .....	19
Tabla 6.1: Comparación de resultados hidrodinámicos .....	78
Tabla 6.2: Comparación de las soluciones numérica y analítica para diferentes valores de $K$ .....	84
Tabla 6.3: Comparación de resultados numéricos de Niveles de CF. ....	88
Tabla 6.4: Comparación de valores de los enfoques calculados, problema (A) .....	92
Tabla 6.5: Comparación de valores de los enfoques calculados, problema (B).....	92
Tabla 6.6: Comparación de valores de los enfoques calculados.....	96
Tabla 6.7: Comparación de valores de los enfoques calculados.....	97
Tabla 6.8: Comparación de valores de los enfoques calculados.....	99
Tabla A.1.1: Contaminantes presentes en aguas residuales .....	116
Tabla A.I.2: Contaminantes presentes en aguas residuales .....	118

Tabla A.I.3: Niveles guía para la calidad de agua.....	121
Tabla A.I.4: Clasificación general de las operaciones y procesos de tratamiento de aguas residuales .....	123
Tabla A.1.5: Detalle general de costos para una planta de tratamiento. Salas Quintero (2007). .....	123

## ÍNDICE DE DESCRIPTORES

Descriptor BATCH .....	150
Descriptor “Parámetros” .....	150
Descriptor “Modelo Hidrodinámico” .....	151
Descriptor “Modelo del Problema Adjunto CF Zona protegida 1” .....	152
Descriptor “Modelo del Problema Adjunto CF Zona protegida 2” .....	153
Descriptor “Modelo del Problema Adjunto DBO Zona protegida 1” .....	154
Descriptor “Modelo del Problema Adjunto DBO Zona protegida 2” .....	155
Descriptor “Modelo del Problema Adjunto OD Zona protegida 1” .....	157
Descriptor “Modelo del Problema Adjunto OD Zona protegida 2” .....	158
Descriptor “Valores Iniciales” .....	158
Descriptor “Calculador de Función Objetivo” .....	159
Descriptor “Comparador de Variables” .....	162
Descriptor “Actualizador de Variables” .....	163
Descriptor “Modelo de Transporte de Sustancias (CF)” .....	164
Descriptor “Modelo de Transporte de Sustancias (DBO y OD)” .....	165

---

## RESUMEN

---

La descarga de efluentes cloacales en cursos de agua es una problemática ambiental que prima en la actualidad. A medida que la población aumenta, sucede lo mismo con los efluentes urbanos, ocasionando un deterioro en el medio acuático al sobreexplotarlo a un ritmo mayor que su propia capacidad de autodepuración natural.

La contaminación provocada por tales efluentes en los cuerpos de agua de destino, alcanza niveles que pueden medirse utilizando diversos indicadores: entre los más importantes pueden mencionarse la concentración de Coliformes fecales (CF), puesto que los efluentes industriales no poseen en general tales bacterias, el oxígeno disuelto (OD) y la materia orgánica, la cual es medida a través de la necesidad de oxígeno para descomponerla, tal indicador es denominado demanda bioquímica de oxígeno (DBO). Si dicha materia orgánica se incrementa más allá de un valor máximo, el oxígeno disuelto no es suficiente para su descomposición lo que da lugar a procesos anaeróbicos que tienen un alto impacto en el ecosistema. Para evitarlo, la demanda bioquímica de oxígeno no debe exceder cierto valor umbral, mientras que el oxígeno disuelto no debe disminuir más allá de cierto valor crítico.

Por esta razón, resulta imprescindible considerar estos indicadores de calidad de agua y establecer las correspondientes concentraciones máximas (o mínimas) admisibles para garantizar un nivel de contaminación tolerable en zonas predeterminadas de resguardo ambiental tales como zonas de pesca, recreación, reservas naturales, toma de agua potable, riego, etc.

A los efectos de no superar las restricciones ambientales en las zonas aludidas, las aguas residuales deben ser purificadas previamente a su vertido mediante la instalación de plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas. Sin embargo la

construcción y operación de estas plantas de tratamiento implica un elevado costo que depende básicamente de las variables de diseño de mayor importancia (capacidad de tratamiento y ubicación de la tubería submarina de descarga), debiéndose adoptar una solución de compromiso técnico, económico y ambiental en su diseño. Se propone un enfoque de diseño óptimo, con el objeto de establecer la localización de las salidas de descargas de los efluentes cloacales, y determinar el nivel de depuración adecuado de tratamiento de los efluentes, que involucre el mínimo costo posible y al mismo tiempo cumpla con las restricciones ambientales.

En el presente trabajo se desarrolla una herramienta computacional para la obtención del diseño óptimo de las variables aludidas, empleando para ello un procedimiento de simulación basado en el método de elementos finitos (MEF) integrado con una técnica de optimización apropiada.

A los efectos de poder establecer el mejor diseño, es necesario en primer lugar calcular una expresión matemática que determine el costo de tratamiento y de construcción en función de las variables de diseño seleccionadas y luego plantear un método adecuado para la estimación de los niveles de concentración de CF, DBO y OD en las zonas protegidas. Tal estimación se logra mediante la solución obtenida con el MEF de las ecuaciones bidimensionales hidrodinámicas para aguas poco profundas y de transporte de sustancias disueltas.

Sin embargo, considerando la cantidad de alternativas posibles que pueden realizarse en el proceso de diseño, se desarrollan fórmulas analíticas para la evaluación de las concentraciones en las zonas protegidas haciendo uso de coeficientes de influencia, obtenidos a partir de unas pocas simulaciones mediante el MEF, del denominado problema adjunto de transporte. Con tales fórmulas analíticas el proceso de diseño óptimo es resuelto convenientemente a través del método conocido como “Recocido Simulado”, en inglés Simulated Annealing (SA), por su analogía con el proceso físico de enfriamiento de metales.

El modelo computacional planteado es implementado en el programa de elementos finitos FlexPDE.

Se analizan algunos ejemplos para determinar las ventajas de la presente metodología.

---

# CAPITULO I:

## INTRODUCCIÓN

---

### **1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA**

Uno de los problemas más grandes que afronta la humanidad en la actualidad es la contaminación del medioambiente, originado en gran parte por el creciente aumento de la población mundial. A su vez las necesidades individuales de crecimiento y de desarrollo económico en ciudades que cuentan con posibilidades de empleo, oferta educacional, infraestructura, esparcimiento, etc. generan una tendencia de concentración demográfica.

El deterioro que vienen sufriendo los recursos naturales en nuestro planeta es un hecho evidente, debido en gran parte a comportamientos basados en la obtención de beneficios a corto plazo, que han agudizado el problema de contaminación del medio ambiente de manera alarmante.

En las grandes ciudades el deterioro ambiental ha llegado a niveles tan altos que ha puesto de manifiesto la necesidad de formular urgentes medidas de control. Entre ellas deben mencionarse fundamentalmente, los marcos legislativos que fijan valores máximos tolerados para diversos tipos de contaminantes y reglamentan las acciones de control que involucran reducciones de tasas de emisiones y eventualmente cambios tecnológicos en el largo plazo. A los efectos de lograr procedimientos de control eficientes, es necesario un conocimiento profundo de los fenómenos físico-químicos asociados al transporte de contaminantes, como así también de los aspectos técnicos y económicos relacionados con distintos tipos de emisiones. Una de las acciones fundamentales para lograr una estrategia de control ambiental es la implementación de un adecuado sistema de monitoreo de los contaminantes más

serios, desde el punto de vista de su grado de nocividad hacia el medio ambiente. A partir de tales mediciones es posible evaluar si los niveles están o no dentro de los límites tolerables. En caso de superarse los mismos, podrán tomarse acciones de control para paliar la situación anómala, tales como reducción de las emisiones causantes de los niveles detectados y eventualmente acciones de remediación del ambiente contaminado. Aun así, esta metodología reactiva de solución de problemas ambientales puede resultar muy ineficiente tanto desde el punto de vista económico como ambiental. En efecto puede implicar reducciones de producción industrial o actividad humana no previstas, con la consecuente pérdida económica, así como medidas de remediación extremadamente costosas en casos en los cuales la contaminación haya alcanzado niveles muy altos, y eventualmente daños muy serios sobre el ecosistema.

Un método más razonable de abordar el problema de contaminación, es hacerlo desde un punto de vista preventivo buscando evitar situaciones críticas que deban ser subsanadas. En tal sentido todo sistema antrópico, que pueda generar contaminación, debe ser sometido a una evaluación de impacto ambiental previa, a los efectos de decidir si las condiciones de funcionamiento son adecuadas o deben ser modificadas.

Un estudio de impacto ambiental (Gómez Orea, 1999), esencialmente consiste en una comparación entre el estado previo de un medio ambiental específico con el que surgirá una vez materializado el emplazamiento en cuestión. Por lo tanto, tal estudio depende fundamentalmente de un modelo de predicción de las condiciones ambientales futuras. Si bien primitivamente, dicha predicción se basaba en experiencia surgida de casos similares y empirismo, el desarrollo de las técnicas computacionales ha permitido que los modelos matemáticos se conviertan en una herramienta cualitativa y cuantitativamente eficiente para tal estudio. Por otra parte, las mejoras en la capacidad predictiva de los modelos, conjuntamente con la concientización sobre la problemática ambiental está promoviendo el surgimiento de un nuevo paradigma, desde el punto de vista de diseño de diferentes sistemas antropogénicos, en los cuales el objetivo del cuidado ambiental es tenido en cuenta conjuntamente con los clásicos objetivos económicos y/o funcionales diversos. Tal aspecto puede ser enmarcado dentro de lo que se conoce como desarrollo sustentable, entendiéndose como tal al proceso integral que implica la satisfacción de las necesidades de las generaciones presentes sin comprometer las posibilidades de las del futuro para atender sus propias necesidades (Informe Brundtland, 1987), fruto de

los trabajos de la Comisión Mundial de Medio Ambiente y Desarrollo de Naciones Unidas, creada en Asamblea de las Naciones Unidas en 1983.

En particular, una situación muy importante de contaminación ambiental en grandes ciudades, corresponde al vertido no controlado de desechos cloacales en cuerpos de agua aledaños tales como un río, lago o estuario.

El nivel de tales contaminantes, en general supera las posibilidades de autodepuración de los sistemas acuáticos, implicando la necesidad de efectuar tratamiento de tales vertidos para minimizar sus efectos nocivos. Sin embargo, la depuración de efluentes cloacales no es perfecta ni tampoco gratuita, por lo que debe llegarse a una ecuación de compromiso técnico-económico-ambiental en su diseño. La polución provocada por tales efluentes, alcanza niveles que pueden medirse mediante diversos indicadores: entre los más importantes pueden mencionarse los Coliformes fecales (CF), la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO) y el Oxígeno Disuelto (OD). Por esta razón, resulta imprescindible considerar tales indicadores de calidad de agua y establecer las correspondientes concentraciones máximas (o mínimas) admisibles para garantizar un nivel de contaminación tolerable.

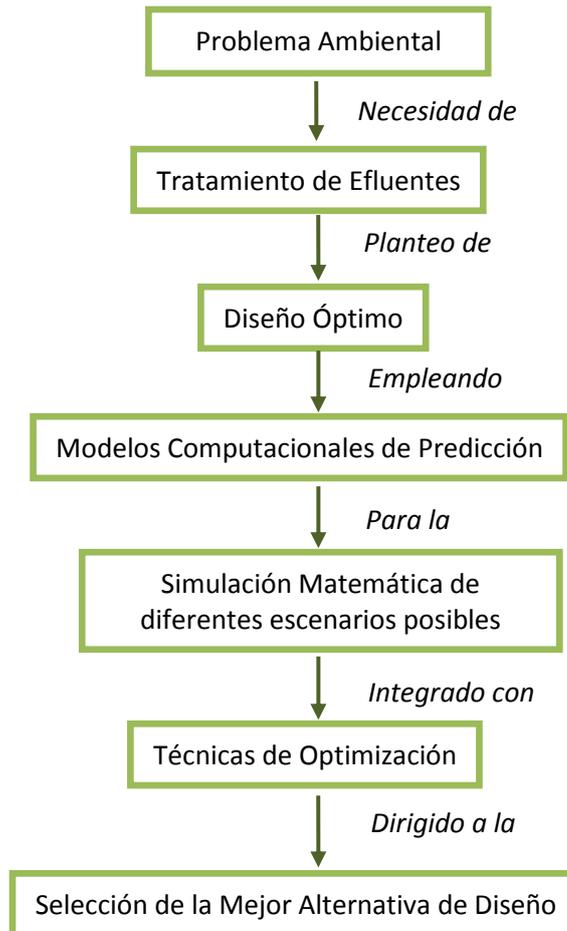
Si bien deseable, en general es imposible o al menos muy costoso resguardar la totalidad del medio hídrico aledaño a un centro urbano. Sin embargo es viable, desde el punto de vista práctico, definir algunas áreas específicas de resguardo ambiental dedicadas a diferentes usos tales como: toma de agua potable en el caso de ríos o lagos, zonas de pesca, zonas de recreación marina, playas, etc.

A los efectos de no superar las restricciones ambientales en las zonas aludidas, las aguas residuales deben ser purificadas previamente a su vertido mediante la instalación de plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas. Sin embargo la construcción y operación de estas plantas de tratamiento implica un elevado costo que depende básicamente de las variables de diseño de mayor importancia debiéndose adoptar una solución de compromiso técnico, económico y ambiental en su diseño (Murty Yandamuri, Srinivasan y Murty Bhallamudi, 2006; Yu y Salvador, 2005). Entre las variables mencionadas puede considerarse la capacidad de tratamiento, entendiéndose como el caudal máximo de agua residual que puede depurar la planta de tratamiento, y a la longitud de la tubería submarina de descarga, la cual depende de las coordenadas preestablecidas de salida de las descargas de los efluentes.

De esta forma el problema de diseño puede ser planteado de la siguiente manera: se desea establecer la localización de la salida de las tuberías de los efluentes cloacales tratados en plantas de depuración, así como el grado de tratamiento necesario para garantizar un nivel de contaminación tolerable en las zonas previamente aludidas considerando además aspectos económicos. Tal problema puede ser resuelto mediante el establecimiento de objetivos y restricciones, tanto del punto de vista ambiental como económico, que deben ser cumplidos de la manera más eficiente. Esto lleva al concepto de diseño óptimo.

El *diseño óptimo* es una técnica que plantea determinar el valor de una serie de variables, llamadas *variables de diseño*, de manera tal que minimicen o maximicen una función, llamada *función objetivo*, y que a su vez cumpla con una serie de *restricciones* impuestas.

La definición adecuada de tales objetivos, responde a un juicio de valor sobre la importancia relativa de los aspectos económicos y ambientales puestos en juego. En particular se podría definir el objetivo de minimizar los costos, aunque debiendo respetar restricciones ambientales mínimas. En el otro extremo se podría formular el problema como la minimización de los efectos nocivos hacia el medio ambiente, manteniendo el costo dentro de las posibilidades presupuestarias. En todo caso, una vez establecidos tales objetivos, es posible diseñar un procedimiento matemático que permita tomar las decisiones adecuadas en forma automática, cumpliendo tales objetivos y restricciones. En forma simplificada, tal procedimiento consiste en la simulación matemática de diferentes escenarios posibles futuros, seguido por un proceso de selección de aquel que resulte más conveniente respecto de los objetivos propuestos. Desde un punto de vista más técnico, tal procedimiento de diseño óptimo involucra la integración de conceptos de modelación matemática, simulación computacional y teoría de optimización. Tal metodología, resumida en la Figura 1.1, constituye la manera más racional de responder a las cuestiones de diseño que se han planteado, proveyendo un adecuado marco para la comprensión del costo y beneficio resultante de la decisión técnica a adoptar.



**Figura 1.1:** Metodología para la determinación de un diseño óptimo.

## 1.2. ANTECEDENTES:

### - *Modelos Matemáticos:*

Se han realizado importantes avances en relación al uso de modelos matemáticos aplicados a problemas ambientales. Tales modelos se han convertido en herramientas valiosas para la predicción de condiciones ambientales futuras, proporcionando una mejor comprensión de los procesos que forman parte del ambiente que nos rodea. Este criterio ha sido compartido por diversos autores (Menéndez, 1995; Wainwright y Mulligan, 2004).

Particularmente, la modelización matemática de la circulación de agua en estuarios, lagos o ríos involucra como caso general las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes para flujos incompresibles junto a la ecuación de continuidad, desde un punto de vista promediado según Reynolds. Se trata de un sistema que tiene como incógnitas los campos de presión y velocidad en el cuerpo de agua considerado. Su tratamiento analítico es inabordable, motivo por el cual se han

investigado y desarrollado una gran cantidad de esquemas numéricos y computacionales para su resolución. En líneas generales, se pueden citar los métodos basados en diferencias finitas y elementos finitos, siendo estos últimos de mayor generalidad a los efectos de tratar con dominios de geometría compleja. La investigación primitiva sobre tales aspectos se puede encontrar en diversos textos especializados tales como el de (Zienkiewicz, 1980; Reddy, 1993; Rubin, 2001). Sin embargo, el desarrollo de nuevos enfoques y mejoras de tales metodologías numéricas siguen siendo aún, un campo activo de investigación. De la misma manera, el problema de transporte de contaminantes puede ser resuelto mediante los métodos mencionados habiéndose investigado formulaciones específicas para superar problemas de inestabilidad numérica inherentes a su estructura matemática. Al respecto es importante mencionar, que el método de elementos finitos ha sido la base de numerosos programas multipropósito que, en particular, permiten resolver algunos problemas asociados con este tipo de ecuaciones.

Si bien es posible, en principio con los programas de elementos finitos disponibles en el mercado, abordar la simulación de diferentes situaciones hidrodinámicas acopladas con transporte de contaminantes desde un enfoque tridimensional, el tiempo computacional requerido suele ser alto, especialmente en un contexto de diseño (ya que en estos casos las simulaciones deben ser repetidas una gran cantidad de veces), y además pueden resultar complejas, al requerir el conocimiento detallado de una gran cantidad de parámetros y variables.

- *Modelos simplificados para el estudio de hidrodinámica ambiental*

Por tal razón en la aplicación de modelos numéricos a problemas ambientales, se ha procurado frecuentemente aliviar la carga computacional, utilizando algunas versiones simplificadas de las ecuaciones mencionadas en contextos aptos para dichos enfoques. En el caso de ríos, cuando la dimensión longitudinal del dominio bajo estudio es mucho mayor que las dimensiones correspondientes a la sección transversal, las ecuaciones mencionadas anteriormente son sustituidas por un sistema espacialmente unidimensional de tres ecuaciones diferenciales, dos de las cuales permiten obtener las variaciones de profundidad y las variaciones de velocidad en el río, conocidas como ecuaciones de Saint Venant, y la última que permite obtener la distribución longitudinal y temporal de la concentración de un contaminante dado, denominada ecuación de advección-dispersión. Para resolver tales ecuaciones se han

propuesto diversos esquemas numéricos (Strelkoff, 1969; Chertok, 1996; Bellos, 2003; Hashemi, 2008; Strub, 2009).

Por otra parte, cuando se tiene que tratar con problemas donde la geometría es tal que una de las dimensiones (profundidad) es mucho menor que las dimensiones horizontales, las ecuaciones gobernantes pueden ser simplificadas efectuando una integración a lo largo de la vertical, llegando a lo que se conoce como aproximación de aguas poco profundas que involucra dos dimensiones espaciales. Diversos enfoques numéricos se han desarrollado para tratar con tales ecuaciones, en particular aquellas basadas en métodos de elementos finitos (Katopodes, 1987; Heniche, 2000; Ji, 2007).

- *Aplicación de métodos numéricos en problemas ambientales*

Una de las tendencias en la investigación sobre métodos numéricos aplicados a problemas ambientales se dirige hacia la modelización de situaciones reales. De esta manera, puede citarse el trabajo desarrollado por Revilla et al. (1994), quienes estudiaron el déficit de oxígeno originado por descargas procedentes de redes de saneamiento en la Bahía de Pasajes (Guipúzcoa, España) utilizando modelos bidimensionales. Engelhardt et al. (1995), analizaron problemas de polución provocados por el transporte de sedimentos en el Río Elba (Alemania) empleando un modelo bidimensional. Campolo et al. (2002), estudiaron la contaminación en el Río Arno utilizando una ecuación de dispersión-advección no estacionaria unidimensional. Cardini et al. (2004), analizaron el impacto de vertidos cloacales de Paysandú (Uruguay) sobre las playas de Concepción del Uruguay (Argentina). En particular han estudiado el efecto de los coeficientes de dispersión sobre la modelización bidimensional. Tsanis y Saied (2007), simularon, mediante un modelo 2D promediado en la vertical, la circulación inducida por viento en el Lago Ontario (Canadá) a los efectos de estudiar la variación de la concentración de contaminantes debido a descargas puntuales. Zabalett et al. (2011), evaluaron la incidencia de las descargas de líquidos cloacales crudos de las ciudades de Concordia y Salto en la zona de Colón en el Río Uruguay, con un modelo de calidad de agua unidimensional.

- *Desarrollo de programas computacionales para el análisis de problemas ambientales.*

Otra línea de investigación se ha enfocado en el desarrollo de programas computacional orientados al estudio de problemas ambientales. En tal sentido Yu y Salvador (2005), crearon un software en un ambiente amigable para Windows, para el estudio de calidad de agua en ríos desde el punto de vista unidimensional, denominado Aguario 2.0. Chapra et al. (2006), desarrollaron un ambiente computacional para la simulación de calidad de agua en ríos, desde el punto de vista unidimensional, denominado Qual2K, que a su vez es una mejora del programa Qual2E desarrollado por la USEPA (Brown y Barnwell, 1987). Un Software muy conocido para el análisis unidimensional hidrodinámico y de transporte en ríos fue desarrollado por el Cuerpo de la Armada de Estados Unidos, denominado HEC-RAS (HEC-RAS 2008). Por su parte, Colonna Rosman (2011) ha desarrollado recientemente un programa para el análisis 2D y 3D de problemas de hidrodinámica ambiental denominado SisBaHiA.

Estos modelos, u otros similares, pueden ser aplicados al estudio de innumerables problemas de diseño hidrodinámico ambiental tales como, seleccionar la alternativa más adecuada entre algunas posibilidades para emplazar una planta de tratamiento de efluentes sobre las márgenes de un río (Yu y Salvador, 2005), o analizar la estrategia de control de emisión de oxígeno disuelto para el mantenimiento de calidad de ríos (Campolo et al., 2002), etc.

- *Diseño óptimo de la localización y depuración de plantas de tratamiento de efluentes urbanos*

Sin embargo se ha prestado menor atención a la investigación sobre el desarrollo de enfoques de optimización para el diseño de la localización y depuración de plantas de tratamiento de efluentes urbanos. En tal sentido Thomann y Mueller (1987) presentan el problema de la modelización y control de contaminantes considerando la influencia de las mareas en estuarios angostos. Mays y Tung (1992) presentan una revisión del estado del arte relacionado a la optimización de la localización y descarga de las salidas de efluentes en ríos. Más recientemente Kerachian y Karamouz (2005) formulan un problema de reducción óptima de tasas de descarga de efluentes en un río, empleando un modelo de simulación de calidad de agua no estacionario en combinación con la técnica de algoritmos genéticos. Incluyen

evaluación de costos así como requisitos de calidad de aguas. Murty Yandamuri et al. (2006) plantean un problema de diseño óptimo multiobjetivo para la reducción en las tasas de descargas en ríos considerando el costo total de tratamiento y requisitos ambientales con respecto al oxígeno disuelto. Utilizan un modelo de transporte unidimensional. Louaked y Saidi (2009), presentan un enfoque para analizar las ecuaciones de aguas poco profundas, en combinación con el problema de difusión–advección, relacionado con el control óptimo de la calidad de aguas en ríos.

Así mismo Mostafavi y Afshar (2010), analizan el diseño para minimizar el costo total de tratamiento de efluentes considerando también restricciones ambientales. Para ello utilizan el programa QUAL2K acoplado a un método de optimización denominado “colonia de hormigas”. Otros problemas similares de diseño óptimo han sido desarrollado, tales como el de Souza et al. (2002) centrado en la configuración de costo mínimo de un sistema de tuberías vinculando a una red de plantas de tratamiento, de manera tal de que las descargas de las mismas a cuerpos de agua receptoras no sobrepasen valores admisibles.

Los trabajos mencionados acerca de diseño óptimo de descargas en ríos son modelados desde el punto de vista unidimensional. Tal punto de vista no resulta adecuado para el análisis de transporte de contaminantes en tramos cortos de ríos o lagos, debiéndose en este caso adoptar un enfoque bidimensional que permita considerar factores específicos, tales como proximidad a la costa, existencia de islas, canales de navegación, etc. Desde este punto de vista, el problema del diseño óptimo de la localización y depuración de plantas de tratamiento cloacal, fue estudiado por Katopodes y Piasecki (1996, 1997) utilizando un modelo de elementos finitos de Petrov-Galerkin. A los efectos de minimizar la cantidad de simulaciones necesarias para establecer las localizaciones óptimas, emplearon la técnica conocida como ecuación adjunta del problema de transporte. Por otra parte, combinaron tal enfoque de simulación con métodos de optimización basados en gradiente. La estrategia está basada en la minimización del impacto ambiental aunque no han considerado en forma explícita los costos de tratamiento desde el punto de vista económico.

Un problema similar, mediante enfoques bidimensionales, fue abordado por Álvarez Vázquez et al. (2005) considerando dos tipos de problemas: la determinación de las descargas óptimas con de manera tal de asegurar requisitos ambientales minimizando costos de operación y por el otro localización óptima de

tuberías de descarga con el propósito de minimizar su longitud. El modelo matemático que desarrollaron para el control óptimo de las descargas de aguas residuales, se basó en la simulación del problema hidrodinámico, como el de transporte de contaminantes a partir del método de elementos finitos, mientras que el problema de optimización fue resuelto utilizando la técnica de Nelder-Mead. A manera de ejemplo, aplicaron tal metodología a problemas de calidad de agua en la ría de la Coruña y de Vigo, en España. Asimismo, también estudiaron problemas de remediación de aguas poco profundas contaminadas y diseño óptimo de estructuras hidráulicas para el traslado de peces en ríos, (2006, 2007).

Recientemente, Deng et al. (2010) formularon un problema de diseño para determinar las máximas descargas posibles en diferentes fuentes puntuales evitando violar requisitos ambientales en un estuario. Han aplicado tal enfoque al estuario de Changjiang en China. Estudios similares, utilizando modelos bidimensionales, aunque orientados a problemas de contaminación atmosféricas fueron desarrollados por Skiba et al. (2000) y Parra-Guevara et al. (2000) quienes se basaron a su vez en formulaciones adjuntas del problema de transporte, desarrolladas por Marchuk (1986).

- *Costos asociados a las plantas de tratamiento de efluentes urbanos.*

Otro aspecto de gran importancia en el diseño óptimo de sistemas de tratamiento de efluentes que descargan en ríos, se da cuando se consideran en forma explícita los aspectos de costo económico. Es conveniente, entonces, la utilización de fórmulas matemáticas que relacionen tales costos con las variables de diseño. En tal sentido Hernandez-Sancho et al. (2010) desarrollaron una función de costo total anual que depende de diferentes tecnologías de tratamientos disponibles y de la eficiencia de remoción para determinados contaminantes. Para la determinación de la misma los autores emplearon un análisis de regresión por mínimos cuadrados a los efectos de ajustar la función calculada, obtenida empíricamente, con el costo real de un número de plantas de tratamiento. Friedler y Pisanty (2006) desarrollaron una formulación para la determinación anual de los costos basada en la capacidad de depuración y la tecnología a emplear, donde los costos de mantenimiento y mano de obra representan un porcentaje de los costos totales anuales de inversión.

Asimismo, una estimación de los costos de construcción de emisarios submarinos es presentada por Salas (2000), donde plantea una formulación que relaciona el diámetro del emisario y el tipo de material empleado con la longitud de construcción.

- *Motivación del presente trabajo*

El presente trabajo de tesis se basa parcialmente en los artículos de Katopodes et al. (1996), Álvarez Vázquez et al. (2005) y Skiba et al. (2000). En efecto, se analiza, desde un enfoque bidimensional, el diseño de plantas de tratamiento de efluentes que se descargan para tramos cortos de ríos.

Sin embargo el problema que se considera aquí es diferente de los mencionados en los siguientes aspectos:

- Se pretende incluir aspectos económicos en forma explícita en la estrategia de diseño óptimo.
- Se busca diseñar en forma simultánea tanto de las capacidades de tratamiento como de la localización de las descargas de efluentes.
- Se propone la utilización de una metodología de optimización diferente, adecuada a este tipo de problema.
- Todos los aspectos que componen tal estrategia (Simulación y Optimización) son implementados en un mismo programa computacional comercial que trabaja bajo el método de elementos finitos.
- Como limitación, el presente análisis se restringe al estudio de problemas estacionarios.

### **1.3. OBJETIVOS DE LA PRESENTE TESIS:**

**Objetivo general:**

Desarrollo de un modelo computacional para la localización óptima de las coordenadas de las salidas de tuberías de descarga y del grado de tratamiento de  $N$  plantas de tratamiento de efluentes urbanos, a los efectos de minimizar el costo total de construcción y operación de las mismas, procurando que las concentraciones de los indicadores ambientales adecuados (CF, DBO y OD) se encuentren dentro de los valores admisibles en ciertas zonas preseleccionadas dentro del cuerpo de agua.

### **Objetivos particulares:**

- **Objetivo N°1:** Desarrollo de un modelo computacional hidrodinámico bidimensional basado en la teoría de aguas poco profundas, acoplado con ecuaciones bidimensionales de transporte de contaminantes del tipo difusión-advención. Implementación de tal modelo en un programa flexible y amigable de elementos finitos denominado FlexPDE (PDE Solution Inc, 2005).
- **Objetivo N°2:** Desarrollo de una estrategia de diseño óptimo basado en el uso de una formulación adjunta del problema de transporte, combinado con un método de optimización denominado “recocido simulado”.
- **Objetivo N°3:** Implementación computacional del procedimiento de diseño óptimo en el programa de elementos finitos FlexPDE.
- **Objetivo N°4:** Dilucidar el grado de eficiencia de las soluciones óptimas frente a las soluciones alternativas clásicas. Análisis reflexivo sobre las ventajas y posibilidades reales de aplicación del diseño ambiental óptimo en sistemas antrópicos.

### **1.4. METODOLOGÍA Y ESTRUCTURA DE LA TESIS:**

En el *Capítulo 2* se realiza una presentación de los aspectos básicos sobre la caracterización de las aguas residuales, los impactos que produce en el medio receptor, los parámetros de medición de calidad de agua. Se especifican las restricciones ambientales del problema. Luego se describe el esquema de diseño propuesto y se definen las variables de diseño. A partir de tales aspectos se detalla en forma explícita la función de costo total ( $CT$ ) asociado a las  $N$  plantas de tratamiento.

Finalmente se formula el problema de diseño óptimo de la localización óptima de las coordenadas de las salidas de tuberías de descarga y del grado de tratamiento de cada una de las  $N$  plantas de tratamiento de efluentes urbanos.

En el *Capítulo 3* se presentan las ecuaciones que describen la hidrodinámica ambiental. Es decir se presentan las ecuaciones hidrodinámicas acopladas con un modelo de transporte de sustancias disueltas. Se consideran situaciones estacionarias.

En efecto, para abordar el problema de diseño es necesario en primer lugar, conocer los niveles de concentración en diferentes zonas, especialmente en las áreas

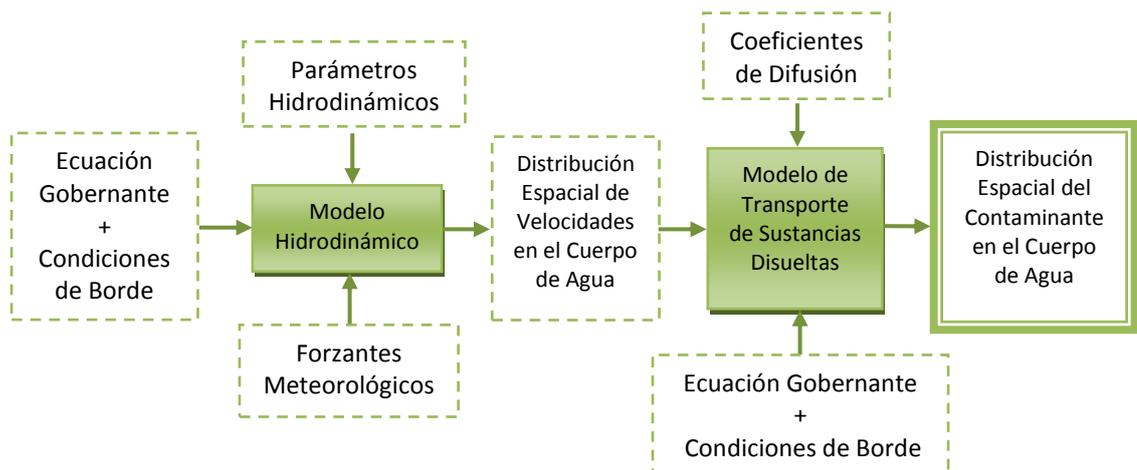
de resguardo ambiental. Para ello se debe obtener el régimen de velocidades del cuerpo de agua, al ser este uno de los principales mecanismos de transporte de las sustancias disueltas (contaminantes).

En muchos sistemas acuáticos, la profundidad es mucho menor que las dimensiones horizontales, por lo tanto tales ecuaciones gobernantes pueden ser simplificadas efectuando una integración a lo largo de la vertical. En este trabajo se adopta tal enfoque, conocido como Teoría Hidrodinámica de Aguas Poco Profundas, que se expresa mediante tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que corresponden a la conservación de la masa y del momentum, junto con sus correspondientes condiciones de borde.

Una vez conocido el régimen de corrientes, es posible conocer la concentración del contaminante en determinadas zonas resolviendo las ecuaciones bidimensionales (integradas en la vertical) de transporte de sustancias disueltas (advección-difusión) junto con sus correspondientes condiciones de borde, donde las velocidades del flujo entran como coeficientes (variables) de tales ecuaciones. Se especializan tales ecuaciones para describir el transporte de los Coliformes fecales (CF), la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO) y del Oxígeno Disuelto (OD).

Debido a la complejidad que presentan las ecuaciones hidrodinámicas como de transporte, las mismas, deben ser resueltas en forma numérica.

El procedimiento explicado hasta el momento se resume en la Figura 1.2.



**Figura 1.2:** Procedimiento para determinar la distribución de contaminantes.

Luego, mediante la simulación de distintos escenarios, correspondiendo a ciertas localizaciones de las salidas de las tuberías de descarga y el grado de depuración

supuestos, es posible evaluar el nivel de contaminación en las áreas protegidas así como comparar los costos de construcción y operación asociados a las plantas de depuración.

Sin embargo tal procedimiento de prueba y error puede ser muy costoso desde el punto de vista computacional ya que requiere calcular una gran cantidad de situaciones.

Una forma de acelerar los tiempos de cálculo que demanda tal operación se consigue haciendo uso de dos estrategias. La primera consiste en el empleo de fórmulas analíticas para evaluar la concentración de los indicadores pertinentes en las zonas protegidas, mediante el uso de coeficientes de influencia. Estos coeficientes son obtenidos convenientemente a partir del problema adjunto del modelo de transporte. Tal enfoque analítico, desarrollado en el *Capítulo 4*, tiene una enorme ventaja debido a que resulta necesario resolver numéricamente las ecuaciones adjuntas de transporte tan solo una por cada zona de resguardo ambiental determinada, reduciendo así los tiempos de cálculo computacional. La segunda estrategia consiste en emplear una técnica de optimización apropiada. En particular se utiliza el método conocido como “Recocido Simulado”, de forma tal de automatizar la búsqueda de las alternativas posibles, mediante un proceso que converja al diseño óptimo.

Entonces el modelo propuesto consiste en la combinación de un modelo de simulación, el uso fórmulas analíticas apropiadas y una técnica de optimización. El modelo computacional planteado es implementado en el programa de elementos finitos FlexPDE. Para entender estos conceptos, en el *Capítulo 5* se introducen aspectos básicos del método de recocido simulado. Seguidamente se explica el desarrollo del modelo computacional propuesto. Finalmente se presentan aspectos de su implementación computacional en el programa de elementos finitos FlexPDE.

Se estudian algunos ejemplos a fin de ilustrar las ventajas de la presente metodología. En el *Capítulo 6* se muestran tales resultados numéricos obtenidos en el programa FlexPDE, Los ejemplos se orientan a ilustrar sobre precisión y eficiencia del programa. Asimismo, se realizan ejemplos de aplicación del enfoque de diseño propuesto y se comparan sus resultados con otros criterios de diseño posibles.

Finalmente en el *Capítulo 7* se plantean las conclusiones en el presente trabajo de tesis.

---

## CAPITULO II:

# FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

---

### **2.1. CONTAMINACIÓN DE CUERPOS DE AGUA POR VERTIDOS URBANOS: INDICADORES DE CALIDAD DE AGUA**

#### **2.1.1. Caracterización de Aguas Residuales**

Básicamente las aguas residuales provienen de usos industriales y domésticos. Los efluentes industriales, presentan una composición muy variable que depende del uso industrial al que son destinadas las aguas. Los efluentes urbanos están constituidos por un 99% de agua y el resto por sólidos en suspensión, coloidales y disueltos, orgánicos e inorgánicos. La parte orgánica es una mezcla de residuos alimenticios, heces, material vegetal, sales minerales y materiales diversos como jabones y detergentes. Está formada mayormente por proteínas y carbohidratos, y en menor porcentaje por lípidos. En promedio, cada persona puede generar 1.8 litros de materia fecal diariamente, compuesta por 113,5 gramos de sólidos secos, 90 gramos de materia orgánica, 20 gramos de nitrógeno, más otros nutrientes como fósforo y potasio (Mara y Cairncross, 1990). La parte inorgánica está compuesta por residuos minerales pesados, sales y metales.

Los desperdicios generados por el uso del agua doméstica son volcados y transportados a través del sistema de red cloacal junto con aquellas aguas superficiales o subterráneas que puedan penetrar en la colectora. Por tal motivo, y considerando que la carga orgánica que poseen tales efluentes fomenta el surgimiento de bacterias, tales efluentes deben ser tratados antes de su vuelco a un cuerpo receptor a los efectos de resguardar las aguas como el ambiente aledaño. La

carga contaminante que generalmente presentan estas descargas comúnmente supera las posibilidades de autodepuración del medio, sobreexplotándolo a un ritmo mayor que su propia capacidad de recuperación natural. Esta situación se conoce como *impacto humano no sustentable*. En el Anexo I se resumen los contaminantes que comúnmente se encuentran en las aguas residuales y los impactos que generan sobre el medio receptor.

### **2.1.2. Parámetros de Calidad del Agua**

A los efectos de determinar la calidad del agua se realizan mediciones de distintos parámetros físico-químicos y biológicos, donde se evalúa el color, sabor, olor, turbidez, PH, temperatura, sólidos disueltos, en suspensión y sedimentables, entre otros. De esta manera, es posible determinar la variación en los valores de determinados parámetros, debido a las descarga de efluentes cloacales, mediante el uso de indicadores ambientales.

Según sea la naturaleza de las sustancias contaminantes y de los usos asignados al agua receptora (consumo humano, pesca, esparcimiento, etc.) es que se determina el indicador ambiental adecuado.

Entre los indicadores más importantes se encuentran los Coliformes fecales (CF), la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO) y el Oxígeno Disuelto (OD).

Como los organismos patógenos que pueden existir en el agua residual son pocos y difíciles de aislar, es que se prefiere utilizar a los coliformes como organismo indicador de contaminación. Los coliformes son grupos de especies de bacterias que poseen características bioquímicas en común. El hombre arroja diariamente entre  $10^9$  a  $4 \times 10^{11}$  coliformes en sus excrementos, por lo tanto su presencia puede ser detectada fácilmente y utilizada como guías de contaminación fecal (o indicador de existencia de organismos productores de enfermedad) para el control de calidad del agua. Su ausencia indica que el agua es bacteriológicamente segura. El grupo de coliformes totales incluye los géneros *Escherichia* y *Aerobacter*. En general se considera el género *Escherichia*, especie *E. Coli*, como la población de bacterias coliformes más representativa de contaminación fecal. El género *Aerobacter* y algunas *Escherichia* pueden crecer en el suelo lo cual implica que la presencia de coliformes no necesariamente representa la existencia de contaminación fecal humana (Romero Rojas, 1999). Los coliformes fecales se miden en NMP/100ml. Estas unidades corresponden a un método de estimación de densidades poblacionales

de bacterias, denominado Número Más Probable (NMP). Es una estrategia eficiente de estimación, especialmente cuando una evaluación cuantitativa de células individuales no es factible.

La DBO es una medida de oxígeno que usan los microorganismos en un volumen unitario de agua para descomponer la materia orgánica durante un período de tiempo y se mide en masa/volumen [ $\text{Kg/m}^3$ ]. Si hay una gran cantidad de desechos orgánicos, implica que habrá una cantidad importante de bacterias presentes trabajando para descomponer el desecho presente en el agua. En este caso, la demanda de oxígeno será alta, así que el nivel del DBO será alto. Conforme el desecho es consumido o dispersado en el agua, los niveles de la DBO empezarán a bajar.

Finalmente el OD es la cantidad de oxígeno que está disuelto en el agua [ $\text{Kg/m}^3$ ] y que es esencial para los ríos y lagos saludables. El nivel de oxígeno disuelto puede ser un indicador de qué tanto está contaminada el agua y cuánto soporte de vida vegetal y animal puede existir. Generalmente, un nivel más alto de oxígeno disuelto indica agua de mejor calidad. Si los niveles de oxígeno disuelto son demasiado bajos, algunos peces y otros organismos no pueden sobrevivir.

De acuerdo a lo mencionado, en este trabajo se utilizarán como indicadores apropiados los valores de concentración de Coniformes fecales (CF), demanda bioquímica de oxígeno (DBO) y oxígeno disuelto (OD). Los primeros dos deben ser menores que límites admisibles prefijados, mientras que el último no debe ser menor que un límite inferior establecido.

En la Tabla 2.1 se presentan, a manera de ejemplo, los niveles guía de tales indicadores establecidos por la Comisión Administradora del Río Uruguay (CARU) conformada por Uruguay y Argentina para los distintos usos:

Uso I : Agua para consumo humano con tratamiento convencional.

Uso II : Agua para actividades recreativas con contacto directo.

Uso III : Agua para actividades agropecuarias.

Uso IV: Protección de vida acuática.

ELEMENTOS	Oxígeno Disuelto (mg/l)	DBO5 (mg/l)	Coliformes totales (NMP/100 ml)	Coliformes fecales (NMP/100ml)
USOS				
I	>5	3	5000	1000
II	>5	3	-	200
III	>4	3	1000	-
IV	>5	3	-	-

**Tabla 2.1:** Niveles guía para la calidad de agua.

Los niveles de calidad de agua suelen actualizarse, debido a que las normas que lo reglamentan pueden cambiar con el tiempo en función de la evolución de los criterios de calidad. Un estudio interesante sobre la compatibilización de los distintos valores límites de vuelco, establecidos en literatura científica y en regulaciones de varios países para diferentes usos, puede encontrarse en el trabajo realizado por Menéndez et al. (2011).

Para definir el estado ambiental admisible en el cuerpo receptor deben especificarse zonas de resguardo ambiental tales como playas, tomas de agua, zonas de protección ecológica, etc. Tales regiones pueden ser identificadas por las coordenadas de puntos de control de las mismas en los cuales se realizan los muestreos de agua para establecer los valores de concentración de los indicadores de calidad.

Entonces, las restricciones ambientales pueden ser establecidas de la siguiente manera:

$$C_{i_{CF}} \leq C_{adm_{CF}} \quad , \quad C_{i_{DBO}} \leq C_{adm_{DBO}} \quad , \quad C_{i_{OD}} \geq C_{adm_{OD}} \quad i = 1, 2, \dots, NP$$

donde  $C_{i_{CF}}$ ,  $C_{i_{DBO}}$  y  $C_{i_{OD}}$  son las concentraciones de CF, DBO y OD en la zona protegida  $i$ -ésima definida por las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de sus puntos característicos ,  $NP$  es el número de zonas protegidas, mientras que  $C_{adm_{CF}}$ ,  $C_{adm_{DBO}}$  y  $C_{adm_{OD}}$  corresponden a los niveles admisibles permitidos de tales indicadores.

## 2.2. SISTEMAS DE TRATAMIENTO DE LOS EFLUENTES URBANOS: ESQUEMA DE DISEÑO.

### 2.2.1. Generalidades

Generalmente las aguas residuales poseen valores que afectan el funcionamiento natural de los ecosistemas y generan problemas de salubridad para el hombre, siendo necesaria la depuración de los efluentes antes de ser vertidos en el cauce receptor a los efectos de eliminar los contaminantes físicos, químicos y biológicos presentes.

Para el acondicionamiento de los efluentes urbanos deben considerarse diferentes etapas, detalladas en la Figura 2.1, e incluyen:

1. **Pretratamiento:** En toda planta depuradora se realiza un pretratamiento, donde se mide y regula el caudal de agua que ingresa a la planta y se efectúa

una remoción física de objetos grandes por medio de rejillas, tamices, trituradores y/o desarenadores, a los efectos de separar aquellos componentes que puedan causar dificultades de operación y mantenimiento en los procesos posteriores. En algunos casos, según sean las características del afluente, se realiza la separación de grasas mediante desengrasadores.

2. **Tratamiento primario:** Se eliminan sólidos en suspensión, materia orgánica u organismos patógenos mediante sedimentación por gravedad de las partículas sólidas y contaminantes adheridos. De esta forma se prepara el agua para el tratamiento secundario, donde por medio de unidades llamadas sedimentadores primarios se trata de imitar los procesos de la naturaleza poniéndolos bajo control y acelerándolos por medio de instalaciones.
3. **Tratamiento secundario:** Se elimina la materia orgánica mediante procesos de oxidación, seguido de sedimentación por medio de digestión biológica usando lodos activados, filtros percoladores, sistemas de lagunas que fomentan el crecimiento de microorganismos.
4. **Tratamiento terciario:** Este tratamiento es utilizado cuando se requiere un nivel más alto de eliminación de contaminantes, removiendo nutrientes para prevenir la eutrofización de los cuerpos receptores o de mejorar la calidad del efluente secundario con el fin de adecuar el agua para su reutilización.

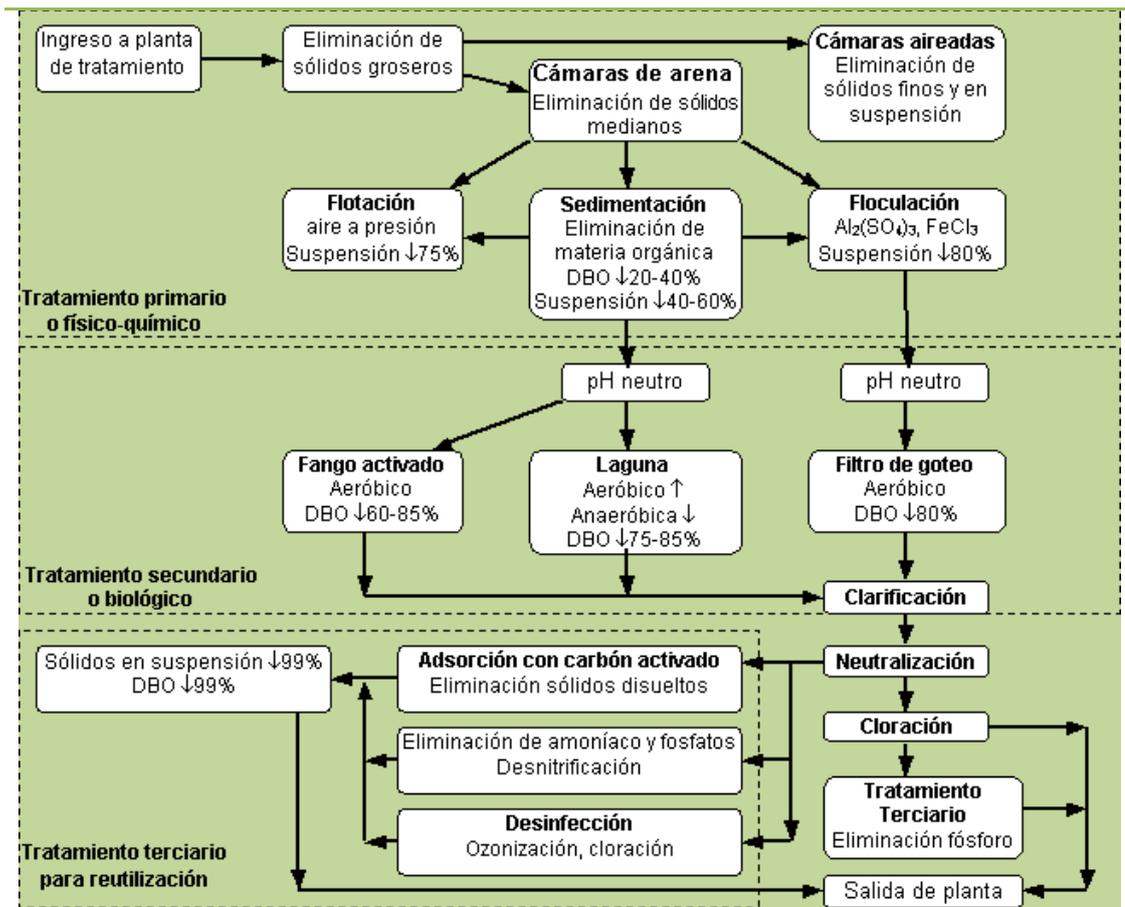


Figura 2.1: Fases del tratamiento de aguas residuales.

### 2.2.2. Esquema de Plantas de Tratamiento: Variables de Diseño

Para tratar los efluentes producidos por una ciudad es posible plantear varias alternativas de diseño de plantas de tratamiento. Se puede prever la recolección total del agua residual de determinada ciudad y tratarla en una sola gran planta, o utilizar varias plantas ubicadas estratégicamente como se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 2.2. Esta última es la alternativa supuesta en el presente trabajo. Particularmente el problema planteado corresponde al caso en el cual el diseño de las plantas depende de la misma organización.

Específicamente se considera que cada planta de tratamiento puede depurar parcialmente el caudal volumétrico total que llega a cada una de ellas (proveniente de diferentes ciudades, o sectores de una ciudad). En particular se supone que existe un límite máximo con respecto al caudal volumétrico de aguas servidas a tratar cuyo valor depende de las características de cada planta. Tal límite define lo que se conoce como capacidad de tratamiento de la planta  $QT$  y se mide en metros cúbicos por día [ $m^3/día$ ]. Las aguas tratadas se consideran purificadas, es decir con contaminación

residual despreciable. Sin embargo, el caudal de aguas servidas en exceso a la capacidad de tratamiento se deriva sin ser tratada.

Tal esquema ese diseño adoptado se puede observar en el esquema de la Figura 2.3.

Si se denomina  $Q_j$  al caudal máximo de aguas servidas que llega a la planta  $j$ -ésima, y  $QT_j$  su capacidad, el caudal que se descarga sin tratar al curso de agua se expresa como  $Q_j - QT_j$ . También es posible expresar la capacidad de tratamiento ( $QT_j$ ) de cada planta como:

$$QT_j = Q_j (1 - \beta_j) \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.9)$$

donde  $Q_j$  corresponde al caudal volumétrico máximo de aguas residuales que arriba a cada planta y  $(1 - \beta_j)$  indica el grado de purificación de la planta, siendo  $\beta_j$  el factor de reducción en las tasas de vertido y varía entre 0 (reducción máxima) y 1 (reducción mínima). Consecuentemente, las descargas volumétricas residuales (sin purificar) vendrán dadas por  $\beta_j Q_j$ .

En el caso ideal los coeficientes de reducción deben ser nulos para que no produzcan polución en el cuerpo receptor. Sin embargo por cuestiones tecnológicas o económicas esto puede no ser posible en cuyo caso debe estudiarse adecuadamente el lugar donde realizar las descargas. En efecto puede resultar conveniente alejar de la costa la localización de la descarga mediante una tubería submarina. Sin embargo, las concentraciones de los indicadores ambientales en las zonas protegidas dependerán de tales localizaciones por lo que tiene gran interés determinar sus coordenadas  $Fx_j, Fy_j$ .

En resumen, la calidad de agua en las zonas protegidas así como el costo de la instalación dependen principalmente de la capacidad de cada planta de tratamiento y de la localización de la correspondiente tubería de descarga. Éstas pueden ser expresadas mediante los factores de reducción de vertido y de las coordenadas de salida respectivamente.

Entonces las variables de diseño del presente problema vienen dadas por:

$\beta_j$  : Factores de reducción de vertido;

$Fx_j, Fy_j$  : Coordenadas de la salida de la tubería de descarga;

para  $j=1, 2, 3, \dots, N$  (número de plantas de tratamiento)

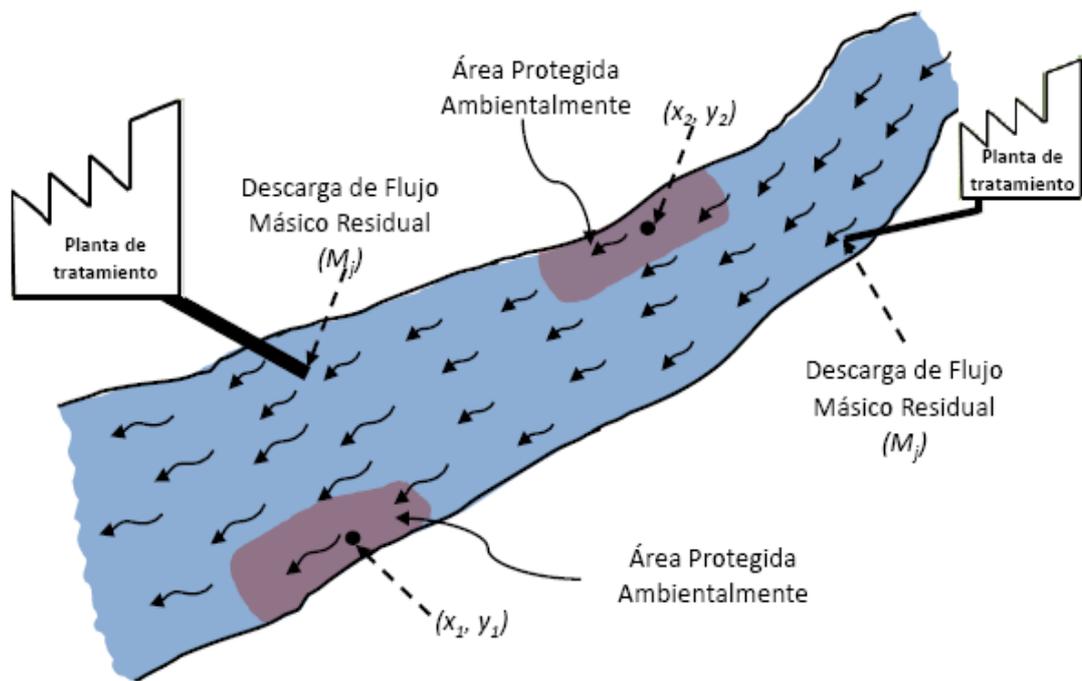


Figura 2.2: Esquema de diseño de plantas de tratamiento.

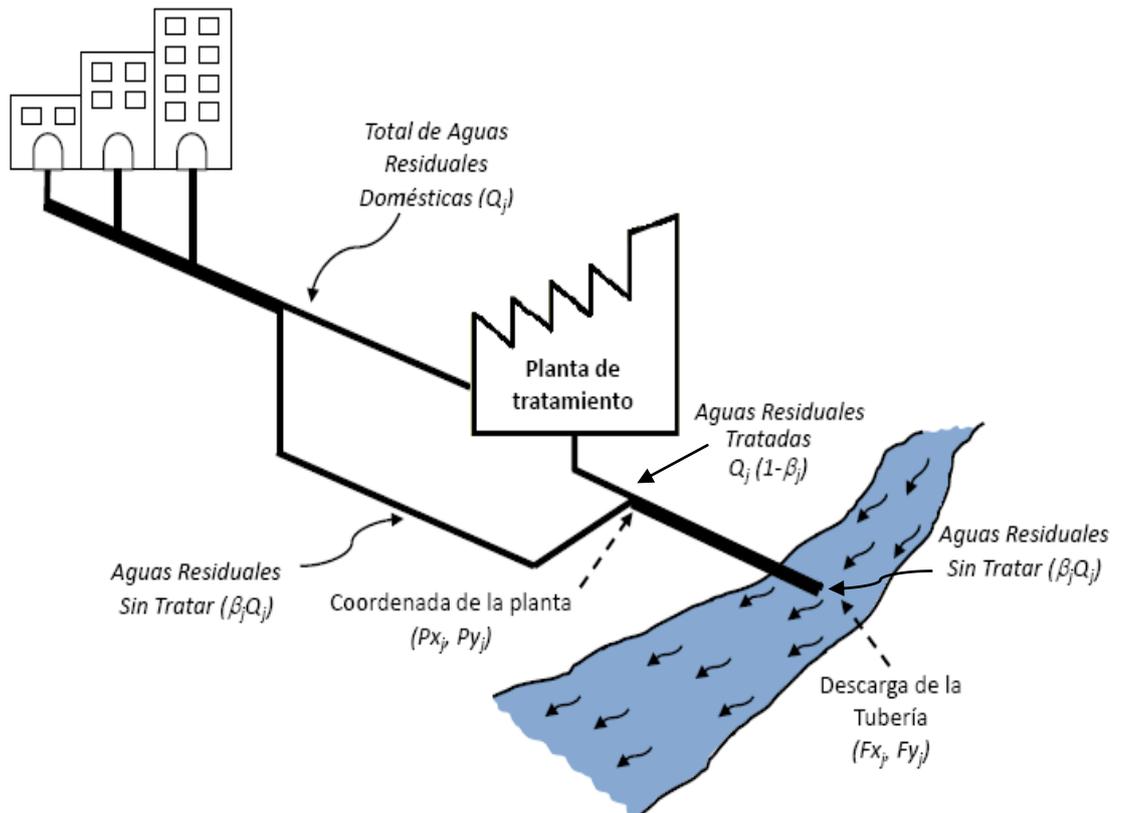


Figura 2.3: Esquema de capacidad de tratamiento.

### 2.2.3. Determinación de la Función de Costo de las Plantas de Tratamiento

Los costos están directamente relacionados al sistema de purificación que se pretenda implementar (tratamiento primario, secundario, terciario), y dependen de varios factores tales como, el tamaño del caudal a tratar, su composición, el financiamiento del proyecto y por supuesto del nivel de depuración final que se desee, entre otros. Por lo tanto su determinación es necesaria para la selección del mejor diseño.

Resulta de gran utilidad en tal sentido la utilización de fórmulas matemáticas que relacionen los costos con las variables de diseño apropiadas. Existen en la bibliografía algunas estimaciones, entre ellas las propuestas por Mantilla (2002), Salas Quintero (2007), Muga (2008) y Hernandez Sancho (2010), basadas en la utilización de formulas aproximadas que relacionan los costos con tales factores.

Básicamente, los costos que intervienen en las plantas de tratamientos de aguas residuales se pueden clasificar en dos categorías, asociadas a la inversión inicial y al funcionamiento de la planta. En la Tabla A.1.5 del Anexo I se resumen los diferentes costos y sus principales indicadores.

La selección de un determinado conjunto de indicadores de los costos es de gran importancia para la estimación preliminar de los montos de inversión y pueden variar de una región a otra dependiendo, entre otros factores, de la geografía y de la cultura.

Generalmente, los Costos de Inversión  $C_I$  están asociados a todas las actividades (detalladas en la Tabla A.I.5) necesarias para la construcción de la infraestructura física de la planta de tratamiento y dependen del sistema de depuración elegido. De esta forma, tales costos pueden ser estimados de la siguiente manera:

$$C_{I_j} = a QT_j^S, \quad (2.1)$$

donde  $C_{I_j}$  es el costo inicial de inversión [US\$/años] de la j-ésima planta,  $QT_j$  es la capacidad de tratamiento de la planta en [m<sup>3</sup>/día],  $S$  es el factor de economía de escala, generalmente para plantas potabilizadoras este valor varía entre 0.6 y 0.8 y representa el porcentaje de cambio en el costo por cada uno por ciento de cambio en la capacidad, en la presente tesis se adopta un valor de 0,7 y  $a$  es un coeficiente que representa el costo con respecto a la capacidad del sistema de tratamiento. A manera de ejemplo se sigue la forma propuesta por Friedler y Pisanty (2006) para un tratamiento secundario. De esta forma el coeficiente  $a$  puede estimarse como:

$$a = \frac{8988}{vu}, \quad (2.2)$$

donde  $vu$  corresponde a la vida útil estimada de la planta de tratamiento.

Los Costos de Funcionamiento  $C_{Fj}$  dependen de la complejidad del sistema de tratamiento e incluyen mano de obra, energía, compra de productos químicos y mantenimiento de equipos entre otros, y pueden expresarse como una fracción de los costos totales de la siguiente manera:

$$C_{Fj} = r CT_j, \quad (2.3)$$

donde  $CT_j$  es el costo total anual de cada planta de tratamiento [US\$/año],  $C_{Fj}$  es el costo de Funcionamiento [US\$/año] de la  $j$ -ésima planta y  $r$  es una función de la capacidad de la planta que puede expresarse (obtenida a partir de la información brindada por Friedler. y Pisanty, 2006) como:

$$r = 0.352 + 6.557 \times 10^{-6} QT_j - 6.429 \times 10^{-11} QT_j^2, \quad (2.4)$$

De esta manera, considerando las expresiones (2.1) y (2.3) el costo total anual  $CT_j$  puede plantearse de la siguiente forma:

$$CT_j = C_{I_j} + r CT_j, \quad (2.5)$$

Luego, operando en (2.5) se obtiene la siguiente expresión para los costos totales:

$$CT_j = \frac{C_{I_j}}{(1-r)}, \quad (2.6)$$

Asimismo, los costos totales ( $CT_j$ ) varían de acuerdo a la longitud de la tubería del efluente, y entonces de la localización de la planta de tratamiento y de las coordenadas de descarga. En el presente trabajo se utiliza la función de costo de construcción de la tubería  $C_L$  propuesta por Salas (2000), considerando que tales costos son proporcionales a la longitud:

$$C_{L_j} = \frac{k}{vu} \sqrt{(Px_j - Fx_j)^2 + (Py_j - Fy_j)^2}, \quad (2.7)$$

siendo  $C_{L_j}$  el costo de construcción de la tubería  $j$ -ésima [US\$/año],  $k$  el costo por metro construido de tubería [US\$/m],  $Px_j$  y  $Py_j$  las coordenadas de las plantas de tratamiento y  $Fx_j$  y  $Fy_j$  las coordenadas de descarga de los efluentes.

Finalmente, considerando las expresiones de los costos explicados anteriormente, el Costo Total Anual se calcula sumando todas las contribuciones (fuentes) consideradas, resultando:

$$CT = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{8988}{(1-r)vu} QT_j^S + \frac{k}{vu} \sqrt{(Px_j - Fx_j)^2 + (Py_j - Fy_j)^2} \right], \quad (2.8)$$

donde  $N$  es el número de plantas.

### 2.3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO:

El problema ambiental considerado consiste en el diseño de  $N$  plantas de tratamiento de efluentes urbanos que vierten a un río las aguas servidas en exceso a sus capacidades.

Entonces el problema de diseño óptimo puede ser formulado de la siguiente manera:

$$(\beta_j^+, Fx_j^+, Fy_j^+) = \arg \min CT \quad (2.9)$$

*Sujeto a :*

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta_j \leq 1, \quad (Fx_j, Fy_j) \in R_j & \quad j = 1, 2, \dots, N \\ C_{i\ CF} \leq C_{adm\ CF}, \quad C_{i\ DBO} \leq C_{adm\ DBO}, \quad C_{i\ OD} \geq C_{adm\ OD} & \quad i = 1, 2, \dots, NP \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $CT$  es el costo total definido en (2.8), el símbolo  $(^+)$  corresponde a las variables óptimas que hacen que la función sea mínima,  $R_j$  es el área posible de descarga para la tubería  $j$ -ésima,  $C_{i\ CF}$ ,  $C_{i\ DBO}$  y  $C_{i\ OD}$  son las concentraciones de CF, DBO y OD en la zona protegida  $i$ -ésima,  $NP$  es el número de zonas protegidas, mientras que  $C_{adm\ CF}$ ,  $C_{adm\ DBO}$  y  $C_{adm\ OD}$  corresponden a los niveles admisibles permitidos de tales indicadores.

Es posible incorporar en forma alternativa, algunas de las restricciones en la función objetivo (2.9) mediante términos de penalización. De esta manera el problema anterior es redefinido de la siguiente forma equivalente:

$$CT_p = CT + \sum_{i=1}^{NP} (\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C) \quad , \quad (2.11)$$

donde  $CT$  es la función objetivo definida en (2.10),  $NP$  es el número de zonas protegidas y  $\lambda_A$  es el factor de penalización del DBO,  $\lambda_B$  del OD y  $\lambda_C$  del CF, para la  $i$ -ésima zona protegida, dados por:

$$\lambda_A = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{i\text{DBO}} < C_{\text{adm DBO}} \\ 10^9 & \text{si } C_{i\text{DBO}} \geq C_{\text{adm DBO}} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\lambda_B = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{i\text{OD}} > C_{\text{adm OD}} \\ 10^9 & \text{si } C_{i\text{OD}} \leq C_{\text{adm OD}} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\lambda_C = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{i\text{CF}} < C_{\text{adm CF}} \\ 10^9 & \text{si } C_{i\text{CF}} \geq C_{\text{adm CF}} \end{cases} \quad (2.14)$$

La penalización es una manera alternativa para transformar un problema de optimización con restricciones en un problema de optimización sin restricciones, y particularmente tal enfoque es conveniente para su implementación en el programa FlexPDE.

De esta manera es posible descartar de las tantas soluciones posibles, la alternativa de diseño que no cumpla con alguna restricción ambiental.

Así, cuando alguna restricción ambiental no se cumpla, una de las expresiones (2.12), (2.13) y (2.14) adoptará un valor muy grande y la correspondiente alternativa de diseño se descartará de las tantas soluciones posibles. Por otra parte las restricciones sobre las variables de diseño  $\beta_j$ ,  $Fx_j$  y  $Fy_j$  no varían.

Es importante mencionar que el problema de diseño formulado presupone la definición de caudales constantes máximos arribando a cada planta depuradora. Asimismo se suponen condiciones hidrodinámicas y de transporte estacionarias, correspondiendo en general al peor escenario de impacto ambiental que en general coincide con situaciones de aguas bajas.

---

# CAPITULO III:

## FORMULACIÓN DEL MODELO

### FÍSICO - MATEMÁTICO

---

Para abordar el problema de diseño formulado en el capítulo anterior es necesario efectuar predicciones sobre el nivel de concentración de los indicadores apropiados de calidad de aguas en las zonas de interés seleccionadas. Las ecuaciones que permiten tales predicciones surgen a partir del planteo de un balance de masa de tales sustancias considerando sus mecanismos principales de transporte. Estos últimos pueden ser representados por dos modos principales, el transporte difusivo y el advectivo. El primero de ellos corresponde a un proceso de transporte dirigido por gradientes de concentración, es decir las sustancias disueltas tienden a transportarse hacia entornos de menor concentración. El proceso advectivo por su parte corresponde al transporte de una sustancia debido al arrastre de la corriente. Este último hace necesario el conocimiento de las velocidades hidrodinámicas del curso de agua considerado.

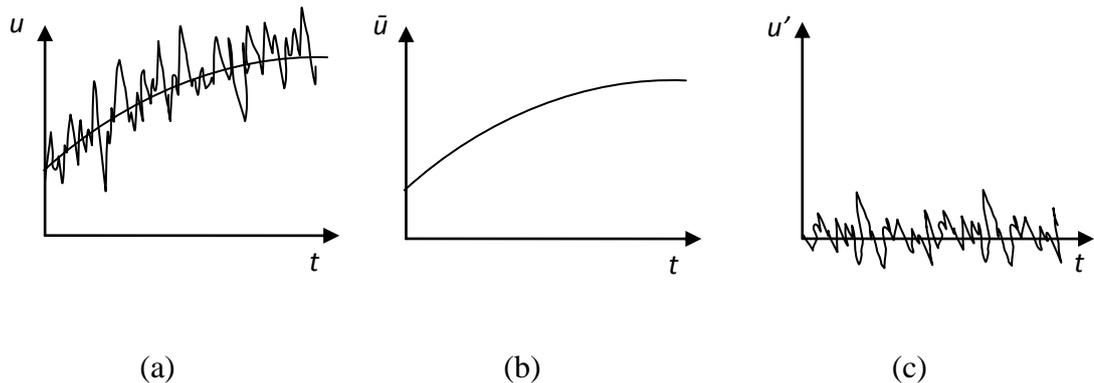
Es posible conocer tal régimen de corrientes mediante medición directa, sin embargo esta labor puede ser muy costosa si se tiene en cuenta la variabilidad de estos regímenes para diferentes condiciones meteorológicas y la cantidad de mediciones que deben efectuarse a los efectos de obtener una buena representación. Por tal razón es conveniente la utilización de modelos matemáticos hidrodinámicos para la determinación de las corrientes en el cuerpo de agua (así como la variación del nivel de la superficie libre) empleando una cantidad menor de mediciones y de datos tales como batimetría, condiciones forzantes predominantes (corrientes de

ingreso y vientos dominantes) y algunos parámetros hidrodinámicos (viscosidad turbulenta, coeficientes de fricción).

En consecuencia, en este capítulo se presentan las ecuaciones necesarias para predecir la concentración de sustancias en puntos de interés en el segmento de río bajo estudio. Están representadas por un modelo hidrodinámico y por un modelo de transporte de sustancias.

### 3.1. GENERALIDADES

Los flujos correspondientes a cursos de agua naturales se encuentran generalmente en régimen turbulento. Esto quiere decir que las componentes de las distintas magnitudes de interés (velocidades, presión y concentración) presentan una variación irregular y compleja en el tiempo y en el espacio. En la figura 3.1 se puede ver a manera de ejemplo, la variación de una componente de velocidad ( $u$ ).



**Figura 3.1:** (a) flujo total, (b) flujo promediado, (c) flujo turbulento.

Es posible interpretar tal variación como la superposición de una parte suave y otra fluctuante. Por ejemplo, para la componente horizontal de la velocidad se puede escribir:

$$u = \bar{u} + u'$$

donde  $\bar{(\cdot)}$  denota la parte suave y  $(\cdot)'$  la parte fluctuante. La primera de ellas puede obtenerse mediante una promediación temporal en un período  $T$  (corto en relación a la escala de tiempos del flujo medio pero largo comparado con las fluctuaciones turbulentas). Esto es:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

A partir de tales conceptos es conveniente obtener ecuaciones gobernantes cuyas variables correspondan a las componentes promediadas.

En tales ecuaciones no aparecen las componentes fluctuantes en forma explícita sino implícitamente mediante la introducción de parámetros apropiados (tales como el coeficiente de viscosidad turbulento).

Tal procedimiento denominado promediación de Reynolds se emplea en los modelos adoptados en este capítulo.

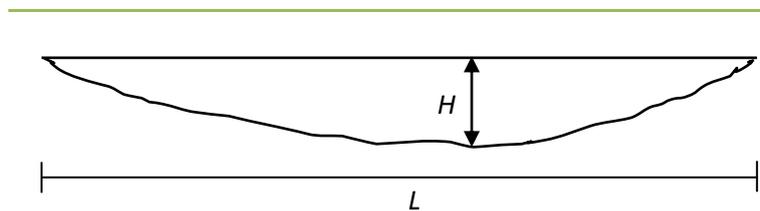
Las componentes promediadas aludidas dependen en el caso general tanto de las variables espaciales como así también de la variable temporal. Sin embargo, el interés en esta tesis está centrado en el estudio de situaciones estacionarias. Es decir se supone que ninguno de los forzantes depende del tiempo. En consecuencia, las variables de interés promediadas según Reynolds resultan independientes del tiempo.

Asimismo existe una particularidad en los problemas hidrodinámico y de transporte de sustancias en segmentos de ríos desde el punto de vista geométrico. En efecto, en forma muy frecuente cuerpos de agua tales como ríos y estuarios presentan escalas espaciales donde una de las dimensiones del dominio (profundidad) es mucho menor que las dimensiones horizontales:

$$L \gg H ,$$

donde  $L$  es una longitud horizontal característica y  $H$  la profundidad del cuerpo de agua (Figura 3.2).

En estos casos el patrón de flujo así como el de transporte puede ser considerado bidimensional horizontal.



**Figura 3.2:** Dimensiones de cuerpos de agua poco profundos

Esto quiere decir que los aspectos más representativos de los campos de velocidades y de transporte pueden ser interpretados mediante las correspondientes variables integradas verticalmente. Tal idealización conduce a ecuaciones en un dominio bidimensional y se conocen con el nombre de modelos de aguas poco profundas.

Este trabajo está basado en la predicción de la concentración de sustancias en zonas de interés en un curso de agua, bajo condiciones estacionarias, desde un punto de vista promediado temporalmente según Reynolds y a su vez promediado espacialmente en la vertical.

En consecuencia, en el presente capítulo se presentan las ecuaciones (promediadas según Reynolds) bidimensionales hidrodinámicas y de transporte de sustancias disueltas en medios acuáticos expresadas en función de los indicadores ambientales CF, DBO y OD, para condiciones estacionarias, junto con las correspondientes condiciones de bordes.

## **3.2. MODELO HIDRODINÁMICO**

### **3.2.1. Formulación del Problema hidrodinámico Bidimensional Estacionario**

Desde el punto de vista general el problema hidrodinámico se expresa mediante una ecuación de continuidad (conservación de la masa) y tres ecuaciones de movimiento para fluidos viscosos (ecuaciones de Navier-Stokes). Es posible simplificar tales ecuaciones a casos bidimensionales estacionarios efectuando las siguientes hipótesis:

- Se describen variables hidrodinámicas promediadas según Reynolds;
- El cauce considerado (lago o río) es poco profundo, por lo tanto su movimiento puede suponerse como bidimensional, siendo las velocidades verticales muy pequeñas frente a las horizontales;
- Las componentes horizontales de la aceleración de la gravedad en  $x$  e  $y$  son nulas;
- Los términos viscosos horizontales se pueden despreciar frente a la viscosidad vertical;
- Asimismo, cuando las dimensiones de los lagos o ríos no son muy grandes (como los mares) es posible despreciar el efecto de la curvatura de la tierra, es decir los términos que involucran el parámetro de Coriolis;
- Se considera condiciones de flujo estacionario, en consecuencia los términos de aceleración local se desprecian;
- Adicionalmente se desprecian términos de aceleración convectiva.

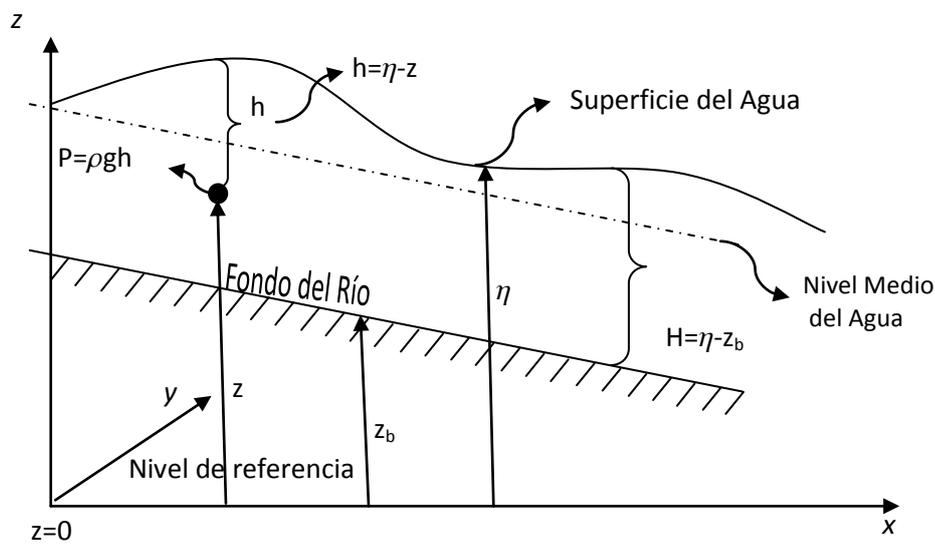
La consideración de tales hipótesis conjuntamente con la integración en la vertical las ecuaciones de continuidad y de Navier Stokes conduce a las ecuaciones

hidrodinámicas bidimensionales bajo condiciones estacionarias (Rubin, 2001; Zienkewich, 1980; Awruch, 1976) que suele denominarse *Teoría de Aguas Poco Profundas*. (ver Anexo II).

A efectos de presentar las ecuaciones resultantes, es conveniente introducir la variable  $\eta$ , correspondiente al nivel de la superficie libre con respecto a un plano de referencia, la cual se relaciona con la profundidad  $H$  de la siguiente manera:

$$H = \eta - z_b, \quad (3.1)$$

donde  $z_b$  es la cota de fondo, indicada en la Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Sistema de Coordenadas y Plano de Referencia.

La integración de la ecuación de continuidad conduce a la ecuación de continuidad bidimensional en función de las velocidades promediadas  $U$  y  $V$ :

$$\frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

De igual manera, integrando en la vertical la ecuación de movimiento en la componente según  $z$  y considerando que en la superficie libre la presión es nula, esto es  $P(\eta) = 0$ , se llega a una aproximación hidrostática de presiones:

$$P = \rho g (\eta - z) \quad (3.3)$$

Luego, sustituyendo la expresión (3.3) en las ecuaciones de movimiento en las componentes  $x$  e  $y$ , e integrando en la profundidad, se obtienen las ecuaciones de movimiento bidimensional en las componentes  $x$  e  $y$  respectivamente (Rubin y Atkinson, 2001):

$$-gH \frac{\partial H}{\partial x} - gH \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{Fx}}{\rho} = 0 \quad , \quad (3.4)$$

$$-gH \frac{\partial H}{\partial y} - gH \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{Fy}}{\rho} = 0 \quad (3.5)$$

donde  $g$  es la gravedad,  $\rho$  es la densidad del fluido, que suponemos constante,  $\tau_{sx}$  y  $\tau_{sy}$  son las tensiones tangenciales debidas a la fuerza de arrastre del viento en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente, y los términos  $\tau_{Fx}$  y  $\tau_{Fy}$  corresponden a los términos de fricción del fondo en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Las tensiones tangenciales correspondientes a la fricción de fondo pueden expresarse en función de las velocidades promediadas  $U$  y  $V$ . Para ello existen en la bibliografía numerosas formulaciones empíricas (Florez-Giraldo et al., 2010 y Cea et al., 2009). En la presente tesis se emplean las definidas de acuerdo a la forma propuesta por (Tsanis y Saied, 2007; Cea y Bladé, 2007):

$$\tau_{Fx} = \alpha U \quad , \quad \tau_{Fy} = \alpha V \quad , \quad (3.6)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de fricción que puede ser expresado en la forma:

$$\alpha = \rho C_b \sqrt{U^2 + V^2} \quad , \quad (3.7)$$

Asimismo, las tensiones de corte superficiales provocadas por el arrastre del viento pueden expresarse empíricamente en función de las componentes horizontales de la velocidad del viento  $W_x$  y  $W_y$  (Tsanis y Saied, 2007; Cea y Bladé, 2007):

$$\tau_{sx} = \phi W_x \quad , \quad \tau_{sy} = \phi W_y \quad , \quad (3.8)$$

donde  $\phi$  el parámetro de fricción en la superficie que puede expresarse en la forma:

$$\phi = \rho C_s \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad , \quad (3.9)$$

siendo  $C_b$  y  $C_s$  coeficientes adimensionales de fricción y  $\rho$ : la densidad del agua.

Por lo tanto las expresiones resultantes, correspondientes al sistema de ecuaciones hidrodinámicas basadas en la teoría de Aguas Poco Profundas bajo condiciones estacionarias vienen dadas por (Rubin y Atkinson, 2001):

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(UH) + \frac{\partial}{\partial y}(VH) \quad , \quad (3.10)$$

$$0 = -gH \frac{\partial H}{\partial x} - gH \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\phi W_x}{\rho} - \frac{\alpha U}{\rho} \quad , \quad (3.11)$$

$$0 = -gH \frac{\partial H}{\partial y} - gH \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\phi W_y}{\rho} - \frac{\alpha V}{\rho} \quad (3.12)$$

### 3.2.2. Ecuación Hidrodinámica Gobernante

El sistema de ecuaciones para Aguas Poco Profundas (3.10-3.12), puede ser reformulado convenientemente mediante una única ecuación cuya incógnita viene dada por el nivel de la superficie libre  $\eta$ . Para ello, las ecuaciones (3.11) y (3.12) se expresan en función del flujo medio por unidad de área:

$$q_x = UH, \quad (3.13)$$

$$q_y = VH \quad (3.14)$$

Despejando los términos que involucran a las velocidades promediadas y multiplicando miembro a miembro por la profundidad  $H$ , considerando la expresión (3.1), se obtiene:

$$q_x = \frac{-\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\phi W_x H}{\alpha}, \quad (3.15)$$

$$q_y = \frac{-\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\phi W_y H}{\alpha} \quad (3.16)$$

Finalmente, reemplazando las expresiones (3.15) y (3.16) en la ecuación de continuidad (3.10) se llega a la siguiente ecuación que modela el movimiento del fluido en cuerpos de agua poco profundas, expresada en función del nivel de la superficie libre  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi W_x H}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi W_y H}{\alpha} \right), \quad (3.17)$$

recordando que  $\rho$  es la densidad,  $g$  la gravedad,  $H$  la profundidad definida de acuerdo a (3.1),  $z_b$  la pendiente del fondo,  $W_x$  y  $W_y$  las componentes de velocidad del viento en las direcciones  $x$  e  $y$ ,  $\alpha$  y  $\phi$  son los parámetros de fricción de fondo y superficie respectivamente y están definidos de acuerdo a las expresiones (3.7) y (3.9) respectivamente.

Como puede observarse, la ecuación (3.17) es de 2° orden no lineal debido al término de fricción de fondo. Si bien es posible considerar el término de fricción de fondo de manera lineal (como en algunos trabajos de la literatura), su valor muchas veces depende de una adecuada estimación de las velocidades características involucradas en su determinación ( $U_0$ ,  $V_0$ ). Puede ocurrir que en algunas regiones del dominio existan valores distintos de las mismas, con las consecuentes diferencias de la fricción de fondo, lo que eventualmente podría tener efecto sobre el patrón de flujo

calculado. Para poder considerar tales situaciones no es difícil implementar una formulación no lineal, que se resuelve mediante aproximaciones sucesivas. De esta forma se proponen valores de  $U_0$ ,  $V_0$ , se estima el factor de fricción. Con éste se resuelve la ecuación gobernante para el nivel de superficie libre  $\eta$ , se determinan las velocidades hidrodinámicas mediante la aplicación de (3.15) y (3.16) y luego de (3.13) y (3.14). Con tales velocidades se recalcula el factor de fricción y se repite el proceso. Se itera hasta lograr la convergencia en las velocidades (en general dos o tres iteraciones resultan suficientes).

Este procedimiento se aclarará en el *Capítulo 5*, en la sección de “Implementación computacional en FlexPDE”.

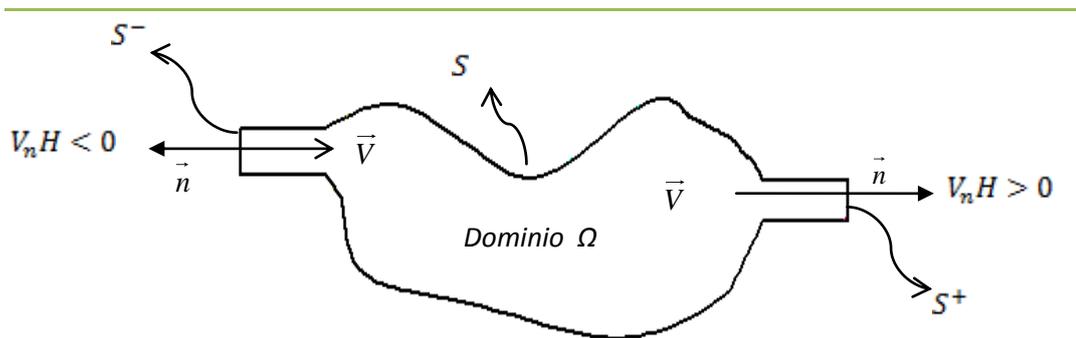
Las condiciones de borde (ver Figura 3.4) correspondiente a la ecuación (3.17) se expresan de la siguiente manera:

$$q_n = \frac{-\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\phi W_n H}{\alpha}, \quad (3.18)$$

donde  $q_n$  representa el flujo normal saliente al borde (conocido). Además debe establecerse el valor de  $\eta$  en algún punto para que dicha variable no quede indeterminada.

Por ejemplo para el esquema mostrado en la Figura 3.4, las condiciones de borde pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q_n = 0 & \text{en } S \\ q_n = q_E & \text{en } S^- \\ q_n = -q_S & \text{en } S^+ \end{cases}, \quad (3.19)$$



**Figura 3.4:** Dominio bidimensional del problema hidrodinámico

donde  $\Omega$  es un dominio bidimensional con frontera abierta  $S$ . De acuerdo a la Figura 3.3, el borde  $S$  posee una entrada  $S^-$  tal que  $\vec{V}_n \cdot \vec{n} \leq 0$  y una salida  $S^+$  donde  $\vec{V}_n \cdot \vec{n} \geq 0$ .

### 3.3. MODELO DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS

#### 3.3.1. Formulación del Problema de Transporte Bidimensional Estacionario

El transporte de sustancias disueltas es un proceso complejo que presenta diversas escalas espaciales y temporales. Sin embargo, cuando se pretende describir la concentración promediada en la vertical de una sustancia que se transporta en un flujo de aguas poco profundas, es posible hacer uso con suficiente precisión de las siguientes leyes empíricas de los mecanismos de transporte:

$$J_x = UC - K \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.20)$$

$$J_y = VC - K \frac{\partial C}{\partial y} \quad (3.21)$$

donde  $J_x$  y  $J_y$  corresponden a las componentes de la densidad de flujo (cantidad de la sustancia que atraviesa un área por unidad de tiempo). Por otra parte,  $K$  es el denominado coeficiente de difusión que en general debe ser obtenido experimentalmente.

Los primeros términos de los miembros derechos de 3.20 y 3.21 corresponden al transporte advectivo, definiéndose como tal al movimiento de la sustancia conjuntamente con el fluido. Los segundos términos de los miembros derechos corresponden al transporte difusivo, impulsado por los gradientes de concentración. El signo negativo indica que el transporte difusivo se da desde una concentración alta a una concentración baja.

Existen diversos procesos que contribuyen a dicho transporte:

- La difusión molecular es un desplazamiento aleatorio de moléculas de solutos entre las moléculas de agua. De esta forma las moléculas de solutos se desplazan desde las zonas de mayor concentración hacia las de menor, por lo que siempre que exista un gradiente de concentración se producirá este fenómeno.
- El proceso de difusión turbulenta contempla la parte de la estructura fluctuante. Esta es dominante frente a la difusiva molecular.
- La dispersión considera los efectos de no uniformidad de las velocidades y la concentración de sustancias en la vertical.

Para el tipo de flujo en consideración los fenómenos dispersivos dominan el transporte difusivo. Por tal razón  $K$  también se denomina coeficiente de dispersión (turbulenta).

En la mayoría de los casos relacionados con transporte en cursos de agua naturales, el transporte advectivo es más importante que el difusivo.

A partir de las expresiones de las densidades de flujo (3.20) y (3.21), puede formularse un balance de masa en un elemento de fluido conformado por una base de dimensiones infinitésimas ( $dx$  y  $dy$ ) y de altura  $H$  (profundidad). De esta manera se llega a la ecuación gobernante bidimensional de transporte de masa que modela la concentración estacionaria (promediada según Reynolds) de una sustancia en un cuerpo de agua (Rubin y Atkinson, 2001):

$$UH \frac{\partial C}{\partial x} + VH \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C}{\partial y} \right) - R_G H + R_D H = 0 \quad (3.22)$$

donde:

$R_G$  y  $R_D$  corresponden a la tasa de generación de reacción de la sustancia en estudio que pueden producirse por unidad de volumen de fluido. Se refieren a la velocidad de transformación o reacción de la/s sustancia/s dentro del volumen y tiene que ver con los tiempos asociados a los cambios de concentración generados por el proceso de transporte, hasta aproximarse al equilibrio del sistema,  $C$  es la concentración media promediada en la vertical.

En esta tesis se asume que el coeficiente de dispersión no depende de la dirección (isótropo). Sin embargo puede emplearse un modelo más preciso contemplando propiedades ortótropas (coeficiente de dispersión en el sentido de la corriente diferente al coeficiente de dispersión transversal). Esto se explica en el Anexo II.

Si se considera que las fuentes de emisión son puntuales, es posible expresar los términos de descarga como:

$$R_G H = \sum_{j=1}^N M_j \delta(x - Fx_j) \delta(y - Fy_j), \quad (3.23)$$

donde  $M_j$  es la tasa de emisión, medida en kg/seg, que presenta la fuente ubicada en el sitio  $(Fx_j, Fy_j)$ ,  $N$  es el número de fuentes y  $\delta$  es la función Delta de Dirac (ver Anexo III).

De esta forma la ecuación (3.22) queda planteada de la siguiente manera:

$$UH \frac{\partial C}{\partial x} + VH \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C}{\partial y} \right) + R_d H = \sum_{j=1}^N M_j \delta(x - Fx_j) \delta(y - Fy_j) \quad (3.24)$$

Esta ecuación está sujeta a las siguientes condiciones de frontera, considerando que los bordes se encuentran alejados de la zona de descarga:

$$-KH \frac{\partial C}{\partial n} + \epsilon HV_n C = 0 \quad , \quad (3.25)$$

donde  $V_n$  es la velocidad normal a los puntos del borde del dominio,  $\epsilon = 1$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\epsilon = 0$  en puntos de la superficie de salida de flujo (Parra-Guevara y Skiba, 2000).

La condición de frontera (3.25) supone que aguas arriba no existe flujo de contaminante (ni advectivo ni dispersivo) y que en la salida se desprecia el flujo dispersivo turbulento en comparación con el flujo advectivo del contaminante. Estas condiciones presentan un buen comportamiento matemático (problema bien planteado en el sentido de Hadamard) y fueron definidas por Marchuk (1986).

Por otra parte, si el valor de la concentración de la sustancia es conocida en algún punto, entonces la condición de borde se determina de la siguiente forma:

$$C = C^0 \quad , \quad (3.26)$$

donde  $C^0$  corresponde al valor conocido.

### 3.3.2. Ecuación de transporte de contaminantes para varias sustancias

Con el fin de simular la calidad del agua, se deben elegir indicadores de los niveles de contaminación. Entre los más importantes, especialmente para el estudio de las concentraciones de contaminantes provocadas por las descargas de efluentes urbanos, se encuentran los Coliformes fecales (CF), el Oxígeno Disuelto (OD) y la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO), explicados en el *Capítulo 2*.

Para determinar la distribución espacial de los niveles de tales indicadores, debe plantearse la ecuación (3.24) para cada uno de ellos, obteniendo las siguientes expresiones:

$$UH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} \right) + H\omega C_{CF} = \sum_{j=1}^N M_{CFj} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j), \quad (3.27)$$

$$UH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} \right) + H\sigma C_{DBO} = \sum_{j=1}^N M_{DBOj} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j), \quad (3.28)$$

$$UH \frac{\partial C_{OD}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{OD}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{OD}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{OD}}{\partial y} \right) + H\sigma C_{DBO} - \gamma H(d_s - C_{OD}) = 0, \quad (3.29)$$

donde  $C_{DBO}(x,y)$ ,  $C_{OD}(x,y)$  y  $C_{CF}(x,y)$  corresponden a las concentraciones de DBO, OD y CF respectivamente,  $K$  es el coeficiente de dispersión,  $\sigma$  y  $\omega$  son las constantes de velocidad de degradación del DBO y CF,  $\gamma$  es la constante de transferencia de OD a través de la superficie y  $d_s$  es la saturación de oxígeno disuelto. Por otro lado,  $M_{DBOj}$  y  $M_{CFj}$  son los flujos máxicos residuales de DBO y CF, y se expresan de la siguiente manera:

$$M_{CFj} = C_{CFj}^0 Q_j \beta_j, \quad (3.30)$$

$$M_{DBOj} = C_{DBOj}^0 Q_j \beta_j, \quad (3.31)$$

siendo  $C_{CFj}^0$  y  $C_{DBOj}^0$  las concentraciones de CF y DBO correspondientes al flujo residual saliendo por la tubería de descarga  $j$ -ésima,  $Q_j$  el caudal volumétrico de aguas residuales que arriba a cada planta de tratamiento de efluentes y  $\beta_j$  el factor de reducción en las tasas de vertido y varía entre 0 (reducción máxima) y 1 (reducción mínima).

Puede observarse que en la ecuación de OD (3.29) aparece un término de degradación proporcional a  $C_{DBO}$ , Esto se debe a la cantidad de oxígeno que consumen los microorganismos para descomponer la materia orgánica. Asimismo el último término del miembro izquierdo representa el déficit de oxígeno disuelto. Cuando  $d_s$  es mayor que  $C_{OD}$  implica que ingresa oxígeno de la atmosfera al agua (reaireación).

Las ecuaciones (3.27) y (3.28) están sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$-KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial n} + \varepsilon H V_n C_{CF} = 0 , \quad (3.32)$$

$$-KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial n} + \varepsilon H V_n C_{DBO} = 0 , \quad (3.33)$$

donde  $V_n$  es la velocidad normal a los puntos del borde del dominio,  $\varepsilon = 1$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\varepsilon = 0$  en puntos de la superficie de salida de flujo (Parra-Guevara y Skiba, 2000). Para la ecuación (3.29) se asume un valor conocido,  $C_{OD}^0$  aguas arriba, de concentración de OD en puntos de la superficie de entrada, donde:

$$C_{OD} = C_{OD}^0 , \quad (3.34)$$

Esto se debe a que en aguas no contaminadas siempre existe oxígeno disuelto. Luego, para bordes impermeables (con  $\varepsilon = 1$ ) y para puntos de la superficie de salida de flujo (con  $\varepsilon = 0$ ) las condiciones de borde para  $C_{OD}$  se expresan como:

$$-KH \frac{\partial C_{OD}}{\partial n} + \varepsilon H V_n C_{OD} = 0 , \quad (3.35)$$

### 3.4. LIMITACIONES DE LOS MODELOS PROPUESTOS

El modelo de transporte propuesto permite representar con suficiente precisión detalles de la distribución de sustancias disueltas que se producen a lo ancho del río considerado. No obstante, su capacidad predictiva depende del conocimiento adecuado del régimen de corrientes.

En tal sentido, aquí se ha formulado un modelo hidrodinámico simplificado que desprecia el efecto de Coriolis y términos de aceleración advectivo. Tal enfoque ha sido usado por otros autores con suficiente precisión, sin embargo podría ocasionar imprecisiones importantes en casos de ríos que presenten márgenes muy curvadas (ríos meandrosos) o cuerpos de agua muy extensos (número de Rossby  $\ll 1$ ) debido al desprecio de los términos advectivos y de Coriolis respectivamente. Para analizar tales casos habría que incorporar tales términos lo que llevaría a ecuaciones no lineales algo más complicadas.

Por otra parte, detalles de la distribución de concentración en escalas de longitud del orden de la profundidad están fuera del alcance del presente modelo. En tal caso habría que recurrir a un enfoque tridimensional.

---

# CAPITULO IV:

## DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE INFLUENCIA: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

### ADJUNTO

---

A los efectos de evaluar las concentraciones de los diferentes indicadores ambientales en ciertas zonas de resguardo ambiental es necesario resolver las ecuaciones de transporte (3.27), (3.28) y (3.29) junto con sus correspondientes condiciones de borde (3.32-3.35) para cada alternativa de diseño. Si bien es posible realizar este proceso de forma automática empleando técnicas computacionales, el tiempo de cálculo requerido suele ser alto, especialmente en un contexto de diseño óptimo (ya que en estos casos las simulaciones deben ser repetidas una gran cantidad de veces).

Por lo tanto, a los efectos de minimizar la cantidad de simulaciones es conveniente emplear fórmulas analíticas, asociadas a las ecuaciones de transporte, haciendo uso de los denominados coeficientes de influencia. De esta manera al multiplicar tales coeficientes por las descargas máxicas de cada fuente y sumando luego todas las contribuciones, se obtienen las concentraciones de CF, DBO y OD en determinadas zonas de resguardo ambiental.

En el presente capítulo se plantea, en primer lugar, el desarrollo de tales fórmulas analíticas determinando los coeficientes de influencia empleando la función de Green. De acuerdo con tal metodología, la obtención de los coeficientes de influencia supone la solución numérica de las ecuaciones de transporte tantas veces como puntos de descarga existan. Considerando que el problema de diseño exige comparar

escenarios con distintas ubicaciones de las descargas, el ahorro en cantidad de soluciones numéricas necesarias es nulo.

Asimismo, se propone una metodología alternativa para la determinación de tales coeficientes basada en la denominada *ecuación adjunta del problema de transporte*. Con este último enfoque dichos coeficientes pueden ser obtenidos mediante soluciones numéricas (a partir del método de elementos finitos) tantas veces como zonas protegidas se hayan definido, independientemente de la cantidad de descargas consideradas. Como dichas zonas son prefijadas y menos numerosas en relación a las ubicaciones de descargas, tal estrategia resulta ser eficiente pues se necesita un número mucho menor de simulaciones numéricas en comparación con el método de la función de Green, con la consecuente reducción en el tiempo de cálculo.

Es importante hacer notar que la determinación de coeficientes de influencia mediante el enfoque adjunto sigue la metodología explicada por Marchuk (1986). Sin embargo para el caso de ecuaciones acopladas (OD y DBO) el presente desarrollo es más general que el expuesto en el tratado mencionado.

#### 4.1. FUNCIÓN DE GREEN: Coeficientes de Influencia

Esta función permite la transformación de problemas diferenciales (ecuación diferencial lineal) en expresiones integrales, donde las condiciones de frontera se incorporan de manera exacta.

Para explicar este concepto, se plantea la siguiente ecuación diferencial:

$$L_{xy}[u(x, y)] = f(x, y) \quad , \quad (4.1)$$

donde  $L_{xy}$  es un operador diferencial lineal,  $u$  la variable a obtener y  $f$  una función conocida arbitraria. Además  $u$  debe verificar condiciones de borde homogéneas.

Es posible definir una función continua y diferenciable,  $G(x, y, s, t)$ , que verifique las mismas condiciones de frontera, y que cumpla con la siguiente ecuación:

$$L_{xy}[G(x, y, s, t)] = \delta(x-s)\delta(y-t) \quad , \quad (4.2)$$

donde  $x, y, s, t$  son variables pertenecientes al dominio  $\Omega$ . A partir de esta función, denominada *Función de Green*, la solución de la ecuación (4.1) puede plantearse de la siguiente manera:

$$u(x, y) = \int_{\Omega} G(x, y, s, t) f(s, t) ds dt \quad . \quad (4.3)$$

Para verificar lo anterior, se sustituye la ecuación (4.3) en (4.1) obteniendo la siguiente expresión:

$$L_{xy} \left[ \int_{\Omega} G(x, y, s, t) f(s, t) ds dt \right] = f(x, y), \quad (4.4)$$

considerando que el operador  $L_{xy}$  es lineal y opera sobre las variables  $x$  e  $y$  la expresión (4.4) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} L_{xy} [G(x, y, s, t)] f(s, t) ds dt = f(x, y), \quad (4.5)$$

luego, usando en la ecuación (4.5) la expresión (4.2) se llega a:

$$\int_{\Omega} \delta(x-s) \delta(y-t) f(s, t) ds dt = f(x, y) \quad , \quad (4.6)$$

integrando el miembro izquierdo de la ecuación (4.6), aplicando la propiedad de filtro de la función delta de Dirac (ver Anexo III), se llega a una identidad, con lo cual se demuestra que la ecuación (4.3) es solución de (4.1).

Es posible aplicar este concepto a las ecuaciones de transporte definidas en el *Capítulo 3*. En particular considerando la ecuación (3.27) correspondiente a CF, la misma puede identificarse con la ecuación (4.1) de la siguiente manera:

$$L_{xy} [C_{CF}(x, y)] = \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \quad , \quad (4.7)$$

donde  $L_{xy}$  representa el miembro izquierdo de la expresión (3.27),  $C_{CF}$  y el miembro derecho se corresponden con la variable  $u$  y la función  $f$  respectivamente, definidas anteriormente.

Luego la solución a la ecuación (4.7) se consigue aplicando (4.3) de la siguiente manera:

$$C_{CF}(x, y) = \int_{\Omega} G_{CF}(x, y, s, t) \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \delta(s-x_j) \delta(t-y_j) ds dt \quad . \quad (4.8)$$

Finalmente, integrando se llega a la siguiente expresión:

$$C_{CF}(x, y) = \sum_{j=1}^N M_{CF_j} G_{CF}(x, y, x_j, y_j) \quad . \quad (4.9)$$

De igual manera se procede con la ecuación (3.28) obteniendo:

$$C_{DBO}(x, y) = \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} G_{DBO}(x, y, x_j, y_j) , \quad (4.10)$$

donde  $G_{CF}$ , y  $G_{DBO}$  son a las funciones de Green asociadas a los indicadores CF y DBO respectivamente, las cuales son obtenidas, de acuerdo a (4.2), mediante las siguientes ecuaciones:

$$UH \frac{\partial G_{CF}}{\partial x} + VH \frac{\partial G_{CF}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial G_{CF}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial G_{CF}}{\partial y} \right) + H\omega G_{CF} , \quad (4.11)$$

$$= \delta(x-s)\delta(y-t)$$

$$UH \frac{\partial G_{DBO}}{\partial x} + VH \frac{\partial G_{DBO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial G_{DBO}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial G_{DBO}}{\partial y} \right) + H\sigma G_{DBO} , \quad (4.12)$$

$$= \delta(x-s)\delta(y-t)$$

junto con las respectivas condiciones de borde, obtenidas a partir de (3.32) y (3.33):

$$-KH \frac{\partial G_{CF}}{\partial n} + \tau HV_n G_{CF} = 0 , \quad (4.13)$$

$$-KH \frac{\partial G_{DBO}}{\partial n} + \tau HV_n G_{DBO} = 0 , \quad (4.14)$$

Para determinar las concentraciones de CF y DBO en el punto  $(x_i, y_i)$ , se pueden escribir las ecuaciones (4.9) y (4.10) de la siguiente forma:

$$C_{CF}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N M_{CF_j} G_{CF_{ij}} , \quad (4.15)$$

$$C_{DBO}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} G_{DBO_{ij}} , \quad (4.16)$$

donde  $G_{CF_{ij}}$  y  $G_{DBO_{ij}}$  se denominan *coeficientes de influencia*, los cuales miden el efecto que tiene un flujo unitario de contaminante de la tubería de descarga  $j$  sobre la zona  $i$ , y son definidos como:

$$G_{CF_{ij}} = G_{CF}(x_i, y_i, x_j, y_j) , \quad (4.17)$$

$$G_{DBO_{ij}} = G_{DBO}(x_i, y_i, x_j, y_j) , \quad (4.18)$$

Debe observarse que la condición de borde (3.34) de la ecuación de transporte (3.29) para OD, no es homogénea. En tal sentido, como se indicó anteriormente, la Función de Green es aplicable para condiciones de borde homogéneas como las

planteadas para CF y DBO. Por lo tanto para poder emplear este concepto es necesario efectuar el siguiente cambio de variable:

$$\overline{C_{OD}} = C_{OD} - C_{OD}^0 \quad , \quad (4.19)$$

y despejando (4.19) se obtiene:

$$C_{OD} = \overline{C_{OD}} + C_{OD}^0 \quad . \quad (4.20)$$

De esta manera, reemplazando (4.20) en la ecuación (3.29), teniendo en cuenta que  $C_{OD}^0$  es constante, se llega a:

$$\begin{aligned} UH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial x} + VH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial y} \right) + \gamma H \overline{C_{OD}} \\ = -H\sigma C_{DBO} + \gamma Hd_s - \gamma HC_{OD}^0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Considerando el cambio de variable efectuado en (4.20), la condición de borde en la superficie de entrada de flujo queda planteada de la siguiente forma:

$$\overline{C_{OD}} = 0 \quad . \quad (4.22)$$

Asimismo, se procede con el término de contorno (3.34) obteniendo la siguiente condición de borde para puntos de la superficie de salida de flujo y para puntos de los bordes impermeables:

$$-KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial n} = 0 \quad . \quad (4.23)$$

De igual manera que la desarrollada para las ecuaciones de CF y DBO, la ecuación (4.21) puede identificarse con la ecuación (4.1) si el operador lineal  $L_{xy}$  representa el miembro izquierdo de la expresión (4.21),  $\overline{C_{OD}}$  la variable  $u$  y la función  $f$  se define como:

$$f(x, y) = -H\sigma C_{DBO} + \gamma Hd_s - \gamma HC_{OD}^0 \quad . \quad (4.24)$$

De esta forma se puede reescribir (4.21) de la siguiente manera:

$$L_{xy} \left[ \overline{C_{OD}}(x, y) \right] = -H\sigma C_{DBO} + \gamma Hd_s - \gamma HC_{OD}^0 \quad , \quad (4.25)$$

luego de acuerdo a la ecuación (4.3), la solución de (4.25) puede plantearse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \overline{C_{OD}}(x, y) = & \int_{\Omega} G_{OD}(x, y, s, t) \gamma H (d_s - C_{OD}^0) ds dt \\ & + \int_{\Omega} G_{OD}(x, y, s, t) (-H \sigma C_{DBO}) ds dt \quad , \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde  $G_{OD}$  es la función de Green asociada al indicador OD.

Puede notarse que en el segundo integrando de la expresión (4.26) aparece la concentración de DBO, la cual puede ser sustituida por la expresión (4.10) llegando a:

$$\begin{aligned} \overline{C_{OD}}(x, y) = & \int_{\Omega} G_{OD}(x, y, s, t) \gamma H (d_s - C_{OD}^0) ds dt \\ & + \sum_{j=1}^N \left( - \int_{\Omega} H \sigma G_{OD}(x, y, s, t) G_{DBO}(s, t, x_j, y_j) ds dt \right) M_{DBO_j} \quad . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Sustituyendo (4.27) en (4.20) es posible conocer la concentración de OD, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C_{OD}(x, y) = & C_{OD}^0 + \int_{\Omega} G_{OD}(x, y, s, t) \gamma H (d_s - C_{OD}^0) ds dt \\ & + \sum_{j=1}^N \left( - \int_{\Omega} H \sigma G_{OD}(x, y, s, t) G_{DBO}(s, t, x_j, y_j) ds dt \right) M_{DBO_j} \quad . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Luego, considerando la expresión (4.2), la función  $G_{OD}(x, y, s, t)$  es obtenida a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} UH \frac{\partial G_{OD}}{\partial x} + VH \frac{\partial G_{OD}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial G_{OD}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial G_{OD}}{\partial y} \right) + H \gamma G_{OD} \quad , \\ = \delta(x-s) \delta(y-t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

junto con las siguientes condiciones de borde calculadas a partir de (4.22) y (4.23):

$$G_{OD} = 0 \quad , \quad (4.30)$$

$$-KH \frac{\partial G_{OD}}{\partial x} = 0 \quad , \quad (4.31)$$

donde (4.30) vale en puntos de la superficie de entrada de flujo y (4.31) para bordes impermeables y puntos de superficie de salida de flujo.

A partir de (4.28) es posible expresar la concentración de OD en el punto  $(x_i, y_i)$  de la siguiente forma:

$$C_{OD}(x_i, y_i) = C_{OD}^0 + \overline{G_{OD_i}} \gamma (d_s - C_{OD}^0) + \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} \overline{G_{DBO_{ij}}} , \quad (4.32)$$

donde los coeficientes de influencia se han definido como:

$$\overline{G_{OD_i}} = \int_{\Omega} G_{OD}(x_i, y_i, s, t) H(s, t) ds dt , \quad (4.33)$$

$$\overline{G_{DBO_{ij}}} = - \int_{\Omega} \sigma H(s, t) G_{OD}(x_i, y_i, s, t) G_{DBO}(s, t, x_j, y_j) ds dt . \quad (4.34)$$

Una forma de obtener los coeficientes de las expresiones (4.15), (4.16) y (4.32) es resolviendo, mediante el método de elementos finitos las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.29) con sus respectivas condiciones de borde (4.13), (4.14), (4.30) y (4.31), para cada descarga en  $(x_j, y_j)$ .

Este enfoque es apropiado cuando el problema bajo análisis contempla pocos puntos de descarga  $j$  y muchas zonas de resguardo ambiental  $i$ , ya que requiere del cálculo de pocas ecuaciones de transporte (una por cada fuente) para conocer la distribución de concentración de contaminante en toda el área bajo estudio. Sin embargo cuando se necesita conocer la concentración en unas pocas zonas debido a la localización de las fuentes, obtenidas mediante la prueba de diferentes alternativas de ubicaciones (situación analizada en la presente tesis), este enfoque no es eficiente. A continuación se plantea un método más apropiado para la determinación de los coeficientes de influencia.

## 4.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ADJUNTO

Para obtener los coeficientes de influencia definidos en la sección anterior, se hace uso del problema adjunto asociado a las ecuaciones de transporte (Marchuk, 1986) para CF, DBO y OD junto con sus correspondientes condiciones de borde.

En particular, para el caso de la ecuación (3.27) correspondiente a CF, se multiplica dicha expresión por una función arbitraria,  $\hat{G}_{CF}(x, y)$ , y se integra en el dominio  $\Omega$  de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{CF}(x, y) \left( UH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ \left. + H \omega C_{CF} - \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \right] dx dy = 0 \quad (4.35)$$

Luego, aplicando a la ecuación (4.35) las propiedades de integración derivadas del teorema de divergencia y de de gradiente (ver Anexo IV) se llega a la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \left[ -UH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} C_{CF} - VH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} C_{CF} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} \right) C_{CF} - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} \right) C_{CF} \right] dx dy + \hat{G}_{CF} H\omega C_{CF} - \sum_{j=1}^N \hat{G}_{CF} M_{CF_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) + \oint_{\Gamma} \left[ n_x \hat{G}_{CF} UHC_{CF} + n_y \hat{G}_{CF} VHC_{CF} + n_x \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} KHC_{CF} + n_y \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} KHC_{CF} - n_x \hat{G}_{CF} KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} - n_y \hat{G}_{CF} KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} \right] ds = 0 \quad (4.36)$$

donde  $n_x$  y  $n_y$  son los cosenos directores del versor  $\mathbf{n}$ , normal al contorno, con respecto a  $x$  y a  $y$ .

Por otra parte, sacando  $C_{CF}$  como factor común en el primer integrando, la ecuación (4.36) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} C_{CF} \left[ -UH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{CF} H\omega \right] dx dy - \int_{\Omega} \left[ \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \hat{G}_{CF} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \right] dx dy + \oint_{\Gamma} \left[ \hat{G}_{CF} HC_{CF} V_n + KH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial n} C_{CF} - \hat{G}_{CF} KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial n} \right] ds = 0 \quad (4.37)$$

donde se aplicaron las siguientes definiciones en los términos de contorno de la ecuación (4.37):

$$V_n = Un_x + Vn_y$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\cdot) n_y$$

siendo  $\frac{\partial}{\partial n}$  el operador de la derivada normal y  $(\cdot)$  la variable.

Es posible notar que la integral de contorno de la expresión (4.37) se anula si se consideran los términos de contorno (3.32) y además se verifica sobre el borde  $\Gamma$  las siguientes condiciones de borde para  $\hat{G}_{CF}(x,y)$ :

$$KH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial n} + \tau_A HV_n \hat{G}_{CF} = 0 \quad , \quad (4.38)$$

donde  $\tau_A = 0$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\tau_A = 1$  en puntos de la superficie de salida de flujo.

Por lo tanto la expresión (4.37) queda planteada de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} C_{CF} \left[ -UH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{CF} H \omega \right] dx dy = \int_{\Omega} \left[ \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \hat{G}_{CF} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \right] dx dy \quad (4.39)$$

Es posible elegir convenientemente la función  $\hat{G}_{CF}(x,y)$  en  $\Omega$  de manera tal que verifique la siguiente ecuación diferencial:

$$\left( -UH \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{CF_i} H \omega \right) = \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \quad (4.40)$$

Tal función se denomina en esta tesis como *función adjunta de influencia asociada a CF*.

De esta manera, sustituyendo (5.40) en (5.39) se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} C_{CF} \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) dx dy = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \hat{G}_{CF} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) dx dy \quad , \quad (4.41)$$

efectuando las correspondientes integraciones se llega a la siguiente fórmula que permite obtener el valor de la concentración en algún  $(x_i, y_i)$  distinto de  $(x_j, y_j)$ :

$$C_{CF}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N M_{CF_j} \hat{G}_{CF_{ij}} \quad , \quad (4.42)$$

donde el coeficiente se define como:

$$\hat{G}_{CF_{ij}} = \hat{G}_{CF_i}(Fx_j, Fy_j) \quad . \quad (4.43)$$

Puede observarse que (4.42) es idéntica a (4.15) si:

$$G_{CF_{ij}} = \hat{G}_{CF_{ij}}. \quad (4.44)$$

Para obtener los coeficientes de influencia asociados a las ecuaciones de transporte para DBO y OD, se opera de manera similar a la desarrollada para CF, multiplicando a las ecuaciones (3.28) y (4.21) por las funciones arbitrarias  $\hat{G}_{DBO}(x,y)$  y  $\hat{G}_{OD}(x,y)$  respectivamente e integrándolas en el dominio  $\Omega$ . De esta manera se obtienen las siguientes expresiones:

$$\int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{DBO}(x,y) \left( UH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ \left. + H\sigma C_{DBO} - \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \right] dx dy = 0 \quad (4.45)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD}(x,y) \left( UH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial x} + VH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ \left. + \gamma H \overline{C_{OD}} + H\sigma C_{DBO} - \gamma H d_s + \gamma H C_{OD}^0 \right] dx dy = 0 \quad (4.46)$$

Como la evolución de OD depende de la cantidad de DBO las correspondientes ecuaciones están acopladas. Es conveniente entonces obtener una ecuación integral sumando las ecuaciones (4.45) y (4.46), donde aplicando luego las propiedades de integración derivadas del teorema de la divergencia y de gradiente se llega a la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \left[ -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} C_{DBO} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} C_{DBO} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} \right) C_{DBO} \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} \right) C_{DBO} + \hat{G}_{DBO} H\sigma C_{DBO} + \hat{G}_{OD} H\sigma C_{DBO} \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^N \hat{G}_{DBO} M_{DBO_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \right] dx dy + \\ \int_{\Omega} \left[ -UH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} \overline{C_{OD}} - VH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} \overline{C_{OD}} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} \right) \overline{C_{OD}} \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} \right) \overline{C_{OD}} - \hat{G}_{OD} H\gamma (d_s - C_{OD}^0) + \hat{G}_{OD} H\gamma \overline{C_{OD}} \right] dx dy + \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & n_x \hat{G}_{DBO} UHC_{DBO} + n_y \hat{G}_{DBO} VHC_{DBO} + n_x \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} KHC_{DBO} + \\ & n_y \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} KHC_{DBO} - n_x \hat{G}_{DBO} KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} - n_y \hat{G}_{DBO} KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} \end{aligned} \right] ds + \\
& \oint_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & n_x \hat{G}_{OD} UH\overline{C_{OD}} + n_y \hat{G}_{OD} VH\overline{C_{OD}} + n_x \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} KH\overline{C_{OD}} + \\ & n_y \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} KH\overline{C_{OD}} - n_x \hat{G}_{OD} KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial x} - n_y \hat{G}_{OD} KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial y} \end{aligned} \right] ds = 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Por otra parte, sacando  $C_{DBO}$  y  $\overline{C_{OD}}$  como factor común en los primeros dos integrandos la expresión (4.47) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} C_{DBO} \left[ \begin{aligned} & -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{DBO} H\sigma + \hat{G}_{OD} H\sigma \end{aligned} \right] dx dy + \\
& - \int_{\Omega} \left[ \sum_{j=1}^N \hat{G}_{DBO} M_{DBO_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \right] dx dy + \\
& \int_{\Omega} \overline{C_{OD}} \left[ \begin{aligned} & -UH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{OD} H\gamma \end{aligned} \right] dx dy + \\
& - \int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD} H\gamma (d_s - C_{OD}^0) \right] dx dy + \\
& \oint_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & \hat{G}_{DBO} HC_{DBO} V_n + KH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial n} C_{DBO} - \hat{G}_{DBO} KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial n} \end{aligned} \right] ds + \\
& \oint_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & \hat{G}_{OD} H\overline{C_{OD}} V_n + KH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial n} \overline{C_{OD}} - \hat{G}_{OD} KH \frac{\partial \overline{C_{OD}}}{\partial n} \end{aligned} \right] ds = 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde definidas en (3.33) (4.22) y (4.23), los términos de contorno de la expresión (4.48) se anulan a partir de requerir el cumplimiento de las siguientes condiciones de borde:

$$KH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial n} + \tau_B HV_n \hat{G}_{DBO} = 0 \quad , \tag{4.49}$$

$$\hat{G}_{OD} = 0 \quad , \quad (4.50)$$

$$KH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial n} + \tau_c HV_n \hat{G}_{OD} = 0 \quad , \quad (4.51)$$

donde para la expresión (4.49),  $\tau_B = 0$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\tau_B = 1$  en puntos de la superficie de salida de flujo. Por otra parte (4.50) vale en puntos de la superficie de entrada de flujo y (4.51) se aplica para bordes impermeables (con  $\tau_c = 0$ ) y en puntos de la salida de flujo (con  $\tau_c = 1$ ).

Por lo tanto la expresión (4.48) queda planteada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C_{DBO} \left[ \begin{array}{l} -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{DBO} H\sigma + \hat{G}_{OD} H\sigma \end{array} \right] dx dy \\ & + \int_{\Omega} C_{OD} \left[ \begin{array}{l} -UH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{OD} H\gamma \end{array} \right] dx dy \\ & = \int_{\Omega} \left[ \sum_{j=1}^N \hat{G}_{DBO} M_{DBO_j} \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \right] dx dy + \int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD} H\gamma (d_s - C_{OD}^0) \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.52)$$

Es posible elegir  $\hat{G}_{DBO}(x,y)$  y  $\hat{G}_{OD}(x,y)$  convenientemente, teniendo en cuenta dos posibles opciones. En la primera opción se considera que la función  $\hat{G}_{OD}(x,y)$  vale cero y  $\hat{G}_{DBO}(x,y)$  debe verificar la siguiente ecuación diferencial:

$$\left( \begin{array}{l} -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_1}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_1}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_1}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_1}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{DBO_1} H\sigma \end{array} \right) = \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \quad (4.53)$$

donde el subíndice 1 hace referencia a las funciones  $\hat{G}_{DBO}(x,y)$  y  $\hat{G}_{OD}(x,y)$  para la primera opción.

En la segunda opción las funciones verifican las siguientes ecuaciones:

$$\left( \begin{array}{c} -UH \frac{\partial \hat{G}_{OD_i,2}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{OD_i,2}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD_i,2}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD_i,2}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{OD_i,2} H\gamma \end{array} \right) = \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \quad (4.54)$$

$$\left( \begin{array}{c} -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_i,2}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_i,2}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_i,2}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_i,2}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{DBO_i,2} H\sigma + \hat{G}_{OD_i,2} H\sigma \end{array} \right) = 0$$

donde el subíndice 2 hace referencia a las funciones  $\hat{G}_{DBO}(x,y)$  y  $\hat{G}_{OD}(x,y)$  para la segunda opción.

Las funciones  $\hat{G}_{DBO_i,1}(x,y)$  se denomina en esta tesis como *función adjunta de influencia asociada a DBO*, mientras que  $\hat{G}_{DBO_i,2}(x,y)$  y  $\hat{G}_{OD_i,2}(x,y)$  se denominan *funciones adjuntas de influencia asociadas OD*.

Luego, sustituyendo (4.53) en (4.52) se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} C_{DBO} \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) dx dy = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \hat{G}_{DBO_j} M_{DBO_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) dx dy \quad (4.55)$$

Efectuando las correspondientes integraciones en las ecuaciones (4.55) se obtiene la siguiente fórmula que permiten obtener el valor de la concentración en algún  $(x_i, y_i)$  distinto de  $(x_j, y_j)$ :

$$C_{DBO}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} \hat{G}_{1_{DBO_j}} \quad (4.56)$$

donde el coeficiente se define como:

$$\hat{G}_{1_{DBO_j}} = \hat{G}_{DBO_i,1}(Fx_j, Fy_j) \quad (4.57)$$

En tal sentido, puede notarse que la expresión (4.56) es idéntica a (4.16) si:

$$G_{DBO_j} = \hat{G}_{1_{DBO_j}} \quad (4.58)$$

De igual manera se procede con la segunda opción, reemplazando las ecuaciones (4.54) en (4.52), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} \overline{C_{OD}} \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) dx dy = \int_{\Omega} \left[ \sum_{j=1}^N \hat{G}_{DBO_2} M_{DBO_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \right] dx dy \quad (4.59)$$

$$+ \int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD_2} H \gamma(d_s - C_{OD}^0) \right] dx dy$$

donde integrando se llega a la siguiente expresión:

$$\overline{C_{OD}}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} \hat{G}_{DBO_{ij}} + \int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD_2} H \gamma(d_s - C_{OD}^0) \right] dx dy \quad . \quad (4.60)$$

Luego reemplazando (4.60) en (4.20) se obtiene la concentración de OD en determinada zona protegida  $(x_i, y_i)$ :

$$C_{OD}(x_i, y_i) = C_{OD}^0 + \sum_{j=1}^N M_{DBO_j} \hat{G}_{DBO_{ij}} + \hat{G}_{OD_2} \gamma(d_s - C_{OD}^0) \quad , \quad (4.61)$$

donde los coeficientes de influencia se definen como:

$$\hat{G}_{DBO_{ij}} = \hat{G}_{DBO_{i_2}}(Fx_j, Fy_j) \quad , \quad (4.62)$$

$$\hat{G}_{OD_2} = \int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD_2}(s, t) H(s, t) \right] ds dt \quad . \quad (4.63)$$

Finalmente la ecuación (4.61) es idéntica a la ecuación (4.32) si:

$$\hat{G}_{DBO_{ij}} = \overline{G_{DBO_{ij}}} \quad , \quad (4.64)$$

$$\hat{G}_{OD_2} = \overline{G_{OD_2}} \quad . \quad (4.65)$$

Por lo tanto, mediante el empleo de la formulación del problema adjunto para la obtención de los coeficientes de influencia, solo es necesario resolver el problema de contorno dado por las ecuaciones (4.40), (4.53) y (4.54) y las condiciones de borde (4.38), (4.49-4.51) tantas veces como zonas protegidas se consideren (independientemente de la ubicación de las salidas de tubería o de su cantidad). Como estas zonas son limitadas en número, tal estrategia presupone un notable ahorro de tiempo computacional.

---

## CAPITULO V:

# MODELO COMPUTACIONAL DE DISEÑO ÓPTIMO

---

Se plantea en el presente capítulo la estrategia de diseño óptimo propuesto, basada en la combinación de un modelo de simulación de elementos finitos, una fórmula de transporte que hace uso de coeficientes de influencia y un método de optimización apropiado.

A modo de resumen se reescriben (y se re numeran) las ecuaciones principales desarrolladas en los capítulos previos.

Se desarrolla el procedimiento de diseño óptimo que constituye el objeto central de la tesis y finalmente se presenta su implementación computacional en el programa general de elementos finitos FlexPDE.

### 5.1. ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

Los problemas diferenciales de contorno planteados en los *Capítulos 2 al 4* aplicados a las geometrías usuales de cursos de agua resultan muy complejos para su solución analítica, por lo que deben ser resueltos en forma numérica.

Existen en la actualidad programas computacionales generales de simulación numérica mediante el método de los elementos finitos, que permiten abordar tales problemas. En esta tesis se utilizará el programa FlexPDE (PDE Solution Inc, 2005). Utilizando este tipo de programas es posible abordar el problema de diseño, formulado en esta tesis, mediante un procedimiento de prueba y error. Es decir para cada alternativa de diseño (localización de la salida de las tuberías de los efluentes urbanos tratados en plantas de depuración, así como el grado de tratamiento necesario), deben resolverse numéricamente las ecuaciones hidrodinámica y de transporte de sustancias disueltas, junto con las respectivas condiciones de borde,

planteadas en el *Capítulo 3*. Luego comparando aquellas soluciones que verifiquen el cumplimiento de las restricciones, se selecciona la alternativa que implique el menor costo.

Asimismo es posible acelerar tal operación utilizando las fórmulas analíticas, desarrolladas en el *Capítulo 4*, para obtener la concentración del indicador en los puntos de interés, (haciendo uso del método de elementos finitos para calcular los coeficientes de influencia).

Sin embargo este proceso puede resultar costoso desde el punto de vista computacional, ya que requiere del cálculo de una gran cantidad de situaciones para obtener un diseño deseable. Por otra parte es posible que el diseñador para disminuir tales tiempos preseleccione un conjunto mínimo de alternativas, corriendo el riesgo de dejar fuera del análisis varias opciones aceptables. En tal sentido, el diseño final obtenido puede llegar a estar lejos del esperado, con las consecuentes desventajas ambientales y económicas que esto representa.

Una forma más eficiente de efectuar el diseño se logra mediante la utilización de técnicas de optimización que automaticen tal búsqueda en un tiempo computacional menor.

Entonces el procedimiento de diseño óptimo planteado aquí consiste en la integración de un modelo de simulación de elementos finitos, una fórmula de transporte que hace uso de coeficientes de influencia y un método de optimización apropiado.

En particular se propone el empleo de una técnica de optimización global conocida como método de “Recocido Simulado” basado en una analogía del comportamiento de sistemas termodinámicos. En particular es adecuado para implementarlo en el mismo programa de elementos finitos FlexPDE. Aspectos generales de las técnicas de optimización son desarrollados en el Anexo VI.

### **5.1.1. Método de “Recocido Simulado” (Simulated Annealing)**

Se trata de una técnica heurística de optimización (Kirkpatrick et al., 1983 y Cortínez et al., 2009) basada en una generación aleatoria de soluciones factibles, cuya principal característica es la de encontrar una buena aproximación al valor óptimo global de una función evitando la convergencia local en problemas de gran escala. Este procedimiento no requiere el cálculo del gradiente de la función objetivo y es muy simple de implementar computacionalmente. En la Figura 5.1 se muestra el

correspondiente algoritmo, donde  $X$  es el conjunto de variables de diseño y  $E_f$  es la tolerancia de error de la función  $F$ . Por otra parte el parámetro  $\bar{a}$  se calcula en la forma:

$$\bar{a} = \left( \frac{T_i}{T_{\max}} \right)^{\bar{s}},$$

donde  $T_i$  es el número de iteración  $i$ -ésima,  $T_{\max}$  es el número total de iteraciones y  $\bar{s}$  corresponde a un parámetro de ajuste mayor a 1. A medida que el algoritmo avanza,  $\bar{a}$  va aumentando de manera tal que la probabilidad de aceptar aquellas soluciones factibles que no mejoren la función objetivo va disminuyendo.

**Paso 1.** Inicializar Variables de Diseño:

$$X_{\min} = X_0, \quad X_{\text{corriente}} = X_0, \quad F_{\min} = F(X_0), \quad F_{\text{corriente}} = F(X_0)$$

**Paso 2.** Repetir  $iter$  veces

**2.1** Calcular  $X' \in N(X_{\text{corriente}})$  (entorno de  $X$ ) y evaluar el cambio en la función objetivo

$$\Delta = F(X') - F_{\text{corriente}}$$

**2.2** Decidir si  $X'$  es aceptada

si  $\Delta < 0$  ir a **2.3**

si no generar una variable aleatoria  $p \in (0,1)$

si  $p < \exp\left(-\frac{\bar{a}\Delta}{|F_{\text{corriente}}|E_f}\right)$  ir a **2.3**

si no ir a **2.1**

**2.3** Actualizar  $X_{\text{corriente}} = X'$  y  $F_{\text{corriente}} = F(X')$ .

Decidir si corresponde al valor mínimo:

Si  $F(X') < F_{\min}$  ir a **2.4**

Si no, ir a **2.1**

**2.4** Actualizar  $X_{\min} = X'$  y  $F_{\min} = F(X')$  ir a **2.1**

**Figura 5.1:** Algoritmo de “Recocido Simulado”

Si bien el esquema que se muestra en la Figura 5.1 es solo explicativo, en el mismo puede notarse que el procedimiento utiliza dos variables iniciales de prueba,  $X_{\min}$  y  $X_{\text{corriente}}$  así como las correspondientes evaluaciones de la función objetivo,  $F_{\min}$  y  $F_{\text{corriente}}$ .  $X_{\min}$  almacena el valor mínimo obtenido hasta el momento y  $X_{\text{corriente}}$  el último valor aceptado.

El procedimiento comienza inicializando tales variables y el proceso de búsqueda consiste en una iteración de los pasos que se comentan a continuación.

Se busca un valor de prueba de las variables de diseño  $X'$  cercano al vector  $X_{corriente}$  (de manera aleatoria). Se evalúa la función objetivo en este valor de prueba y se la compara con el valor  $F_{corriente}$ . Si la función objetivo mejora (se hace menor) la variable  $X'$  sustituye a  $X_{corriente}$ . Sin embargo aún cuando la función objetivo empeore (aumente) todavía puede aceptarse la solución de prueba con cierta probabilidad. Este último paso es el que impide que la búsqueda quede atrapada en un mínimo local. Por supuesto como tal probabilidad se reduce con el transcurso de las iteraciones, las excursiones ascendentes van disminuyendo, lo que asegura que luego de un número de iteraciones adecuado la búsqueda se dirija hacia un mínimo local, presumiblemente coincidente (o cercano al global).

Claro está que la función objetivo correspondiente a las variables  $X_{corriente}$  se comparan en cada caso con la función objetivo que le corresponde a  $X_{min}$ , actualizando esta última a medida que se van encontrando valores menores.

## 5.2. PLANTEO DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

El problema de diseño óptimo (reformulado a partir de los términos de penalización) junto con la función de costo, desarrollados en el *Capítulo 2*, se formulan matemáticamente de la siguiente manera:

$$CT_p = CT + \sum_{i=1}^{NP} (\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C) \quad , \quad (5.1)$$

sujeto a:

$$0 \leq \beta_j \leq 1 \quad , \quad (Fx_j, Fy_j) \in R_j \quad ,$$

donde  $CT$  es el costo total definido de la siguiente manera:

$$CT = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{8988}{(1-r)vu} Q_j^s (1-\beta_j)^s + \frac{k}{vu} \sqrt{(Px_j - Fx_j)^2 + (Py_j - Fy_j)^2} \right] \quad , \quad (5.2)$$

y  $\lambda_A$  es el factor de penalización del DBO,  $\lambda_B$  del OD y  $\lambda_C$  del CF, para la  $i$ -ésima zona protegida, dados por:

$$\lambda_A = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{i \text{ DBO}} < C_{\text{adm DBO}} \\ 10^9 & \text{si } C_{i \text{ DBO}} \geq C_{\text{adm DBO}} \end{cases} \quad , \quad (5.3)$$

$$\lambda_B = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{i \text{ OD}} > C_{\text{adm OD}} \\ 10^9 & \text{si } C_{i \text{ OD}} \leq C_{\text{adm OD}} \end{cases} \quad , \quad (5.4)$$

$$\lambda_C = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{i \text{ CF}} < C_{\text{adm CF}} \\ 10^9 & \text{si } C_{i \text{ CF}} \geq C_{\text{adm CF}} \end{cases} \quad . \quad (5.5)$$

### 5.3. PROCEDIMIENTO PARA LA OBTENCIÓN DEL DISEÑO ÓPTIMO

A efectos de resolver el problema de diseño planteado en la sección anterior, a continuación se enuncian los pasos que intervienen en la estrategia propuesta de diseño óptimo, junto con las ecuaciones que deben ser resueltas (a modo de resumen).

#### Cálculos Preliminares

**Paso 1:** *Determinación de las Velocidades Hidrodinámicas.* Es necesario en primer lugar obtener las velocidades hidrodinámicas para el forzante de interés. Para ello se resuelven mediante el MEF la siguiente ecuación hidrodinámica (3.30) y condiciones de borde (CB) (3.31) definidas en el *Capítulo 3*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi W_x H}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi W_y H}{\alpha} \right), \quad (5.6)$$

CB:

$$q_n = \frac{-\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\phi W_n H}{\alpha}. \quad (5.7)$$

donde  $q_n$  es el flujo normal saliente al borde (conocido). Además  $\eta$  debe fijarse en algún punto.

Una vez obtenido el valor de  $\eta$  es posible calcular las velocidades horizontales de la corriente  $U$  y  $V$  (requeridas en el siguiente paso) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= \frac{-\rho g H}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\phi W_x}{\alpha} \\ V &= \frac{-\rho g H}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\phi W_y}{\alpha} \end{aligned}, \quad (5.8)$$

**Paso 2:** *Determinación de la Función Adjunta de Influencia:* Se resuelven, también mediante el MEF, las siguientes ecuaciones (4.40), (4.53) y (4.54) correspondientes al enfoque adjunto del problema de transporte para CF, DBO y OD por cada zona protegida considerada, junto con las respectivas condiciones de borde (4.38), (4.49-4.51), definidas en el *Capítulo 4*:

$$\begin{aligned} &\left( -UH \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{CF_i} H \omega \right) \\ &= \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \end{aligned}, \quad (5.9)$$

$$\text{CB:} \quad KH \frac{\partial \hat{G}_{CF_i}}{\partial n} + \tau_A HV_n \hat{G}_{CF_i} = 0 \quad , \quad (5.10)$$

donde  $\tau_A = 0$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\tau_A = 1$  en puntos de la superficie de salida de flujo.

$$\left( \begin{array}{l} -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,1}}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,1}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,1}}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,1}}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{DBO_{i,1}} H \sigma \end{array} \right) = \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \quad (5.11)$$

$$\text{CB:} \quad KH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,1}}}{\partial n} + \tau_B HV_n \hat{G}_{DBO_{i,1}} = 0 \quad , \quad (5.12)$$

donde  $\tau_B = 0$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\tau_B = 1$  en puntos de la superficie de salida de flujo.

$$\left( \begin{array}{l} -UH \frac{\partial \hat{G}_{OD_{i,2}}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{OD_{i,2}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD_{i,2}}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{OD_{i,2}}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{OD_{i,2}} H \gamma \end{array} \right) = \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \quad (5.13)$$

$$\left( \begin{array}{l} -UH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,2}}}{\partial x} - VH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,2}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,2}}}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( HK \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,2}}}{\partial y} \right) + \hat{G}_{DBO_{i,2}} H \sigma + \hat{G}_{OD_{i,2}} H \sigma \end{array} \right) = 0$$

$$\text{CB:} \quad \begin{array}{l} \hat{G}_{OD_{i,2}} = 0 \\ \hat{G}_{DBO_{i,2}} = 0 \end{array} \quad , \quad (5.14)$$

$$\begin{array}{l} KH \frac{\partial \hat{G}_{OD_{i,2}}}{\partial n} + \tau_C HV_n \hat{G}_{OD_{i,2}} = 0 \\ KH \frac{\partial \hat{G}_{DBO_{i,2}}}{\partial n} + \tau_C HV_n \hat{G}_{DBO_{i,2}} = 0 \end{array} \quad . \quad (5.15)$$

Las expresiones (5.14) valen en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que las expresiones (5.15) se aplican para bordes impermeables (con  $\tau_C = 0$ ) y en puntos de superficie de salida de flujo (con  $\tau_C = 1$ ).

### **Proceso de Búsqueda Mediante el Método de SA:**

**Paso 3:** *Variables Iniciales de Prueba:* Se inicializan las variables de diseño de acuerdo al algoritmo “recocido simulado” mostrado en la Figura 5.1 de la siguiente manera:

Inicializar Variables de Diseño:

$$X_{min}=X_0, \quad X_{corriente}=X_0, \quad CT_{min}=CT(X_0), \quad CT_{corriente}=CT(X_0)$$

donde  $CT$  es la función objetivo y  $X$  el conjunto de variables de diseño ( $\beta_j, Fx_j, Fy_j$ ).

Se repiten los siguientes pasos (4 al 9) con un número suficiente de iteraciones de acuerdo al algoritmo mostrado en la Figura 5.1. Al finalizar el proceso iterativo los valores óptimos vendrán dados por  $X_{min}$  y  $CT_{min}$ .

**Paso 4:** *Determinación de nuevos valores de prueba de las variables de diseño  $X'$ :*

$$X' = X_{corriente} + R_A \Delta X \quad ,$$

donde  $R_A$  es una variable aleatoria entre -1 y 1 y  $\Delta X$  es el tamaño del entorno de búsqueda.

**Paso 5:** *Determinación de los Coeficientes de Influencia:* Se definen los siguientes coeficientes de influencia, a partir de las funciones adjuntas de influencia obtenidas en el Paso 2 para las coordenadas de descarga asumidas ( $Fx_j, Fy_j$ ) con las variables de diseño calculadas:

$$\hat{G}_{CF_{ij}} = \hat{G}_{CF_i} (Fx_j, Fy_j) \quad , \quad (5.16)$$

$$\hat{G}_{1_{DBO_{ij}}} = \hat{G}_{DBO_{i,1}} (Fx_j, Fy_j) \quad , \quad (5.17)$$

$$\hat{G}_{2_{DBO_{ij}}} = \hat{G}_{DBO_{i,2}} (Fx_j, Fy_j) \quad , \quad (5.18)$$

$$\hat{G}_{OD_i} = \int_{\Omega} \left[ \hat{G}_{OD_{i,2}} (s,t) H(s,t) \right] dsdt \quad . \quad (5.19)$$

**Paso 6: Determinación de las Concentraciones en Zonas Protegidas:** Se calculan las concentraciones en las áreas de resguardo ambiental, haciendo uso de los coeficientes de influencia definidos en el paso anterior, para los factores de reducción  $\beta_j$  asumidos, mediante las siguientes expresiones:

$$C_{CF}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N C_{CF_j}^0 Q_j \beta_j \hat{G}_{CF_j} \quad , \quad (5.20)$$

$$C_{DBO}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^N C_{DBO_j}^0 Q_j \beta_j \hat{G}_{1DBO_j} \quad , \quad (5.21)$$

$$C_{OD}(x_i, y_i) = C_{OD}^0 + \sum_{j=1}^N C_{DBO_j}^0 Q_j \beta_j \hat{G}_{2DBO_j} + \hat{G}_{OD_i} \gamma (d_s - C_{OD}^0) \quad . \quad (5.22)$$

**Paso 7: Evaluación de la Función de Costo Penalizada:** Se evalúa la función (5.1).

**Paso 8: Cálculo del incremento de la Función de Costo:** Se calcula tal diferencia de la siguiente manera:

$$\Delta = CTp(X') - CTp(X_{corriente}) \quad .$$

**Paso 9: Evaluación de la Posible Aceptación de la Variable de Prueba:** Se decide si la variable de prueba es aceptada de acuerdo al siguiente criterio:

- si  $\Delta < 0$  ,  $X'$  es aceptada,  
en caso contrario se generará una variable aleatoria  $p \in (0,1)$ ,  
si  $p < \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}\Delta}{|CT_{corriente}|E_f}\right)$  ,  $X'$  es aceptada.

**Paso 10: Actualización de las variables:** Se actualizan las variables según la decisión obtenida en el paso anterior:

- si la  $X'$  fue aceptada, se actualizan las variables corrientes:  
 $X_{corriente} \leftarrow X'$  y  $CTp_{corriente} \leftarrow CT(X')$ .
- Se comparan las variables corrientes actualizadas con las variables mínimas:  
si  $CTp_{corriente} < CT_{min}$  se actualizan las siguientes variables:  
 $X_{min} \leftarrow X_{corriente}$  y  $CT_{min} \leftarrow CTp_{corriente}$

### **Determinación de la Distribución Espacial de las Concentraciones de los Indicadores:**

**Paso 11:** Finalmente con las variables óptimas de diseño:

$$X_{min} = (\beta_j^+, Fx_j^+, Fy_j^+) \quad ,$$

se resuelven las siguientes ecuaciones de transporte de contaminantes para CF, DBO y OD, junto con las condiciones de borde correspondientes, utilizando el MEF:

$$\left\{ \begin{array}{l} UH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial y} \right) + H\omega C_{CF} = \\ \sum_{j=1}^N C_{CF_j}^0 Q_j \beta_j^+ \delta(x - Fx_j) \delta(y - Fy_j) \end{array} \right. , \quad (5.23)$$

$$\text{CB:} \quad -KH \frac{\partial C_{CF}}{\partial n} + \varepsilon HV_n C_{CF} = 0 , \quad (5.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} UH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial y} \right) + H\sigma C_{DBO} = \\ \sum_{j=1}^N C_{DBO_j}^0 Q_j \beta_j^+ \delta(x - Fx_j) \delta(y - Fy_j) \end{array} \right. , \quad (5.25)$$

$$\text{CB:} \quad -KH \frac{\partial C_{DBO}}{\partial n} + \varepsilon HV_n C_{DBO} = 0 , \quad (5.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} UH \frac{\partial C_{OD}}{\partial x} + VH \frac{\partial C_{OD}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C_{OD}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C_{OD}}{\partial y} \right) + \\ H\sigma C_{DBO} - \gamma H(d_s - C_{OD}) = 0 \end{array} \right. , \quad (5.27)$$

$$\text{CB:} \quad C_{OD} = C_{OD}^0 , \quad (5.28)$$

$$-KH \frac{\partial C_{OD}}{\partial n} + \varepsilon HV_n C_{OD} = 0 , \quad (5.29)$$

donde para las condiciones de borde (5.24) y (5.26),  $V_n$  es la velocidad normal al borde del dominio,  $\varepsilon = 1$  en bordes impermeables y en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que  $\varepsilon = 0$  en puntos de la superficie de salida de flujo. Y para la condición (5.28) se asume un valor conocido,  $C_{OD}^0$  aguas arriba, de concentración de OD en puntos de la superficie de entrada de flujo, mientras que para la (5.29)  $\varepsilon = 1$  para bordes impermeables y  $\varepsilon = 0$  para puntos de la superficie de salida de flujo.

Un esquema del procedimiento de diseño óptimo descrito se muestra en la Figura 5.2.

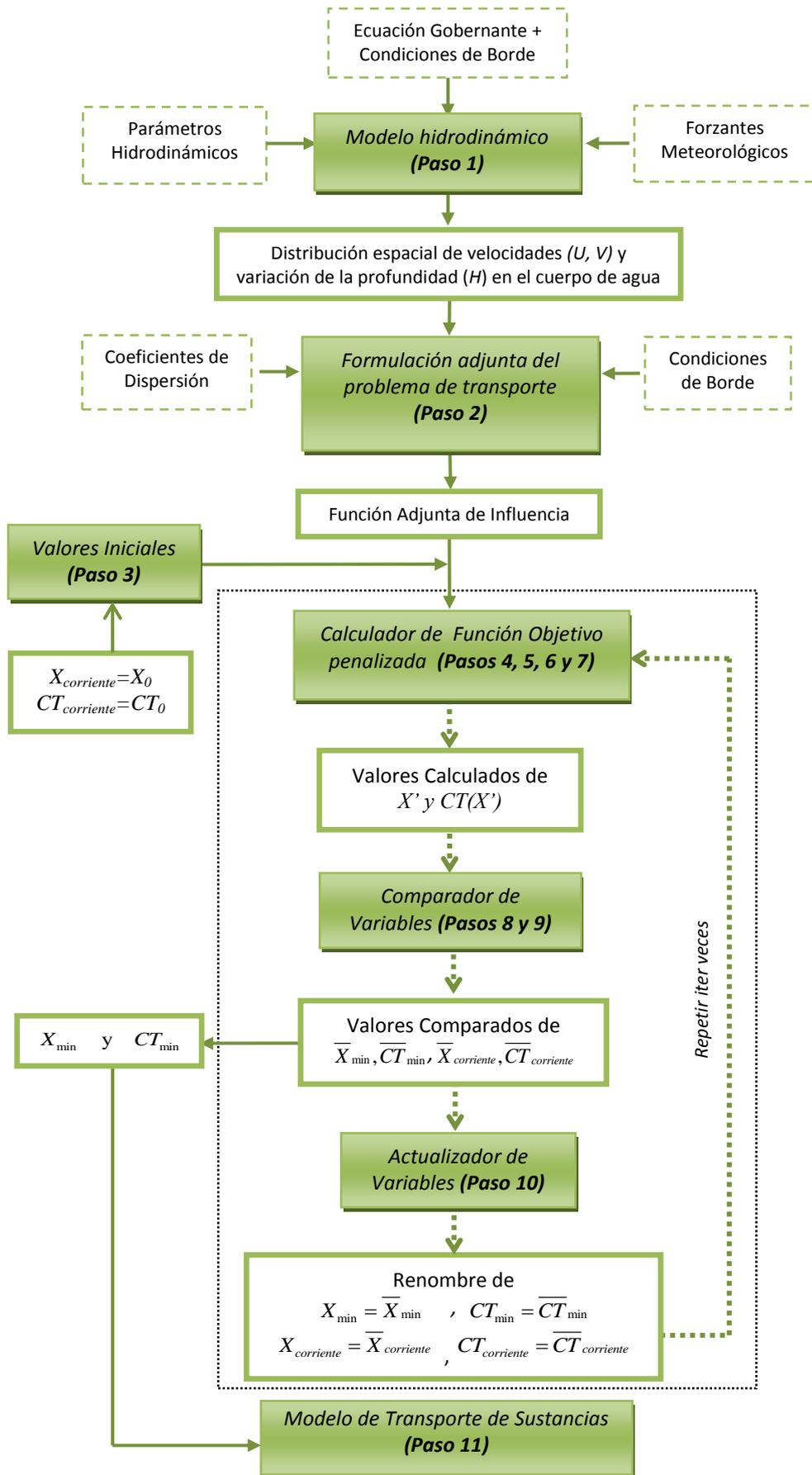


Figura 5.2: Proceso de diseño óptimo.

## 5.4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL EN FlexPDE

### 5.4.1. Descripción general del programa FlexPDE

En este programa el planteo de un problema de contorno (o de valor inicial) se realiza mediante un texto, denominado descriptor (escrito por el usuario). FlexPDE convierte esa descripción en un modelo de elementos finitos para la resolución de problema. Las soluciones pueden presentarse mediante diferentes salidas gráficas.

Este programa puede resolver sistemas de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales lineales, no lineales, de 1º y 2º orden en una, dos y tres dimensiones tanto para problemas estacionarios como dependientes del tiempo.

Como aspecto específico, tal sistema no está basado en una librería de modelos predefinida, sino que la elección de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales y la geometría del dominio deben ser establecidas por el usuario. Además permite la definición de regiones con distintas propiedades, por lo que muchos problemas diferentes pueden ser resueltos con el mismo software.

Básicamente se trata de un ambiente computacional para la resolución de problemas iniciales y de contorno, que comprende las diversas etapas necesarias para el análisis: un generador de malla, un simulador basado en elementos finitos, y un sistema gráfico para presentar los resultados.

Además, posee un estimador de error relativo que gobierna automáticamente el remallado del dominio hasta alcanzarse un error (rms) estimado del orden de la tolerancia solicitada por el usuario.

Para comenzar a trabajar se escribe en forma de texto, denominado descriptor, los principales datos que necesita el programa para definir matemáticamente un problema de contorno. En la Figura 5.3, se indican las principales secciones de un descriptor, y en la Figura 5.4 se presenta un ejemplo del descriptor del FlexPDE.

La forma en que se describe el problema en el área de escritura es similar a la empleada cuando se desea resolver el problema de modo manual. El programa tiene asignada algunas letras y palabras claves que corresponden a la definición de ciertas funciones, variables, operadores o parámetros y no hace diferencia entre caracteres alfabéticos en mayúscula o minúscula empleados para tales términos. Así por ejemplo para expresar la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

se debe escribir:

$$dx(u)+dy(v)+dz(w)=0$$

y si se quiere expresar una derivada segunda, basta con escribir en el descriptor  $dxx(u)$ .

Sección	Descripción
<b>TITLE</b>	Título del problema.
<b>SELECT</b>	Se definen: tipo de aproximación, métodos de integración, error máximo, etc.
<b>VARIABLES</b>	Se definen las variables del problema.
<b>DEFINITIONS</b>	Se definen constantes y otras entidades de utilidad.
<b>INITIAL VALUES</b>	Se definen los valores iniciales de un problema variable en el tiempo o también en problemas estacionales no lineales.
<b>EQUATIONS</b>	Se definen las ecuaciones diferenciales de equilibrio del problema.
<b>BOUNDARIES</b>	Se definen las condiciones de borde y el contorno del problema.
<b>TIME</b>	Se especifica el rango de variación de las variables en el tiempo.
<b>MONITORS</b>	Se ven las evoluciones temporales en pasos.
<b>PLOTS</b>	Se definen las salidas gráficas que se desean.
<b>HISTORIES</b>	Se muestra la evolución de una variable en el tiempo.
<b>END</b>	Fin del archivo descriptor.

Figura 5.3: Esquema básico de un archivo descriptor en FlexPDE.

Por otra parte tiene incorporados operadores diferenciales tales como Divergencia y Gradiente, los cuales se escriben como *Div* y *Grad* respectivamente.

Cuando se desee realizar comentarios, estos pueden colocarse libremente en el texto mediante el uso de llaves  $\{ \}$  para hacer aislar las líneas escritas entre éstas, o empleando el símbolo de la exclamación  $!$  para ignorar el resto de la línea.

```

FlexPDE Professional Version 5.0.8.3D
File Controls View Stop Edit Help
Ejemplo
Status
TITLE 'Ejemplo' { identificación del problema }
COORDINATES cartesian2 { sistema de coordenadas, 1D,2D,3D, etc }
VARIABLES { variables del sistema }
A { nombre de la/s variable/s }
! SELECT { métodos de control }
! DEFINITIONS { definición de parámetros }
! INITIAL VALUES
EQUATIONS { EDP, una para cada variable }
div(grad(A))=0 { planteo de la EDP }
BOUNDARIES { definición del dominio }
REGION 1 { región del dominio }
START(0,0) { comienzo del dominio }
LINE TO (1,0) TO (1,1) TO (0,1) TO CLOSE
! TIME 0 TO 1 { si depende del tiempo }
MONITORS { mostrar progreso }
PLOTS { salida gráfica de resultados }
CONTOUR(A) { formato de gráfico }
END
  
```

Figura 5.4: Descriptor del FlexPDE.

En el Anexo V se describe con mayor detalle el funcionamiento del programa FlexPDE.

#### 5.4.2. Aspectos principales de la implementación en FlexPDE

Como se comentó, para resolver cada modelo se debe escribir en un archivo de texto llamado “descriptor” los principales datos. De esta forma, considerando las etapas que comprende el procedimiento de cálculo explicado en la sección anterior, el procedimiento de diseño óptimo implementado en el programa FlexPDE comienza calculando en forma secuencial los diferentes descriptores, uno por cada etapa, almacenados en un archivo tipo “batch”. El comando *batch* es un texto donde se detalla en forma de lista la secuencia de ejecución de los distintos descriptores. Haciendo uso de operaciones de transferencia y de recepción denominadas “*transfer in/out*”, es posible calcular determinados valores y enviarlos a otros descriptores que los requieran. Los datos transferidos se interpolan en la nueva malla de elementos finitos generada en el descriptor siguiente.

Es posible comprender la implementación computacional en FlexPDE del presente modelo haciendo uso de la Figura 5.2, donde los recuadros verdes representan a los descriptores del programa, los recuadros de línea continua corresponden a los datos calculados que son transferidos al siguiente descriptor, y los recuadros de línea discontinua corresponden a las funciones matemáticas y parámetros necesarios para definir el problema.

De esta forma las velocidades calculadas en el descriptor denominado “*Modelo hidrodinámico*” son transferidas al descriptor “*Formulación adjunta del problema de transporte*” ingresando como coeficientes de la ecuación adjunta donde se interpolan en la nueva malla para el cálculo de la función de influencia. Luego, siguiendo la secuencia diagramada en la Figura 5.2, la función de influencia ingresa de igual manera al “*Calculador función objetivo penalizada*” para obtener los coeficientes de influencia, que dependen de las coordenadas de descarga. Sin embargo los descriptores *Comparador de variables*, *Actualizador de variables* y *Valores Iniciales* no resuelven ningún problema de contorno, la función de estos descriptores es de comparar y renombrar valores constantes. Por lo tanto la generación de una malla de elementos finitos no es necesaria. No obstante esto, como la sección *BOUNDARIES* es obligatoria (porque el programa está diseñado para la formulación de un problema de contorno), se define en tales descriptores un dominio ficticio y sencillo, por ejemplo un cuadrado con un número mínimo de celdas a los

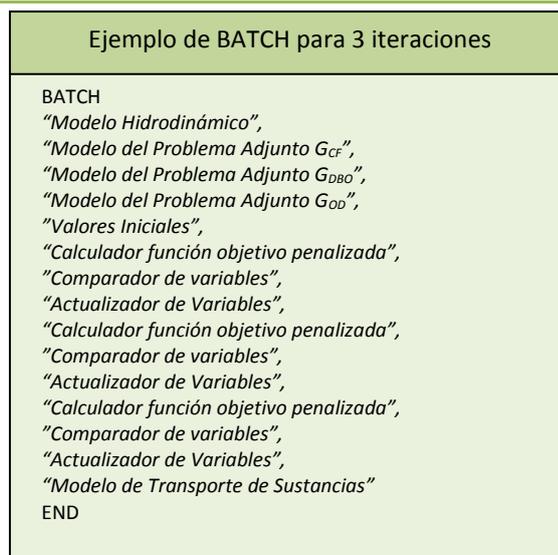
efectos de realizar la operación de comparación y renombre, acelerando tiempos de cálculo.

Como muchos de los datos especificados dentro de la sección DEFINITIONS son comunes a varios descriptores, los mismos son agrupados en un único archivo. De esta forma cada descriptor puede solicitar tales datos mediante el uso de la función *#include*. Esta estructura resulta efectiva ya que permite realizar cambios en los valores de los parámetros, guardados en ese archivo, sin necesidad de abrir cada descriptor y efectuarlos en cada uno.

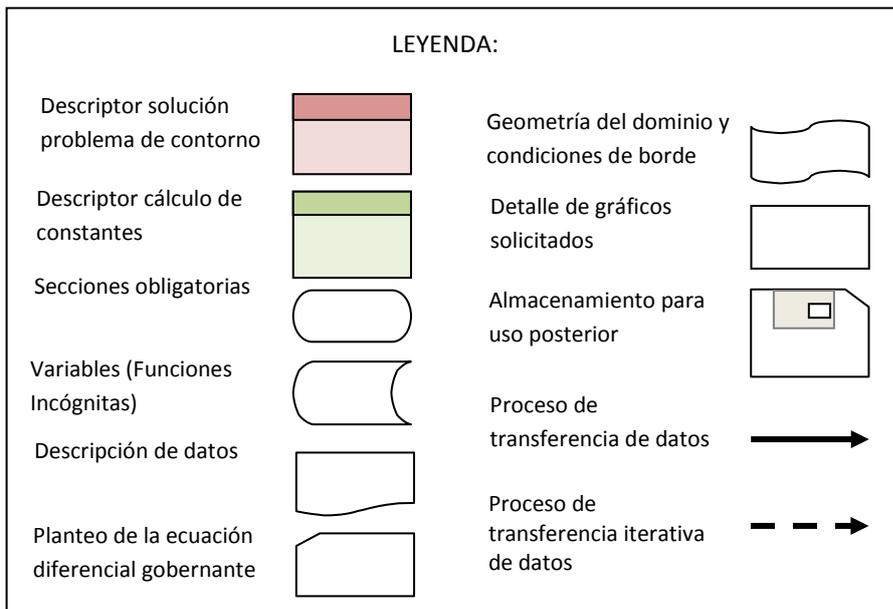
Un esquema más detallado sobre la implementación del procedimiento para la obtención del diseño óptimo en el programa computacional FlexPDE se presenta a continuación (Figura 5.6).

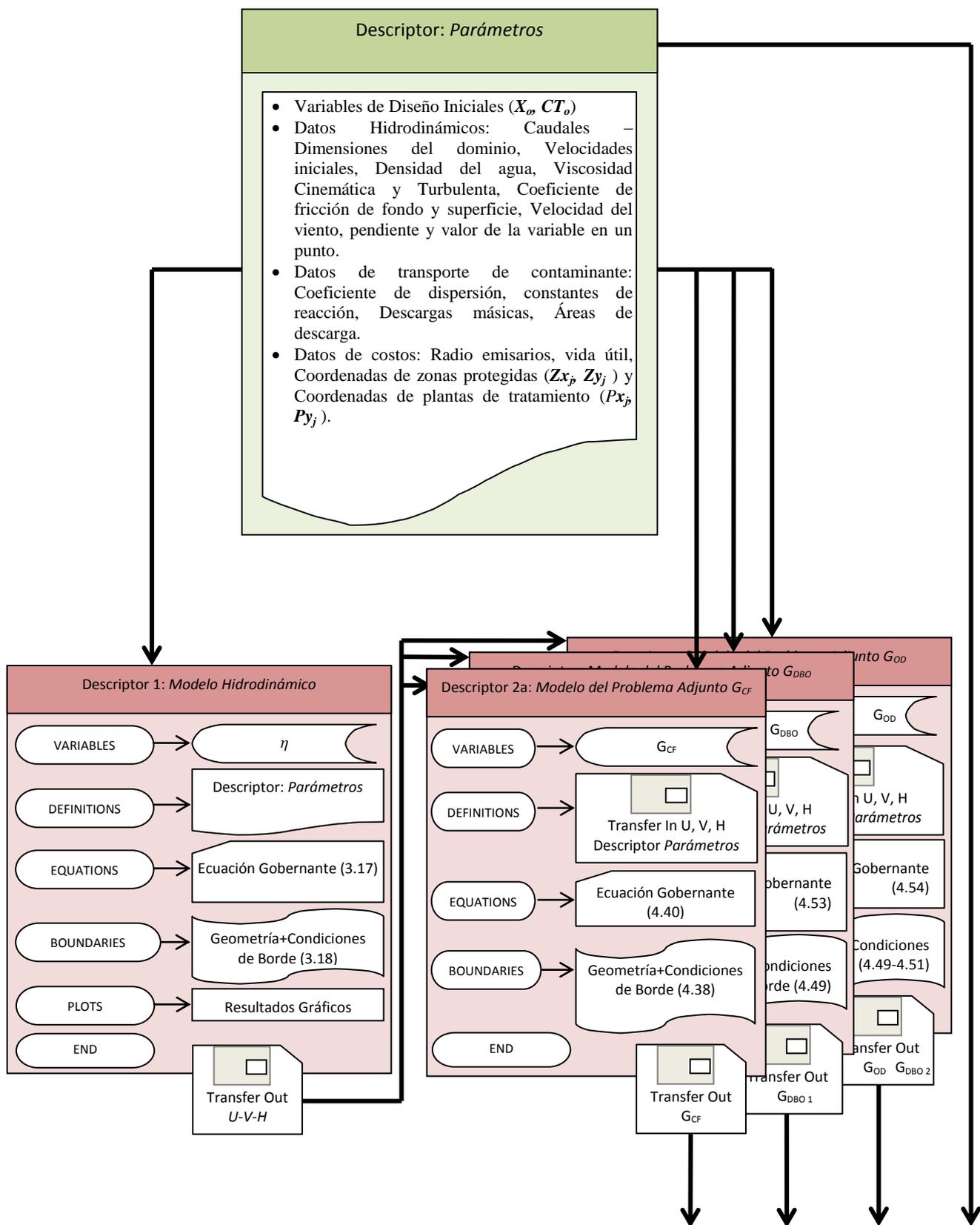
Mediante la ilustración de módulos, que simbolizan a los descriptores del programa, se resumen las secciones utilizadas por cada uno de ellos como también los procesos de cálculo, de operación de transferencia de datos, de comparación y de renombre. Este último se necesita para poder actualizar los valores de las variables de diseño ( $X_{\min}$ ,  $X_{\text{corriente}}$ ,  $CT_{\min}$  y  $CT_{\text{corriente}}$ ). Como la secuencia se realiza mediante el comando BATCH, los valores calculados en los archivos de entrada y salida correspondiente al descriptor “*Actualizador de variables*” se sobre escriben. Un ejemplo del comando BATCH para 3 iteraciones se muestra en la Figura 5.5.

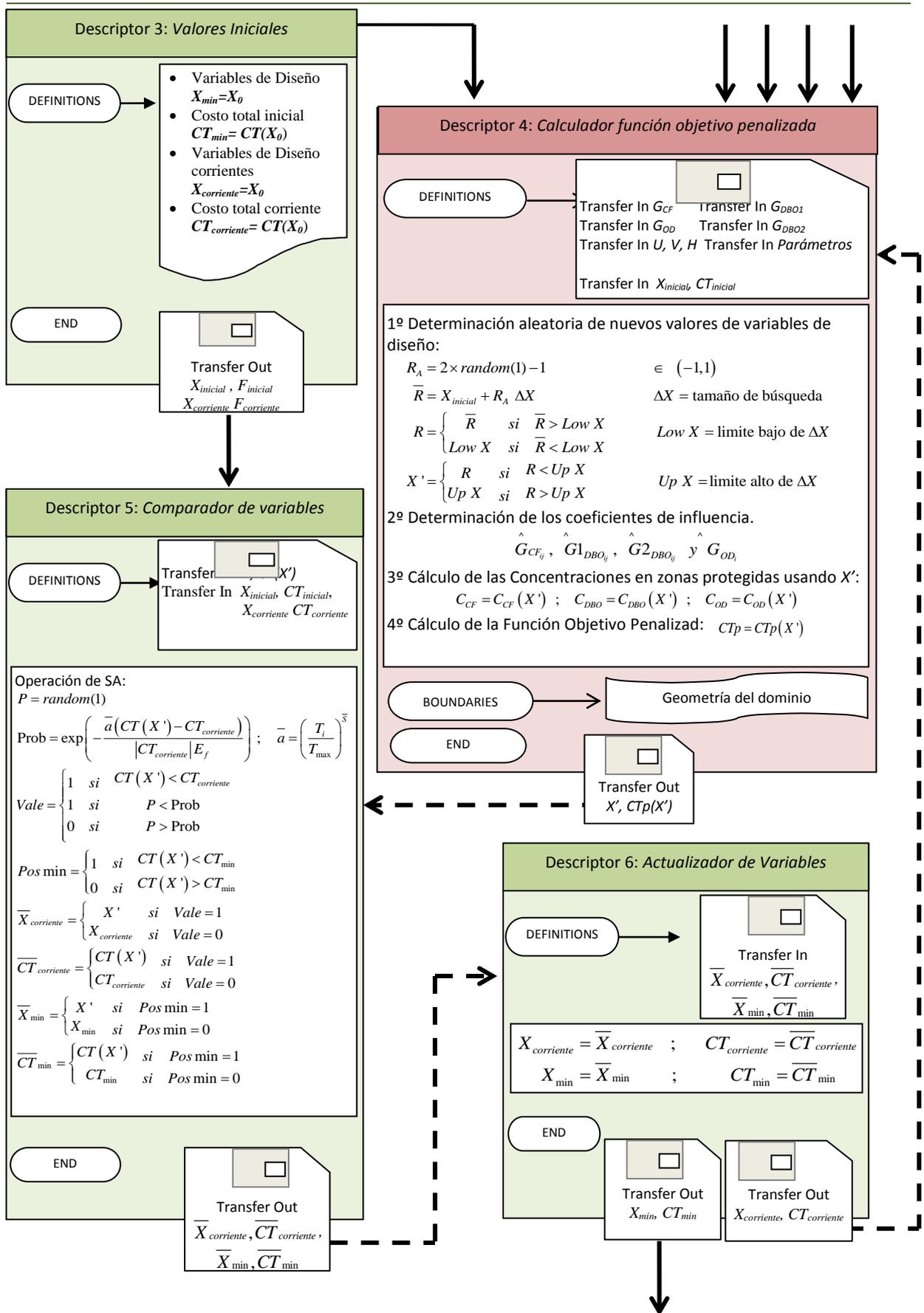
Finalmente se explicarán las particularidades de los módulos.

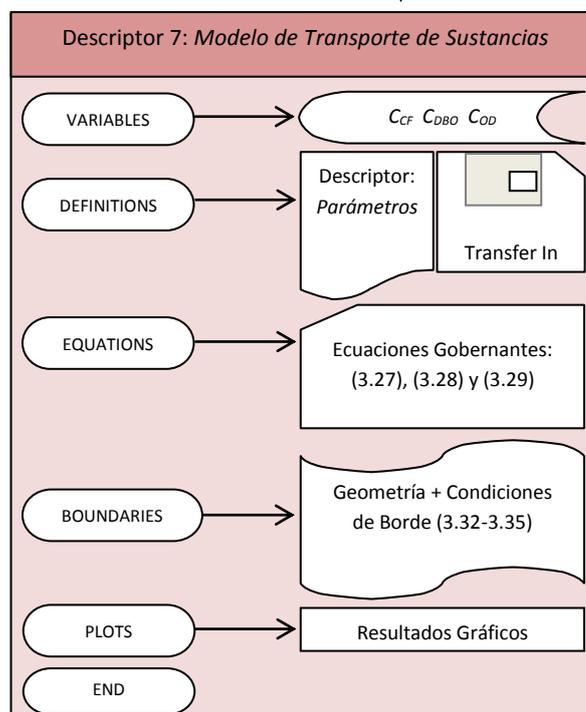


**Figura 5.5:** Ejemplo de secuencia BATCH.









**Figura 5.6:** Esquema de procedimiento utilizado en FlexPDE.

Si bien los módulos presentados son autoexplicativos, se efectúan algunas observaciones que pueden aclarar mejor el procedimiento de cálculo:

- **Descriptor 3: “Valores Iniciales”.** Este descriptor es empleado por única vez para efectuar la operación de inicialización del proceso iterativo.
- **Descriptor 4: “Calculador Función Objetivo Penalizada”.** En este descriptor se calculan las variables de diseño  $X'$  mediante una búsqueda aleatoria, recordando que  $X'$  representa a las variables de diseño  $Fx_j$ ,  $Fy_j$  y  $\beta_j$ . Para ello se emplea la función  $random(1)$  que genera valores aleatorios entre 0 y 1. Luego, para poder determinar un entorno de búsqueda cercano a un valor inicial se definen las siguientes expresiones:

$$R_A = 2 \times random(1) - 1$$

$$\bar{R} = X_{inicial} + R_A \Delta X$$

De esta forma, para buscar las coordenadas en  $x$ , si la función  $random$  genera un valor de 0,  $R_A$  valdrá -1. Luego, por ejemplo, si se determina un tamaño de búsqueda de 150 metros y un valor de coordenada inicial en 1000, entonces

$\bar{R}$  corresponderá a la coordenada 850, y si se generase un valor de 1, entonces  $\bar{R}$  será 1150.

Por otra parte, si los valores calculados se escapan de la zona de búsqueda, los mismos son redefinidos a sus valores límites. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$R = \begin{cases} \bar{R} & \text{si } \bar{R} > Low X \\ Low X & \text{si } \bar{R} < Low X \end{cases}$$

$$X' = \begin{cases} R & \text{si } R < Up X \\ Up X & \text{si } R > Up X \end{cases}$$

donde  $Low X$  y  $Up X$  corresponden a valores límites por debajo y por encima de las variables calculadas.

Con la variable  $X'$  establecida es posible calcular los coeficientes de influencia (con  $Fx_j, Fy_j$ ):

$$\hat{G}_{CF_{ij}}, \hat{G}_{1_{DBO_{ij}}}, \hat{G}_{2_{DBO_{ij}}} \text{ y } \hat{G}_{OD_i}$$

Luego, con tales coeficientes y con valores establecidos para  $\beta_j$ , se determinan las concentraciones en las zonas protegidas:

$$C_{CF} = C_{CF}(X') ; C_{DBO} = C_{DBO}(X') ; C_{OD} = C_{OD}(X')$$

Finalmente con tales valores se calcula el costo total penalizado:

$$CTp = CTp(X')$$

- **Descriptor 5: “Comparador de variables”.** En este descriptor se comparan los valores de las variables calculadas en el descriptor 4,  $X'$  y  $CTp(X')$  correspondiente al paso 9 explicado en la sección 5.3.
- **Descriptor 6: “Actualizador de variables”.** En este descriptor se renombran las variables comparadas en el descriptor anterior, a los efectos de que las mismas puedan ingresar al descriptor 4 y seguir con el proceso de búsqueda aleatoria.
- **Descriptor 7: “Modelo de transporte de sustancias”.** Una vez finalizado el proceso de iteración, las variables comparadas en el descriptor 6  $X_{min}$  y  $CT_{min}$ , ingresan como dato para resolver las ecuaciones de transporte para CF, DBO y OD a los efectos de determinar la distribución espacial de las concentraciones de tales indicadores.

---

## CAPITULO VI:

### RESULTADOS NUMÉRICOS

---

Se presentan los resultados numéricos obtenidos para diferentes ejemplos con el propósito de mostrar la efectividad del programa de elementos finitos FlexPDE en la resolución de las ecuaciones planteadas en los capítulos anteriores. Para ello, se realizan comparaciones de tales resultados con aquellos obtenidos otros modelos.

En particular para el problema hidrodinámico se efectúa una comparación de los resultados numéricos con otros determinados con un modelo diferente aunque equivalente basado en funciones de corriente. Luego se plantean dos ejemplos para el problema de transporte, uno para un caso unidimensional y el otro para un caso bidimensional, donde se efectúan las correspondientes comparaciones entre soluciones obtenidas en forma numérica y soluciones analíticas exactas, para ambos casos, provistas por literatura.

Luego se comparan las soluciones numéricas obtenidas con el modelo de transporte directo y con el enfoque adjunto respectivamente, con el objeto de ilustrar la consistencia de ambos modelos en el programa computacional empleado.

Finalmente se ilustran diferentes ejemplos de diseño óptimo. Los mismos son comparados con otros enfoques de diseño a los efectos de mostrar la eficiencia del modelo computacional de diseño óptimo propuesto en la presente tesis.

## 6.1. EJEMPLO 1: SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA HIDRODINÁMICO.

En el presente ejemplo se comparan los resultados numéricos para las velocidades hidrodinámicas obtenidas con dos modelos diferentes. Uno corresponde al modelo desarrollado en el *Capítulo 3* y el otro se basa en el uso de funciones de corriente. Ambos se resuelven mediante el programa FlexPDE.

Se pretende ilustrar la eficiencia del programa en la resolución numérica de un problema desde dos puntos de vista matemáticamente diferentes (aunque similares).

Se considera un ejemplo de un tramo de un río de 20 kilómetros de largo y 3 kilómetros de ancho, con una profundidad aproximada de 7 m y una isla en su interior.

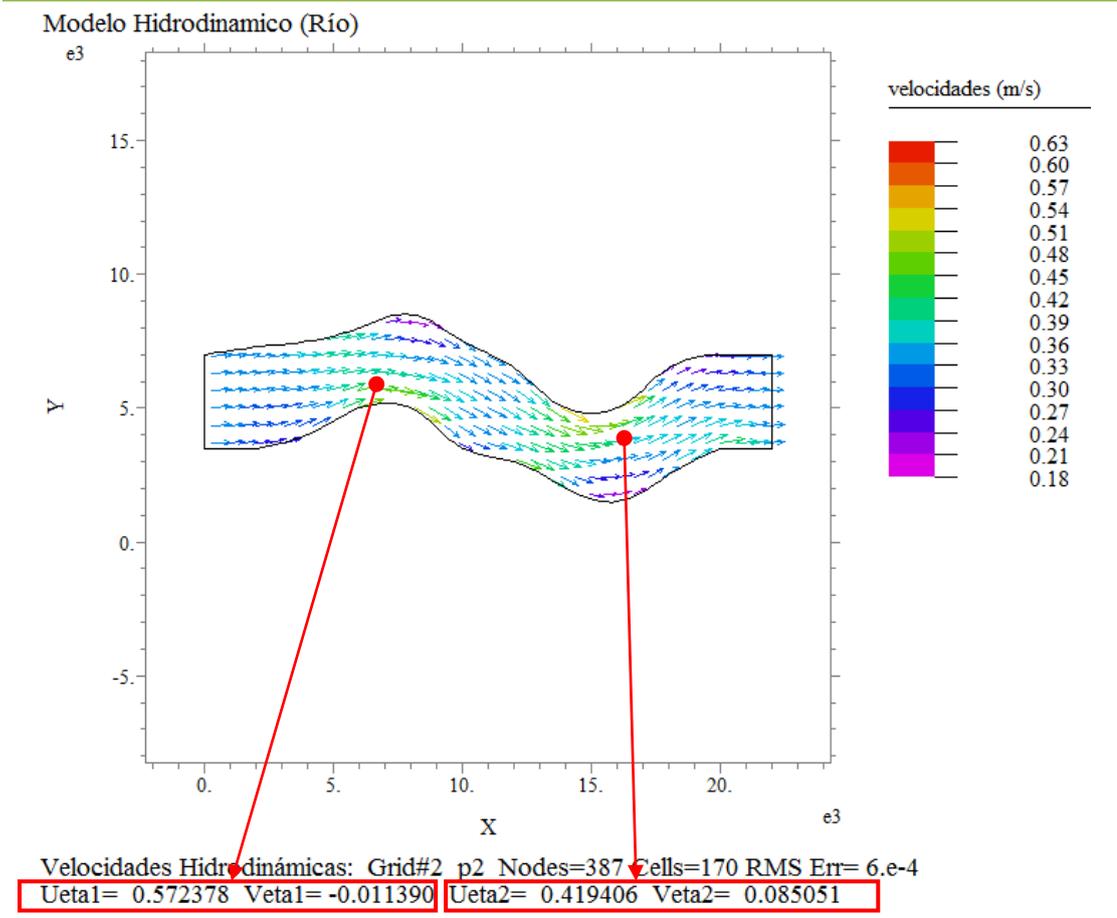
### 6.1.1. Resultados obtenidos mediante el Modelo Hidrodinámico.

Para calcular las velocidades hidrodinámicas se emplea la ecuación hidrodinámica gobernante para aguas poco profundas (3.17) junto con las correspondientes condiciones de borde (3.18) y los siguientes parámetros hidrodinámicos:

- Caudales de entrada ( $Q_e$ ) y salida ( $Q_s$ ): 7500 m<sup>3</sup>/s respectivamente (con velocidades uniformes).
- Ancho (m) de entrada y salida ( $L_e$ ) y ( $L_s$ ): 3500 m respectivamente,
- Coeficiente de ficción de fondo ( $C_b$ ): 0.0025.

Tal información es ingresada en el descriptor de FlexPDE en las secciones correspondientes.

Se solicitó en el descriptor el cálculo del valor de las velocidades en dos puntos llamados ( $Ueta1$ ,  $Veta1$  y  $Ueta2$ ,  $Veta2$ ) correspondientes a las direcciones en  $x$  e  $y$ . En la Figura 6.1 se observa la ubicación de tales puntos (indicados con círculos) y los valores respectivos señalados al pie del mismo.



**Figura 6.1:** Campo de Velocidades (modelo hidrodinámico en función de ETA)

### 6.1.2. Resultados obtenidos usando una Función de Corriente.

Se introduce en las ecuaciones (3.11) y (3.12) una función de corriente a los efectos de que las velocidades satisfagan la ecuación continuidad (3.10). Su definición viene dada por:

$$U_{psi} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad (6.1)$$

$$V_{psi} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad (6.2)$$

donde  $\psi$  es la función de corriente.

Diferenciando la ecuación (3.11) con respecto a  $y$ , y la ecuación (3.12) con respecto a  $x$ , reemplazando luego las expresiones (6.1) y (6.2) en los términos correspondientes a las velocidades promediadas y despreciando el efecto del viento, se llega a la siguiente ecuación que modela la velocidad en aguas poco profundas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\beta} \nu}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\beta} \nu}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad , \quad (6.3)$$

recordando que  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $H$  la profundidad definida en (3.1),  $\rho$  la densidad y  $\bar{\beta}$  se define como:

$$\bar{\beta} = \frac{\rho C_b H}{\mu} \left( \sqrt{U^2 + V^2} \right) . \quad (6.4)$$

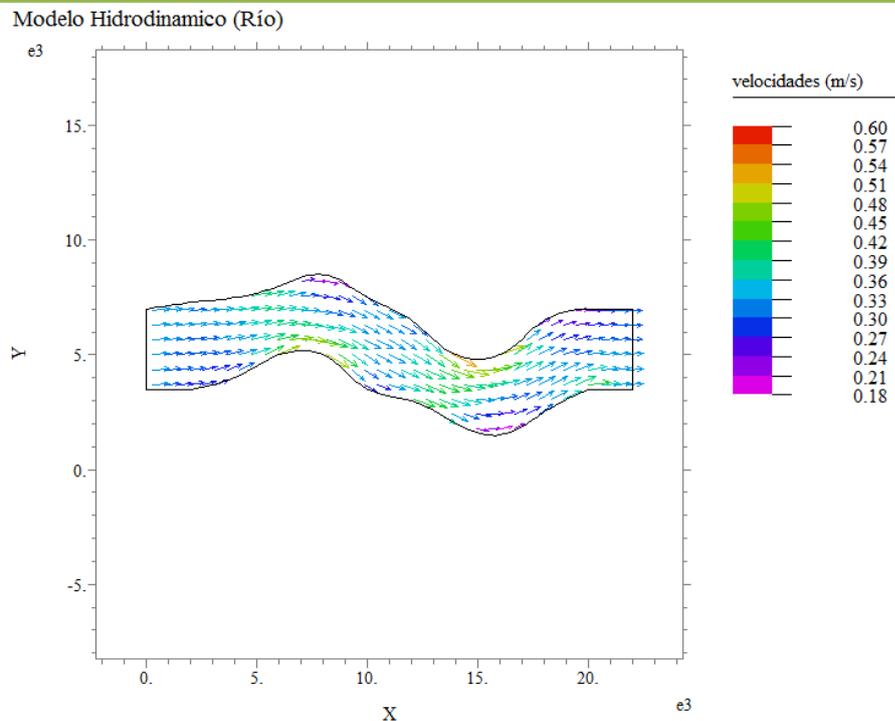
La ecuación (6.3) está sujeta a las apropiadas condiciones de borde (Awruch, 1976).

El presente problema también es formulado mediante el programa FlexPDE para los datos especificados en la sección anterior.

Puede observarse en la Figura 6.2, que la distribución del campo de velocidades es concordante con el mostrado en la Figura 6.1, y las velocidades en los puntos señalados anteriormente son aproximadamente iguales a los valores obtenidos con el modelo hidrodinámico precedente (ver Tabla 6.1).

Puntos de evaluación	Velocidades	Modelo Hidrodinámico ( $\eta$ )	Modelo Hidrodinámico ( $\psi$ )
1	U	0.56	0.55
	V	0	0.03
2	U	0.42	0.40
	V	0.08	0.09

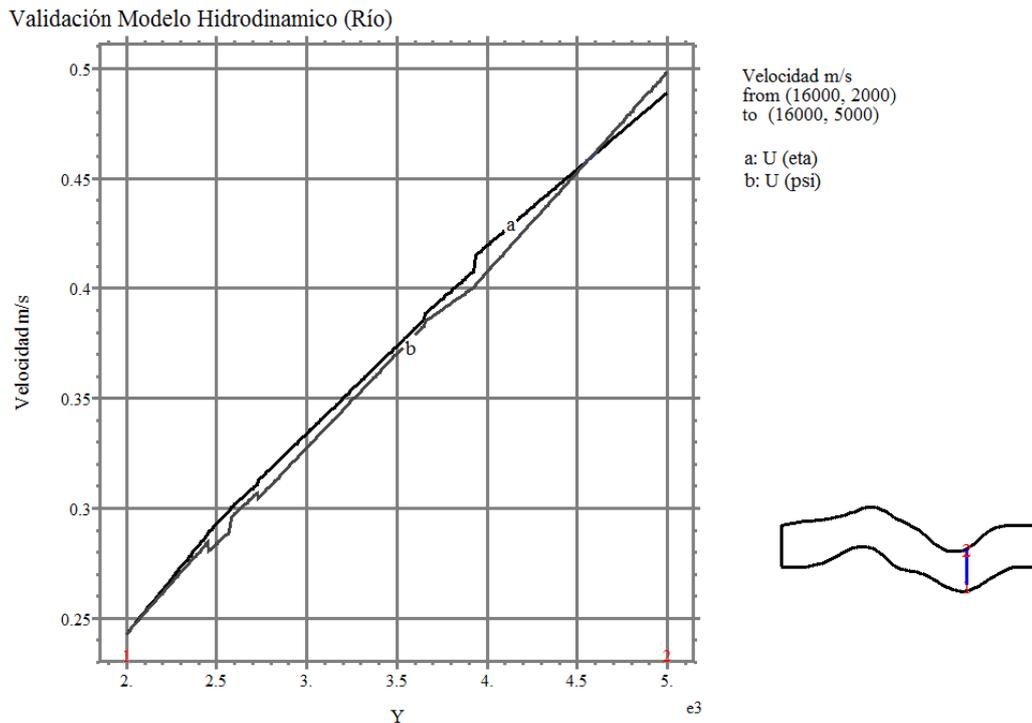
Tabla 6.1: Comparación de resultados hidrodinámicos.



Velocidades Hidrodinámicas: Grid#2 p2 Nodes=387 Cells=170 RMS Err= 6.e-4  
Upsi1= 0.555323 Vpsi1= -0.031342 Upsil2= 0.407272 Vpsi2= 0.093127

**Figura 6.2:** Campo de Velocidades (modelo hidrodinámico en función de PSI)

En la Figura 6.3 se comparan los resultados obtenidos mediante los dos modelos para las velocidades en la dirección de  $x$  perpendiculares a la línea de la sección que se indica en la parte inferior derecha. Puede observarse que tal comparación arrojó soluciones prácticamente coincidentes entre sí, como era de esperar, con errores máximos del mismo orden que el error tolerable solicitado.



**Figura 6.3:** Comparación de velocidades obtenidas con el modelo hidrodinámico propuesto y el modelo basado en funciones de corriente.

## 6.2. EJEMPLO 2: UN PROBLEMA DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL.

El objeto de este ejemplo es mostrar la precisión del programa FlexPDE en la resolución de un problema gobernado por una ecuación de unidimensional de advección-difusión, mediante una comparación entre una solución numérica y otra analítica.

Se considera el caso unidimensional de la ecuación de transporte dada por la siguiente expresión:

$$U \frac{dC}{dx} - K \frac{d^2C}{dx^2} + R_d C = 0 \quad , \quad (6.5)$$

donde  $C$  es la concentración del contaminante,  $U$  la velocidad del fluido,  $K$  el coeficiente de difusión y  $R_d$  la degradación de  $C$  en el agua.

Las condiciones de borde son las siguientes:

$$\begin{aligned} C(0) &= C_0 \\ C(L) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (6.6)$$

donde  $C_0$  es la concentración inicial de  $C$  y  $L$  el largo del dominio.

A pesar de la estructura simple de tal ecuación, la misma suele presentar inconvenientes para su resolución numérica. Esto se debe a que de acuerdo al valor del número adimensional  $U_{ad} = \frac{UL}{K}$  cociente el comportamiento puede pasar de ser dominante difusivo  $\left(\frac{UL}{K} \approx 0\right)$ , a dominante advectivo  $\left(\frac{UL}{K} \rightarrow \infty\right)$ . Pero en este último caso el problema requiere únicamente de una sola condición de borde (aguas arriba). Varias estrategias se han desarrollado en la literatura para tratar la dificultad a la solución numérica de este tipo de ecuación. FlexPDE tiene incorporada un enfoque basado en el uso de funciones de forma de “contra corriente” que permite resolver el problema para diferentes valores de  $U_{ad}$  evitando inestabilidad numérica.

La solución analítica asociada a la ecuación (6.5) es la siguiente:

$$C = \left[ \frac{C_0 e^{\lambda_2 L}}{e^{\lambda_2 L} - e^{\lambda_1 L}} \right] e^{\lambda_1 x} + \left[ \frac{-C_0 e^{\lambda_1 L}}{e^{\lambda_2 L} - e^{\lambda_1 L}} \right] e^{\lambda_2 x} \quad , \quad (6.7)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  vienen dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-U \pm \sqrt{U^2 + 4KR_d}}{-2K} \quad . \quad (6.8)$$

En la Figura 6.4a puede observarse que los resultados obtenidos con ambos modelos son coincidentes para valores  $U_{ad}$  de 0.03 (comportamiento difusivo). Dicha figura está expresada en términos adimensionales, donde la abscisa corresponde a  $\frac{x}{L}$ , y la ordenada a  $\frac{C}{C_0}$ .

En la Figura 6.4b se muestran los resultados para un valor de  $U_{ad}$  10 000 veces mayor (comportamiento advectivo). Como se aprecia los resultados siguen siendo coincidentes.

Comparación Numérica y Analítica

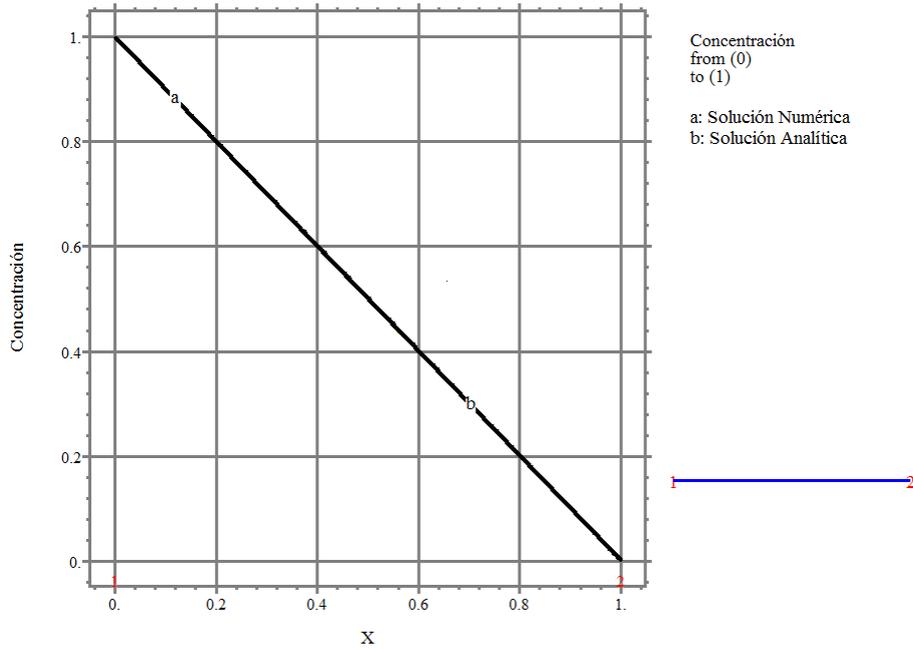


Figura 6.4a: Comparación de las soluciones Numérica y Analítica (Comportamiento Difusivo).

Comparación Numérica y Analítica

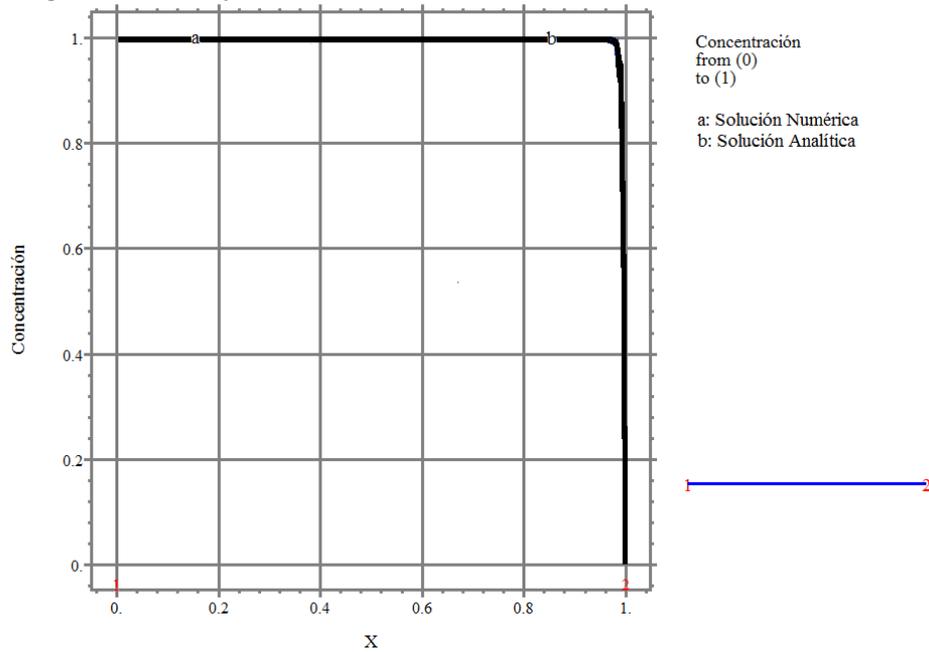


Figura 6.4b: Comparación de las soluciones Numérica y Analítica (Comportamiento Advectivo).

### 6.3. EJEMPLO 3: UN PROBLEMA DE TRANSPORTE BIDIMENSIONAL.

En el presente ejemplo muestra una comparación de características similares al ejemplo anterior, aunque en este caso se trata de un problema bidimensional. Se compara la solución numérica obtenida con la ecuación de transporte (3.24) con una solución analítica para distintos valores de coeficientes de dispersión  $K$ . Con esto se

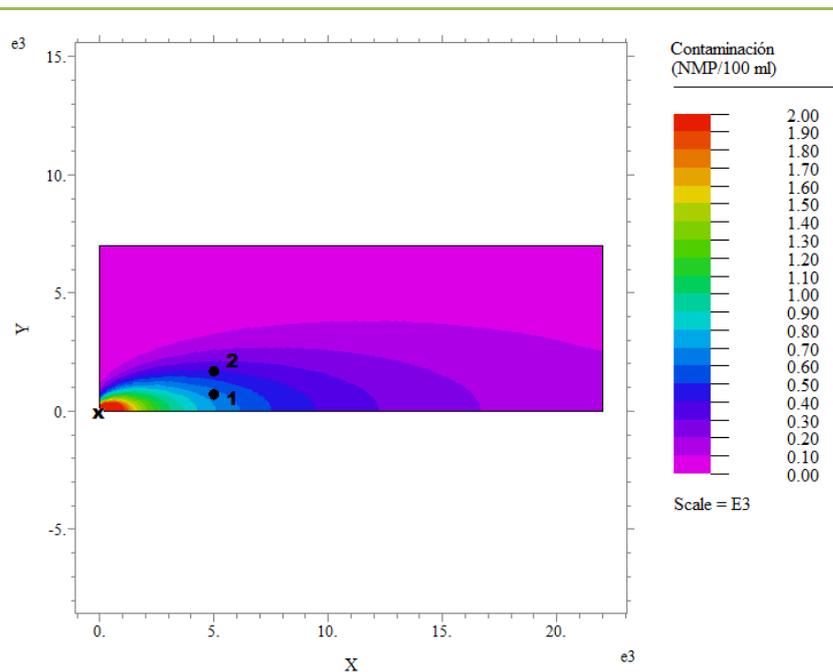
pretende no solamente mostrar la precisión del programa FlexPDE sino también el efecto de tal coeficiente sobre el patrón de concentración.

La descarga se produce sobre la línea de ribera, en  $x = 0$ ,  $y = 0$ , y el curso es rectangular y muy ancho. La correspondiente solución analítica es la siguiente:

$$C(x, y) = \frac{CoQ}{H\sqrt{\pi UKx}} \exp\left[-\frac{y^2 U}{4Kx} - R_d \frac{x}{U}\right] \quad (6.9)$$

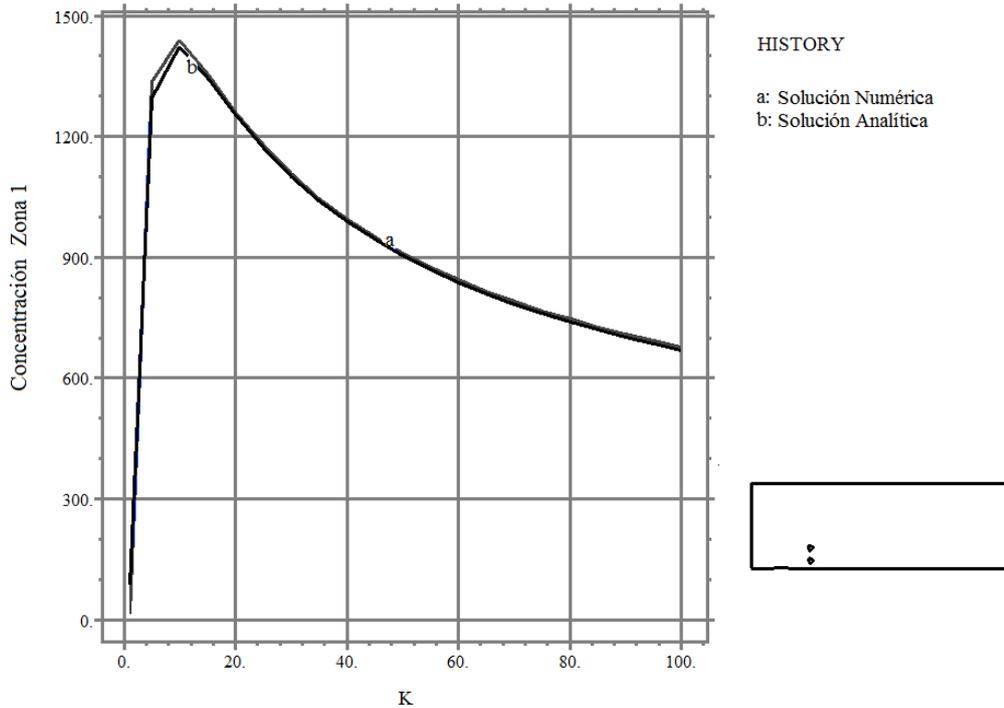
donde  $C$  es la concentración del contaminante,  $Co$  la concentración inicial,  $Q$  el caudal de descarga,  $H$  la profundidad,  $U$  la velocidad en la componente  $x$ ,  $K$  el coeficiente de difusión turbulenta y  $R_d$  el coeficiente de degradación de  $C$ .

Para comparar las soluciones se adoptan los siguientes valores:  $U=0.3$  m/s,  $H=7$  m,  $Co=7e6$  NMP/100ml,  $R_d = 0.00002 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  y  $Q = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$  y se comparan tales resultados en dos zonas arbitrarias. En la Figura 6.5 se muestran las ubicaciones de tales zonas con círculos negros y la distribución de la concentración de  $C$  debido a la descarga en el punto  $x = 0$ ,  $y = 0$  indicada con una cruz, para un coeficiente de difusión dado ( $100 \text{ m}^2/\text{s}$ ).

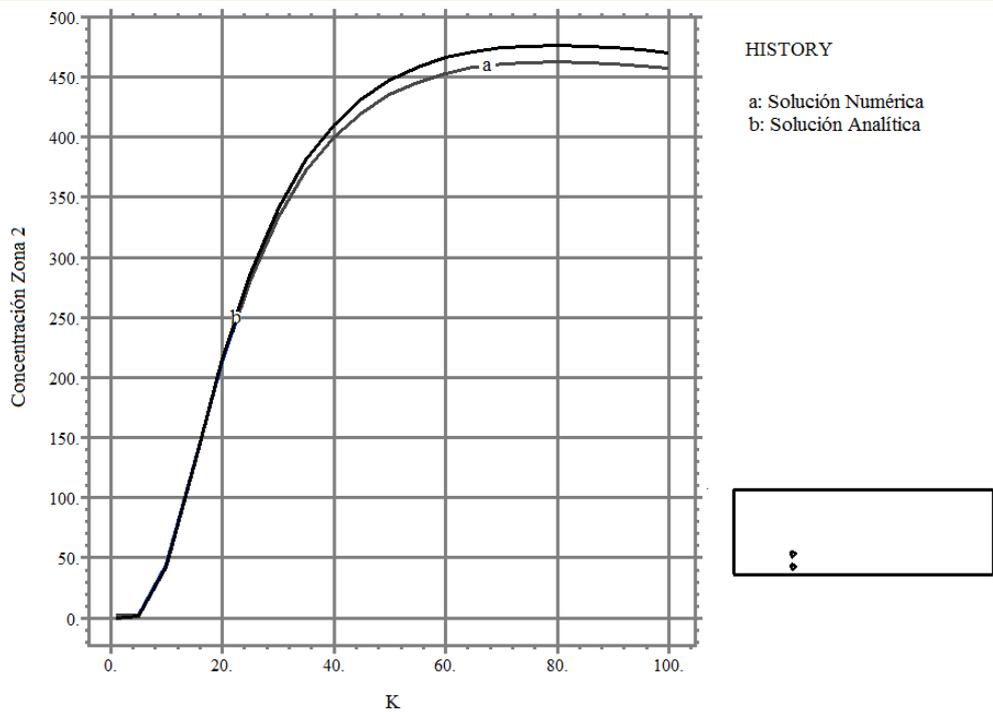


**Figura 6.5:** Distribución espacial de la concentración del contaminante.

En la figura 6.6a y 6.6b se muestran las comparaciones de las soluciones numérica y analítica de las concentraciones en las zonas 1 y 2 respectivamente para distintos valores del coeficiente de difusión  $K$ , para un rango de valores entre 1 y  $100 \text{ m}^2/\text{s}$  que pueden ser posibles en este tipo de situaciones (Menéndez 2010).



**Figura 6.6a:** Comparación de soluciones Numérica y Analítica en zona 1. Variación de la concentración para diferentes valores de K.



**Figura 6.6b:** Comparación de soluciones Numérica y Analítica en zona 2. Variación de la concentración para diferentes valores de K.

De acuerdo a los resultados mostrados en ambas zonas (Figuras 6.6a y 6.6b), puede observarse que los mismos arrojan valores similares de concentración, por

ambos métodos de solución, para diferentes valores de  $K$ . Los valores de las concentraciones expresados en NMP/100ml se indican en la Tabla 6.2.

Coeficiente de Difusión $m^2/s$	Solución Numérica	Solución Analítica	Solución Numérica	Solución Analítica
	Zona 1	Zona 1	Zona 2	Zona 2
5	1336	1295	2.516	1.13
10	1438	1422	44	42
15	1355	1345	129	128
20	1260	1253	213	215
25	1178	1171	281	286
30	1107	1101	333	340
35	1047	1041	372	380
40	995	989	399	410
45	950	944	420	432
50	911	905	435	447
55	876	869	445	458
60	844	838	453	466
65	816	810	458	471
70	791	784	461	474
75	768	761	462	476
80	746	739	462	476
85	727	719	462	475
90	708	701	461	474
95	692	684	459	472
100	677	668	457	470

Tabla 6.2: Comparación de las soluciones numérica y analítica para diferentes valores de  $K$ .

Si bien las soluciones para las dos zonas analizadas son concordantes entre sí, las mismas presentan grandes variaciones de acuerdo al valor del coeficiente de difusión asumido. Es importante mencionar que los coeficientes de difusión representan un parámetro clave para definir cómo se distribuye un trazador en el medio. Dependiendo del valor que se le asigne es que se produce o no un impacto de las descargas de los efluentes urbanos en determinadas zonas de resguardo ambiental. Esta influencia se observa en los resultados de la Tabla 6.2, donde en la zona 1 para valores bajos de coeficientes los niveles de concentración son elevados disminuyendo a medida que éste aumenta hasta llegar a niveles de  $C$  del orden del 50% con respecto a los primeros. Sin embargo se da una situación inversa en la zona 2.

Es fundamental entonces calibrar el valor del coeficiente de difusión para la situación a evaluar. Es decir, se busca el valor adecuado de  $K$  que produzca

resultados de concentración cercanos a los obtenidos de manera experimental en el sitio a estudiar.

#### **6.4. EJEMPLO 4: COMPARACIÓN ENTRE EL MODELO DIRECTO Y EL MODELO ADJUNTO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE.**

Se considera el mismo río del Ejemplo 1, en este caso se analiza el transporte de sustancias. El propósito de dicho análisis es similar a lo comentado en los ejemplos anteriores. Si bien en forma exacta las soluciones son completamente equivalentes, atendiendo a que se emplea una solución numérica, es posible que exista algún error debido a aspectos numéricos inherentes al programa o a equivocaciones en la implementación del modelo. Lo que se pretende es ilustrar la consistencia de ambos modelos a los efectos de descartar errores de implementación y a su vez mostrar que con el tamaño de malla utilizado el error numérico es bajo.

Se presenta una comparación de los resultados numéricos, de la concentración de una sustancia, obtenidos con el modelo de Transporte Directo y con el modelo Adjunto del problema de Transporte desarrollados en los *Capítulos 3 y 4* respectivamente y se comparan los tiempos de cálculo de ambos modelos.

Para determinar la distribución espacial de un contaminante, en este caso de Coliformes fecales proveniente de tres descargas, se resuelve mediante FlexPDE la ecuación de transporte (3.27) junto con las condiciones de borde (3.32), a los efectos de evaluar la concentración en dos zonas de resguardo ambiental ubicadas aguas abajo.

En el descriptor correspondiente se ingresa tal ecuación gobernante junto con los valores de las velocidades y profundidad calculadas en el modelo hidrodinámico ( $Ueta$ ,  $Veta$  y  $H$ ) y los siguientes parámetros:

- Coeficiente de dispersión ( $K$ ):  $9 \text{ m}^2/\text{s}$ ,
- Coeficiente de degradación ( $Rd3$ ):  $0.00002 \text{ s}^{-1}$ ,
- Tasa de generación de CF de los tres vertidos ( $Mcf1$ ), ( $Mcf2$ ) y ( $Mcf3$ ):  $4.13 \times 10^6$ ,  $4.13 \times 10^6$  y  $5.9 \times 10^6$  (NMP/100ml \*  $\text{m}^3/\text{s}$ ) respectivamente.

La solución obtenida con este modelo se muestra en el gráfico de contorno de la Figura 6.7, donde se observa la distribución espacial de CF. Los círculos negros corresponden a la ubicación de las descargas. Los valores calculados de las concentraciones en las zonas protegidas son aproximadamente 1.393 y 1.818 NMP/100ml respectivamente (indicadas con una cruz).

Para comparar estos resultados se obtiene también la concentración de CF en la zona protegida mediante la fórmula (4.42). Para ello es necesario previamente obtener las funciones de influencia calculando las ecuaciones (4.40) y (4.38).

De los valores obtenidos en la zona protegida para ambos modelos (ver Tabla 6.3) se puede concluir que la diferencia entre tales valores es menor del 1%, lo que demuestra la consistencia entre ambos enfoques.

Es interesante mostrar el comportamiento espacial de la función adjunta de influencia adjunta ( $G_{cf}$ ) correspondiente a una zona protegida en el dominio. Esto puede visualizarse en la Figura 6.8. Tal comportamiento indica la concentración en una de las zonas protegidas para descargas unitarias en un punto arbitrario. Es obvio que los valores más cercanos a las zonas protegidas tendrán un valor de influencia más alto que en puntos alejados. Además los puntos en la región corriente arriba de la zona protegida considerada tendrán mayores valores que aguas abajo.

Por otra parte, se ha realizado una comparación de los tiempos computacionales de cálculo que demanda el modelo directo de transporte con el modelo adjunto del problema de transporte, una vez obtenidas las correspondientes funciones de influencia, para la determinación de las concentraciones de los indicadores en las zonas protegidas. El tiempo necesario que insume este cálculo empleando la solución directa del problema de transporte mediante el método de elementos finitos es 30 veces superior al demandado por el modelo del problema adjunto.

Por tal motivo el empleo del enfoque adjunto del problema de transporte representa una buena estrategia ya que reduce ampliamente los tiempos de cálculo computacional.

Modelo de Transporte de Sustancias Disueltas (Río)

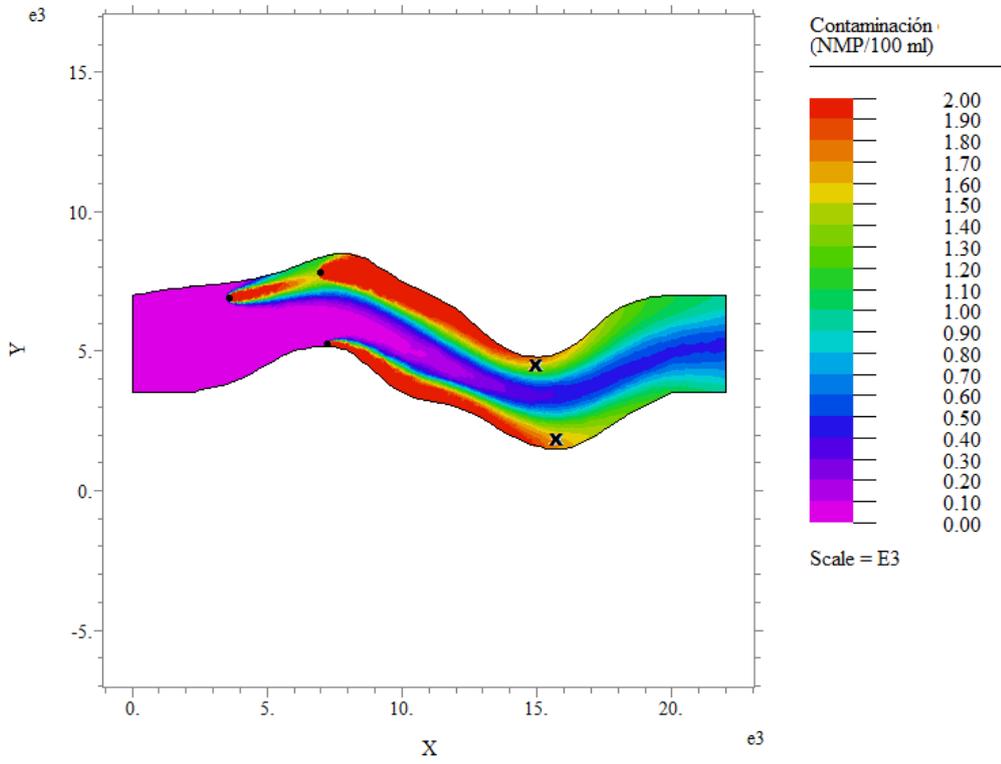


Figura 6.7: Distribución espacial de CF en el Río.

Enfoque Adjunto del problema de transporte (Río)

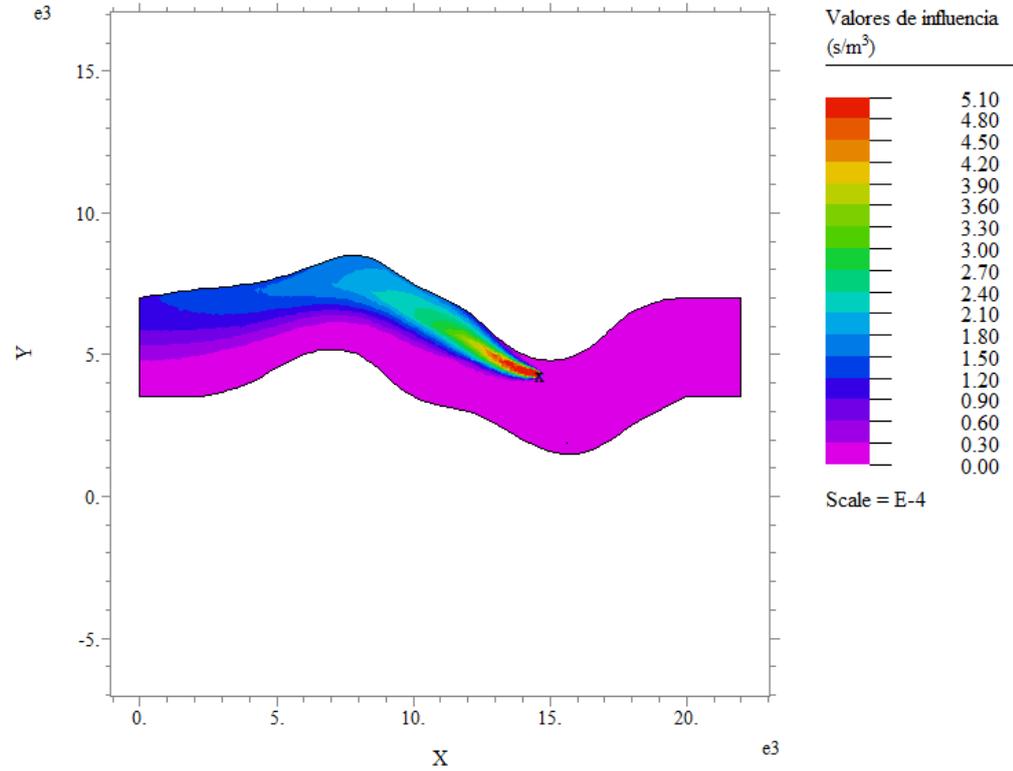


Figura 6.8: Distribución espacial de la función de influencia  $G_{cf}$ .

Concentración de CF NMP/100 ml	Modelo de Transporte Directo (propuesto)	Modelo Adjunto del Problema de Transporte
Zona 1	1.305	1.299
Zona 2	1.651	1.635

Tabla 6.3: Comparación de resultados numéricos de Niveles de CF.

## 6.5. EJEMPLO 5: DISEÑO ÓPTIMO DE TRES PLANTAS DE TRATAMIENTO, CONSIDERANDO DOS ZONAS DE RESGUARDO AMBIENTAL.

Se presenta, a modo de ejemplo, un tramo de un río de 20 kilómetros de largo con cuatro islas en su interior y una profundidad media de 6 metros.

En el mismo se encuentran dos zonas de resguardo ambiental, una ubicada en la costa de una de las islas y la otra en la costa del margen superior del río, donde los niveles de concentración de los indicadores pertinentes no cumplen con los valores admisibles, a causa de las descargas directas de efluentes urbanos provenientes de tres ciudades aledañas. Se adoptan como valores de descargas máxicas de DBO generadas en cada ciudad, 0.300 kg/s para la primera (ubicada en la costa inferior) y 0.250 kg/s para la segunda y tercera, y para CF se consideran concentraciones de  $10 \times 10^6$  NMP/100ml para la primera y  $7 \times 10^6$  NMP/100ml para las otras dos ciudades, siendo el caudal de agua residual de cada una de  $0.59 \text{ m}^3/\text{s}$ . Asimismo se asume que aguas arriba la concentración de OD es de  $8.08 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ .

Es importante mencionar que el presente diseño se realizó para la condición de aguas bajas, ya que los niveles de concentración de los indicadores pueden exceder los valores límites debido a la menor dilución (escenario más desfavorable). Por otra parte se desprecia el efecto del viento.

Para el coeficiente de fricción  $C_b$  se adopta un valor adimensional igual a 0.0025 y para el coeficiente de dispersión  $K$  un valor de  $9 \text{ m}^2/\text{s}$ .

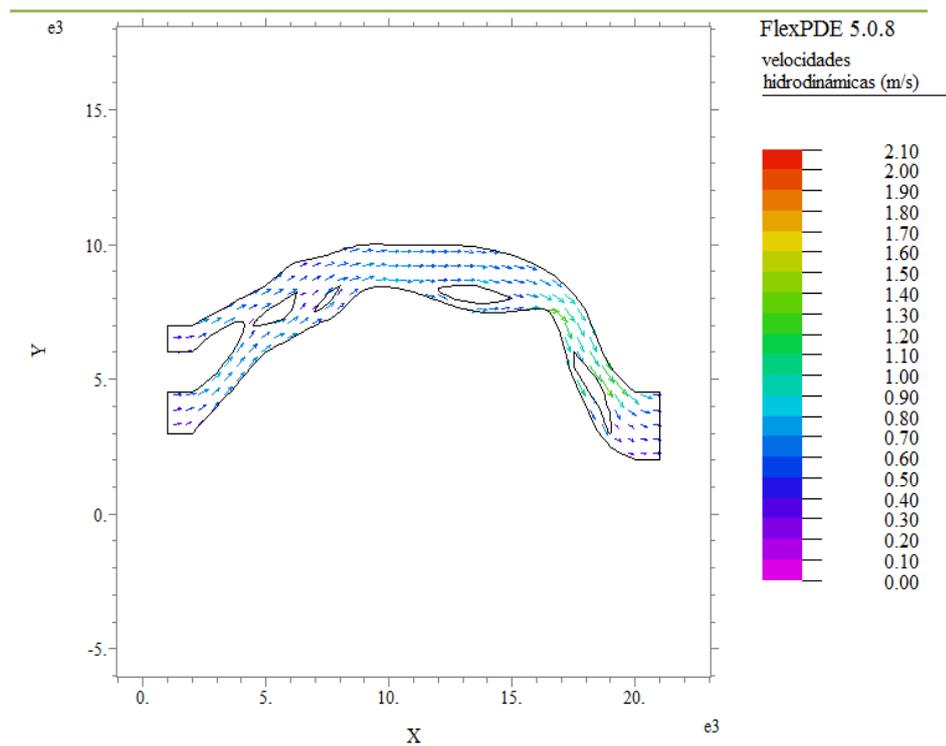
En el presente trabajo, a modo indicativo, los valores de admisibilidad adoptados para el DBO, OD y CF son  $5.241 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ ,  $8.038 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$  y 1000 NMP/100ml, respectivamente.

### 6.5.1. Evaluación preliminar de contaminación

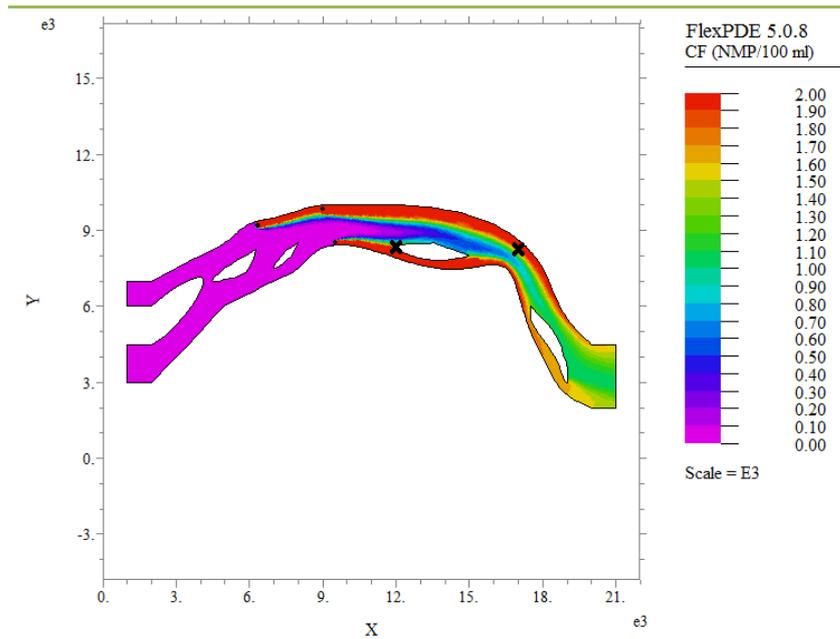
De acuerdo al procedimiento explicado en el capítulo anterior, mediante el cálculo del modelo hidrodinámico en el programa de elementos finitos FlexPDE, se obtuvo

el régimen de corrientes en el cuerpo de agua obteniendo el campo de velocidades indicado en la Figura 6.9a.

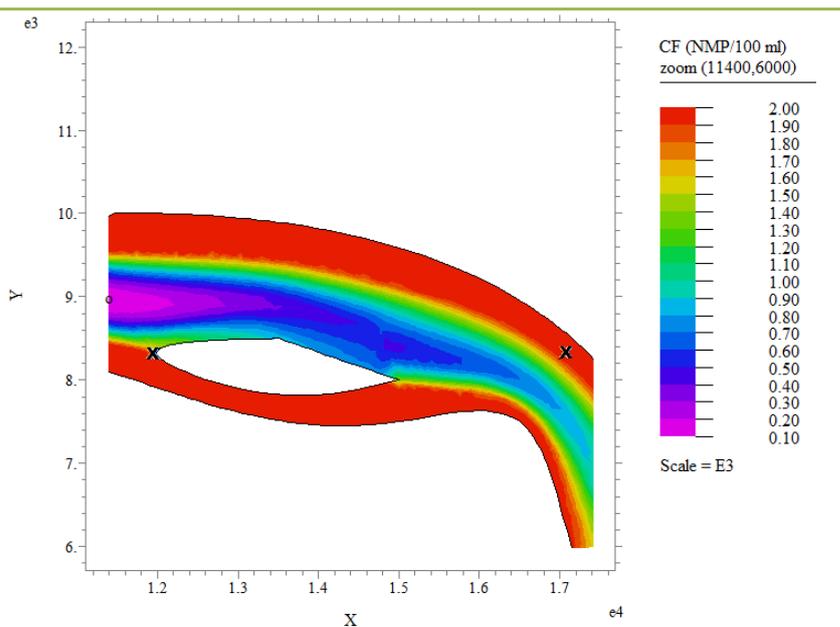
Una vez conocidos tales valores, se determina la distribución espacial de CF, DBO y OD en el río a partir de la solución mediante el MEF del modelo de transporte de sustancias disueltas dado por las ecuaciones (3.27-3.29) y sus correspondientes condiciones de borde. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la necesidad de instalar plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas. Así, por ejemplo, la Figura 6.9b se muestra la distribución de CF generada por la descarga de efluentes indicados con círculos negros, donde es posible observar que los niveles de concentración en las dos zonas protegidas (1500 y 2000 NMP/100ml respectivamente), indicadas con cruces negras, no cumplen con los valores de admisibilidad. En la Figura 6.9c se observa la distribución de CF en cercanías de las zonas de resguardo ambiental.



**Figura 6.9a:** Velocidades Hidrodinámicas.



**Figura 6.9b:** Distribución de CF.



**Figura 6.9c:** Distribución de CF y vista ampliada de las zonas protegidas.

### 6.5.2. Alternativas de Diseño

En tal sentido se analiza la construcción de tres plantas de tratamiento considerando dos problemas de diseño. En el primero de ellos (A) se supone que las ubicaciones de las tuberías de descarga son prefijadas, de tal manera que las variables de diseño corresponden a los valores de  $\beta_j$ , para cada planta. El problema (B) es más general siendo las variables de diseño tanto los  $\beta_j$  como las coordenadas de salida de cada una de las tuberías de descarga  $Fx_j$  y  $Fy_j$ .

### **Problema A:**

Para el problema (A) se realizan y comparan cuatro enfoques alternativos:

1. Diseño de referencia,
2. Método de “Recocido Simulado” (empleando 300 iteraciones),
3. Búsqueda aleatoria (empleando 300 iteraciones), y
4. Fórmula analítica.

Cabe aclarar que el diseño de referencia es arbitrario y factible, ya que verifica las restricciones ambientales del problema y se lo utiliza a los efectos de ser comparado con los enfoques de optimización. En tal sentido se supone la construcción de tales plantas de tratamiento con un coeficiente de reducción  $\beta_j$  igual a 0.4 y las siguientes coordenadas [m] de descarga  $Fx_j$  y  $Fy_j$ : (9500; 8900), (6300; 8700) y (9000; 9200).

Las variables de diseño determinadas mediante el enfoque 3 corresponden a un simple método de prueba y error. Por otra parte la fórmula analítica utilizada en el enfoque 4 permite asegurar el cumplimiento de las restricciones ambientales considerando que la depuración depende de la suma de todas las contribuciones de las descargas  $j$ , multiplicado por el mayor coeficiente de influencia para la zona protegida  $i$ , como se demuestra en (Parra-Guevara y Skiba, 2000). Su expresión viene dada por:

$$\beta_j \leq \frac{C_{adm}}{\left( \sum_{j=1}^N C_j^0 Q_j \right) \text{Max}_i (G_{ij})} , \quad (6.10)$$

donde  $C_{adm}$  y  $C_j^0$  corresponden a los valores de admisibilidad y concentración de la descarga  $j$ -ésima, respectivamente, del indicador que se desee evaluar (DBO, OD, CF), mientras que  $G_{ij}$  es el coeficiente de influencia asociado al indicador en cuestión, en la zona  $i$ -ésima debido a la descarga  $j$ -ésima.

El resultado de tal comparación se presenta en la Tabla 6.4.

Puede observarse que todos los diseños propuestos cumplen con las restricciones ambientales. Asimismo, los costos totales de todos los diseños propuestos se encuentran por debajo del costo de la opción que implica la depuración total de los efluentes, siendo de 5 114 688 US\$/año ( $\beta_j=0$ ). Sin embargo, el desarrollo de acuerdo al método de “Recocido Simulado” (enfoque 2) implica el menor costo, siendo aproximadamente del orden del 50% de las opciones 1 y 4 y del 75% de la opción 3. El tiempo de cómputo del método de “Recocido Simulado” es aproximadamente de 15 minutos.

		Enfoque 1 (Diseño de Referencia)	Enfoque 2 (Recocido Simulado)	Enfoque 3 (Búsqueda Aleatoria)	Enfoque 4 (Fórmula Analítica)
Nivel de concentración en zona protegida (isla)	DBO (kg/m <sup>3</sup> )	3.8423E-05	7.7913E-05	7.0139E-05	6.7667E-05
	OD (kg/m <sup>3</sup> )	8.1207E-03	8.0782E-03	8.0787E-03	8.0792E-03
	CF (NMP/100ml)	609	960	885	912
Nivel de concentración en zona protegida (costa)	DBO (kg/m <sup>3</sup> )	4.7179E-05	5.9722E-06	5.9883E-05	3.5526E-05
	OD (kg/m <sup>3</sup> )	8.0748E-03	8.0702E-03	8.0712E-03	8.0762E-03
	CF (NMP/100ml)	514	684	619	370
Factor de reducción de las tres plantas	β1	0.4	0.14	0.17	0.27
	β2	0.4	1	0.94	0.49
	β3	0.4	1	0.81	0.62
Longitud de tuberías de descarga	L1 (m)	550	522	522	522
	L2 (m)	715	1069	1069	1069
	L3 (m)	850	1346	1346	1346
Costo Total Anual	CT (US\$/año)	3 670 411	1 994 730	2 625 825	3 566 350

Tabla 6.4: Comparación de valores de los enfoques calculados, problema (A)

### **Problema B:**

En la Tabla 6.5 se comparan diseños para el problema (B) obtenidos mediante los siguientes enfoques:

1. Diseño de referencia (el mismo del problema A),
2. Método de “Recocido Simulado” (empleando 300 iteraciones), y
3. Búsqueda aleatoria (empleando 300 iteraciones).

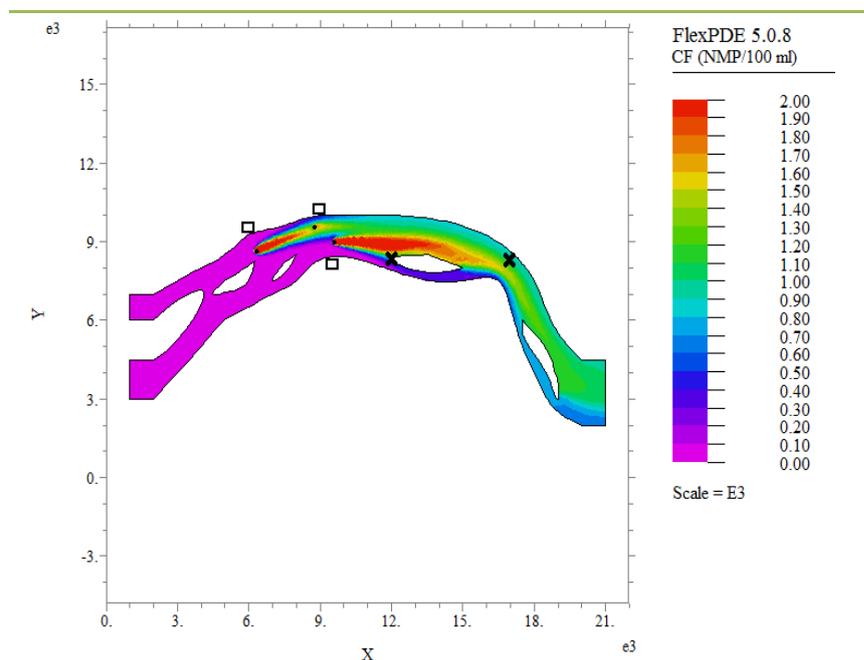
		Enfoque 1 (Diseño de Referencia)	Enfoque 2 (Recocido Simulado)	Enfoque 3 (Búsqueda Aleatoria)
Nivel de concentración en zona protegida (isla)	DBO (kg/m <sup>3</sup> )	3.8423E-05	5.9692E-05	4.4354E-05
	OD (kg/m <sup>3</sup> )	8.1207E-03	8.0801E-03	8.0806E-03
	CF (NMP/100ml)	609	953	554
Nivel de concentración en zona protegida (costa)	DBO (kg/m <sup>3</sup> )	4.7179E-05	8.8375E-05	5.8350E-05
	OD (kg/m <sup>3</sup> )	8.0748E-03	8.0666E-03	8.0746E-03
	CF (NMP/100ml)	514	990	750
Factor de reducción de las plantas	β1	0.4	1	0.8
	β2	0.4	1	0.07
	β3	0.4	0.08	0.97
Longitud de tuberías de descarga	L1 (m)	550	632	819
	L2 (m)	715	772	435
	L3 (m)	850	569	1095
Costo Total Anual	CT (US\$/año)	3 670 411	1 874 705	2 542 477

Tabla 6.5: Comparación de valores de los enfoques calculados, problema (B)

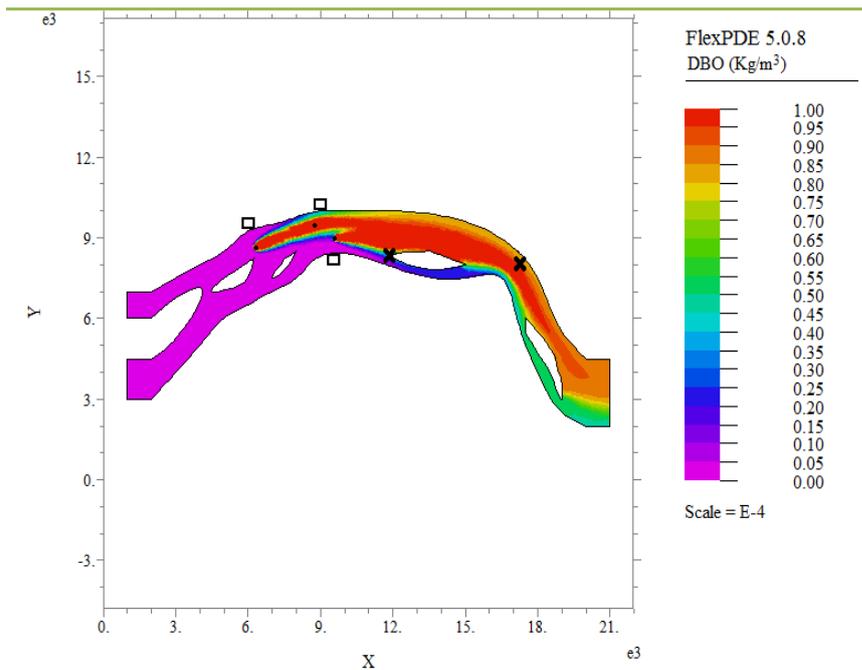
De igual manera que en el caso anterior, se aprecia que la solución más económica se obtiene mediante el método de “Recocido Simulado” (enfoque 2).

Finalmente, si se comparan entre sí los resultados correspondientes a los problemas (A) y (B), Tablas 6.4 y 6.5, puede observarse que el diseño óptimo obtenido (enfoque 2) en el último de los problemas es el más eficiente, como era de esperar.

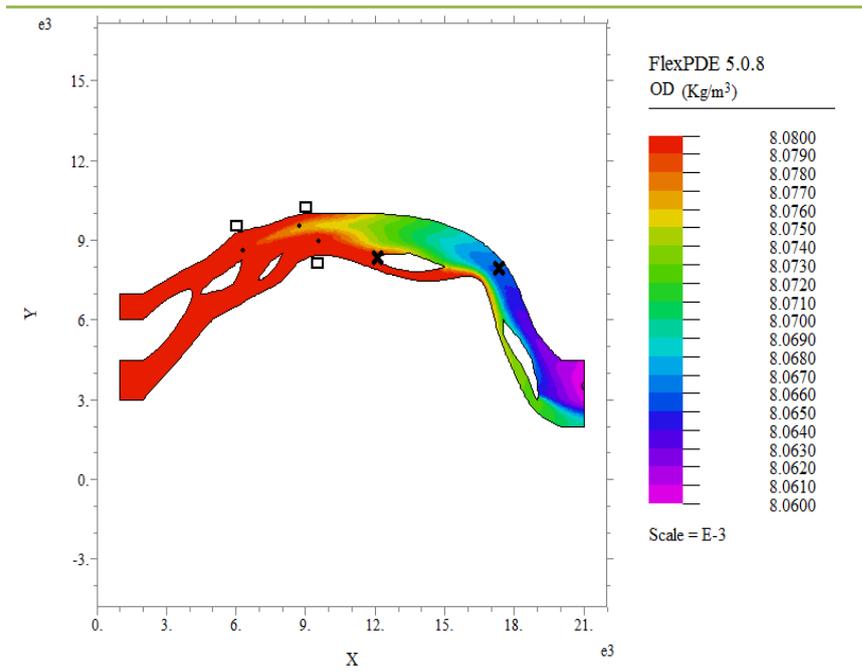
En las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12 se muestra la salida gráfica de la distribución espacial de concentración de los indicadores DBO, OD y CF, correspondiente a la opción de diseño óptimo obtenido (problema B enfoque 2), donde los cuadrados blancos indican la ubicación de las plantas de tratamiento, los círculos negros corresponden a las localizaciones óptimas de las tuberías de descarga de los efluentes y las cruces negras marcan las zonas de resguardo ambiental. Puede observarse en tales figuras que los niveles de concentración de los indicadores en las zonas de resguardo ambiental se encuentran dentro de los niveles admisibles.



**Figura 6.10:** Distribución de CF y localización óptima de las descargas.



**Figura 6.11:** Distribución de DBO y localización óptima de las descargas.



**Figura 6.12:** Distribución de OD y localización óptima de las descargas.

Es importante mencionar que las distribuciones espaciales de los niveles de los indicadores analizados, graficados en las figuras 6.10, 6.11 y 6.12, pueden servir como patrones de contaminación. De esta forma es posible analizar, en base al diseño ya establecido, si es factible o no la localización de una nueva zona destinada a un uso determinado como por ejemplo zonas de recreación, toma de agua potable, pesca, etc.

Los descriptores correspondientes a este ejemplo se detallan en el Anexo VII.

## 6.6. EJEMPLO 6: DISEÑO ÓPTIMO DE CUATRO PLANTAS DE TRATAMIENTO, CONSIDERANDO TRES ZONAS DE RESGUARDO AMBIENTAL.

En este ejemplo se ilustra, para la misma geometría del río analizado en la sección anterior, un problema de diseño más complejo que prevé la construcción y localización de cuatro plantas de tratamiento considerando tres zonas protegidas. Se adoptan las mismas condiciones de diseño y valores de descarga que el ejemplo anterior. Para la nueva descarga se asume un valor másico de 0.300 kg/s de DBO y una concentración de CF de  $10 \times 10^6$  NMP/100ml. La localización de la tercera zona protegida se encuentra ubicada a unos 7 kilómetros aguas abajo de esta última descarga.

Se analiza el problema considerando que las variables de diseño a determinar corresponden tanto a los coeficientes de reducción  $\beta_j$  como a las coordenadas de salida de cada una de las tuberías de descarga  $F_{x_j}$  y  $F_{y_j}$ . Para ello se realizan y comparan cuatro enfoques alternativos:

1. Diseño de referencia,
2. Método de “Recocido Simulado” (empleando 300 iteraciones), y
3. Búsqueda aleatoria (empleando 300 iteraciones).

El diseño de referencia propuesto es arbitrario y verifica las restricciones ambientales del problema. Los valores de los coeficiente de reducción  $\beta_j$  son iguales a 0.4 y las coordenadas de descarga  $F_{x_j}$  y  $F_{y_j}$ , expresadas en metros, son las siguientes: (9500; 8900), (6300; 8700), (9000; 9200) y (15700; 8000). Los resultados de tal comparación se presentan en la Tabla 6.6.

De acuerdo a los valores comparados en la tabla 6.6, se aprecia que los diseños propuestos cumplen con las restricciones ambientales, siendo el más económico el enfoque 2 desarrollado con el método de “Recocido Simulado”. La distribución de CF para este enfoque se muestra en la Figura 6.13.

		Enfoque 1 (Diseño de Referencia)	Enfoque 2 (Recocido Simulado)	Enfoque 3 (Búsqueda Aleatoria)
Nivel de concentración en zona protegida (isla)	DBO ( $kg/m^3$ )	3.240958E-5	1.491651E-5	1.549757E-5
	OD ( $kg/m^3$ )	8.079325E-3	8.082340E-3	8.082208E-3
	CF (NMP/100ml)	609	284	279
Nivel de concentración en zona protegida (costa superior)	DBO ( $kg/m^3$ )	3.434923E-5	5.314535E-5	4.780437E-5
	OD ( $kg/m^3$ )	8.068127E-3	8.074660E-3	8.075487E-3
	CF (NMP/100ml)	515	855	763
Nivel de concentración en zona protegida (costa inferior)	DBO ( $kg/m^3$ )	4.919640E-5	2.791924E-5	2.470991E-5
	OD ( $kg/m^3$ )	8.0066971E-3	8.078204E-3	8.078829E-3
	CF (NMP/100ml)	867	485	417
Factor de reducción de las tres plantas	$\beta_1$	0.4	1	0.35
	$\beta_2$	0.4	0.55	0.20
	$\beta_3$	0.4	0	0.74
	$\beta_4$	0.4	0.79	0.90
Longitud de tuberías de descarga	L1 (m)	550	870	684
	L2 (m)	716	852	850
	L3 (m)	850	844	876
	L4 (m)	750	1202	1225
Costo Total Anual	CT (US\$/año)	4 903 128	3 717 095	4 098 248

Tabla 6.6: Comparación de valores de los enfoques calculados

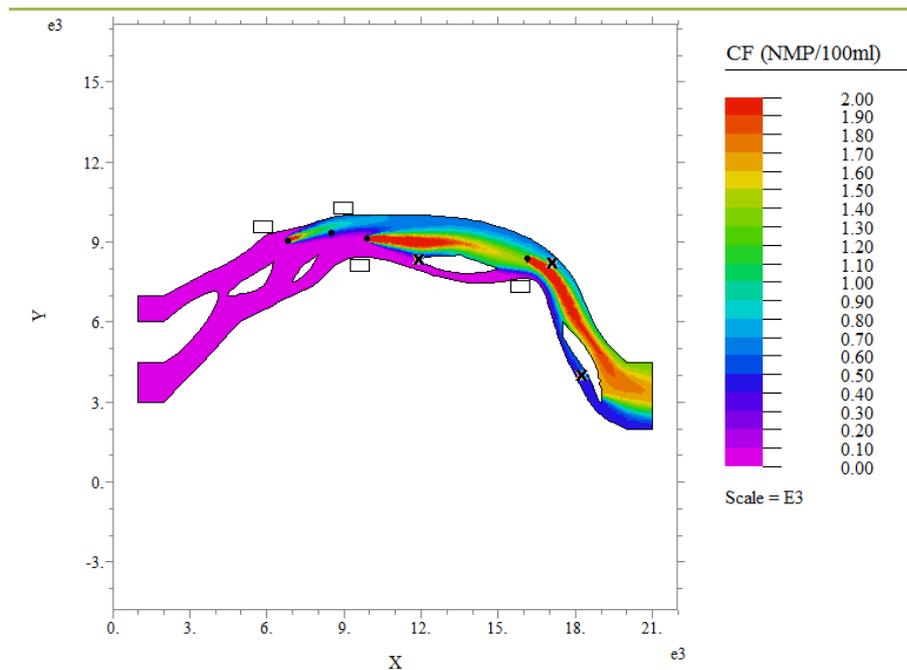


Figura 6.13: Distribución espacial de CF.

## 6.7. EJEMPLO 7: DISEÑO ÓPTIMO DE DOS PLANTAS DE TRATAMIENTO, CONSIDERANDO DOS ZONAS DE RESGUARDO AMBIENTAL. (APLICACIÓN EN OTRA GEOMETRÍA)

Se plantea un problema de diseño óptimo para determinar la localización de la salida de las tuberías proveniente de dos plantas de tratamiento que descargan sus efluentes en una sección de un río cuya geometría presenta suaves curvaturas, a los efectos de analizar la respuesta del modelo computacional propuesto aplicado otras situaciones posibles. Para ello se adoptan valores máxicos de DBO de 0.350 kg/s provenientes de dos ciudades aledañas y concentraciones de  $10 \times 10^6$  NMP/100ml para la primera y  $7 \times 10^6$  NMP/100ml para la segunda, cuyos caudales residuales corresponden a 0.59 m<sup>3</sup>/s respectivamente. Las plantas de tratamiento se encuentran ubicadas en las siguientes coordenadas: (7000,7100) y (7000, 3200). Los valores de los diferentes parámetros que intervienen en el presente cálculo son los mismos que los empleados en ejemplos anteriores.

Para la determinación de las variables de diseño  $\beta_j$  y  $Fx_j$  y  $Fy_j$ , se efectuaron los siguientes enfoques de diseño:

1. Método de “Recocido Simulado” (empleando 300 iteraciones), y
2. Búsqueda aleatoria (empleando 300 iteraciones).

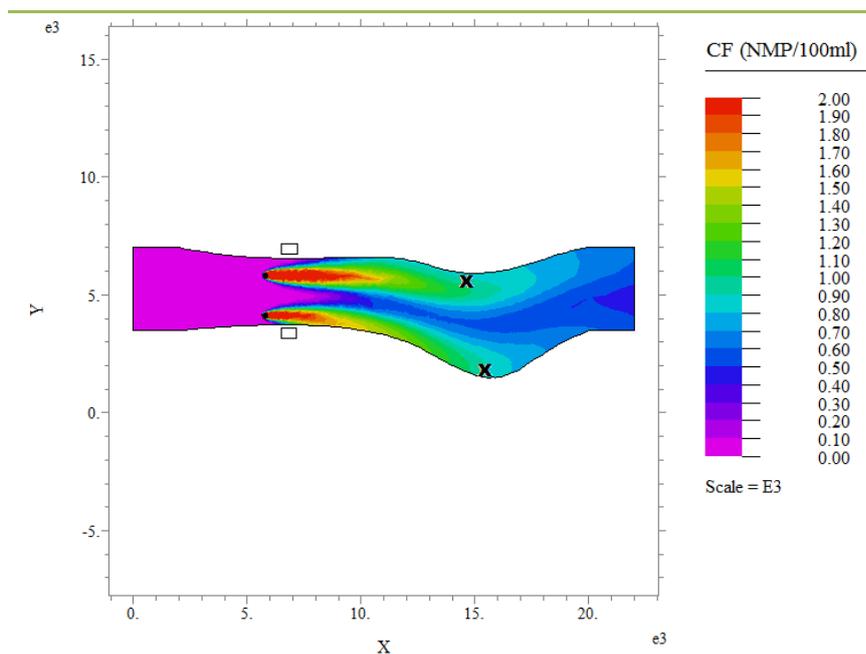
Los resultados de las comparaciones se muestran en la Tabla 6.7.

		Aleatorio	Recocido Simulado
<i>Nivel de concentración en zona protegida (isla)</i>	DBO (kg/m <sup>3</sup> )	2.760964E-5	6.538673E-5
	OD (kg/m <sup>3</sup> )	8.075696E-3	8.063198E-3
	CF (NMP/100ml)	392	906
<i>Nivel de concentración en zona protegida (costa superior)</i>	DBO (kg/m <sup>3</sup> )	8.652342E-5	9.913915E-5
	OD (kg/m <sup>3</sup> )	8.053137E-3	8.041874E-3
	CF (NMP/100ml)	823	905
<i>Factor de reducción de las tres plantas</i>	$\beta_1$	0.85	1
	$\beta_2$	1	1
<i>Longitud de tuberías de descarga</i>	L1 (m)	1533	1769
	L2 (m)	1347	1566
<i>Coordenadas de descarga</i>	(Fx1, Fy1)	(6939,5568)	(5758,5839)
	(Fx2, Fy2)	(7832, 4259)	(5744,4135)
<i>Costo Total Anual</i>	CT (US\$/año)	1 038 404	689 888

Tabla 6.7: Comparación de valores de los enfoques calculados

Se observa en la tabla anterior que el diseño basado en el enfoque de “Recocido Simulado” es el más eficiente, reduciendo los costos en un 30 % con respecto al enfoque de búsqueda por prueba y error como era de esperar.

En la Figura 6.14 se muestra la distribución de concentración de CF, correspondiente al enfoque de diseño 1, basado en una búsqueda por el método de “Recocido Simulado”. Las localizaciones de las plantas de tratamiento se indican con cuadrados blancos, las descargas de las fuentes con círculos negros y las zonas protegidas con cruces negras.



**Figura 6.14:** Distribución espacial de CF.

## 6.8. EJEMPLO 9: DISEÑO ÓPTIMO PARA LA UBICACIÓN DE PLANTAS DE TRATAMIENTO.

Se aplica el modelo computacional de optimización propuesto en la presente tesis para mostrar la eficiencia en otro problema de diseño. El mismo corresponde a la determinación de las mejores localizaciones de dos plantas de tratamiento en zonas que comprenden 5 kilómetros a lo largo de la costa de un río considerando que la distancia de descarga de los efluentes se debe efectuar a 600 metros en forma perpendicular a la costa. En la Figura 6.15 se muestran dos áreas posibles de emplazamiento de las plantas indicadas con rectángulos blancos y con rectángulos negros se sectoriza la zona de descarga.

Se compara el presente diseño con dos enfoques correspondientes al método de “Recocido Simulado” y a una búsqueda aleatoria. Ambos fueron calculados para 300 iteraciones. Los resultados de tal comparación se indican en la Tabla 6.8

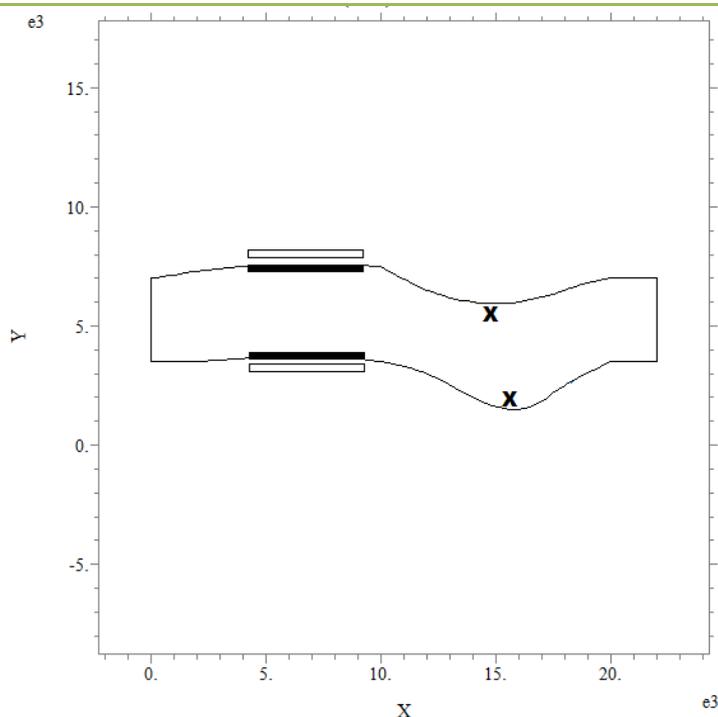


Figura 6.15: Esquema de diseño.

Nuevamente el enfoque basado en el método de “Recocido Simulado” es el más económico, representando un ahorro del 20% con respecto al método basado en búsqueda por prueba y error.

		Recocido Simulado	Aleatorio
Nivel de concentración en zona protegida (isla)	DBO ( $kg/m^3$ )	6.032906E-5	5.742924E-5
	OD ( $kg/m^3$ )	8.070635E-3	8.062861E-3
	CF (NMP/100ml)	886	776
Nivel de concentración en zona protegida (costa superior)	DBO ( $kg/m^3$ )	1.023073E-5	7.655126E-5
	OD ( $kg/m^3$ )	8.034631E-3	8.046277E-3
	CF (NMP/100ml)	908	682
Factor de reducción de las tres plantas	$\beta_1$	0.35	0.52
	$\beta_2$	1	0.77
Longitud de tuberías de descarga	L1 (m)	600	600
	L2 (m)	600	600
Coordenadas de las plantas de tratamiento	(Xp1, Yp1)	(8734, 6420)	(4949, 6418)
	(Xp2, Yp2)	(4230, 3900)	(3527, 3907)
Costo Total Anual	CT (US\$/año)	1 381 854	1 713 823

Tabla 6.8: Comparación de valores de los enfoques calculados.

---

## CAPITULO VII:

### CONCLUSIONES

---

#### **Principales resultados de la tesis**

Si bien los recursos hídricos tienen una gran capacidad de recuperación, esta cualidad se hace cada vez más vulnerable a los millones de toneladas de efluentes, en particular urbanos, que llegan día tras día a los cuerpos de agua en forma directa o indirecta.

Por esta razón, resulta imprescindible la instalación de plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas para que los niveles de concentración de tales descargas no superen los valores permitidos en determinadas zonas de resguardo ambiental en cursos de agua aledaños a ciudades. Debido a los elevados costos de construcción y operación de las mismas, es necesario adoptar una solución de compromiso técnico – económico – ambiental en su diseño.

Éste ha sido el objetivo del presente trabajo de tesis de magíster, y a efectos de abordarlo se lo ha formulado matemáticamente como un problema de diseño óptimo. Asimismo para su resolución numérica se ha desarrollado un modelo computacional consistente en la integración de un simulador basado en el método de elementos finitos, con una técnica de optimización apropiada.

Con el presente modelo computacional de diseño fue posible determinar en forma óptima la localización de las salidas de las tuberías de descarga de efluentes urbanos provenientes de plantas de tratamiento, así como la capacidad de depuración de las mismas, para garantizar niveles tolerables de concentración de indicadores

ambientales adecuados en zonas de resguardo ambiental, procurando al mismo tiempo minimizar los costos de construcción y operación de dichas plantas.

La estrategia planteada hace uso de una solución numérica mediante el método de los elementos finitos de un problema hidrodinámico estacionario para aguas poco profundas para de obtener el campo de velocidades. Con éstas se obtienen funciones de influencia que permiten luego expresar mediante simples fórmulas analíticas los niveles de concentración de los indicadores pertinentes (CF, DBO y OD) en las zonas (protegidas) de interés en términos de tasas de descarga y ubicaciones de salidas de descarga arbitrarios.

Para la determinación de tales funciones se ha formulado un modelo adjunto de transporte que requiere la solución computacional mediante el método de elementos finitos tantas veces como zonas protegidas existan, independientemente de la cantidad de descargas consideradas. Como las primeras son generalmente menos numerosas que las últimas tal estrategia resulta muy eficiente.

Las fórmulas de concentración así obtenidas fueron utilizadas conjuntamente con la técnica de “recocido simulado” para la determinación de las variables de diseño óptimas (es decir aquellas que minimizan el costo económico del tratamiento sin violar las restricciones ambientales en las zonas protegidas). Tal estrategia ha demostrando ser eficiente frente a otras alternativas de diseño analizadas.

Dicho enfoque ha sido implementado en el programa general de elementos finitos FlexPDE.

### **Alcances y limitaciones del método de diseño propuesto**

- El presente enfoque teórico está limitado a situaciones estacionarias, tanto para condiciones hidrodinámicas como en las tasas de emisión de las descargas de efluentes. En tal sentido fue pensado para un diseño que considera la situación más desfavorable (aguas bajas), donde los niveles de concentración suelen ser superiores que en condiciones normales.

Por tal motivo los modelos matemáticos desarrollados (hidrodinámico y de transporte de sustancias) corresponden a problemas estacionarios. Asimismo se han empleado algunas simplificaciones adicionales tales como la utilización de teorías bidimensionales correspondientes a aguas someras (es decir no se consideran

aspectos tridimensionales sino solamente magnitudes integradas en la vertical). Sin embargo, tal idealización arroja resultados adecuados para la problemática analizada, cuando la profundidad es notablemente menor que el ancho (lo cual es una situación más bien frecuente). Por otra parte se han despreciado componentes de aceleración advectiva y de Coriolis. La primera simplificación puede dar ciertas imprecisiones en el patrón de flujo hidrodinámico para ríos con márgenes de gran curvatura, y la segunda para cuerpos de agua de gran extensión.

- Es importante considerar que el enfoque de diseño propuesto supone que los modelos hidrodinámicos y de transporte empleados en el presente trabajo están adecuadamente calibrados a la situación en la cual se los va a emplear. Tal calibración previa es muy importante ya que errores en la determinación de ciertos parámetros tales como los términos de fricción de fondo o como difusión turbulenta, pueden influir en los resultados de las variables del diseño.

### **Ventajas y Originalidad del Enfoque Propuesto**

*Acerca de la temática estudiada:*

- Existe un gran volumen de trabajos acerca del desarrollo de métodos computacionales adecuados para el análisis de problemas ambientales. Asimismo, un área activa de investigación es la aplicación de tales modelos a casos reales, como así también el desarrollo de programas computacionales orientados a diversas problemáticas ambientales. También constituye un campo de estudio importante la utilización de modelos matemáticos para estudios de impacto ambiental y para comparar diferentes escenarios de diseño a efectos de seleccionar alguna alternativa pre establecida. Sin embargo, menor atención se ha prestado al desarrollo de métodos de diseño de sistemas ambientales mediante la integración de herramientas de simulación y optimización. En tal sentido la presente tesis contribuye a una línea de investigación que está actualmente en expansión.

- En particular, existen en la literatura algunos enfoques de diseño de tratamiento de efluentes que descargan en cursos de agua desde un punto de vista de optimización, aunque la mayoría está centrado en modelos hidrodinámicos y de transporte unidimensionales. El presente trabajo permite abordar situaciones más complejas desde un punto de vista bidimensional.

### *Acerca de los aspectos metodológicos*

- Uno de los aspectos más importantes del presente desarrollo es la obtención de una fórmula analítica basada en coeficientes de influencia para calcular la concentración de indicadores ambientales en las zonas protegidas. La determinación de los correspondientes coeficientes requiere de unas pocas soluciones del problema de transporte adjunto con el método de los elementos finitos (una simulación por cada zona protegida). Una vez obtenidas las correspondientes funciones de influencia, la determinación de las concentraciones de indicadores que se realiza en forma iterativa en el proceso de diseño óptimo requiere muy poco tiempo de computación. De hecho el tiempo necesario para tales determinaciones es, al menos, 30 veces menor que el empleado por la solución directa del problema de transporte mediante el método de elementos finitos.

- La utilización del método de “recocido simulado” para la selección del diseño óptimo es además muy efectiva puesto que el problema en cuestión puede presentar mínimos locales que dificultan la aplicación de técnicas de búsqueda local, tales como aquellas basadas en gradiente (que pueden quedar atrapados en alternativas de diseño óptimo desde el punto de vista local). Por otra parte, en comparación con otras técnicas de optimización global tal como una simple búsqueda aleatoria, el método utilizado presenta mayores probabilidades de hallar el mínimo buscado para un mismo número de iteraciones, puesto que se aprovecha la estructura de la función objetivo. No existiría dificultad formal de aplicar la misma metodología en conjunto con otro tipo de funciones de costo (continuas o discontinuas). Asimismo es muy simple para implementar desde el punto de vista computacional.

- Con respecto a algunos trabajos en la misma temática que se han publicado, el presente modelo tiene algunas desventajas aunque varias ventajas. Como se ha comentado anteriormente mejora varios trabajos recientes en cuanto al tratamiento bidimensional del problema, lo que lo hace más efectivo para analizar situaciones de tramos.

- El presente trabajo se ha basado parcialmente en los artículos de Katopodes et al. (1996), Álvarez Vázquez et. al. (2005) y Skiba et al. (2000). Katopodes et al. consideran la elección de puntos de descarga que minimicen el impacto ambiental en

zonas protegidas, sin tener en cuenta la evaluación del costo económico. De esta manera no es posible discernir la ventaja económica entre configuraciones de descarga que arrojen el mismo impacto a diferencia de lo que se plantea aquí. La consideración del costo económico podría hacerlo más adecuado a la aplicación en situaciones reales ya que este aspecto suele resultar primordial para la toma de decisiones. Por otra parte, Alvarez et al. estudian por un lado, la determinación de la localización óptima de las tuberías de descarga a los efectos de minimizar el costo de construcción garantizando la calidad de aguas en algunas zonas protegidas, y por el otro la variación temporal óptima de descarga para minimizar costos de operación resguardando la calidad de agua en las zonas aludidas. Tales tipos de problemas son aquí formulados en forma simultánea. Por otra parte, con respecto al problema sobre el grado de depuración que ellos abordan no es exactamente el mismo que el presente, ya que no consideran (o al menos no lo aclaran), el costo de construcción de la planta (basado en la capacidad de tratamiento) como se hace aquí, sino los costos de operación basados en la distribución temporal de descargas. Finalmente, el problema considerado por Skiba et al. corresponde a contaminación atmosférica. Ellos analizan criterios de disminución de emisiones de chimeneas industriales a los efectos de no superar valores admisibles de concentración en ciertas zonas protegidas, buscando que la disminución sea mínima. En particular tampoco consideran entonces aspectos de costo económico ni de localización. Desde el punto de vista metodológico, Katopodes et al. y Alvarez et al. emplean técnicas de búsqueda local para la determinación de los mínimos de sus funcionales, lo que para el presente problema podría implicar la convergencia a mínimos locales. Por otra parte, Skiba et al. hace uso de funciones analíticas de diseño que garantizan el cumplimiento de los niveles de concentración en determinadas zonas debido a descargas provenientes de chimeneas industriales. Tal estrategia fue comparada con la técnica de optimización empleada en el presente trabajo, demostrando no ser tan eficiente desde el punto de vista económico. Sin embargo, los problemas analizados en los trabajos mencionados corresponden a situaciones no estacionarias. Desde tal punto de vista son más generales que el problema estudiado en esta tesis.

*Acerca de la implementación computacional:*

- El modelo propuesto se implementó en un programa general de elementos finitos (FlexPDE). Una de las características salientes de tal programa es que no está

limitado a una librería de modelos, lo que permite combinar diferentes problemas como por ejemplo la determinación de la contaminación de las aguas superficiales aledañas a una ciudad como también de las aguas subterráneas. Esta cualidad hace potencialmente posible el estudio de la problemática ambiental desde diversos puntos de vista usando un mismo ambiente computacional. En tal sentido, este enfoque es más conveniente que el desarrollo de programas de aplicación específica tal como por ejemplo QUAL2E para el análisis de calidad de agua en ríos desde un planteo unidimensional, que se enfocan en un tipo de problema desde un tipo de abordaje metodológico.

- Asimismo, el programa considerado es fácilmente utilizable, y puede ser adaptado para su empleo por ingenieros ambientales sin experiencia en métodos matemáticos o numéricos.

- Un aspecto de interés en la implementación del presente modelo matemático viene dado por su utilidad para el diseño óptimo ya que FlexPDE no está originalmente pensado como un programa de optimización. Otras aplicaciones computacionales respecto a enfoques de diseño óptimo vinculan diferentes tipos de programas, tales como uno de simulación numérica con otro de optimización matemática. La presente implementación puede ser ventajosa al hacer posible estudiar todo el proceso desde un mismo ambiente computacional.

*Acerca de la utilidad en la práctica de la ingeniería ambiental:*

- El problema planteado constituye un adecuado ejemplo acerca de enfoques de diseño que contemplen en forma simultánea aspectos ambientales y económicos a partir de un enfoque numérico.

- La estrategia propuesta puede aplicarse a otros problemas ambientales o extenderse para considerar otras dimensiones del problema. Además puede ser implementado en diversos ambientes computacionales (tales como MATLAB y/o FEMLAB, etc.).

- En particular, la herramienta computacional generada es de manejo relativamente simple y puede ser de utilidad para la toma de decisiones apropiadas de proyecto de plantas de depuración de efluentes urbanos.

## **Posibles extensiones**

- Como ha sido comentado, el modelo presenta ciertas limitaciones. El modelo hidrodinámico utilizado puede presentar imprecisiones para la determinación del campo de velocidades en cursos de agua con meandros muy marcados o de gran extensión (como lagos o ríos muy anchos). Para mejorar la capacidad predictiva ante tales situaciones debe modificarse el modelo hidrodinámico, incorporando términos de aceleración advectivos y de Coriolis. Esto puede ser realizado de manera relativamente directa.
- Existen situaciones que no pueden ser comprendidas desde un punto de vista estacionario por sus particularidades inherentes, tales como los estuarios que presentan regímenes hidráulicos de carácter oscilatorio debido a la acción de mareas, o el transporte de contaminantes con emisiones dependientes del tiempo. Es posible extender la metodología de diseño para tal tipo de situaciones, reformulando los problemas hidrodinámico y de transporte desde un punto de vista no estacionario. A partir de los mismos sería posible la simulación bajo diferentes escenarios de diseño, buscando sus valores óptimos a partir del método de “recocido simulado” presentado aquí. Tal estrategia puede ser adecuadamente implementada en el mismo programa aquí utilizado (FlexPDE).
- Tal tipo de problema tendrá una carga computacional mayor que la del caso actual. Sin embargo es posible investigar alternativas para la reducción de tiempos de cálculo. Entre ellas es posible reformular el problema adjunto desde un punto de vista no estacionario para obtener expresiones de simple evaluación numérica, de manera similar a lo planteado en este trabajo.
- Las ideas desarrolladas pueden ser adaptadas también para resolver otro tipo de problemas ambientales tales como: la localización óptima de emplazamientos industriales para el control de emisiones gaseosas, o problemas de diseño óptimo en aguas subterráneas para la ubicación de pozos de toma de agua potable en ciudades costeras a los efectos de evitar la salinización de las napas, etc.
- Asimismo es posible utilizar algunas de las ideas consideradas en este trabajo para la calibración de modelos ambientales a situaciones reales. Esto se refiere a obtener los parámetros que aparecen en las ecuaciones pertinentes a partir de ciertas mediciones de campo. Por ejemplo si se intenta obtener el coeficiente de fricción

para un problema hidrodinámico deben efectuarse mediciones de profundidad y o velocidades de corriente en distintos puntos de un tramo de río bajo análisis, para diferentes condiciones aguas arriba y abajo. Los valores adecuados de los coeficientes buscados corresponden a aquellos que minimicen la diferencia entre las velocidades calculadas y las medidas. Este problema puede plantearse como uno de optimización que puede ser resuelto mediante la combinación de un simulador de elementos finitos con el método de “recocido simulado”. Tal enfoque puede ser implementado en el mismo software usado aquí.

---

## REFERENCIAS

---

- Alvarez-Vázquez, L.J. Martínez, A. Rodríguez, C. Vázquez-Méndez, M.E. Mathematical model for optimal control in wastewater discharges: the global performance. *Comptes rendus* (328), 327-336. 2005.
- Alvarez-Vázquez, L.J. Martínez, A. Rodríguez, C. Vázquez-Méndez, M.E. Vilar, M.A. Optimal shape design for fishways in rivers. *Mathematics and computers in simulation*. (76), 218-222. 2007.
- Alvarez-Vázquez, L.J. Martínez, A. Rodríguez, C. Vázquez-Méndez, M.E. Vilar, M.A. An application of optimal control theory to river pollution remediation. *Mathematics and computers in simulation*. 2008.
- Álvarez-Vázquez, L.J., Balsa-Canto, E. y Martínez, A. Optimal design and operation of a wastewater purification system. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, p. 668-682, 2008.
- Awruch, A., Ferrante, A. y Partridge, P. Modelos de elementos finitos para el estudio de circulación en aguas poco profundas. Porto Alegre, Departamento de Engenharia Civil da UFRGS. 1976.
- Brown, L.C. y Barnwell, T.O. The enhanced stream water quality models QUAL2E and QUELS2E-UNCAS, EPA/600/3-87-007, U.S. Environmental Protection Agency. 1987.
- Bellos, C. Hrisanthou, V. Numerical simulation of morphological changes in rivers and reservoirs. *Computers and mathematics with applications*. Vol.45, p.453-467, 2003.

- Campolo, M, Adreussi, P y Soldati, A. Water quality control in the river Arno. *Water Research*. Vol. 36, 0.2673-2680, 2002.
- Cardini, J., Zabalett, A., Oliver, N. y Mársico, D. Efecto de los coeficientes de dispersión sobre la modelación bidimensional del transporte de contaminantes. Caso de estudio. *Mecánica Computacional*, Vol XIII, p.1-14. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2004.
- Cea, L. y Bladé, E., *Jornadas Técnicas sobre Hidráulica Fluvial*, Madrid. 2007.
- Cea, L., Vázquez-Cendón, M.E. y Puertas, J. El método de volúmenes finitos aplicado a problemas de ingeniería fluvial y costera, *La Gaceta de la RSME*, Vol. 12 Núm. 1, p.71–93. 2009.
- Chapra, S. Pelletier, G. y Tao, H. Modeling framework for simulating river and steam water quality. Versión 2.04. Documentation and users manual. Civil and environmental engineering dept. Tufts University, Medford, MA. 2006.
- Chertok, D.L. Lardner, R.W. Variational data assimilation for a nonlinear hydraulic model. *Application of mathematical modeling*. Vol. 20, 675-682, 1996.
- Colonna Rosman, P.C. SisBaHiA. Sistema Base de Hidrodinámica Ambiental. Versión 8.5. COPPE, Engenharia Costeira & Oceanográfica. Universidad Nacional de Río de Janeiro, Brasil.2011.
- Cortínez, V.H. y Sequeira, M.E. Un enfoque híbrido para el rediseño acústico óptimo de recintos industriales. *Mecánica Computacional*. Vol. 28, p.39-61, 2009.
- Cortínez, V.H. y Sequeira, M.E. Identificación de las condiciones acústicas en recintos industriales. *Mecánica Computacional*. Vol. 29, p.2155-2172, 2010.
- Deng, Y., Binghui, B., Guo, F., Kun, L. y Zicheng, L. Study on the total water pollutant load allocation in the Changjiang (Yangtze River) Estuary and adjacent seawater area. *Estuarine, Coastal and Shelf Science* Vol. 86, p. 331–336, 2010.
- Engelhardt, C., Prochnow, D. y Bungartz, H. Modeling and simulation of sedimentation processes in a lowland river. *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 39, p. 627-633, 1995.
- FlexPDE 5.08 User Manual, Copyright ©, PDE Solutions Inc, ([www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com)), 2005.

- Florez-Giraldo J., Camacho, L. A. , Muñoz, J. D. . Transporte de Sustancias en Aguas Someras por medio del Método Lattice Boltzmann, *Revista Colombiana de Física*, Vol. 42, No. , 2010.
- Friedler, E. y Pisanty, E. Effects of design flow and treatment level on construction and operation costs of municipal wastewater treatment plants and their implications on policy marking. *Water Research*. Vol. 40, pp. 3751-3758, 2006.
- Gómez Orea, D. *Evaluación de Impacto Ambiental*. Ed. Agrícola Española, S.A., 1999.
- Hashemi, M.R. Abedini, M.J. Neill, S.P. Malekzadeh, P. Tidal and surge modelling using differential quadrature: A case study in the Bristol Chanel. *Coastal Engineering*. 2008.
- HEC-RAS. *River Analysis System. Version 4.0*. US Army Corps of Emgineers, Institute for Water Resources, Hydrologic Engineering Center. 2008.
- Heniche, M. Secretan, Y. Boudreau, P. Leclerc, M. A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries. *Advances in water resources*. (23), 359-372, 2000.
- Hernandez-Sancho, F., Molinos-Senante, M y Sala-Garrido, R. Economic valuation of environmental benefits from wastewater treatment processes: An empirical approach for Spain. *Science of the Total Environment*. vol. 408 p. 953–957, 2010.
- Informe Brundtland (1987). *Comisión Mundial de Medio Ambiente y Desarrollo de Naciones Unidas*.
- Ji, Y. Zhang, J. Zhao, D. Analysis of water quality in shallow lakes with a two-dimensional flow-sediment model. *Journal of hydrodynamics*. 19(4), 501-508, 2007.
- Katopodes, N.D. Finite element model for the hydrodynamics and mass transport in the Upper Potomac estuary. Rep., Metropolitan Council of Washington Governments, Washington, D.C. 1987.
- Katopodes, N.D. Piasecki, M. Site and size optimization of contaminant sources in surface water systems. *Journal of environmental engineering*. 122(10), 917-923. 1996.

- Kirkpatrick, S. Gelatt, C. D. y Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing. Volume 220, Number 4598, 1983.
- Kerachian, R. y Karamouz, M. Waste-load allocation model for seasonal river water quality management: application of sequential dynamic genet algorithms. Scientia iranica, Vol. 12, N°2, p. 117-130. 2005
- Liu, F., Hu, F. y Zhu, J. Adjoint method for the optimum planning of industrial pollutant sources. Science in China, Series D. Vol. 48, N°8, p.1270-1279. 2005
- Louaked, M. Saidi, A. Pointwise control and hybrid scheme for quality equation. Nonlinear analysis, (NA 7652). 2009
- Manual de MATLAB. Copyright 1984-2007
- Mantilla, M.G., Servín Jungdorf C. A., Sánchez Castañed, L.F. y Montesillo Cedillo, J.L. Costos índice de sistemas de tratamiento de aguas residuales en México. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. 2002.
- Mara, D., S. Cairncross. Directrices para el uso sin riesgos de aguas residuales y excretas en agricultura y acuicultura. Medidas de protección de la Salud Pública. OMS, p. 213, 1990.
- Marchuk, G. I. Mathematical Models in Environmental Problems. North Holland, 1986.
- Mays, L.W. Tung, Y.K. Hydrosystems engineering and management. McGraw-Hill, Inc., New York, N.Y. 1992.
- Menéndez, A.N. La simulación numérica en estudios de impacto ambiental. Mecánica Computacional Vol. XV, p.181-191, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 1995.
- Menéndez, A.N., Lopolito, M.F, Badano, N., Re, M., Evaluación de la Calidad del Agua en la Franja Costera Sur del Río de la Plata mediante Modelación Numérica, Informe INA-LHA 02-1207-11, Comitente: Autoridad de Cuenca del Matanza-Riachuelo (ACuMaR), 2011.
- Mostafavi, S.A. y Afshar, A. Waste load allocation using non-dominated archiving multi-colony ant algorithm. 2° International conference on engineering optimization. Lisboa, Portugal. 2010.

- Muga, H. E., Mihelcic, J. R. Sustainability of wastewater treatment technologies. *Journal of Environmental Management* . vol. 88, p.437–447, 2008.
- Murty Yandamuri, S.R., Srinivasan, K. y Murty Bhallamudi, S. Multiobjective optimal waste load allocation models for rivers using nondominated sorting genetic algorithm-II. *Journal of Water Planning and Management*. Vol.132, p.133-143, 2006.
- Orellana, J. Contaminación. Apuntes cátedra Ingeniería Sanitaria. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario. 2005.
- Parra-Guevara, D. y Skiba, Y. N. “Industrial pollution transport. Part 2. Control of industrial emissions”. *Environmental Modeling and Assessment*. Vol.5, p. 177-184, 2000.
- Piasecki, M. Katopodes, N.D. Control of contaminant releases in rivers. I: Adjoint sensitivity analysis. *Journal of hydraulic engineering*. 123(6), 486-492. 1997.
- Piasecki, M. Katopodes, N.D. Control of contaminant releases in rivers. II: Optimal Desing. *Journal of hydraulic engineering*. 123(6), 493- 503. 1997
- Preu, H. C. Analysis of source control for domestic wastewaters. *Water Science and Technology* Vol. 32, 1 p.153–159 ,1995 .
- Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 2º edición. Ed. McGraw-Hill, 1993.
- Revilla, J.A., Koev, K.N., Roldám, A., Alvarez, C. y Díaz, R. Métodos de estudio del déficit de oxígeno originado por vertidos de aguas residuales en zonas costeras. *Ingeniería del Agua*. Vol I, N°2, p.83-96. 1994
- Romero Rojas, J.A. *Tratamiento de aguas residuales por lagunas de estabilización*. 3º edición. Ed. Escuela Colombiana de Ingeniería, 1999.
- Rubin, H. y Atkinson, J. *Environmental Fluid Mechanics*. Ed. Marcel Dekker Inc., 2001.
- Salas Quintero, D., Zapata, M.A. y Guerrero, J. *Modelo de costos para el tratamiento de las aguas residuales en la región*. Scientia Et Echnica. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701. Colombia 2007

- Salas, H. J. Emisarios submarinos, enfoque general, conceptos básicos de diseño. OPS/CEPIS/PUB/ 00.52, 2000.
- Skiba, Y. N. y Parra-Guevara, D. "Industrial pollution transport. Part 2. Formulation of the problem and air pollution estimates.". *Environmental Modeling and Assessment*. Vol.5, p. 169-175, 2000.
- Sousa, J. Ribeiro, A. Cunha, M. y Antunes, A. An optimization approach to wastewater systems planning at regional level. *Journal o hydroinformatics*. p. 115-123. IWA Publishing 2002.
- Strelkoff, T. One-dimensional equations of open channel flow, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* 95 (3), 861-876, 1969.
- Strub, I.S. Percelay, J. Stacey, M.T. Bayen, A.M. Inverse estimation of open boundary conditions in tidal channels. *Ocean modeling* (447), 2009.
- Thomann, R.V. Mueller, J.A. Principles of surface water quality modeling and control. Harper & Row, New York, N.Y. 1987.
- Tortorelli M., Ríos de Vida. Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, ISBN: 978-950-00-0704-7, 2009.
- Tsanis, I.K. y Saied, U. A wind-driven hydrodynamic and pollutant transport model. *Global NEST Journal*. Vol. 9, N°2, p.117-131, 2007.
- Wainwright, J. y Mulligan, M. *Environmental Modelling. Finding Simplicity in Complexity*. Ed. John Wiley & Sons Inc. 2004.
- Yu, L. y Salvador, N.N.B. Modeling water quality in rivers. *American Journal of Applied Sciences*. Vol. 2, 4, p. 881-886, 2005.
- Zienkiewicz, O.C. *El método de los elementos finitos*. Ed. Reverté, 1980.
- Zhu, J. Zeng, Q. A mathematical formulation for optimal control of air pollution. *Science in China, Serie D*. 46(10), 994-1001. 2003
- Liu, F. Hu, F. Zhu, J. Adjoint method for the optimum planning of industrial pollutant sources. *Science in China, Series D*. 48(8), 1270-1279. 2005
- Zabalett, A., Cardini, J., Mársico, D y Oliver, N. Incidencia en la calidad de agua del Río Uruguay de las descargas cloacales de las ciudades de Concordia y Salto. *Contaminación Atmosférica e Hídrica en la Argentina*. Vol.2, p. 503-512, 2011.



---

## ANEXOS

---

- **ANEXO I: Aguas Residuales**

**A.I.1. Resumen de los contaminantes que comúnmente se encuentran en las aguas residuales, presentada por Romero Rojas (1999).**

Contaminantes	Motivo de su importancia
Sólidos Suspendidos	Pueden llevar al desarrollo de depósitos de barro y condiciones anaerobias, cuando las aguas residuales no tratadas son volcadas en el ambiente acuático.
Materia orgánica biodegradable	Compuesta principalmente de proteínas, carbohidratos y grasas. Si es descargada sin tratamiento al medio ambiente, su estabilización biológica puede llevar al consumo del oxígeno natural y al desarrollo de condiciones sépticas.
Microorganismos Patógenos	Los organismos patógenos existentes en las aguas residuales pueden transmitir enfermedades.
Nutrientes	Tanto el Nitrógeno como el Fósforo, junto con el Carbono, son nutrientes esenciales para el crecimiento. Cuando son lanzados en el ambiente acuático, pueden llevar al crecimiento de la vida acuática indeseable. Cuando son lanzados en cantidades excesiva en el suelo, pueden contaminar también el agua subterránea.
Materia orgánica refractaria	Esta materia orgánica tiende a resistir los métodos convencionales de tratamiento de aguas residuales. Ejemplos típicos incluyen detergentes, pesticidas agrícolas, etc.
Metales pesados	Los metales pesados son normalmente adicionados a los residuos de actividades comerciales e industriales.
Sólidos inorgánicos disueltos	Componentes inorgánicos como el calcio, sodio y sulfato son adicionados a los sistemas domésticos de abastecimiento de agua.
<b>Tabla A.1.1: Contaminantes presentes en aguas residuales.</b>	

**A.I.2. Impactos en aguas superficiales**

La capacidad de recuperación de los ecosistemas acuáticos es diversa y característica de cada tipo y condición del medio ambiente, por lo que es necesario el conocimiento previo del comportamiento de los mismos. Es un conjunto de fenómenos físicos, químicos y biológicos, que tienen lugar en el curso del agua de

modo natural y que provocan la destrucción de materias extrañas incorporadas al medio acuático. Principalmente son las bacterias aeróbicas, que consumen materia orgánica con ayuda del oxígeno disuelto en el agua. Además, hay que añadir las plantas acuáticas, que asimilan algunos componentes en forma de nutrientes, así como otros procesos fotoquímicos, diluciones, etc.

A modo de resumen, en la Tabla A.I.2 se presentan las características generales en ríos, lagos y embalses:

De acuerdo a estas características, la capacidad de autodepuración varía de un sistema a otro, es decir, no va a ser la misma en un arroyo que en un río, ni tampoco puede considerarse similar a la de un lago o laguna ya que sus procesos biológicos y de transporte son diferentes.

El efecto fisicoquímico que generan las descargas de efluentes sin tratar en el medio receptor puede caracterizarse en distintas áreas llamadas zonas de contaminación o influencia (Orellana, 2005), las cuales pueden variar según sean las características de las aguas receptoras.

- **Zona de degradación:** Es la zona próxima a la descarga, donde se produce un proceso de degradación en el que suceden rápidos cambios en las cualidades fisicoquímicas del agua. Debido al exceso de nutrientes, la flora bacteriana aumenta debido a los depósitos de lodo de alto contenido de materia orgánica que allí se forman, más tarde cuando estos organismos mueren, sedimentan en el fondo donde se descomponen y agotan el oxígeno del agua. El aspecto del agua es sucio y debido a este proceso comienza una degradación por parte de la flora microbiana. Desaparecen formas de vida delicadas como algunos peces y algas, y aparecen otras más resistentes.
- **Zona de descomposición activa:** Un poco más alejado de la zona de descarga comienza un proceso de descomposición caracterizado por la presencia de espumas y un olor fuerte y desagradable generado por la aparición de bacterias anaeróbicas las cuales liberan anhídrido carbónico y amoníaco.
- **Zona de recuperación:** Se observa una clarificación gradual del agua, donde comienza a incrementarse los niveles de oxígeno disuelto, lo que lleva a la reaparición de la vida acuática macroscópica.

- **Zona de aguas limpias:** Los niveles de oxígeno se encuentran cerca del punto de saturación, y las condiciones físico-químicas es acorde con las condiciones naturales del cauce.

	Ríos	Lagos y embalses
Características Generales	<p>El flujo del río es turbulento. Su velocidad varía de un punto a otro.</p> <p>Las características de los ríos cambian desde la cabecera o fuente a la desembocadura:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- aumentan en anchura y caudal,</li> <li>- el metabolismo, composición y diversidad de las comunidades de especies se modifica a lo largo del mismo.</li> </ul>	<p>Movimientos lentos del flujo. Su velocidad no presenta cambios bruscos de un punto a otro.</p> <p>Las fuerzas que generan el movimiento son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- viento,</li> <li>- radiación solar,</li> <li>- pérdidas por calor, y</li> <li>- flujos de entrada y salida.</li> </ul> <p>Algunos lagos son tan grandes que se asemejan a ambientes marinos.</p>
Modificación Antrópica	La actividad humana ha contribuido en gran medida a la modificación de los caudales en los ríos y lagos mediante la construcción de embalses, canalizaciones y usos para riego.	
Transporte de Contaminantes	El transporte se relaciona con las propiedades del flujo, donde el movimiento predominante es longitudinal debido a las características físicas de estos.	El movimiento de los contaminantes se originan por efecto del viento y oleaje

**Tabla A.I.2:** Contaminantes presentes en aguas residuales.

Generalmente la mayoría de las aguas superficiales se escurren por cuencas que desembocan en mares u océanos, lo que lleva a que la influencia del transporte de contaminante se extienda, a veces, hasta varios kilómetros.

Por lo tanto, estos procesos asociados al vertido no controlado de efluentes cloacales en cuerpos de aguas, generan diversas consecuencias, entre las principales alteraciones pueden resumirse las siguientes:

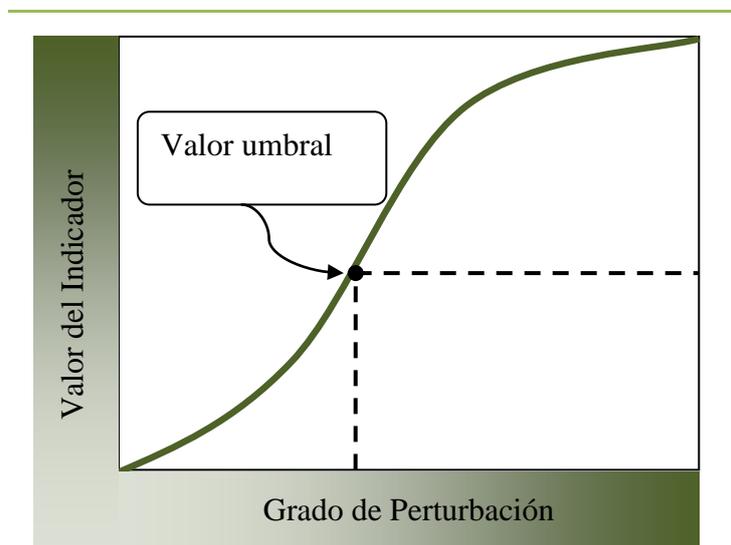
- Disminución del oxígeno disuelto; causado por el aumento de bacterias que necesitan de oxígeno para degradar la materia orgánica. Esta situación hace que disminuya el oxígeno a tales niveles que propicia la aparición de bacterias aeróbicas.
- Eutrofización del medio, provocado por el exceso de materia orgánica;
- Variación en la biodiversidad, por medio del desarrollo de depredadores, competidores y parásitos;
- Sustitución y adaptación de nuevas especies;

- Enfermedades sanitarias, ocasionadas por la proliferación de todo tipo de roedores e insectos transmisores de enfermedades como la disentería, la fiebre tifoidea y el cólera, entre otras;
- Cambios en la estética de la naturaleza causados por olores fuertes y desagradables y cambios en el color natural del agua.
- Pérdidas en las explotaciones económicas regionales tales como el turismo y la pesca comercial y deportiva.

### A.I.3. Indicadores Ambientales

Un indicador ambiental es una variable que pretende reflejar el estado del ambiente en un momento y espacio determinado, lo que los convierte en una herramienta fundamental en los procesos de evaluación y de toma de decisiones de problemas ambientales. En la Figura A.I.1 se representa el grado de perturbación que sufre un sistema frente a un valor creciente de un indicador hipotético (Tortorelli, 2009).

A partir de la estimación del valor umbral, determinado para la especie más sensible utilizada, junto con el uso previsto del recurso, se establece el valor o nivel guía regulatorio para cada indicador incluidos en la legislación vigente (Figura A.I.2).



**Figura A.I.1:** Incidencia de los Indicadores sobre el ecosistema.

PARÁMETROS DE CALIDAD DE LAS DESCARGAS LÍMITE ADMISIBLES

GRUPO	PARAMETRO	UNIDA D	CODIGO TECNICA ANALITICA	LIMITES PARA DESCARGAR A:			
				Colectora Cloacal	Cond. Pluv. o cuerpo de agua superficial	Absorción por el suelo (h)	Mar Abierto
I	Temperatura	°C	2550 B	≤45	≤45	≤45	≤45
	pH	upH	4500 H+ B	7,0-10	6,5-10	6,5-10	6,5-10
	Sólidos Sedim 10 Min (2)	ml/l	Cono Imhoff	Ausente	Ausente	Ausente	Ausente
	Sólidos Sedimen.2 Horas (2)	ml/l	Cono Imhoff	≤5,0	≤1,0	≤5,0	≤5,0
	Sulfuros	mg/l	4500 S=D	≤2,0	≤1,0	≤5,0	NE (e)
	S.S.E.E. (1)	mg/l	5520 B (1)	≤100	≤50	≤50	≤50
	Cianuros	mg/l	4500 CN C y E	≤0,1	≤0,1	Ausente	≤0,1
	Hidrocarburos Totales	mg/l	EPA 418.1 6 ASTM3921- 85	≤30	≤30	Ausente	≤30
	Cloro Libre	mg/l	4500 Cl G (DPD)	NE	≤0,5	Ausente	≤0,5
Coliformes Fecales (f)	NMP/10 0ml	9223 A	≤20000	≤2000	≤2000	≤20000	
II	D.B.O.	mg/l	5210 B	≤200	≤50	≤200	≤200
	D.Q.O.	mg/l	5220 D	≤700	≤250	≤500	≤500
	S.A.A.M.	mg/l	5540 C	≤10	≤2,0	≤2,0	≤5,0
	Sustancias fenolicas	mg/l	5530 C	≤2,0	≤0,5	≤0,1	≤2,0
	Sulfatos	mg/l	4500 SO4 E	≤1000	NE	≤1000	NE
	Carbono orgánico total	mg/l	5310 B	NE	NE	NE	NE
	Hierro (soluble)	mg/l	3500 Fe D	≤10	≤2,0	≤0,1	≤10
	Manganeso (soluble)	mg/l	3500 Mn D	≤1,0	≤0,5	≤0,1	≤10

III	Cinc	mg/l	3111 B y C	≤5,0	≤2,0	≤1,0	≤5,0
	Niquel	mg/l	3111 B y C	≤3,0	≤2,0	≤1,0	≤2,0
	Cromo Total	mg/l	3111 B y C	≤2,0	≤2,0	Ausente	NE
	Cromo Hexavalente	mg/l	3500 Cr D	≤0,2	≤0,2	Ausente	NE
	Cadmio	mg/l	3111 B y C	≤0,5	≤0,1	Ausente	≤0,1
	Mercurio	mg/l	3500 Hg B	≤0,02	≤0,005	Ausente	≤0,005
	Cobre	mg/l	3500 Cu D ó 3111 B y C	≤2,0	≤1,0	Ausente	≤2,0
	Aluminio	mg/l	3500 Al D ó 3111 B y C	≤5,0	≤2,0	≤1,0	≤5,0
	Arsénico	mg/l	3500 As C	≤0,5	≤0,5	≤0,1	≤0,5
	Bario	mg/l	3111 B	≤2,0	≤2,0	≤1,0	≤2,0
	Boro	mg/l	4500 B B	≤2,0	≤2,0	≤1,0	≤2,0
	Cobalto	mg/l	3111 B y C	≤2,0	≤2,0	≤1,0	≤2,0
	Selenio	mg/l	3114 C	≤0,1	≤0,1	Ausente	≤0,1
	Plomo	mg/l	3111 B y C	≤1,0	≤0,1	Ausente	≤0,1
	Plaguicidas Organoclorados (g)	mg/l	6630 B	≤0,5	≤0,05	Ausente	≤0,05
	Plaguicidas Organofosforados (g)	mg/l	6630 B	≤1,0	≤0,1	Ausente	≤0,1
	IV	Nitrógeno total (d)	mg/l	4500 N org B (NTK)	≤105	≤35	≤105
Nitrógeno Amoniacal (d)		mg/l	4500 NH <sub>3</sub> +F	≤75	≤25	≤75	≤75
Nitrógeno Orgánico (d)		mg/l	4500 N org B	≤30	≤10	≤30	≤30
Fósforo Total (d)		mg/l	4500 PC	≤10	≤1,0	≤10	≤10

**Figura A.I.2:** Parámetros de vuelco de efluentes urbanos para la Provincia de Buenos Aires. (Resolución 336/03).

En la Tabla A.I.3 se presentan a manera de ejemplo, los niveles guía de algunos parámetros para la calidad de agua establecidos por la Comisión Administradora del Río Uruguay (CARU) conformada por Uruguay y Argentina para los distintos usos:

Uso I : Agua para consumo humano con tratamiento convencional.

Uso II : Agua para actividades recreativas con contacto directo.

Uso III : Agua para actividades agropecuarias.

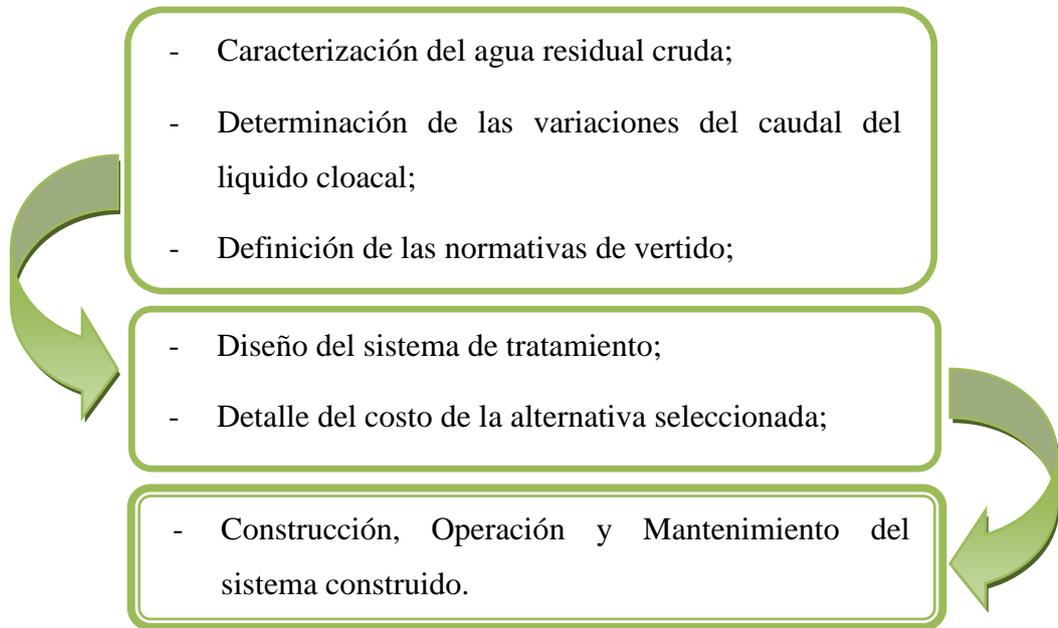
Uso IV: Protección de vida acuática.

ELEMENTOS	pH	Oxígeno Disuelto (mg/l)	DBO5 (mg/l)	Cloruros (mg/l)	Nitrógeno amoniacal (mg N/l)	Nitrógeno de nitratos (mg N/l)	Nitrógeno de nitritos (mg N/l)	Coliformes totales (NMP/100 ml)	Coliformes fecales (NMP/100ml)	Cadmio (mg/l)	Plomo (mg/l)	Cromo total (mg/l)	Aldrin/Dieldrin (ng/l)	DDT (ng/l)
USOS														
I	6,5/8,5	>5	3	250	0,5	10	0,1	5000	1000	0,005	0,05	0,5	30	1000
II	6,5/8,5	>5	3	-	-	-	-	-	200	0,005	-	0,5	-	-
III	6,5/8,5	>4	3	250	-	-	-	1000	-	0,005	0,05	0,5	-	-
IV	6,5/8,5	>5	3	-	0,02	-	-	-	-	0,0002	0,001	0,002	4	1

**Tabla A.I.3:** Niveles guía para la calidad de agua.

#### A.1.4. Determinación de los Sistemas de Tratamiento

Consideraciones preliminares para el acondicionamiento de los efluentes urbanos:



**Figura A.I.3:** Etapas para la selección del método de tratamiento.

Las condiciones de operación y mantenimiento están directamente relacionadas al sistema de tratamiento elegido y de las características socio - económicas predominantes del lugar de emplazamiento de la planta. Estas condiciones son las que determinan la confiabilidad del proceso, el grado de capacitación del personal técnico y los costos asociados.

Cabe aclarar que la elección de un sistema de tratamiento de excelente eficiencia no siempre resulta ser la mejor opción, ya que los costos iniciales y de operación y mantenimiento pueden ser elevados. Por otra parte un sistema de tratamiento de baja confiabilidad no garantiza la calidad final requerida en el efluente. Es por ello que deben analizarse cuidadosamente todos los factores de diseño que intervienen en la selección del proceso.

En la Tabla A.I.4 (Preu, 1995) se resumen los diferentes procesos físicos, químicos o biológicos que intervienen en cada proceso de depuración.

Básicamente existen dos formas generales de tratar las aguas residuales. Una de ellas consiste en dejar que las aguas residuales se asienten en el fondo de los estanques, permitiendo que el material sólido se deposite en el fondo. Después se

trata la corriente superior de residuos con sustancias químicas para reducir el número de contaminantes dañinos presentes. El segundo método, más común, consiste en utilizar poblaciones bacterianas para degradar la materia orgánica. Este método, conocido como tratamiento de lodos activados, requiere el abastecimiento de oxígeno a los microbios de las aguas residuales para realizar su metabolismo.

Operaciones Físicas	Procesos Químicos	Procesos biológicos
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinación del flujo,</li> <li>- Tamizado y eliminación de partículas,</li> <li>- Mezclado,</li> <li>- Floculación,</li> <li>- Filtración,</li> <li>- Secado,</li> <li>- Destilación,</li> <li>- Centrifugado,</li> <li>- Congelación,</li> <li>- Osmosis Inversa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Precipitación,</li> <li>- Neutralización,</li> <li>- Adsorción,</li> <li>- Desinfección,</li> <li>- Oxidación química,</li> <li>- Reducción química,</li> <li>- Intercambio iónico,</li> <li>- Electrodiálisis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Acción aeróbica,</li> <li>- Acción anaeróbica,</li> <li>- Combinación aeróbica-anaeróbica.</li> </ul>

**Tabla A.I.4:** Clasificación general de las operaciones y procesos de tratamiento de aguas residuales.

#### A.I.4. Determinación de los Costos asociados a las Plantas de Tratamiento de Efluentes.

COSTOS	Indicadores de los Costos	
Inversión	Estudios Preliminares y Estudios de Suelo. Diseño e Ingeniería. Construcción. Terreno. Supervisión Técnica. Gastos Administrativos, Legales y Financieros. Varios.	
Funcionamiento	<b>Operación y Mantenimiento</b>	Reposición. Reparaciones. Energía. Monitoreo de los procesos. Mano de Obra para la Operación y Mantenimiento. Insumos Químicos. Disposición de lodos.
	<b>Administrativos</b>	Mantenimiento de Equipos. Personal Administrativo. Gastos Generales. Tasas Ambientales.

**Tabla A.1.5:** Detalle general de costos para una planta de tratamiento. (Salas Quintero (2007)).

– **ANEXO II: Modelos Teóricos**

**A.II.1. Ecuaciones hidrodinámicas. Generalidades**

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido corresponden a la ecuación de continuidad, (Ley de Conservación de la Masa), y las ecuaciones Navier- Stokes (Ecuaciones de Movimiento).

Estas ecuaciones diferenciales son válidas tanto para flujos laminares como turbulentos. Sin embargo, la mayoría de los flujos encontrados en el ambiente son turbulentos donde el flujo varía irregularmente, es decir cantidades como velocidad, presión y concentración de una sustancia muestran una variación aleatoria en el tiempo y en el espacio. Por tal motivo es conveniente descomponer las variables del problema (presión y velocidades del flujo) en una parte suavizada y otra fluctuante de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}u &= \bar{u} + u' \\v &= \bar{v} + v' \\w &= \bar{w} + w'\end{aligned}\tag{II.1}$$

$$P = \bar{P} + P'\tag{II.2}$$

donde  $\bar{(\cdot)}$  denota un promedio con respecto al tiempo y el signo  $(\cdot)'$  la parte fluctuante.

De esta forma el promedio temporal se determina como:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

donde  $T$  es el promedio del período (corto en relación a la escala de tiempos del flujo medio pero largo comparado con las fluctuaciones turbulentas), y por definición el promedio temporal de la parte turbulenta es:

$$\int_0^T u'(t) dt = 0$$

De igual manera se procede con las componentes de las velocidades  $v$ ,  $w$  y la presión  $P$ .

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido (corresponden a la ecuación de continuidad y de Navier-Stokes) pueden expresarse en términos de las variables suavizadas aplicando un enfoque conocido como *Promediación según Reynolds*. Tal procedimiento lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) , \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) , \\ \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g_z + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) , \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

donde:

$u$ ,  $v$  y  $w$ : corresponden a las componentes suavizadas, definidas en (II.1), de las velocidades en las direcciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente,

$\rho$ : la densidad del fluido, que suponemos constante,

$t$ : el tiempo,

$P$ : es la presión correspondiente a la componente suavizada definida en (II.3),

$g$ : la gravedad,

$\nu$ : la viscosidad cinemática  $\mu/\rho$ , siendo  $\mu$  la viscosidad turbulenta.

Debe notarse que estas ecuaciones son formalmente idénticas a las que corresponden a las variables completas (componente suavizada + componente turbulenta). La diferencia aparece en el coeficiente de viscosidad que adopta valores muy diferentes. En el caso turbulento, este coeficiente considera de manera indirecta la estructura turbulenta. Su valor puede ser obtenido empíricamente.

Los miembros izquierdos de las ecuaciones (II.4) corresponden a la suma de las componentes de la aceleración local y advectiva.

Luego los términos:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} , \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} ,$$

representan la suma de las fuerzas que actúan sobre la parcela del fluido producida por las diferencias de presión. Por otra parte:

$$g_x, \quad g_y \quad \text{y} \quad g_z,$$

corresponden a las componentes de la aceleración de la gravedad según  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Los últimos términos del miembro derecho:

$$\nu \nabla^2 u, \quad \nu \nabla^2 v \quad \text{y} \quad \nu \nabla^2 w,$$

constituyen el efecto de las fuerzas viscosas turbulentas.

La formulación del problema se completa planteando los correspondientes términos de contorno e iniciales.

### A.II.2. Teoría de Aguas Poco Profundas

Se presentan aquí las correspondientes ecuaciones para una situación estacionaria. Las mismas son obtenidas a partir de (II.3) y (II.4) efectuando las siguientes hipótesis.

- El movimiento del cauce natural (lago, río) es bidimensional, siendo las velocidades verticales muy pequeñas frente a las horizontales, por lo tanto:

$$w = 0,$$

- Las componentes horizontales de la aceleración de la gravedad en  $x$  e  $y$  son nulas:

$$g_x = g_y = 0 \quad \text{y} \quad g_z = -g,$$

- Los términos viscosos horizontales se pueden despreciar frente a la viscosidad vertical:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

- Asimismo, cuando las dimensiones de los lagos o ríos no son muy grandes (como los mares) es posible despreciar el efecto de la curvatura de la tierra, es decir los términos que involucran el parámetro de Coriolis.
- Se considera condiciones de flujo estacionario, en consecuencia los términos de aceleración local y convectiva se desprecian.

A efectos de presentar las ecuaciones, es conveniente introducir la variable  $\eta$ , correspondiente al nivel de la superficie libre con respecto a un plano de referencia, la cual se relaciona con la profundidad  $H$  a partir de la siguiente manera:

$$H = \eta - z_b , \quad (\text{II.5})$$

donde  $z_b$  es la cota de fondo.

A partir de las hipótesis mencionadas, las ecuaciones (II.3) y (II.4) para el caso estacionario (independiente del tiempo), quedan expresadas de la siguiente manera:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} , \quad (\text{II.6})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) , \quad (\text{II.7})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) , \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{II.9})$$

Usando la notación propuesta en la Figura 3.3, es posible formular las velocidades promediadas en la vertical  $U$  y  $V$  como:

$$U = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{\eta} u \, dz , \quad (\text{II.10})$$

$$V = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{\eta} v \, dz \quad (\text{II.11})$$

Luego, integrando en la vertical la ecuación (II.6) considerando los términos (II.10) y (II.11) se obtiene la ecuación de continuidad bidimensional en función de las velocidades promediadas:

$$\frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.12})$$

De igual manera, integrando en la vertical la ecuación (II.9) y considerando que en la superficie  $P(\eta) = 0$  se llega a una aproximación hidrostática de presiones:

$$P = \rho g (\eta - z) \quad (\text{II.13})$$

Luego, sustituyendo la expresión (II.13) en (II.7) y (II.8) e integrando en la profundidad (ver sección A.II.3), se obtienen las ecuaciones de movimiento bidimensional en las componentes  $x$  e  $y$  respectivamente (Rubin, 2001):

$$0 = -gH \frac{\partial H}{\partial x} - gH \frac{\partial z_b}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - \nu \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) , \quad (\text{II.14})$$

$$0 = -gH \frac{\partial H}{\partial y} - gH \frac{\partial z_b}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial z}(\eta) - \nu \frac{\partial v}{\partial z}(z_b) \quad (\text{II.15})$$

Los términos viscosos de las ecuaciones (II.14) y (II.15) corresponden a las tensiones en la superficie y en el fondo, las cuales pueden definirse como:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) = \frac{\tau_{sx}}{\rho} \quad , \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) = \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad , \quad (\text{II.16})$$

$$\nu \frac{\partial v}{\partial z}(\eta) = \frac{\tau_{sy}}{\rho} \quad , \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z}(z_b) = \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad , \quad (\text{II.17})$$

donde  $\tau_{sx}$  y  $\tau_{sy}$  son las tensiones tangenciales debidas a la fuerza de arrastre del viento en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente, y los términos  $\tau_{fx}$  y  $\tau_{fy}$  corresponden a los términos de fricción del fondo en las direcciones  $x$  e  $y$ .

### A.II.3. Integración en la profundidad de las ecuaciones Hidrodinámicas.

Regla de Leibnitz:

$$F(z, x) = -\frac{1}{\rho}(\rho g(\eta - z))$$

$$\int_{z_b}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x}(F) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\eta} F(z, x) dz - F(\eta, x) \frac{\partial \eta}{\partial x} + F(z_b, x) \frac{\partial z_b}{\partial x}$$

Integración de las ecuación (II.7) usando la Regla de Leibnitz:

$$0 = \int_{z_b}^{\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\eta} -g(\eta - z) dz - (-g(\eta - \eta)) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (-g(\eta - z_b)) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \int_{z_b}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz$$

$$0 = -g \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta z - \frac{z^2}{2} \right]_{z_b}^{\eta} - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \nu_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - \nu_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b)$$

$$\begin{aligned}
0 &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \eta \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) - \left( \eta z_b - \frac{z_b^2}{2} \right) \right] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) \\
&\quad - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\eta^2}{2} - \eta z_b + \frac{z_b^2}{2} \right] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -g \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} [\eta^2 - 2\eta z_b + z_b^2] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -\frac{g}{2} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \eta - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} z_b - 2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \eta + \frac{\partial z_b}{\partial x} z_b + \frac{\partial z_b}{\partial x} z_b \right] \\
&\quad - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -\frac{g}{2} \left[ 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \eta - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} z_b - 2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \eta + 2 \frac{\partial z_b}{\partial x} z_b \right] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) \\
&\quad - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -g \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \eta - \frac{\partial \eta}{\partial x} z_b - \frac{\partial z_b}{\partial x} \eta + \frac{\partial z_b}{\partial x} z_b \right] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) \\
&\quad - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -g \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} (\eta - z_b) - \frac{\partial z_b}{\partial x} (\eta - z_b) \right] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) \\
&\quad - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \\
0 &= -g \left[ (\eta - z_b) \frac{\partial}{\partial x} (\eta - z_b) \right] - g(\eta - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_T \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - v_T \frac{\partial u}{\partial z}(z_b)
\end{aligned}$$

Finalmente como  $H = \eta - z_b$

$$0 = -gH \frac{\partial H}{\partial x} - gH \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - v \frac{\partial u}{\partial z}(z_b) \quad (\text{II.18})$$

De igual manera se procede con (II.8) obteniendo:

$$0 = -gH \frac{\partial H}{\partial y} - gH \frac{\partial z_b}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial z}(\eta) - v \frac{\partial v}{\partial z}(z_b) \quad (\text{II.19})$$

#### A.II.4. Ecuación de Transporte de Sustancias Disueltas. Generalidades.

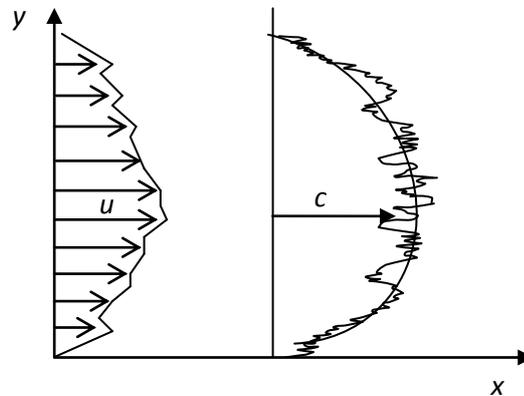
Los procesos de transporte de masa están relacionados por medio de leyes de flujo gradiente. Estas leyes combinan una propiedad de fluido con el gradiente de variable de estado, de esta forma el flujo de masa se relaciona con el gradiente de concentración del fluido.

Al igual que lo que sucede con el comportamiento de las velocidades para flujos turbulentos, explicado en la sección A.II.1, las concentraciones de la sustancia también se componen de una parte suavemente variable o promediada en el tiempo y otra fluctuante como se muestra en la Figura A.II.2:

$$u = \bar{u} + u' \quad (\text{II.20})$$

$$c = \bar{c} + c' \quad (\text{II.21})$$

donde  $\bar{(\cdot)}$  denota un promedio con respecto al tiempo y el signo  $(\cdot)'$  denota la fluctuación instantánea. De igual manera sucede con las velocidades en las componentes  $y$  y  $z$ .



**Figura A.II.2:** Difusión de una sustancia en un flujo turbulento.

La Figura A.II.2 muestra el comportamiento de una sustancia en un flujo turbulento donde  $u$  es la velocidad en la componente  $x$ . La línea continua representa la concentración media de la sustancia  $\bar{c}$  en un instante  $t$ , y la línea con ruido corresponde a la fluctuación instantánea  $c'$ .

Las ecuaciones que gobiernan el transporte de una sustancia disuelta en un fluido pueden expresarse en función de las variables suavizadas (enfoque de *Promediación según Reynolds*):

$$\begin{aligned} J_x &= -D \frac{\partial c}{\partial x} + u c \\ J_y &= -D \frac{\partial c}{\partial y} + v c \\ J_z &= -D \frac{\partial c}{\partial z} + w c \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

donde:

$J_x$ ,  $J_y$ , y  $J_z$ : corresponde a la densidad de flujo (cantidad de contaminante que atraviesa un área por unidad de tiempo).

$u$ ,  $v$  y  $w$ : corresponden a las componentes suavizadas, definidas en (II.20), de las velocidades en las direcciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente,

$c$ : es la concentración correspondiente a la parte suavizada expresada en (II.21), y

$D$ : es el coeficiente de difusión.

Los segundos términos de los miembros derechos de la ecuaciones (II.22) corresponden al transporte advectivo, definiéndose como tal al movimiento de la sustancia conjuntamente con el fluido, por lo tanto requiere de la determinación previa del campo de velocidades del agua.

Los primeros términos de los miembros derechos corresponden al transporte difusivo, impulsado por los gradientes de concentración. El signo negativo indica que el transporte difusivo se da desde una concentración alta a una concentración baja.

Existen dos procesos que contribuyen a dicho transporte, la difusión molecular y la difusión turbulenta.

- La difusión molecular es un desplazamiento aleatorio de moléculas de solutos entre las moléculas de agua. De esta forma las moléculas de solutos se desplazan desde las zonas de mayor concentración hacia las de menor, por lo que siempre que exista un gradiente de concentración se producirá este fenómeno.
- El proceso de difusión turbulenta contempla la parte de la estructura fluctuante. Esta es dominante frente a la difusiva molecular.

Generalmente en la mayoría de las veces, el transporte advectivo es más importante que el difusivo.

Sustituyendo las expresiones (II.22) en la ecuación de conservación de la masa para flujo incompresible, se obtiene la ecuación tridimensional para el transporte de contaminantes:

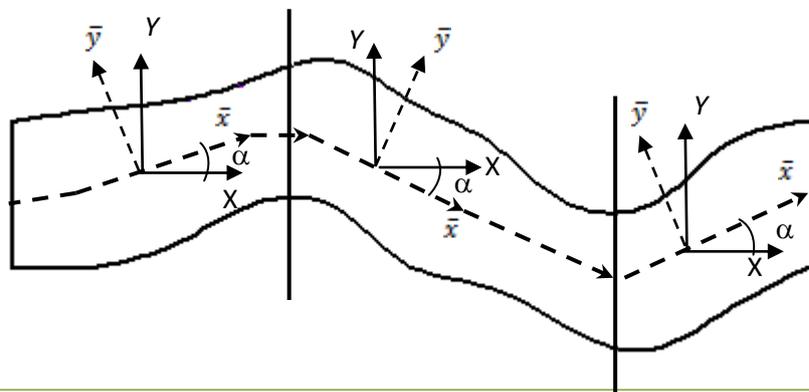
$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) + R_G - R_D \quad (\text{II.23})$$

donde  $R_G$  y  $R_D$  corresponden a la tasa de generación y de degradación de la sustancia en estudio, que puedan producirse por unidad de volumen de fluido. Estos últimos se refieren a la velocidad de transformación o reacción de la/s sustancia/s dentro del volumen y tiene que ver con los tiempos asociados a los cambios de concentración generados por el proceso de transporte, hasta aproximarse al equilibrio del sistema.

La formulación del problema se completa planteado las correspondientes condiciones de borde e iniciales

### A.II.5. Determinación de los coeficientes de dispersión.

En muchos casos, las propiedades de dispersión son diferentes según se trate de su medición en el sentido de la corriente o perpendicular a la misma. Es por ello que es razonable determinar los valores de los coeficientes de dispersión longitudinal  $K_L$  y transversal  $K_T$ . Asimismo debido a curvaturas en su cauce la dirección de la corriente puede variar con respecto a un sistema de coordenadas fijo de referencia, como se indica en la Figura A.II.3. Para expresar la ecuación de transporte con respecto al sistema fijo debe efectuarse un cambio de variables para expresar la dispersión en tal sistema. Esto se realiza en el presente anexo.



**Figura A.II.3:** Representación del ángulo para el cálculo del coeficiente de dispersión.

La proyección del flujo en las direcciones  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  con respecto al sistema fijo de coordenadas (X,Y) es:

$$X = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha \quad (\text{II.24})$$

$$Y = \bar{y} \cos \alpha - \bar{x} \sin \alpha \quad (\text{II.25})$$

de esta forma la ecuación de transporte se redefine en función de los coeficientes de dispersión longitudinal  $K_L$  y transversal  $K_T$  como:

$$\bar{U}H \frac{\partial C}{\partial \bar{x}} + \bar{V}H \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} = \left( H K_L \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{x}^2} \right) + \left( H K_T \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} \right) + R_G H - R_D H \quad (\text{II.26})$$

Como la concentración  $C$  es una función que depende de  $X$  e  $Y$ , pero también depende de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  se aplicará la regla de la cadena. Para ello se derivan las proyecciones (II.24) y (II.25) con respecto a  $K_L$  y  $K_T$

$$\frac{\partial X}{\partial \bar{x}} = \text{Cos } \alpha \qquad \frac{\partial X}{\partial \bar{y}} = \text{Sen } \alpha \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{x}} = -\text{Sen } \alpha \qquad \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} = \text{Cos } \alpha \quad (\text{II.28})$$

y se reemplazan los términos correspondientes (II.27) y (II.28) en:

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial C}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial C}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial C}{\partial X} \text{Cos } \alpha - \frac{\partial C}{\partial Y} \text{Sen } \alpha \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial C}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial C}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial C}{\partial X} \text{Sen } \alpha + \frac{\partial C}{\partial Y} \text{Cos } \alpha \quad (\text{II.30})$$

de igual forma se obtienen las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial C}{\partial X} \text{Cos } \alpha - \frac{\partial C}{\partial Y} \text{Sen } \alpha \right) \text{Cos } \alpha - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial C}{\partial X} \text{Cos } \alpha - \frac{\partial C}{\partial Y} \text{Sen } \alpha \right) \text{Sen } \alpha \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \text{Cos}^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y} \text{Cos } \alpha \text{ Sen } \alpha + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \text{Sen}^2 \alpha$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial C}{\partial X} \text{Sen } \alpha + \frac{\partial C}{\partial Y} \text{Cos } \alpha \right) \text{Sen } \alpha + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial C}{\partial X} \text{Sen } \alpha + \frac{\partial C}{\partial Y} \text{Cos } \alpha \right) \text{Cos } \alpha \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \text{Sen}^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y} \text{Cos } \alpha \text{ Sen } \alpha + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \text{Cos}^2 \alpha$$

Reemplazando los términos calculados (II.29), (II.30), (II.31) y (II.32) en la ecuación (II.26) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \bar{U}H \left( \frac{\partial C}{\partial X} \cos \alpha - \frac{\partial C}{\partial Y} \operatorname{Sen} \alpha \right) + \bar{V}H \left( \frac{\partial C}{\partial X} \operatorname{Sen} \alpha + \frac{\partial C}{\partial Y} \cos \alpha \right) \\
& = H K_L \left( \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y} \cos \alpha \operatorname{Sen} \alpha + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \operatorname{Sen}^2 \alpha \right) \\
& + H K_T \left( \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \operatorname{Sen}^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial X \partial Y} \cos \alpha \operatorname{Sen} \alpha + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \cos^2 \alpha \right) + R_G H \\
& - R_D H
\end{aligned} \tag{II.33}$$

reordenando la expresión (II.33) los coeficientes de dispersión relacionados a los ángulos se expresan como:

$$K_x = K_L \cos^2 \alpha + K_T \operatorname{Sen}^2 \alpha \tag{II.34}$$

$$K_y = K_L \operatorname{Sen}^2 \alpha + K_T \cos^2 \alpha \tag{II.35}$$

$$K_{xy} = (2K_L - 2K_T) \cos \alpha \operatorname{Sen} \alpha \tag{II.36}$$

$$\bar{U} = \bar{U} \cos \alpha + \bar{V} \operatorname{Sen} \alpha \tag{II.37}$$

$$\bar{V} = \bar{V} \cos \alpha - \bar{U} \operatorname{Sen} \alpha \tag{II.38}$$

Finalmente se obtiene la ecuación bidimensional de transporte de sustancias disueltas considerando dispersión longitudinal y transversal:

$$\bar{U}H \frac{\partial C}{\partial X} + \bar{V}H \frac{\partial C}{\partial Y} = \left( H K_x \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \right) + \left( H K_y \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right) - \left( H K_{xy} \frac{\partial^2 C}{\partial XY} \right) + R_G H - R_D H \tag{II.39}$$

- **ANEXO III: Función Delta de Dirac.**

Informalmente la delta de Dirac es una forma de representar un pico infinitamente agudo expresado simbólicamente por:

$$\delta = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

donde la integral de  $\delta(x)$  está normalizada a la unidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{III.2})$$

La delta de Dirac satisface la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{III.3})$$

donde  $f(x)$  es una función continua.

Esta integral es llamada *propiedad de filtro* de la función delta de Dirac ya que  $\delta(x)$  actúa como filtro, seleccionando de todos los posibles valores de  $f(x)$  su valor en el punto  $x=0$ .

- **ANEXO IV: Teorema de la Divergencia y del Gradiente.**

Las siguientes identidades, se obtienen a partir del teorema de la divergencia y del gradiente:

$$\oint_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial x} dx dy = - \oint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} G dx dy + \oint_{\Gamma} n_x w G ds \quad (\text{IV.1})$$

$$\oint_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial y} dx dy = - \oint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} G dx dy + \oint_{\Gamma} n_y w G ds \quad (\text{IV.2})$$

siendo  $\frac{\partial}{\partial n}$  es el operador de la derivada normal:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{IV.3})$$

donde  $w$  y  $G$  son funciones escalares definidas en un dominio bidimensional,  $n_x$  y  $n_y$  son los cosenos directores, respecto a  $x$  y a  $y$ , del vector unitario normal  $\hat{\mathbf{n}}$  a la superficie  $\Gamma$  y  $\Omega$  el dominio.

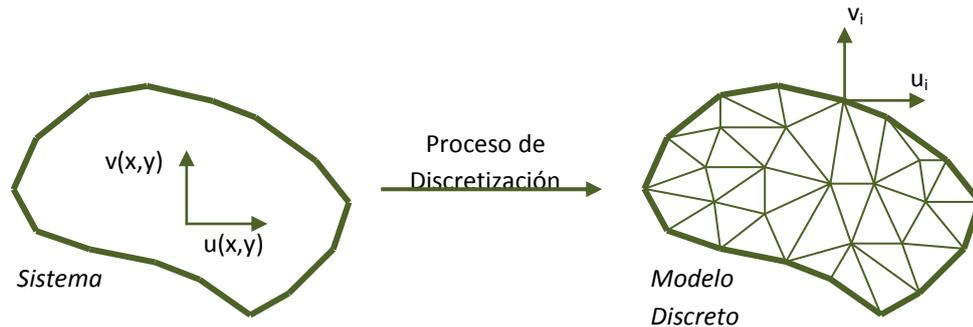
- **ANEXO V: Método de elementos finitos. FlexPDE**

**A.V.1. Aspectos básicos del Método de Elementos Finitos.**

El Método de Elementos Finitos (MEF) es una técnica que transforma un problema diferencial por otro algebraico, aproximadamente equivalente, para el cual se conocen detalladamente técnicas generales de resolución. Básicamente consiste en un método para resolver un sistema de ecuaciones a derivadas parciales mediante un proceso conocido como método de Galerkin. El MEF utiliza un procedimiento denominado discretización donde transforma las incógnitas básicas del problema, que son funciones continuas de las coordenadas espaciales y de la variable temporal en un conjunto (muy grande) de variables, cada una de las cuales se asocia a un punto particular del dominio analizado como se muestra en la Figura A.V.1. De esta manera, el problema se reduce a uno más simple gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya variable independiente es el tiempo, o en un sistema de ecuaciones algebraicas para problemas estacionarios.

Así el sistema de ecuaciones a derivadas parciales se transforma en un sistema algebraico que puede ser programado y resuelto numéricamente en una computadora. Tal método involucra una gran cantidad de técnicas de cálculo numérico, como así también de administración de datos y de visualización gráfica de resultados, dado que a partir de los valores discretos determinados es factible recuperar el carácter continuo de las variables de interpolación.

Se trata en la actualidad del método numérico más poderoso para analizar prácticamente cualquier situación que pueda ser formulada como un problema de contorno e inicial. Una de sus mayores ventajas es la posibilidad de analizar dominios con cualquier complejidad geométrica, como así también heterogeneidades arbitrarias y actualmente problemas de multifísica (estudio de campos acoplados incluyendo problemas que combinan distintos dominios de aplicación de cada submodelo).



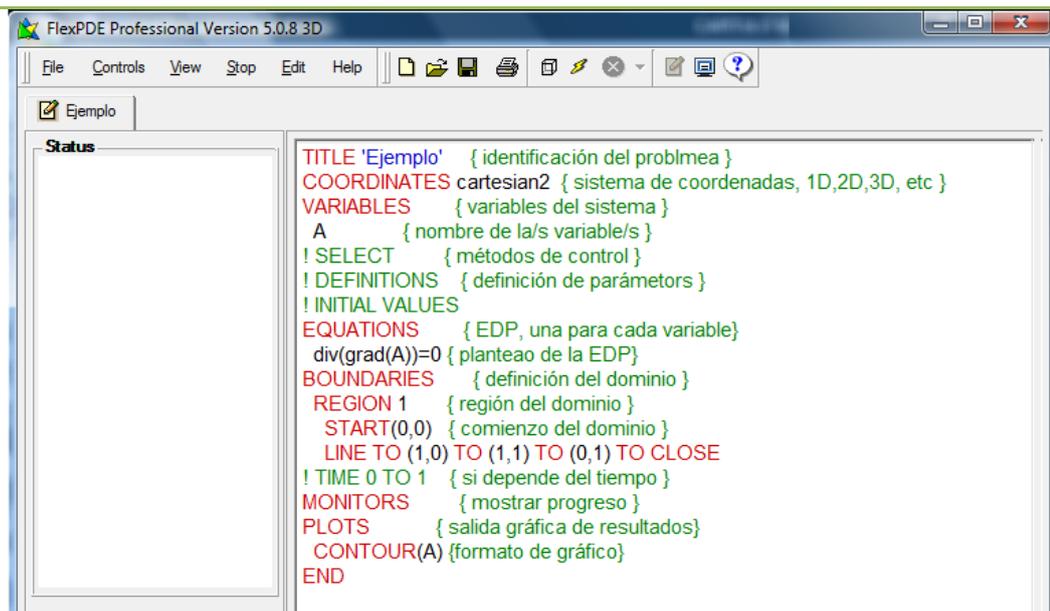
**Figura A.V.1:** Representación del proceso de discretización

En este trabajo se emplea el programa general de elementos finitos.

Presenta varias características interesantes para el planteo del problema matemático a analizar en esta tesis, las cuales serán abordadas a continuación.

### A.V.2. Descripción general del programa FlexPDE

Para comenzar a trabajar se escribe en un descriptor (Figura A.V.2) los principales datos que necesita el programa para definir matemáticamente un problema de contorno..



**Figura A.V.2:** Descriptor del FlexPDE.

Las secciones VARIABLES y EQUATIONS están vinculadas ya que, como en todo sistema bien planteado, se debe escribir una ecuación por cada variable definida. El caso mostrado en la Figura A.V.2, corresponde a un ejemplo sencillo donde se tiene una ecuación asociada a una variable llamada A. En caso de que el problema tenga muchas variables, FlexPDE debe asociar a cada ecuación con su respectiva variable, para ello se debe definir de la siguiente manera:

```

...
VARIABLES
  A, B
EQUATIONS
  A: div(k*grad(A))=0
  B: div(k*grad(B))=0
...

```

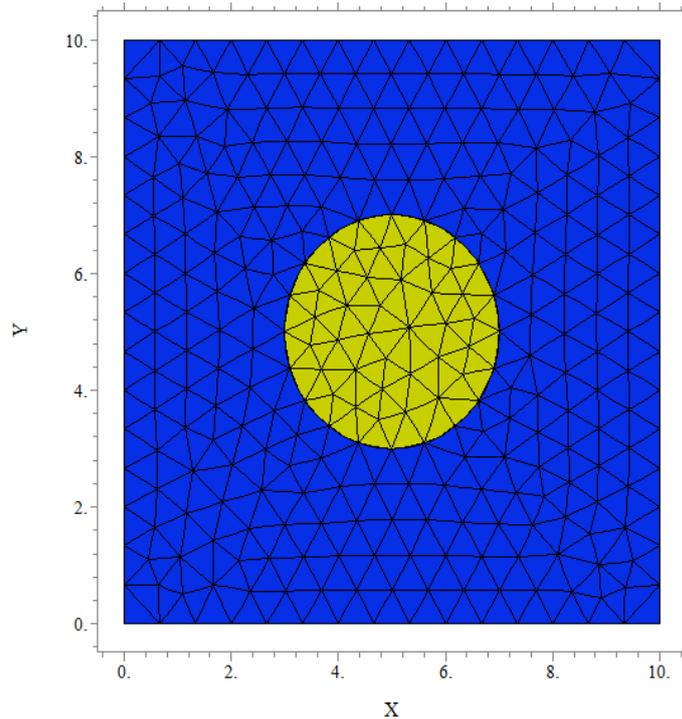
de esta manera las condiciones de borde asociadas a cada ecuación pueden definirse utilizando, para este caso,  $A$  y  $B$ . La variable asociada a cada ecuación indica la manera en que debe realizarse el procedimiento de Galerkin.

El dominio del problema se describe en la sección BOUNDARIES, donde se definen las diferentes regiones o partes que lo conforman en subsecciones denominadas REGION. Cada región comparte las mismas propiedades del sistema, sin embargo puede suceder que los coeficientes definidos asuman diferentes valores en determinadas partes del sistema, en ese caso se puede especificar el nuevo valor dentro de la correspondiente región. Para poder determinar las condiciones de borde, se debe definir primero la región que contenga todo el dominio, y luego las diferentes partes, si las hubiere, en las siguientes regiones. La forma de cada región se dibuja especificando las coordenadas de inicio mediante el argumento START y luego hacia el siguiente punto empleando LINE TO, si se desea trazar una línea recta, SPLINE TO, si se quiere dibujar curvas o ARC para determinar círculos o semicírculos. El dominio finaliza con la palabra CLOSE. En el ejemplo de la Figura A.V.2 se ha dibujado un cuadrado. De esta forma empleando la misma estructura se puede definir un cuadrilátero variando las coordenadas, o una figura poligonal agregándole más puntos. A continuación se muestra la estructura a seguir en caso de que las propiedades del sistema varíen de una región a otra. El mallado de este ejemplo se muestra en la Figura A.V.3:

```

...
DEFINITIONS
  k=1
...
BOUNDARIES
  REGION 'dominio'
    START(0,0) line to (10,0) to (10,10) to (0,10) to close
  REGION 'tubo interno'
    k=0.001
    START(5,3) ARC(center=5,5) angle=360
...

```



**Figura A.V.3:** Gráfico del mallado para regiones con diferentes propiedades.

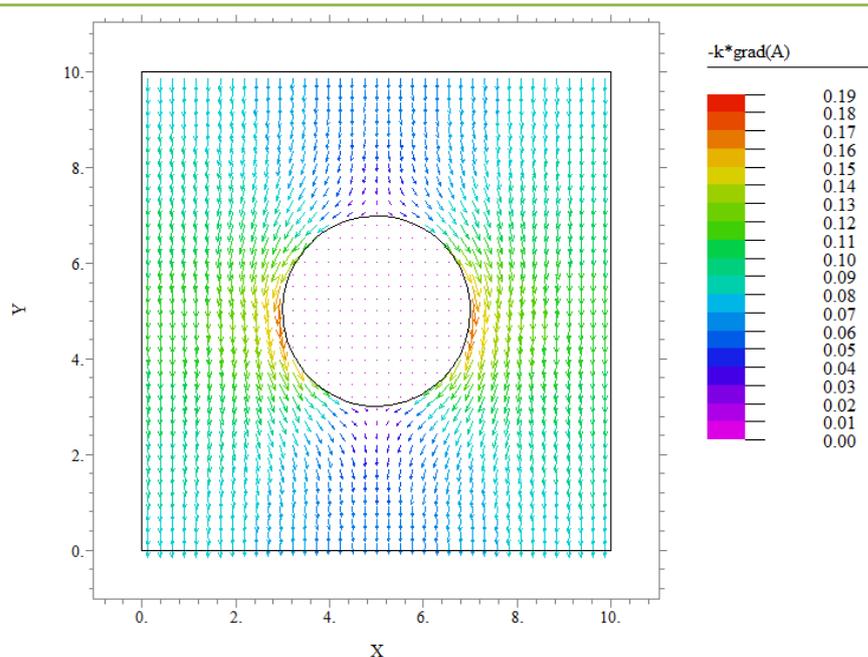
Para definir los términos de contorno del problema, FlexPDE cuenta con dos condiciones: VALUE y NATURAL. La condición de borde VALUE especifica el valor que una variable asume en determinado límite del dominio, y la condición NATURAL representa el flujo normal en dicho límite. El formato de escritura será:

```

...
BOUNDARIES
REGION 'dominio'
START(0,0)
  { A = 0 y B = 0 en la línea de la base }
  VALUE (A) = 0 VALUE (B) = 0           LINE TO (10,0)
  { ∂/∂n = 0 para A y B en el lado derecho }
  NATURAL (A) = 0 NATURAL (B) = 0      LINE TO (10,10)
  { A = 1 y ∂/∂n de B=0 en la parte superior }
  VALUE (A) = 1 NATURAL (B) = 0       LINE TO (0,10)
  { ∂/∂n = 0 para A y B en el lado izquierdo }
  NATURAL (A) = 0 NATURAL (B) = 0     LINE TO CLOSE
...

```

Finalmente en la sección PLOTS se especifica el tipo de salida de los resultados. Los mismos pueden mostrarse mediante gráficos o datos numéricos. Las opciones gráficas pueden mostrarse a través de curvas de nivel, denominadas CONTOUR, de elevación (ELEVATION), de superficie (SURFACE) o gráficos del campo vectorial (VECTOR). Para visualizar los resultados en forma de datos numéricos se utiliza la función REPORT. En la Figura A.V.4: se muestra la salida gráfica mediante la función VECTOR(-k\*grad(A)).



Ejemplo: Grid#1 p2 Nodes=1165 Cells=552 RMS Err= 1.5e-4

**Figura A.V.4:** Gráfico del campo de velocidades.

El sistema FlexPDE permite además realizar varias operaciones algebraicas como así también operaciones lógicas.

Es factible también efectuar diversas formulaciones de manera secuencial (tipo BATCH) transfiriendo información entre tales subprogramas.

Asimismo, a los efectos de comprender algunas de las aplicaciones y funciones básicas que posee el programa, se desarrolla a continuación un ejemplo mostrando la solución obtenida por medio de diferentes opciones de salidas gráficas.

### A.V.3. Ejemplo de implementación de un problema de contorno

Se desarrolla a continuación un ejemplo simple sobre uno de los problemas de contorno involucrados en esta tesis.

Se pretende analizar el comportamiento espacial de un trazador en un canal abierto de geometría sencilla. Como el transporte de una sustancia disuelta depende del régimen de corrientes en el cuerpo de agua, se deben obtener en primer lugar las velocidades del fluido mediante la solución de la siguiente ecuación (3.17):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0$$

y la correspondiente condición de borde:

$$q_n = -\frac{\rho g H^2}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial n}$$

donde  $q_n$  es el flujo normal conocido.

Debe observarse que en la ecuación anterior se ha despreciado el efecto del viento.

De esta manera se escriben en las respectivas secciones la variable incógnita, los parámetros del problema, la ecuación gobernante, las condiciones de borde y el dominio en el descriptor mostrado en la Figura A.V.5. Puede observarse que una vez corrido el programa, en la parte izquierda de dicha figura el programa brinda información sobre los valores del mallado (cantidad de nodos, celdas y número de incógnitas), el error estimado (RMS) y máximo, el tiempo de cálculo insumido y un gráfico de la malla.

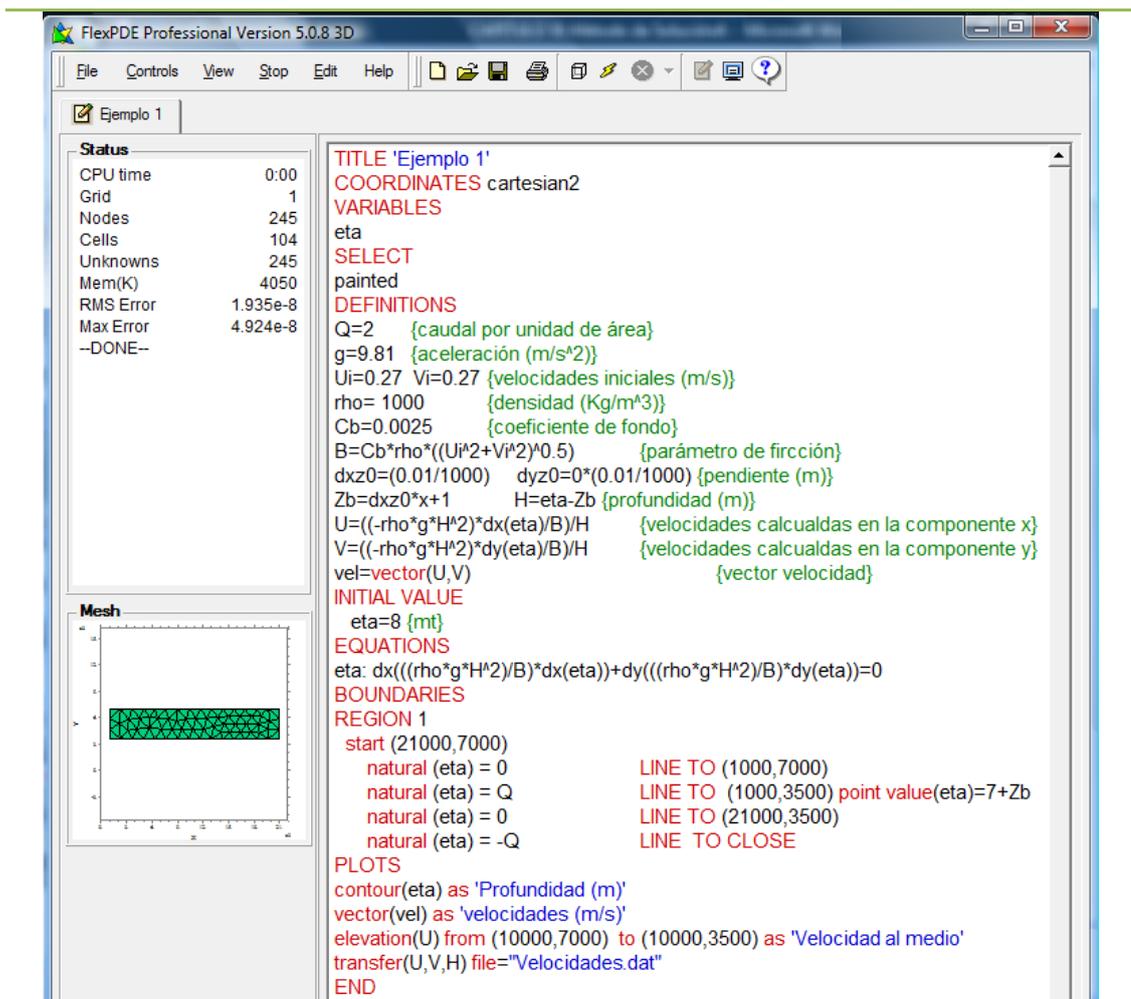
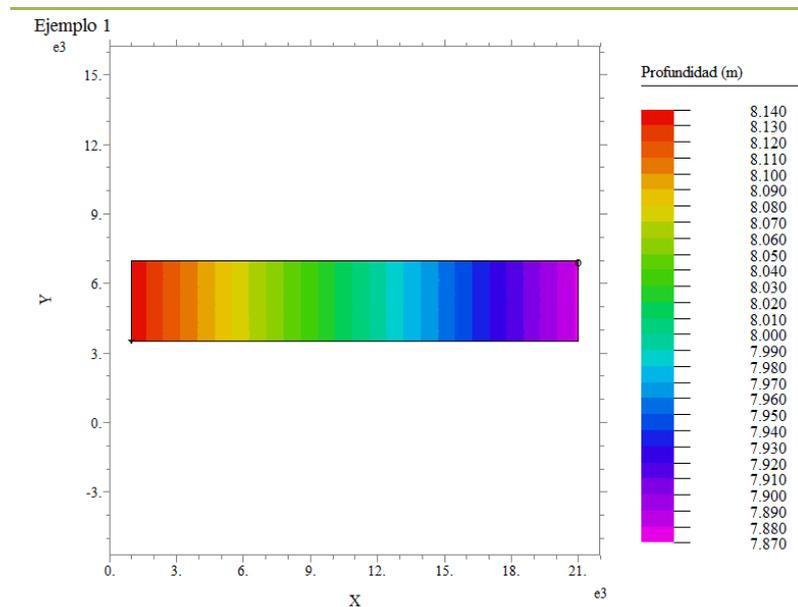


Figura A.V.5: Pantalla de escritura del programa FlexPDE. Ejemplo 1.

Por otra parte, dentro de la sección BOUNDARIES se definió como condición de borde el flujo normal conocido. Puede observarse que se estableció el valor de la variable  $\eta$  en un punto perteneciente al borde izquierdo (entrada) con la función point value ( $\eta$ ) =  $7+z_b$ , donde  $z_b$  es la pendiente de fondo, para que dicha variable no quede indeterminada.

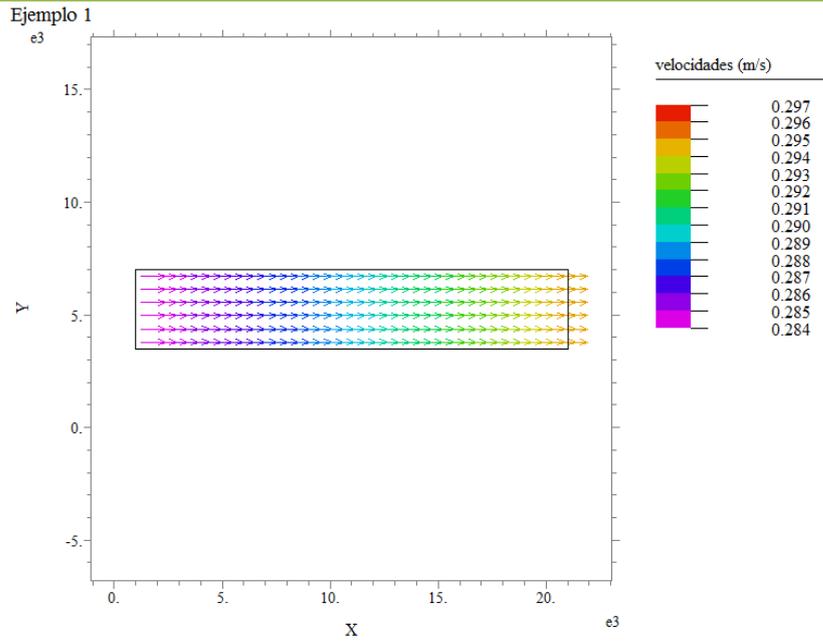
De acuerdo a los gráficos solicitados en la sección PLOTS, en la Figura A.V.6 se muestra la variación de la profundidad obtenida a partir del gráfico de curvas de nivel, mediante la función  $contour(\eta)$ . Se observa que la profundidad varía de acuerdo a la pendiente de fondo establecida.



**Figura A.V.6:** Gráfico de variación de la profundidad.

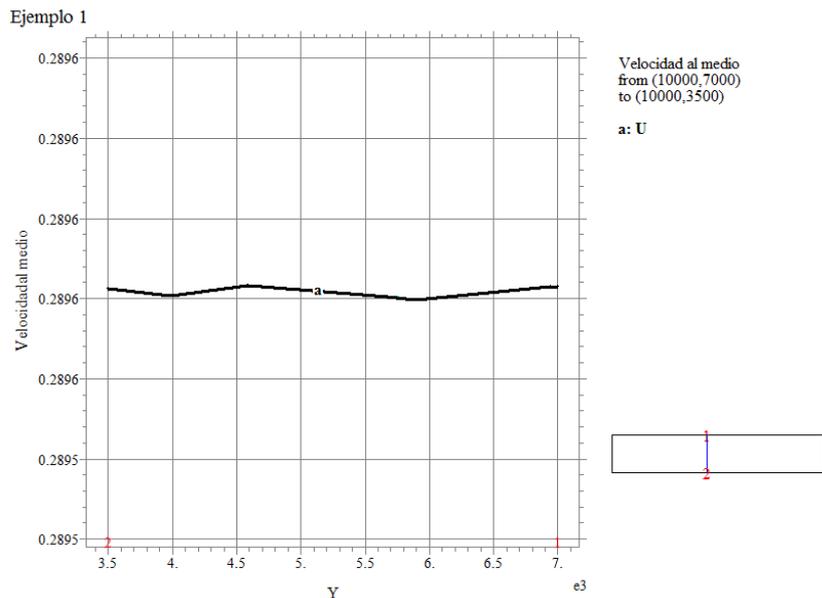
En la Figura A.V.7 se indica el campo vectorial de las velocidades usando la función  $vector(vel)$  donde se observa que las velocidades se distribuyen de izquierda a derecha, respetando las condiciones de borde establecidas.

Por otra parte, mediante la función  $elevation(U)$  se muestra la velocidad en una sección determinada, en este caso en la Figura A.V.8 se visualiza el valor de la velocidad en la componente  $x$  aproximadamente en el medio del canal, donde en el lado derecho aparece un gráfico que indica la sección que se está representando.



Ejemplo 1: Grid#1 p2 Nodes=245 Cells=104 RMS Err= 1.7e-8

**Figura A.V.7:** Campo vectorial de velocidades.



Ejemplo 1: Grid#1 p2 Nodes=245 Cells=104 RMS Err= 1.7e-8  
Integral= 1013.444

**Figura A.V.8:** Valor de la velocidad en una sección del dominio.

Una vez conocido el régimen de corrientes, es posible determinar el transporte de sustancias dentro del cuerpo de agua mediante la siguiente ecuación de advección-difusión (3.24) junto con la correspondiente condición de borde (3.25) planteada en el *Capítulo 3*:

$$UH \frac{\partial C}{\partial x} + VH \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( KH \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( KH \frac{\partial C}{\partial y} \right) + R_D H = \sum_{j=1}^N M_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j)$$

$$-KH \frac{\partial C}{\partial n} + \varepsilon HV_n C = 0$$

Las velocidades del flujo y la profundidad previamente obtenidas en el Ejemplo 1, (Figura A.V.5), entran como coeficientes (variables) de tal ecuación. Para ello se solicitaron en la sección PLOTS los datos que son transferidos, en este caso las velocidades y la profundidad, mediante la función de transferencia *transfer(U,V,H)file="Velocidades.dat"*.

Es un hecho conocido que las ecuaciones de transporte, es decir advectivas-difusivas, suelen presentar dificultades en su resolución numérica mediante elementos finitos o diferencias finitas para velocidades elevadas. El éxito del presente programa se basa en parte en la utilización de funciones de forma tipo "contra corriente".

En el descriptor de la Figura A.V.9 se plantean las variables, los parámetros, la función *transfer('Velocidades.dat', U,V,H)*, la ecuación gobernante, las condiciones de borde y el dominio.

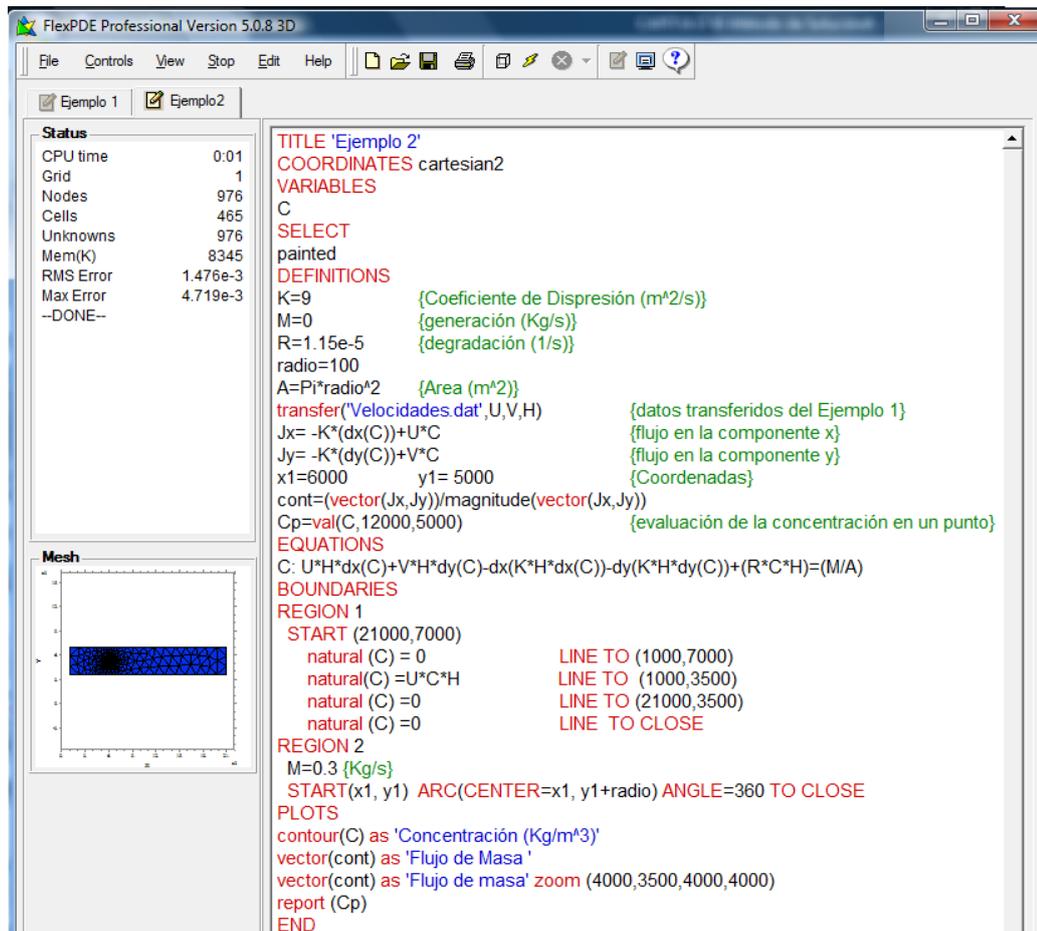
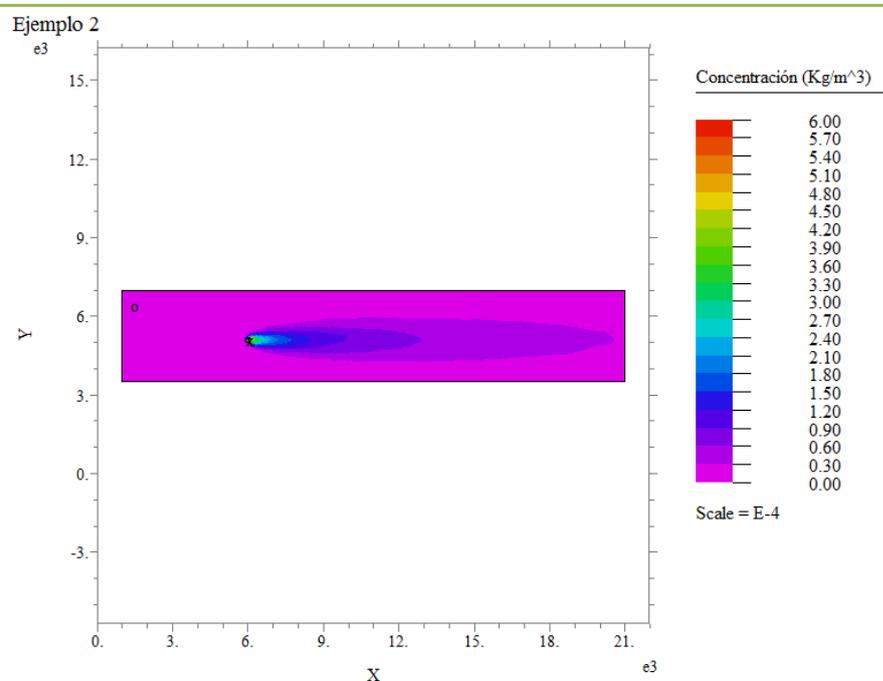


Figura A.V.9: Pantalla de escritura del programa FlexPDE. Ejemplo 2.

Puede observarse que en la sección DEFINITIONS se encuentra la función VAL. Mediante esta función es posible evaluar en un punto determinados, dentro del dominio, el valor de la variable (concentración del contaminante). Dicho valor es mostrado al pié del gráfico  $vector(cont)$  de la Figura A.V.12 con la función  $report(Cp)$  dentro de la sección PLOTS.

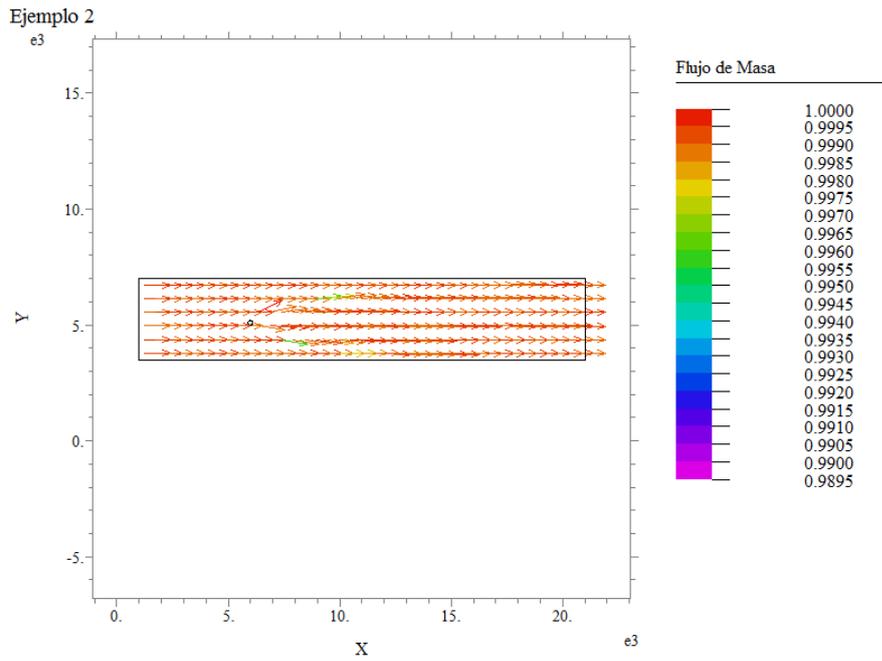
Debe notarse que el término de generación  $M$  es nulo en todo el dominio menos en el punto de descarga. De esta manera en la subsección REGION 2, se especifica su valor en dicha coordenada.

La distribución de la concentración del indicador puede verse en la Figura A.V.10 obtenida a partir de la función  $contour(Cc)$ , donde es posible observar el punto de descarga y el comportamiento del trazador.



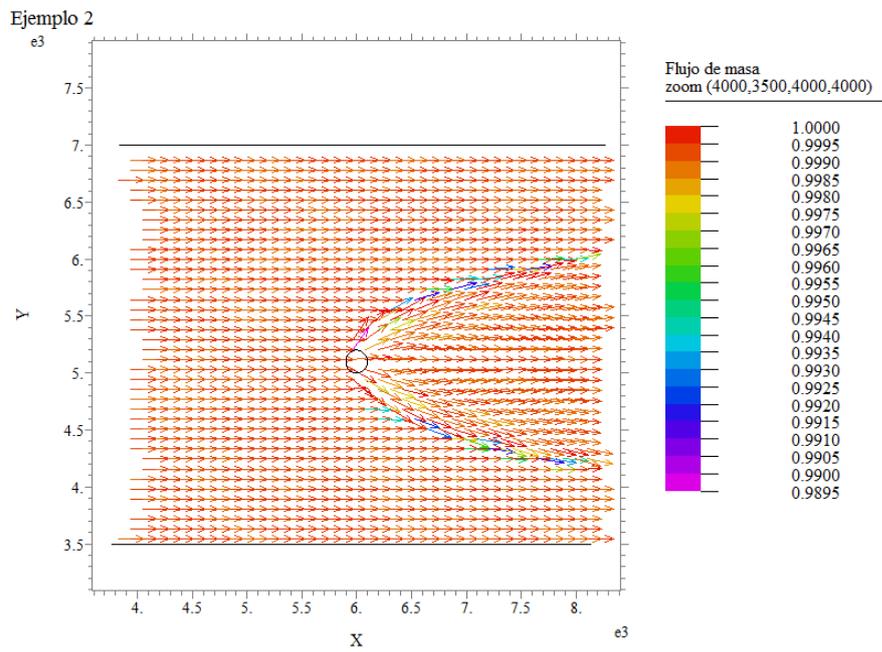
**Figura A.V.10:** Distribución espacial de concentración de un trazador.

Asimismo en la Figura A.V.11 se grafica el campo vectorial normalizado del flujo de masa (es decir muestra solamente la dirección del flujo) del trazador por medio de la función  $vector(cont)$ , y en la Figura A.V.12 se muestra un acercamiento del área de descarga obtenido a partir de la función  $vector(cont) \dots zoom(4000, 3500, 4000, 4000)$ , donde el primer término corresponde a la coordenada en  $x$ , el segundo a la coordenada en  $y$ , y el tercero y el cuarto determinan el porcentaje de acercamiento).



Ejemplo2: Grid#1 p2 Nodes=976 Cells=465 RMS Err= 0.0014

**Figura A.V.11:** Campo vectorial del flujo de masa normalizado.



Ejemplo2: Grid#1 p2 Nodes=976 Cells=465 RMS Err= 0.0014  
Cp= 6.684059e-5

**Figura A.V.12:** Acercamiento del campo vectorial en el área de descarga.

- **ANEXO VI: Métodos de optimización**

En forma genérica un problema de optimización puede ser formulado de la siguiente manera:

*Determinar:*

$$X^+ = \arg \min \bar{F}(X)$$

*Sujeto a ciertas restricciones.*

donde  $\bar{F}$  es la función objetivo,  $X$  corresponde al vector de variables de diseño y  $X^+$  al vector óptimo.

A los efectos de resolver el problema de optimización formulado precedentemente, pueden emplearse diferentes métodos, cuya elección dependerá de las características del problema a resolver. A continuación se mencionan algunos problemas típicos de optimización.

La *Optimización Discreta*, consiste básicamente en resolver problemas de optimización con variables enteras. Tales variables se usan para modelar cantidades indivisibles y representar por ejemplo decisiones del tipo sí/no para comprar, invertir, alquilar, construir, etc. Por el contrario, en la *Optimización Continua* se resuelve problemas con ese tipo de variables. La resolución de estos problemas es normalmente más fácil por la suavidad que presentan las funciones, lo que hace posible conocer a partir de un punto en particular, el comportamiento de todos los puntos cercanos. En los problemas discretos, sin embargo, el comportamiento de las variables puede cambiar significativamente al pasar de un punto a otro.

La *Optimización Determinista* supone que los parámetros del problema son conocidos con certeza, aunque sea su valor medio. En la *Optimización Estocástica* sólo se conocen sus distribuciones y habitualmente se supone que éstas son discretas con un número finito de estados posibles.

Los problemas de *Optimización sin Restricciones* trabajan en la minimización (o maximización) de una función objetivo sin la existencia de límites sobre las variables, no obstante pueden reformularse como un problema de *Optimización Con Restricciones* añadiendo a la función objetivo términos de penalización. Las funciones de penalización representan una estrategia numérica para eliminar la

presencia de restricciones, de esta forma se transforma la función objetivo en una expresión algebraica en la que el incumplimiento de las mismas es penalizado por la introducción de nuevos términos que aumentan o disminuyen el valor original de la función. De esta manera es posible aplicar, como técnica de solución, los algoritmos utilizados normalmente en los problemas de *Optimización Sin Restricciones*.

Por otra parte los problemas de optimización y sus correspondientes métodos (de solución) se pueden clasificarse en *Optimización Global*, cuando se trata de encontrar el óptimo (mínimo/máximo) global de un problema, y *Optimización Local* cuando la búsqueda se concentra en la vecindad de la solución generada inicialmente.

En problemas de optimización global, es posible que la función tenga varios óptimos locales (mínimos/máximos), por lo tanto necesitan alguna técnica adicional como el empleo de algoritmos iterativos para acercarse al óptimo global, sin embargo resulta difícil determinar si dicha solución obtenida es en efecto la *Optima Global*.

Particularmente el problema de diseño a resolver en la presente tesis corresponde a uno de optimización continua, determinista, global y con restricciones.

Además podría presentar varios mínimos locales, lo que complicaría la aplicación de métodos basados en el gradiente de la función objetivo (tales como el método de pasos descendentes). Por otra parte este último tipo de metodología precisaría del cálculo del gradiente, suele ser una labor trabajosa.

- **ANEXO VII: Descriptores del Ejemplo 5 de diseño óptimo.**

BATCH  
 "Modelo Hidrodinámico", "Modelo del Problema Adjunto G<sub>CF</sub>", "Modelo del Problema Adjunto G<sub>DBO</sub>",  
 "Modelo del Problema Adjunto G<sub>OD</sub>", "Valores Iniciales", "Calculador función objetivo penalizada",  
 "Comparador de variables", "Actualizador de Variables", "Calculador función objetivo penalizada",  
 ...  
 "Comparador de variables", "Actualizador de Variables", "Calculador función objetivo penalizada",  
 "Comparador de variables", "Actualizador de Variables", "Modelo de Transporte de Sustancias"  
 END

Descriptor BATCH para 300 iteraciones.

{ caudales }	Qe1=2960	Qe2=4440	Qs1=7400	{m3/s}
{ ancho ríos }	Le1=1000	Le2=1500	Ls1=2500	{m}
{ caudal por área }	q1=Qe1/Le1	q2=Qe2/Le2	q3=Qs1/Ls1	{m2/s}
{ velocidades }	U=0.5	V=0.5 {m/s}	{ aceleración }	g=9.81 {m/s^2}
{ viscosidad cinemática }	vc= 0.004 {m^2/s}	{ densidad }	rho= 1000 {Kg/m^3}	
{ viscosidad turbulenta }	mu=rho*vc	{ coef. fondo }	Cb=0.0025	{ coef. viento }Cs=0.0000018
{ viento }	Wx=0	Wy=0 {m/s}		
{ pendiente 1cm/Km }	dxz0=-(0.01/1000)	dyz0=0*(0.01/1000)	{m}	
{ Coef de Disp }	K=9			
{ Degradación }	Rd1=1.15e-5 {1/s}	Rd2=(9e-12)/21.24	Rd3=0.00002 {1/s}	
{ Areas Protegidas }	radio=0.5A1=Pi*radio^2	A2=Pi*radio^2	A=Pi*radio^2	Z1 = 0
	Z2 = 0			
	Mdbo1= 0.350	Mdbo2= 0.350	Mdbo3= 0.350	{Kg/s}
{ Caudal }	QT=0.59 {m3/s}			
{ Caudal efluente }	QT1=QT*86400	QT2=QT*86400	QT3=QT*86400	{m3/día}
{ Concentración CF }	CF1=10e6	CF2=7e6	CF3=7e6	{NMP/100ml}
{ Descarga CF }	Mcf1=CF1*QT	Mcf2=CF2*QT	Mcf3=CF3*QT	
{ Masa de DBO y CF }	Mdbo=0	Mcf=0		
{ oxígeno saturado }	ds=8.98e-3	ODi=(1.16311e7/1.43897e9)	dsi=ds-ODi	
{ Diámetro Emisario }	ra=0.5 {m}	Di1=2*ra	Di2=2*ra	Di3=2*ra {m}
{ Vida Útil Plantas de Tratamiento }	vu=20 {años}		{Exponente}	s=0.71
{ Zona protegida }	fantasma=0			
{ Largo de Area }	Lx=1000	Ly=800		
{ Ubicación zonas protegidas }				
Xz1=12000	Yz1=8400 {isla}			
Xz2=17000	Yz2=8300 {costa}			
{ Ubicacion de Fuentes }				
Xf1=9000	Yf1=8500 {abajo}			
Xf2=5800	Yf2=8300 {arriba 1°}			
Xf3=8500	Yf3=8800 {arriba 2°}			
{ Ubicación Plantas de Tratamiento }				
Xp1=9500	Yp1=8350 {abajo}			
Xp2=6000	Yp2=9350 {arriba 1°}			
Xp3=9000	Yp3=10050 {arriba 2°}			

Descriptor "Parámetros"

```

TITLE 'Velocidades Hidrodinámicas'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
eta
SELECT
painted
errlim= 1e-3 {estimación del error relativo}

DEFINITIONS {definición de parametros}
{Datos del problema} #include 'A-Parámetros Hidrodinámicos.pde'
{tensión viento} Tx= rho*Cs*Wx *((Wx^2+Wy^2)^0.5)
Ty= rho*Cs*Wy *((Wx^2+Wy^2)^0.5) {Kg/m*s^2}
{coef. fricción} B=Cb*rho*((U^2+V^2)^0.5)
{profundidad} Zb=dxz0*x+1 H=eta-Zb
{Velocidades} Ueta=(((-rho*g*H^2)/B)*dx(eta)+((Tx*H)/B))/H
Veta=(((-rho*g*H^2)/B)*dy(eta)+((Ty*H)/B))/H
{vector velocidad} vel_eta=vector(Ueta,Veta)
{vector viento} Txb=(Tx*H)/B Tyb=(Ty*H)/B W=vector(Txb,Tyb)

initial values
eta=6+1

EQUATIONS
eta: dx(((rho*g*H^2)/B)*dx(eta))+dy(((rho*g*H^2)/B)*dy(eta))=dx((Tx*H)/B)+dy((Ty*H)/B)

BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500)
TO (12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500)
TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO (3000,7500) TO
(2000,7000) line TO (1000,7000) point value(eta)=6+Zb
natural (eta) = q1+normal (W) LINE TO (1000,6000)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to
(3000,5250) TO (2000,4500) line TO (1000,4500)
natural (eta) = q2+normal (W) LINE TO (1000,3000)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO
(5000,6000) TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500) TO
(8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO (16500,7500)
TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO (19000,2500)
TO (20000,2000) line TO (21000,2000)
natural (eta) = -q3+normal (W) LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{Islas}
START (6250,8250)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO
CLOSE
START (15000,8000)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO
CLOSE
START (17500,6000)
natural (eta) = 0+normal(W) LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

PLOTS
transfer(Ueta,Veta,H) file="Velocidades Hidrodinámicas.dat"
END

```

Descriptor "Modelo Hidrodinámico"

```

TITLE 'Modelo del Problema Adjunto CF Z1'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
Gc1
SELECT
painted      errlim= 1e-3

DEFINITIONS
{velocidad}      transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
{datos}          #include 'Parámetros.pde'
{Corrección error numérico} Ggc1=if (Gc1<0) then 0.00001 else Gc1
{Valor de G en las fuentes}
GcZ1F1=val(Ggc1,Xf1,Yf1)      GcZ1F2=val(Ggc1,Xf2,Yf2)      GcZ1F3=val(Ggc1,Xf3,Yf3)
{Concentración CF}  cZ1=GcZ1F1*Mcf1+GcZ1F2*Mcf2+GcZ1F3*Mcf3

EQUATIONS
Gc1: -U*H*dx(Gc1)-V*H*dy(Gc1)-dx(K*H*dx(Gc1))-dy(K*H*dy(Gc1))+ (Rd3*Gc1*H)=Z1

BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) TO
(12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO
(6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO (3000,7500)
TO (2000,7000) line TO (1000,7000)
natural (Gc1) = 0      LINE TO (1000,6000)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250)
TO (2000,4500) line TO (1000,4500)
{entrada 2}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (1000,3000)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000)
TO (6000,6500) TO (7000,7000)
TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO
(16500,7500) TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO
(19000,2500) TO (20000,2000) line TO (21000,2000)
{salida}
natural (Gc1) =U*H*Gc1  LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{ISLAS}
START (6250,8250)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE
START (15000,8000)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE
START (17500,6000)
{borde}
natural (Gc1) = 0      LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE
{zonas protegidas}
REGION 2
Z1=1/A1
START (xz1,yz1) ARC(CENTER=xz1,yz1+radio) ANGLE = 360 TO CLOSE
PLOTS
contour(Gc1) zoom (15000, 4000,5000,5000)
contour(GGc1)
SUMMARY
report(cZ1) as 'CF en Zona 1'
transfer(Ggc1) file="AdjuntoCFZ1.dat"
END

```

Descriptor "Modelo del Problema Adjunto CF Zona protegida 1"

```

TITLE 'Modelo del Problema Adjunto CF Zona 2'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
Gc2
SELECT
painted      errlim= 1e-3

DEFINITIONS
{velocidad}      transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
{datos}          #include 'Parámetros.pde'
{Corrección error numérico} Ggc2=if (Gc2<0) then 0.00001 else Gc2
{Valor de G en las fuentes}
GcZ2F1=val(Ggc2,Xf1,Yf1)          GcZ2F2=val(Ggc2,Xf2,Yf2)          GcZ2F3=val(Ggc2,Xf3,Yf3)
{Concentración CF}  cZ2=GcZ2F1*Mcf1+GcZ2F2*Mcf2+GcZ2F3*Mcf3

EQUATIONS
Gc2: -U*H*dx(Gc2)-V*H*dy(Gc2)-dx(K*H*dx(Gc2))-dy(K*H*dy(Gc2))+ (Rd3*Gc2*H)=Z2

BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) TO
(12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO
(6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO (3000,7500)
TO (2000,7000) line TO (1000,7000)
natural (Gc2) = 0          LINE TO (1000,6000)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250)
TO (2000,4500) line TO (1000,4500)
{entrada 2}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (1000,3000)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000)
TO (6000,6500) TO (7000,7000)
TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO
(16500,7500) TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO
(19000,2500) TO (20000,2000) line TO (21000,2000)
{salida}
natural (Gc2) =U*H*Gc2  LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{ISLAS}
START (6250,8250)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE
START (15000,8000)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE
START (17500,6000)
{borde}
natural (Gc2) = 0          LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE
{zonas protegidas}
REGION 2
Z2=1/A2
START (xz2,yz2) ARC(CENTER=xz2,yz2+radio) ANGLE = 360 TO CLOSE
PLOTS
contour(Gc2) zoom (15000, 4000,5000,5000)
contour(GGc2)
SUMMARY
report(cZ2) as 'CF en Zona 2'
transfer(Ggc2) file="AdjuntoCFZ2.dat"
END

```

Descriptor "Modelo del Problema Adjunto CF Zona protegida 2"

```

TITLE "Modelo del Problema Adjunto DBO Zona 1"
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
Ga11          {Zona 1}
SELECT
painted
errlim= 1e-3 {estimación del error relativo}
DEFINITIONS
{velocidad}      transfer("Velocidades Hidrodinámicas.dat",Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
{datos}          #include 'Parámetros.pde'
{Corrección error numérico}
{zona 1}
Gga11=if (Ga11<0) then 0.00001 else Ga11
{Valor de G en las fuentes}
Ga1Z1F1=val(Gga11,Xf1,Yf1)      Ga1Z1F2=val(Gga11,Xf2,Yf2)      Ga1Z1F3=val(Gga11,Xf3,Yf3)
{Concentración BDO}             aZ1=Ga1Z1F1*Mdbo1+Ga1Z1F2*Mdbo2+Ga1Z1F3*Mdbo3
EQUATIONS
Ga11: -U*H*dx(Ga11)-V*H*dy(Ga11)-dx(K*H*dx(Ga11))-dy(K*H*dy(Ga11))+Rd1*Ga11*H)=Z1
BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) TO
(12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500)
TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO (3000,7500)
TO (2000,7000) line TO (1000,7000)

{entrada 1}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (1000,6000)
{borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to
(3000,5250) TO (2000,4500) line TO (1000,4500)

{entrada 2}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (1000,3000)
{borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO
(5000,6000) TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500) TO
(8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO (16500,7500)
TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO
(19000,2500) TO (20000,2000) line TO (21000,2000)

{salida}
natural (Ga11) = U*H*Ga11         LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{Islas}
START (6250,8250) {borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE

START (8000,8500) {borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO
CLOSE

START (15000,8000) {borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900)
TO CLOSE

START (17500,6000) {borde}
natural (Ga11) = 0                LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000)
TO (19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

{ZONAS PROTEGIDAS}
REGION 2
Z1=1/A1
START (xz1,yz1) ARC(CENTER=xz1,yz1+radio) ANGLE = 360 TO CLOSE
PLOTS
contour(Gga11)
SUMMARY
report(aZ1) as 'DBO en Zona 1'
{Valor de G en las fuentes}
report(Ga1Z1F1) report(Ga1Z1F2) report(Ga1Z1F3)
transfer(Gga11) file="AdjuntoDBOZ1.dat"
END

```

Descriptor "Modelo del Problema Adjunto DBO Zona protegida 1"

```

TITLE "Modelo del Problema Adjunto DBO Zona 2"
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
Ga12      {Zona 2}
SELECT
  painted
errlim= 1e-3 {estimación del error relativo}
DEFINITIONS
{velocidad}      transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
{datos}          #include 'Parámetros.pde'
{Corrección error numérico} Gga12=if (Ga12<0) then 0.00001 else Ga12
{Valor de G en las fuentes}
Ga1Z2F1=val(Gga12,Xf1,Yf1)      Ga1Z2F2=val(Gga12,Xf2,Yf2)      Ga1Z2F3=val(Gga12,Xf3,Yf3)
{Concentración BDO}  aZ2=Ga1Z2F1*Mdbo1+Ga1Z2F2*Mdbo2+Ga1Z2F3*Mdbo3
EQUATIONS
Ga12: -U*H*dx(Ga12)-V*H*dy(Ga12)-dx(K*H*dx(Ga12))-dy(K*H*dy(Ga12))+ (Rd1*Ga12*H)=Z2
BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500)
                                TO (12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO
                                (7000,9500) TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO
                                (3000,7500) TO (2000,7000) line TO (1000,7000)

{entrada 1}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (1000,6000)
{borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to
                                (3000,5250) TO (2000,4500) line TO (1000,4500)

{entrada 2}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (1000,3000)
{borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO
                                (5000,6000) TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500)
                                TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO (16500,7500)
                                TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO
                                (19000,2500) TO (20000,2000) line TO (21000,2000)

{salida}
  natural (Ga12) = U*H*Ga12
                                LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{Islas}
START (6250,8250)
{borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
                                (6000,7500) TO CLOSE

START (8000,8500) {borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO
                                CLOSE

START (15000,8000) {borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900)
                                TO CLOSE

START (17500,6000) {borde}
  natural (Ga12) = 0
                                LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000)
                                TO (19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

REGION 2
Z2=1/A2
START (xz2,yz2) ARC(CENTER=xz2,yz2+radio) ANGLE = 360 TO CLOSE
PLOTS
contour(Gga12)
SUMMARY
  report(aZ2) as 'DBO en Zona 2'
  {Valor de G en las fuentes}
  report(Ga1Z2F1) report(Ga1Z2F2) report(Ga1Z2F3)
  transfer(Gga12) file="AdjuntoDBOZ2.dat"
END

```

Descriptor "Modelo del Problema Adjunto DBO Zona protegida 2"

```

TITLE 'Modelo del Problema Adjunto OD Zona 1'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
Gb11 Gb21 {Zona 1}
SELECT
painted
errlim= 1e-3 {estimación del error relativo}
DEFINITIONS
{velocidad} transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H) U=Ueta V=Veta
{datos} #include 'Parámetros.pde'
{Corrección error numérico}
Ggb11=if (Gb11<0) then 0.00001 else Gb11
Ggb21=if (Gb21<0) then 0.00001 else Gb21
{Valor de G en las fuentes}
Gb1Z1F1=val(Ggb11,Xf1,Yf1) Gb1Z1F2=val(Ggb11,Xf2,Yf2) Gb1Z1F3=val(Ggb11,Xf3,Yf3)
Gb2Z1F1=val(Ggb21,Xf1,Yf1) Gb2Z1F2=val(Ggb21,Xf2,Yf2) Gb2Z1F3=val(Ggb21,Xf3,Yf3)
{Concentración OD}
integraZ1=integral(Gb1Z1F1*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+integral(Gb1Z1F2*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+
integral(Gb1Z1F3*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
bZ1=ODi+(Gb2Z1F1*Mdbo1+Gb2Z1F2*Mdbo2+Gb2Z1F3*Mdbo3)+ integraZ1
EQUATIONS
Gb11: -U*H*dx(Gb11)-V*H*dy(Gb11)-dx(K*H*dx(Gb11))-dy(K*H*dy(Gb11))+(Rd2*Gb11*H)=Z1
Gb21: -U*H*dx(Gb21)-V*H*dy(Gb21)-dx(K*H*dx(Gb21))-
dy(K*H*dy(Gb21))+(Rd1*Gb21*H)+(Rd1*Gb11*H)=0

BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
natural (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) {TO
(17000,8500) TO (16000,8500) TO (15000,9000) TO (14000,10000) TO (13000,10500) }TO (12000,10000)
TO (10000,10000)TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO
(3000,7500) TO (2000,7000) line TO (1000,7000)
{entrada 1}
value (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (1000,6000)
{borde}
natural (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250)
TO (2000,4500) line TO (1000,4500)
{entrada 2}
value (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (1000,3000)
{borde}
natural (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000)
TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO
(16500,7500)TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO (19000,2500) TO (20000,2000) line
TO (21000,2000)
{salida}
natural (Gb11) =U*H*Gb11
natural (Gb21) =U*H*Gb21 LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{Islas}
START (6250,8250)
{borde}
natural (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)
{borde}
natural (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE
START (15000,8000)
{borde}
natural (Gb11) = 0
natural (Gb21) = 0 LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE

```

```

START (17500,6000)
{borde}
  natural (Gb11) = 0
  natural (Gb21) = 0          LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

{ZONAS PROTEGIDAS}
REGION 2
Z1=1/A1
START (xz1,yz1) ARC(CENTER=xz1,yz1+radio) ANGLE = 360 TO CLOSE

PLOTS
contour(Ggb11)
contour(Ggb21)

SUMMARY
report(bZ1) as 'OD en Zona 1'
{ Valor de G en las fuentes }
report(Gb1Z1F1) report(Gb1Z1F2) report(Gb1Z1F3)
transfer(Ggb11, Gb21) file="AdjuntoODZ1.dat"
END

```

Descriptor "Modelo del Problema Adjunto OD Zona protegida 1"

```

TITLE 'Modelo del Problema Adjunto OD Zona 1'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
Gb12  Gb22  {Zona 2}
SELECT
  painted
errlim= 1e-3 {estimación del error relativo}
DEFINITIONS
{velocidad}      transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
{datos}          #include 'Parámetros.pde'
{Corrección error numérico}
Ggb12=if (Gb12<0) then 0.00001 else Gb12  Ggb22=if (Gb22<0) then 0.00001 else Gb22
{ Valor de G en las fuentes }
Gb1Z2F1=val(Ggb12,Xf1,Yf1)  Gb1Z2F2=val(Ggb12,Xf2,Yf2)  Gb1Z2F3=val(Ggb12,Xf3,Yf3)
Gb2Z2F1=val(Ggb22,Xf1,Yf1)  Gb2Z2F2=val(Ggb22,Xf2,Yf2)  Gb2Z2F3=val(Ggb22,Xf3,Yf3)
{Concentración OD}
integraZ2=integral(Gb1Z2F1*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+integral(Gb1Z2F2*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+
integral(Gb1Z2F3*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
bZ2=ODi+(Gb2Z2F1*Mdbo1+Gb2Z2F2*Mdbo2+Gb2Z2F3*Mdbo3)+ integraZ2
EQUATIONS
Gb12: -U*H*dx(Gb12)-V*H*dy(Gb12)-dx(K*H*dx(Gb12))-dy(K*H*dy(Gb12))+(Rd2*Gb12*H)=Z2
Gb22: -U*H*dx(Gb22)-V*H*dy(Gb22)-dx(K*H*dx(Gb22))-
dy(K*H*dy(Gb22))+(Rd1*Gb22*H)+(Rd1*Gb12*H)=0
BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
  natural (Gb12) = 0
  natural (Gb22) = 0          LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) TO
(12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO
(4000,8000) TO (3000,7500) TO (2000,7000) line TO (1000,7000)
{entrada 1}
  value (Gb12) = 0
  natural (Gb22) = 0          LINE TO (1000,6000)
{borde}
  natural (Gb12) = 0
  natural (Gb22) = 0          LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250)
TO (2000,4500) line TO (1000,4500)
{entrada 2}
  value (Gb12) = 0
  natural (Gb22) = 0          LINE TO (1000,3000)
{borde}
  natural (Gb12) = 0

```

```

natural (Gb22) = 0          LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000)
TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO
(16500,7500) TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO (19000,2500) TO (20000,2000) line
TO (21000,2000)
{salida}
natural (Gb12) = U*H*Gb12
natural (Gb22) = U*H*Gb22  LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{Islas}
START (6250,8250)
{borde}
natural (Gb12) = 0
natural (Gb22) = 0          LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)
{borde}
natural (Gb12) = 0
natural (Gb22) = 0          LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE
START (15000,8000)
{borde}
natural (Gb12) = 0
natural (Gb22) = 0          LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE
START (17500,6000)
{borde}
natural (Gb12) = 0
natural (Gb22) = 0          LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE
{ZONAS PROTEGIDAS}
REGION 3
Z2=1/A2
START (xz2,yz2) ARC(CENTER=xz2,yz2+radio) ANGLE = 360 TO CLOSE
PLOTS
contour(Ggb12)
contour(Ggb22)
SUMMARY
report(bZ2) as 'OD en Zona 2'
{ Valor de G en las fuentes }
report(Gb1Z2F1) report(Gb1Z2F2) report(Gb1Z2F3)
transfer(Ggb12, Gb22) file="AdjuntoODZ2.dat"
END

```

Descriptor "Modelo del Problema Adjunto OD Zona protegida 2"

```

TITLE 'VALORES INICIALES'
SELECT
NGRID =1
DEFINITIONS
transfer('Salida Comparador Aleatorio.dat', X11,Y11, X22, Y22, X33, Y33, B11, B22, B33, CCT)
XX1=X11
YY1=Y11
XX2=X22
YY2=Y22
XX3=X33
YY3=Y33
BB1=B11
BB2=B22
BB3=B33
CTi= CCT

XXm1=X11
YYm1=Y11
XXm2=X22
YYm2=Y22
XXm3=X33
YYm3=Y33
BBm1=B11
BBm2=B22
BBm3=B33
CTmi=CCT

```

```

SS=0

BOUNDARIES
REGION 1
START(0,0) LINE TO (1,0) TO (1,1) TO (0,1) TO CLOSE

PLOTS
SUMMARY
report (XX1) report (YY1) report (XX2) report (YY2) report (XX3) report (YY3)
report (BB1) report (BB2) report (BB3) report (CTi)
report (XXm1) report (YYm1) report (XXm2) report (YYm2) report (XXm3) report (YYm3)
report (BBm1) report (BBm2) report (BBm3) report (CTmi)
transfer(XX1,YY1, XX2, YY2, XX3, YY3, BB1, BB2, BB3, CTi, XXm1,YYm1, XXm2,YYm2,
XXm3,YYm3, BBm1, BBm2, BBm3, CTmi, SS) file="Salida Cambio de Nombre SA.dat"
END

```

Descriptor "Valores Iniciales"

```

TITLE 'Calculador de Función Objetivo'
COORDINATES cartesian2
SELECT
painted
ngrid=1
DEFINITIONS
{Función de Influencia} transfer('AdjuntoDBOZ1.dat',Gga11) transfer('AdjuntoDBOZ2.dat', Gga12)
transfer('AdjuntoODZ1.dat',Ggb11, Gb21) transfer('AdjuntoODZ2.dat', Ggb12, Gb22)
transfer('AdjuntoCFZ1.dat',Ggc1) transfer('AdjuntoCFZ2.dat', Ggc2)
{velocidad} transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta, Veta, H)
transfer('Salida Cambio de Nombre SA.dat', XX1,YY1, XX2, YY2, XX3, YY3, BB1, BB2, BB3)
{datos} #include 'Parámetros.pde'
{BÚSQUEDA ALEATORIA COORDENADAS DE DESCARGA}
FX1=random(1) RX1=2*FX1-1
FY1=random(1) RY1=2*FY1-1
FX2=random(1) RX2=2*FX2-1
FY2=random(1) RY2=2*FY2-1
FX3=random(1) RX3=2*FX3-1
FY3=random(1) RY3=2*FY3-1

Xr1=val(RX1,1,1) Yr1=val(RY1,1,1)
Xr2=val(RX2,1,1) Yr2=val(RY2,1,1)
Xr3=val(RX3,1,1) Yr3=val(RY3,1,1)
DXmax=150 DYmax=150
{Posición baja y alta}
lowXf1=xf1 upXf1=xf1+Lx
lowYf1=yf1 upYf1=yf1+Ly
lowXf2=xf2 upXf2=xf2+Lx
lowYf2=yf2 upYf2=yf2+Ly
lowXf3=xf3 upXf3=xf3+Lx
lowYf3=yf3 upYf3=yf3+Ly
{Nuevo cálculo de X y de Y}
xa1=XX1+Xr1*DXmax ya1=YY1+Yr1*DYmax {OJO, tener cuidado sobre el lugar búsqueda}
xa2=XX2+Xr2*DXmax ya2=YY2+Yr2*DYmax
xa3=XX3+Xr3*DXmax ya3=YY3+Yr3*DYmax

{Generación de las coordenadas}
xxa1=if (xa1>lowXf1) then xa1 else lowXf1 yya1=if (ya1>lowYf1) then ya1 else lowYf1
Xff1=if (xxa1< upXf1) then xxa1 else upXf1 Yff1=if (yya1< upYf1) then yya1 else upYf1
xxa2=if (xa2>lowXf2) then xa2 else lowXf2 yya2=if (ya2>lowYf2) then ya2 else lowYf2
Xff2=if (xxa2< upXf2) then xxa2 else upXf2 Yff2=if (yya2< upYf2) then yya2 else upYf2
xxa3=if (xa3>lowXf3) then xa3 else lowXf3 yya3=if (ya3>lowYf3) then ya3 else lowYf3
Xff3=if (xxa3< upXf3) then xxa3 else upXf3 Yff3=if (yya3< upYf3) then yya3 else upYf3
{BÚSQUEDA ALEATORIA COORDENADAS DE DESCARGA}
Br11=random(1) B1r=2*Br11-1
Br22=random(1) B2r=2*Br22-1
Br33=random(1) B3r=2*Br33-1
RB1=val(B1r,1,1) RB2=val(B2r,1,1) RB3=val(B3r,1,1)
DBmax=0.15
lowB=0 upB=1

```

```

Ba1=BB1+RB1*DBmax          Ba2=BB2+RB2*DBmax          Ba3=BB3+RB3*DBmax
Baa1=if(Ba1>lowB) then Ba1 else lowB
B1=if (Baa1< upB) then Baa1 else upB

Baa2=if(Ba2>lowB) then Ba2 else lowB
B2=if (Baa2< upB) then Baa2 else upB

Baa3=if(Ba3>lowB) then Ba3 else lowB
B3=if (Baa3< upB) then Baa3 else upB

{LONGITUD EMISARIOS}
L1=((Xff1-Xp1)^2+(Yff1-Yp1)^2)^0.5          L2=((Xff2-Xp2)^2+(Yff2-Yp2)^2)^0.5          L3=((Xff3-
Xp3)^2+(Yff3-Yp3)^2)^0.5

{FUNCIONES DE INFLUENCIA EVALUADAS EN ZONAS DE DESCARGA}
{Para DBO Valor de G en las fuentes}
{zona 1}
Ga1Z1F1=eval(Gga11,Xff1,Yff1)    Ga1Z1F2=eval(Gga11,Xff2,Yff2)    Ga1Z1F3=eval(Gga11,Xff3,Yff3)
{zona 2}
Ga1Z2F1=eval(Gga12,Xff1,Yff1)    Ga1Z2F2=eval(Gga12,Xff2,Yff2)    Ga1Z2F3=eval(Gga12,Xff3,Yff3)
{Para OD Valor de G en las fuentes}
{zona 1}
Gb1Z1F1=eval(Ggb11,Xff1,Yff1)    Gb1Z1F2=eval(Ggb11,Xff2,Yff2)    Gb1Z1F3=eval(Ggb11,Xff3,Yff3)
Gb2Z1F1=eval(Gb21,Xff1,Yff1)    Gb2Z1F2=eval(Gb21,Xff2,Yff2)    Gb2Z1F3=eval(Gb21,Xff3,Yff3)
{zona 2}
Gb1Z2F1=eval(Ggb12,Xff1,Yff1)    Gb1Z2F2=eval(Ggb12,Xff2,Yff2)    Gb1Z2F3=eval(Ggb12,Xff3,Yff3)
Gb2Z2F1=eval(Gb22,Xff1,Yff1)    Gb2Z2F2=eval(Gb22,Xff2,Yff2)    Gb2Z2F3=eval(Gb22,Xff3,Yff3)
{Para CF Valor de G en las fuentes}
{Zona 1}
GcZ1F1=eval(Ggc1,Xff1,Yff1)    GcZ1F2=eval(Ggc1,Xff2,Yff2)    GcZ1F3=eval(Ggc1,Xff3,Yff3)
{Zona 2}
GcZ2F1=eval(Ggc2,Xff1,Yff1)    GcZ2F2=eval(Ggc2,Xff2,Yff2)    GcZ2F3=eval(Ggc2,Xff3,Yff3)
{Concentración BDO sin B}
aZ1=Ga1Z1F1*Mdbo1+Ga1Z1F2*Mdbo2+Ga1Z1F3*Mdbo3
aZ2=Ga1Z2F1*Mdbo1+Ga1Z2F2*Mdbo2+Ga1Z2F3*Mdbo3
{Concentración OD sin B}
integraZ1=integral(Gb1Z1F1*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+integral(Gb1Z1F2*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
+integral(Gb1Z1F3*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
bZ1=ODi+(Gb2Z1F1*Mdbo1+Gb2Z1F2*Mdbo2+Gb2Z1F3*Mdbo3)+ integraZ1
integraZ2=integral(Gb1Z2F1*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+integral(Gb1Z2F2*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
+integral(Gb1Z2F3*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
bZ2=ODi+(Gb2Z2F1*Mdbo1+Gb2Z2F2*Mdbo2+Gb2Z2F3*Mdbo3)+ integraZ2
{Concentración CF sin B}
cZ1=GcZ1F1*Mcf1+GcZ1F2*Mcf2+GcZ1F3*Mcf3
cZ2=GcZ2F1*Mcf1+GcZ2F2*Mcf2+GcZ2F3*Mcf3

{CONCENTRACION ADMISIBLE}
CadmDBO=5.2416e-4
CadmCF=1000
CadmOD=8.04e-3
{Concentración "Óptima" en Zonas Protegidas}
{Concentración BDO}
OaZ1=Ga1Z1F1*Mdbo1*B1+Ga1Z1F2*Mdbo2*B2+Ga1Z1F3*Mdbo3*B3
OaZ2=Ga1Z2F1*Mdbo1*B1+Ga1Z2F2*Mdbo2*B2+Ga1Z2F3*Mdbo3*B3
{Concentración OD}
OintegraZ1=integral(Gb1Z1F1*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+integral(Gb1Z1F2*Rd2*H*(ds-ODi),
1)+integral(Gb1Z1F3*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
ObZ1=ODi+(Gb2Z1F1*Mdbo1*B1+Gb2Z1F2*Mdbo2*B2+Gb2Z1F3*Mdbo3*B3)+ OintegraZ1
OintegraZ2=integral(Gb1Z2F1*Rd2*H*(ds-ODi), 1)+integral(Gb1Z2F2*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
+integral(Gb1Z2F3*Rd2*H*(ds-ODi), 1)
ObZ2=ODi+(Gb2Z2F1*Mdbo1*B1+Gb2Z2F2*Mdbo2*B2+Gb2Z2F3*Mdbo3*B3)+ OintegraZ2
{Concentración CF}
OcZ1=GcZ1F1*Mcf1*B1+GcZ1F2*Mcf2*B2+GcZ1F3*Mcf3*B3
OcZ2=GcZ2F1*Mcf1*B1+GcZ2F2*Mcf2*B2+GcZ2F3*Mcf3*B3

{Penalización}
K11= if (OaZ1 <= CadmDBO) then 0 else 1e9    K21= if (ObZ1 <= CadmOD) then 1e9 else 0

```

```

K31= if (OcZ1<= CadmCF) then 0 else 1e9
K12= if (OaZ2 <= CadmDBO) then 0 else 1e9  K22= if (ObZ2<= CadmOD) then 1e9 else 0
K32= if (OcZ2<= CadmCF) then 0 else 1e9

{COSTOS}
{Caudal volumétrico Tratado o CAPACIDAD de la Planta de tratamiento}
Qd1=(QT1^s)*(1-B1)^s  Qd2=(QT2^s)*(1-B2)^s  Qd3=(QT3^s)*(1-B3)^s
{factor costo M&O}
f1=(0.352+6.557e-6*Qd1-6.429e-11*Qd1^2)  f2=(0.352+6.557e-6*Qd2-6.429e-11*Qd2^2)
f3=(0.352+6.557e-6*Qd3-6.429e-11*Qd3^2)
{Costo Emisario - U$/Año}
CL1=((2732+1167*Di1+238*Di1^2)*L1)/vu  CL2=((2732+1167*Di2+238*Di2^2)*L2)/vu
CL3=((2732+1167*Di3+238*Di3^2)*L3)/vu
{Costo Inversión y M&O - U$/Año}
CT1=((8988/vu)/(1-f1))*Qd1+CL1  CT2=((8988/vu)/(1-f2))*Qd2+CL2
CT3=((8988/vu)/(1-f3))*Qd3+CL3
{Costo Inversion - U$/Año}
CI1=(8988/vu)*Qd1  CI2=(8988/vu)*Qd2  CI3=(8988/vu)*Qd3
{Costo M&O - U$/Año}
CM1=CT1-CI1  CM2=CT2-CI2  CM3=CT3-CI3
{Costo Total - U$/Año}
CT=CT1+CT2+CT3
{Normalización}
O=(8988/vu)*(52/48)*(QT1^s+QT2^s+QT3^s)
{Función Costo penalizada}
CTp=(CT/O)+K11*(OaZ1-CadmDBO)^2+K21*(ObZ1-CadmOD)^2+K31*(OcZ1-CadmCF)^2+K12*(OaZ2-CadmDBO)^2+K22*(ObZ2-CadmOD)^2+K32*(OcZ2-CadmCF)^2

BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) {TO (17000,8500) TO (16000,8500)
TO (15000,9000) TO (14000,10000) TO (13000,10500)} TO (12000,10000) TO (10000,10000)
TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO (3000,7500)
TO (2000,7000) line TO (1000,7000)
{entrada 1}
LINE TO (1000,6000)
{borde}
LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250) TO (2000,4500) line TO
(1000,4500)
{entrada 2}
LINE TO (1000,3000)
{borde}
LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000) TO (6000,6500) TO
(7000,7000) TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO (16500,7500)
TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO (19000,2500) TO (20000,2000) line TO
(21000,2000)
{salida}
LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{Islas}
START (6250,8250)  LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)  LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE
START (15000,8000)  LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE
START (17500,6000)  LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

PLOTS
SUMMARY as 'COORDENADAS'
report (Xff1) as 'X fuente 1'  report (Yff1) as 'Y fuente 1'
report (Xff2) as 'X fuente 2'  report (Yff2) as 'Y fuente 2'
report (Xff3) as 'X fuente 3'  report (Yff3) as 'Y fuente 3'
report (B1) as 'reducción B1' report (B2) as 'reducción B2' report (B3) as 'reducción B3'
report (OaZ1) as 'DBO óptimo en zona protegida 1'  report (OaZ2) as 'DBO óptimo en zona protegida 2'
report (ObZ1) as 'OD óptimo en zona protegida 1'  report (ObZ2) as 'OD óptimo en zona protegida 2'
report (OcZ1) as 'CF óptimo en zona protegida 1'  report (OcZ2) as 'CF óptimo en zona protegida 2'

```

```

report (aZ1) as 'DBO en zona protegida 1'          report (aZ2) as 'DBO en zona protegida 2'
report (bZ1) as 'OD en zona protegida 1'          report (bZ2) as 'OD en zona protegida 2'
report (cZ1) as 'CF en zona protegida 1'          report (cZ2) as 'CF en zona protegida 2'
report (CT) as 'Costo Total'
report (O) as 'Normalización'
report(CT/O) as 'Costo Total Normalizado'
report (CTp) as 'Costo Total Penalizado'
report (L1) as 'largo de tubería'          report (L2) as 'largo de tubería'          report (L3) as 'largo de tubería'
report (CI1) as 'Costo Inversión'          report (CI2) as 'Costo Inversión'          report (CI3) as 'Costo Inversión'
report (CM1) as 'Costo Mantenimiento'          report (CM2) as 'Costo Mantenimiento'
report (CM3) as 'Costo Mantenimiento'
report (CL1) as 'Costo Emisario'          report (CL2) as 'Costo Emisario'          report (CL3) as 'Costo Emisario'
transfer(Xff1,Yff1, Xff2,Yff2, Xff3,Yff3, B1, B2, B3, CT,CTp) file="Salida Simulador SA.dat"
END

```

Descriptor "Calculador de Función Objetivo"

```

TITLE 'Comparador de Variables'
SELECT
NGRID =1
DEFINITIONS
    transfer('Salida Simulador SA.dat',Xff1,Yff1, Xff2,Yff2, Xff3,Yff3, B1, B2, B3, CT,CTp)
    transfer('Salida Cambio de Nombre SA.dat', XX1,YY1, XX2, YY2, XX3, YY3, BB1, BB2, BB3,
        CTi, XXm1,YYm1, XXm2,YYm2, XXm3,YYm3, BBm1, BBm2, BBm3, CTmi, SS)
Z=random(1)
Si=SS+1
Smax=200
TT=1.5
alfa=(Si/Smax)^TT {S: número de iteración s-ésima y Smax: número total de iteraciones}
Ef= 1/20 {tolerancia de error en los costos}

PROB=(EXP((-alfa/Ef)*(CTp-CTi)/CTi))
VALE= IF (CTp<CTi) THEN 1 ELSE IF (Z < PROB)THEN 1 ELSE 0
POSMIN= IF (CTp<CTmi) THEN 1 ELSE 0

X11=if (VALE=1) then Xff1 else XX1
Y11=if (VALE=1) then Yff1 else YY1
X22=if (VALE=1) then Xff2 else XX2
Y22=if (VALE=1) then Yff2 else YY2
X33=if (VALE=1) then Xff3 else XX3
Y33=if (VALE=1) then Yff3 else YY3
B11=if (VALE=1) then B1 else BB1
B22=if (VALE=1) then B2 else BB2
B33=if (VALE=1) then B3 else BB3
CCT= if (VALE=1) then CTp else CTi

Xm11=if (POSMIN=1) then Xff1 else XXm1
Ym11=if (POSMIN=1) then Yff1 else YYm1
Xm22=if (POSMIN=1) then Xff2 else XXm2
Ym22=if (POSMIN=1) then Yff2 else YYm2
Xm33=if (POSMIN=1) then Xff3 else XXm3
Ym33=if (POSMIN=1) then Yff3 else YYm3
Bm11=if (POSMIN=1) then B1 else BBm1
Bm22=if (POSMIN=1) then B2 else BBm2
Bm33=if (POSMIN=1) then B3 else BBm3
CCTm= if (POSMIN=1) then CTp else CTmi

BOUNDARIES
REGION 1
START(0,0) LINE TO (1,0) TO (1,1) TO (0,1) TO CLOSE

PLOTS
SUMMARY
report (X11) report (Y11) report (X22) report (Y22) report (X33) report (Y33) report (B11) report (B22)
report (B33)report (CCT) report (Si) transfer(X11,Y11, X22, Y22, X33, Y33, B11, B22, B33, CCT, Xm11,
Ym11, Xm22,Ym22, Xm33, Ym33, Bm11, Bm22, Bm33, CCTm, Si) file="Salida Comparador SA.dat"
END

```

Descriptor "Comparador de Variables"

```

TITLE 'Actualizador de Variables'
SELECT
NGRID =1
DEFINITIONS
transfer('Salida Comparador SA.dat', X11,Y11, X22, Y22, X33, Y33, B11, B22, B33, CCT, Xm11, Ym11,
        Xm22, Ym22, Xm33, Ym33, Bm11, Bm22, Bm33, CCTm, Si)

XX1=X11
YY1=Y11
XX2=X22
YY2=Y22
XX3=X33
YY3=Y33
BB1=B11
BB2=B22
BB3=B33
CTi=CCT

XXm1= Xm11
YYm1= Ym11
XXm2= Xm22
YYm2= Ym22
XXm3= Xm33
YYm3= Ym33
BBm1= Bm11
BBm2= Bm22
BBm3= Bm33
CTmi= CCTm
SS=Si

BOUNDARIES
REGION 1
START(0,0)
LINE TO (1,0) TO (1,1) TO (0,1) TO CLOSE

PLOTS
SUMMARY
report (XX1) report (YY1) report (XX2) report (YY2) report (XX3) report(YY3)
report (BB1) report (BB2) report (BB3) report (CTi) report (Si)
transfer(XX1,YY1, XX2, YY2, XX3, YY3, BB1, BB2, BB3, CTi, XXm1,YYm1, XXm2,YYm2,
        XXm3,YYm3, BBm1, BBm2, BBm3, CTmi, SS) file="Salida Cambio de Nombre SA.dat"
END

```

Descriptor "Actualizador de Variables"

```

TITLE ' Modelo de Transporte de Sustancias (CF) '
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
CF
SELECT
painted
errlim= 1e-3
DEFINITIONS
{ velocidad}      transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
transfer('Salida Comparador SA.dat', X11,Y11, X22, Y22, X33, Y33, B11, B22, B33, CCT, Xm11, Ym11,
Xm22, Ym22, Xm33, Ym33, Bm11, Bm22, Bm33, CCTm, Si)
{ datos}          #include 'Parámetros.pde'
{CORRECCION NUMERICA}
Ccf= if (CF < 0) then 0.0000001 else CF
Ccf2= if (Ccf >2000) then 2000 else Ccf
{Zonas de Descarga}
fx=array(Xm11,Xm22,Xm33)          fy=array(Ym11,Ym22,Ym33)
{Zonas protegidas}
cfZ1=val(CF, xz1,yz1)              cfZ2=val(CF, xz2,yz2)

```

```

{LONGITUD EMISARIOS}
L1=((Xm11-Xp1)^2+(Ym11-Yp1)^2)^0.5      L2=((Xm22-Xp2)^2+(Ym22-Yp2)^2)^0.5
L3=((Xm33-Xp3)^2+(Ym33-Yp3)^2)^0.5

{COSTOS}
{Caudal volumétrico Tratado o CAPACIDAD de la Planta de tratamiento}
Qd1=(QT1^s)*(1-Bm11)^s  Qd2=(QT2^s)*(1-Bm22)^s  Qd3=(QT3^s)*(1-Bm33)^s
{factor costo M&O}
f1=(0.352+6.557e-6*Qd1-6.429e-11*Qd1^2)  f2=(0.352+6.557e-6*Qd2-6.429e-11*Qd2^2)
f3=(0.352+6.557e-6*Qd3-6.429e-11*Qd3^2)
{Costo Emisario - U$/Año}
CL1=((2732+1167*Di1+238*Di1^2)*L1)/vu      CL2=((2732+1167*Di2+238*Di2^2)*L2)/vu

CL3=((2732+1167*Di3+238*Di3^2)*L3)/vu
{Costo Inversión y M&O - U$/Año}
CT1=((8988/vu)/(1-f1))*Qd1+CL1      CT2=((8988/vu)/(1-f2))*Qd2+CL2
CT3=((8988/vu)/(1-f3))*Qd3+CL3
{Costo Inversion - U$/Año}
CI1=(8988/vu)*Qd1      CI2=(8988/vu)*Qd2      CI3=(8988/vu)*Qd3
{Costo M&O - U$/Año}
CM1=CT1-CI1      CM2=CT2-CI2      CM3=CT3-CI3
{Costo Total - U$/Año}
CT=CT1+CT2+CT3
EQUATIONS
CF: U*H*dx(CF)+V*H*dy(CF)-dx(K*H*dx(CF))-dy(K*H*dy(CF))+(Rd3*CF*H)=(Mcf/A)
BOUNDARIES
REGION 1
START (21000,4500)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) TO
(12000,10000) TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO
(4000,8000) TO (3000,7500) TO (2000,7000) line TO (1000,7000)
{entrada 1}
natural (CF) = U*CF*H      LINE TO (1000,6000)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250)
TO (2000,4500) line TO (1000,4500)
{entrada 2}
natural (CF) = U*CF*H      LINE TO (1000,3000)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000)
TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO
(16500,7500) TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO (19000,2500) TO (20000,2000) line
TO (21000,2000)
{salida}
natural (CF) = 0      LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE
{ISLAS}
START (6250,8250)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO
(6000,7500)TO CLOSE
START (8000,8500)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE
START (15000,8000)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE
START (17500,6000)
{borde}
natural (CF) = 0      LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO
(19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

REGION 2
Mcf=Mcf1*Bm11
START (fx[1],fy[1]) ARC(CENTER=fx[1],fy[1]+Radio) ANGLE = 360 TO CLOSE
REGION 3
Mcf=Mcf2*Bm22 {NMP/100ml x m^3/s}

```

```

START(fx[2], fy[2]) ARC(CENTER=fx[2], fy[2]+Radio) ANGLE=360 TO CLOSE
REGION 4
Mcf=Mcf3*Bm33 {NMP/100ml x m^3/s}
START(fx[3], fy[3]) ARC(CENTER=fx[3], fy[3]+Radio) ANGLE=360 TO CLOSE

REGION 5      {Plantas de Tratamiento}
start(xp1,yp1) arc(center=xp1,yp1-150)angle=360 to close
start(xp2,yp2) arc(center=xp2,yp2+150)angle=360 to close
start(xp3,yp3) arc(center=xp3,yp3+150)angle=360 to close

REGION 6      {Zonas Protegidas}
start(Xz1,Yz1) arc(center=Xz1,Yz1+50)angle=360 to close
start(Xz2,Yz2) arc(center=Xz2,Yz2+50)angle=360 to close

PLOTS
contour(Ccf) as 'Contaminación (NMP/100 ml)'
contour(Ccf) as 'Contaminación (NMP/100 ml)' zoom (3500,4400,5000,5000)
contour(Ccf2)
contour(Ccf2) as 'Contaminación (NMP/100 ml)' zoom (5500,6000,5000,5000)
contour(Ccf2)
contour(Ccf2) as 'Contaminación (NMP/100 ml)' zoom (11000,5000,7000,7000)
SUMMARY
report (cfZ1) report (cfZ2) report(Bm11) report (Bm22) report (Bm33)
report (L1) report (L2) report (L3)
report (Xm11) report(Ym11) report(Xm22) report(Ym22) report(Xm33) report(Ym33)
report (CT) report (CCTm)
END

```

Descriptor "Modelo de Transporte de Sustancias (CF)"

```

TITLE ' Modelo de Transporte de Sustancias (DBO y OD)'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
DBO
OD3
SELECT
painted
errlim= 1e-3
DEFINITIONS
{ velocidad}      transfer('Velocidades Hidrodinámicas.dat',Ueta,Veta,H)  U=Ueta  V=Veta
transfer('Salida Comparador SA.dat', X11,Y11, X22, Y22, X33, Y33, B11, B22, B33, CCT, Xm11, Ym11,
Xm22, Ym22, Xm33, Ym33, Bm11, Bm22, Bm33, CCTm, Si)
{datos}           #include 'Parámetros.pde'
{Concentración de OD}  OD=OD3+ODi
{CORRECCION NUMERICA}
Cdbo= if (DBO < 0) then 0.0000001 else DBO
Cod= if (OD < 0) then 0 else OD      Ccod=if(Cod >8.08e-3) then 8.08e-3 else Cod
{DBO}             Jx_dbo= -K*(dx(DBO))+U*DBO      Jy_dbo= -K*(dy(DBO))+V*DBO
                  v_dbo=vector(Jx_dbo,Jy_dbo)
{OD}              Jx_od= -K*(dx(OD3))+U*OD3      Jy_od= -K*(dy(OD3))+V*OD3
                  v_od=vector(Jx_od,Jy_od)
{Zonas de Descarga}
fx=array(xm11,xm22,xm33) fy=array(ym11,ym22,ym33)
{Zonas protegidas}
dboZ1=val(DBO, xz1,yz1)  dboZ2=val(DBO, xz2,yz2)
odZ1=val(OD, xz1,yz1)   odZ2=val(OD, xz2,yz2)

{LONGITUD EMISARIOS}
L1=((Xm11-Xp1)^2+(Ym11-Yp1)^2)^0.5      L2=((Xm22-Xp2)^2+(Ym22-Yp2)^2)^0.5
L3=((Xm33-Xp3)^2+(Ym33-Yp3)^2)^0.5

{COSTOS}
{Caudal volumétrico Tratado o CAPACIDAD de la Planta de tratamiento}
Qd1=(QT1^s)*(1-Bm11)^s  Qd2=(QT2^s)*(1-Bm22)^s  Qd3=(QT3^s)*(1-Bm33)^s
{factor costo M&O}
f1=(0.352+6.557e-6*Qd1-6.429e-11*Qd1^2)  f2=(0.352+6.557e-6*Qd2-6.429e-11*Qd2^2)
f3=(0.352+6.557e-6*Qd3-6.429e-11*Qd3^2)
{Costo Emisario - U$/Año}

```

$CL1 = ((2732 + 1167 * Di1 + 238 * Di1^2) * L1) / vu$                        $CL2 = ((2732 + 1167 * Di2 + 238 * Di2^2) * L2) / vu$   
 $CL3 = ((2732 + 1167 * Di3 + 238 * Di3^2) * L3) / vu$   
 {Costo Inversión y M&O - U\$/Año}  
 $CT1 = ((8988 / vu) / (1 - f1)) * Qd1 + CL1$                        $CT2 = ((8988 / vu) / (1 - f2)) * Qd2 + CL2$   
 $CT3 = ((8988 / vu) / (1 - f3)) * Qd3 + CL3$   
 {Costo Inversion - U\$/Año}  
 $CI1 = (8988 / vu) * Qd1$                        $CI2 = (8988 / vu) * Qd2$                        $CI3 = (8988 / vu) * Qd3$   
 {Costo M&O - U\$/Año}  
 $CM1 = CT1 - CI1$                        $CM2 = CT2 - CI2$                        $CM3 = CT3 - CI3$   
 {Costo Total - U\$/Año}  
 $CT = CT1 + CT2 + CT3$   
 EQUATIONS  
 $DBO: U * H * dx(DBO) + V * H * dy(DBO) - dx(K * H * dx(DBO)) - dy(K * H * dy(DBO)) + (Rd1 * DBO * H) = (Mdbo / A)$   
 $OD3: U * H * dx(OD3) + V * H * dy(OD3) - dx(K * H * dx(OD3)) - dy(K * H * dy(OD3)) + (Rd1 * DBO * H) - (H * Rd2 * (dsi - OD3)) = 0$

**BOUNDARIES**  
**REGION 1**  
 START (21000,4500)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (20000,4500) spline TO (19000,5500) TO (18000,7500) {TO  
 (17000,8500) TO (16000,8500) TO (15000,9000) TO (14000,10000) TO (13000,10500)} TO (12000,10000)  
 TO (10000,10000) TO (9000,10000) TO (7000,9500) TO (6000,9250) TO (5000,8500) TO (4000,8000) TO  
 (3000,7500) TO (2000,7000) line TO (1000,7000)  
 {entrada 1}  
 natural (DBO) = U \* DBO \* H  
 value (OD3) = 0                      LINE TO (1000,6000)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (2000,6000) spline TO (3000,6750) to (4000,7150) to (3000,5250)  
 TO (2000,4500) line TO (1000,4500)  
 {entrada 2}  
 natural (DBO) = U \* DBO \* H  
 value (OD3) = 0                      LINE TO (1000,3000)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (2000,3000) spline TO (3000,4000) TO (4000,5000) TO (5000,6000)  
 TO (6000,6500) TO (7000,7000) TO (8000,7500) TO (8500,8000) TO (12500,7750) TO (15000,7500) TO  
 (16500,7500) TO (17000,6500) TO (17500,5000) TO (18000,4000) TO (19000,2500) TO (20000,2000) line  
 TO (21000,2000)  
 {salida}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (21000,4500) line TO CLOSE

**{ISLAS}**  
 START (6250,8250)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (5000,7500) Spline TO (4500,7000) TO (5000,7050) TO  
 (6000,7500) TO CLOSE  
 START (8000,8500)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (7500,8200) Spline TO (7000,7500) TO (7500,7800) TO CLOSE  
 START (15000,8000)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (13500,8500) Spline TO (12000,8300) TO (13000,7900) TO CLOSE  
 START (17500,6000)  
 {borde}  
 natural (DBO) =0  
 natural (OD3) =0                      LINE TO (17500,5500) Spline TO (18000,4700) TO (18500,4000) TO  
 (19000,3000) TO (19000,3500) TO (18000,5500) TO CLOSE

**REGION 2**  
 $Mdbo = Mdbo1 * Bm11$   
 START (fx[1],fy[1]) ARC(CENTER=fx[1],fy[1]+Radio) ANGLE = 360 TO CLOSE

```

REGION 3
Mdbo=Mdbo2*Bm22      {Kg/s}
START(fx[2], fy[2]) ARC(CENTER=fx[2], fy[2]+Radio) ANGLE=360 TO CLOSE
REGION 4
Mdbo=Mdbo3*Bm33      {Kg/s}
START(fx[3], fy[3]) ARC(CENTER=fx[3], fy[3]+Radio) ANGLE=360 TO CLOSE
REGION 5      {Plantas de Tratamiento}
start(xp1,yp1) arc(center=xp1,yp1-150)angle=360 to close
start(xp2,yp2) arc(center=xp2,yp2+150)angle=360 to close
start(xp3,yp3) arc(center=xp3,yp3+150)angle=360 to close
REGION 6      {Zonas Protegidas}
start(Xz1,Yz1) arc(center=Xz1,Yz1+50)angle=360 to close
start(Xz2,Yz2) arc(center=Xz2,Yz2+50)angle=360 to close
PLOTS
contour(od) as 'Cod'
contour(od) as 'Cod' zoom (10000,7000,4000,4000)
contour(Cod) as 'OD'
contour(Cod) as 'OD' zoom (11000,5000,7000,7000)
contour(Ccod) as 'OD'
contour(Ccod) as 'OD' zoom (11000,5000,7000,7000)
SUMMARY
report(odZ1) report(odZ2) report(dboZ1) report(dboZ2)
report(Bm11) report (Bm22) report (Bm33)
report (L1) report (L2) report (L3)
report (Xm11) report(Ym11) report(Xm22) report(Ym22) report(Xm33) report(Ym33)
report (CT) report (CCTm)
END

```

Descriptor "Modelo de Transporte de Sustancias (DBO y OD)"