Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

Qué es el Cálculo Infinitesimal

O cómo la "casi nada" es mucho

Ing. Ulises J. P. Cejas
U.T.N.

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional – edUTecNe
http://www.edutecne.utn.edu.ar
edutecne@utn.edu.ar

Qué es el Cálculo Infinitesimal
O cómo la "casi nada" es mucho.

por Ing. Ulises J. P. Cejas

Lo útil y lo inútil

Uno de mis nietos, estudiante de nivel medio y curioso por los temas científicos, me preguntó que era el cálculo infinitesimal o el cálculo diferencial e integral.
Además me preguntó para qué servía.
Lo que sigue pretende contestar a su inquietud.
Antes de intentar explicar qué es cálculo infinitesimal es importante reflexionar sobre qué cosas son útiles o inútiles.
Cuando alguien tiene en sus manos un telefonito celular que es capaz de sacar fotos o filmar videos, enviar textos e imágenes, jugar, tener la agenda y hasta para hablar por teléfono (hoy eso parece casi un accesorio), pocos piensan que ese aparatito es el resultado de que cientos de miles (¿millones?) de personas a lo largo de la historia de la humanidad han pensado, ensayado, reflexionado y hasta filosofado en cosas que no siempre parecían útiles.
Si hay algo que a primera vista parece totalmente inútil es "la nada" o su equivalente matemático "el cero".
Y sin embargo el cero (0) como número fue descubierto recién en el medioevo por los matemáticos árabes. Los griegos y los romanos, que aún nos asombran con su ingenio para razonar y construir, no lo conocían.
Incorporar el cero a la numeración fue un salto revolucionario para el cálculo matemático y abrió las puertas a la ciencia futura.
Si bien la evolución del ser humano ha sido tan lenta que aun conservamos muchas características que nos hacen parecer a los animales (y en algunos casos a los animales más primitivos), nuestra inteligencia - con dificultad pero sistemáticamente - introdujo al humano en el campo de la abstracción (¿para qué sirve?) y de aquí - paso a paso - a la ciencia y a la tecnología actuales.
Abstracción, razonamiento, reflexión, filosofía, el mundo de las ideas ..... es todo un territorio que a muchos no interesa, a otros atemoriza y a otros pocos (que tal vez no sean tan pocos) fascina.
En resumen y en base a los resultados que vemos todos los días, se puede afirmar que el resultado de pensar (aunque pensar a veces duela) es mucho más útil de lo que parece a primera vista.

Lo infinitamente pequeño

La incorporación del número cero (0) produjo una revolución en el cálculo matemático.
Aproximadamente 500 años después los matemáticos produjeron una nueva revolución al introducir la idea de los números infinitamente pequeños (casi cero), cosa que abrió todo un nuevo mundo de posibilidades a la ciencia moderna.
Los precursores de estas ideas fueron Sir Isaac NEWTON (1642-1727) y Gottfried Wilhelm von LEIBNITZ (1646-1716).
En su época existió una fuerte discusión sobre quién tuvo las ideas originales (¡también en la ciencia se discute por estas cosas!), si bien los matemáticos adoptaron finalmente la terminología y la simbología de Leibnitz para el cálculo diferencial e integral.

¿Qué es un número infinitamente pequeño?
Aquí nos encontramos de lleno con una abstracción casi contradictoria pero que tiene una serie de consecuencias muy curiosas.
Podríamos decir que un número es infinitamente pequeño cuando es tan chico que casi es cero ....., pero NO ES cero!!!
Los matemáticos le dieron a estos números la denominación de DIFERENCIALES.
Para jugar un poco con la imaginación (que para los matemáticos es la parienta pobre de la inteligencia) tratemos de poner algunos ejemplos de números MUY chicos.
Si bien no son infinitamente pequeños, nos pueden dar una cierta idea del tema.

1.- Un metro (m) tiene 1000 milímetros (mm).

Un metro no es una magnitud grande. Pero no hay dudas de que un milímetro es una magnitud bastante chica.

2.- Un milímetro (mm) tiene 1000 micrones (μm).
Esto quiere decir que un metro tiene 1.000.000 de micrones.
Si un milímetro es una magnitud chica, ¡un micrón es una magnitud mucho más chica!

3.- Un micrón (μm) tiene 1000 nanometros (nm).
A esta altura sí que estamos hablando de magnitudes muy pequeñas: un nanometro es la millonésima parte de un milímetro.

Es evidente que para la vida de todos los días un nanometro es algo que no merece ser tenido en cuenta. A ninguna señora sensata se le ocurriría ir a comprar 10 nanometros de tela. Aunque tampoco se le ocurriría compar 10 milímetros de tela: se trata de magnitudes muy pequeñas para los usos prácticos.
Para ella 10 nanometros sería una longitud "casi igual" a cero.

Sin embargo, todavía no es un DIFERENCIAL de longitud.
Si queremos usar la definición de "valor infinitamente pequeño" debemos admitir que un diferencial de longitud es todavía mucho más chico que un nanometro.
Para simplificar la escritura y utilizando los símbolos que usa la matemática, a partir de ahora escribiremos que un diferencial (d) de una longitud (ℓ) es más chico (<) aún que un nanometro de la siguiente manera:

$$d\ell < 1 \text{ nanometro}$$

Es importante tener en cuenta que $d\ell$ no es una realidad sino una *abstracción*, o en otras palabras, una *idea* que nos permite sacar algunas conclusiones lógicas.

> Nota adicional: como todos sabemos, los matemáticos tratan de simplificar las cosas (¿?) utilizando símbolos en lugar de palabras. En este caso usamos la letra ℓ para indicar una longitud cualquiera. En consecuencia, ℓ puede tener cualquier valor que nosotros queramos darle (un metro, 25 cm, 10 nm). La ventaja es que usando esta simbología se pueden escribir fórmulas *generales* que pueden ser usadas para cualquier caso particular. Por esta característica los matemáticos les dan a estos símbolos el nombre de *variables*.
> Una variable puede designarse con cualquier letra que resulte cómoda.
> Cuando se trata de variables indeterminadas (que pueden servir para muchas aplicaciones) generalmente se usan las últimas letras del alfabeto, por ejemplo x , y , z .

Algunas características de los infinitesimales (diferenciales)

Partiendo de la definición de *diferencial* y con la ayuda de algunos ejemplos, intentemos analizar algunas características de este mundo novedoso de los infinitesimales.

1. Si nosotros sumamos un millón de micrones tendremos como resultado un metro.
   Usando este ejemplo, podríamos animarnos a decir que si sumamos todos los $d\ell$ (diferenciales de ℓ) tendremos como resultado la longitud ℓ.
   Dicho de esta manera parece algo obvio, pero no deja de ser una audacia del pensamiento decir que la suma de *cosas infinitamente* pequeñas dan como resultado algo que no es también infinitamente pequeño.

2. ¿Se pueden comparar dos magnitudes infinitamente pequeñas?
   Pongamos un ejemplo menos *filosófico.*
   Si comparo 100 nanometros con 2 nanometros puedo decir que la primera magnitud es 50 veces mayor que la segunda.

$$\frac{100 \text{ nm}}{2 \text{ nm}} = 50$$

Curiosamente la relación entre dos magnitudes MUY pequeñas nos da como resultado un valor (en este caso el valor 50) que NO es pequeño.
Usando este ejemplo, podríamos animarnos a decir que es posible comparar dos diferenciales. Más aun, hasta podríamos decir que la relación entre dos diferenciales (valores infinitamente pequeños) podría dar un valor NO infinitamente pequeño.
Usando símbolos matemáticos:

$$\frac{dy}{dx} = \text{valor NO infinitamente pequeño}$$

3. ¿Se puede decir que existen infinitesimales que son infinitamente más chicos que otros?
   Esta pregunta desafía demasiado a la inteligencia. Si algo es infinitamente pequeño no puede haber otra magnitud que sea *infinitamente más pequeña.*
   Y sin embargo ......
   Pongamos un ejemplo que nos ayude a pensar.
   Imaginemos un rectángulo que tiene un metro de largo por un micrón (micrometro) de ancho. Su superficie será:

   $1 \text{ m} \times 1 \text{ µm} = 1.000.000 \text{ µm}^2$

   Supongamos ahora un rectángulo que tiene 2 µm de largo por 1 µm de ancho.
   Su superficie será:

   $2 \text{ µm} \times 1 \text{ µm} = 2 \text{ µm}^2$

   Este rectángulo será 500.000 veces (¡!) más chico que el anterior.
   La conclusión obvia es que cuando se multiplican dos magnitudes muy chicas, el resultado es algo MUCHO más chico.
   Usando un poco de audacia intelectual, pongamos dos ejemplos equivalentes:

   - Una primer superficie cuyos lados sean la longitud ℓ y la longitud infinitesimal $d\ell$
     Su superficie será $\ell \times d\ell$
     Sin duda se trata de una superficie infinitesimal, porque uno de los lados es infinitamente pequeño.
   - Una segunda superficie cuyos dos lados sean $d\ell$
     Su superficie será $d\ell \times d\ell$
     Por tratarse de la multiplicación de dos magnitudes infinitesimales, el resultado es *infinitamente más chico* que el del caso anterior.
     Preocupante, ¿no?.

   En resumen, nos encontramos con infinitesimales *de distinto orden de magnitud*. Todo esto suena *excesivamente filosófico*, pero los matemáticos lo han usado para sacarse unos cuantos problemas de encima.
   Más adelante mostraremos un ejemplo de la utilidad de estas ideas ... ¿locas?.

Sumatorias e integrales

Una pizza tiene 8 porciones.
La suma de las 8 porciones equivalen a 1 pizza.
Los matemáticos utilizan el símbolo ∑ (sigma mayúscula del griego) para indicar que se están sumando varias *porciones* de algo.
A su vez, esas *porciones* se representan con el símbolo Δ (delta mayúscula del griego)
Para complicar la cosa, usemos entonces esta notación matemática para el caso de la pizza:

$$\sum_{n=1}^{n=8} \Delta\,(\text{pizza}) = 1 \text{ pizza}$$

Traducido al idioma normal esto se lee así:
"La suma (∑) de las porciones de pizza (Δ) desde la porción 1 (n=1) a la porción 8 (n=8) es igual a la pizza completa"
Si se hubieran tomado distintos *límites* para la suma, por ejemplo entre n=3 y n= 6, estaríamos sumando 4 porciones, lo que nos daría como resultado *media* pizza.

Con frecuencia la notación matemática se simplifica, dando por supuesto los límites y haciendo que la expresión sea más general, pero esto hay que usarlo con prudencia para no cometer errores. Por ejemplo:

$$\sum \Delta\,(\text{pizza}) = \text{pizza}$$

El concepto de *suma* de *porciones* también se aplica al cálculo infinitesimal, pero en este caso se habla de *integrar* ; el símbolo que se usa es $\int$ (no tiene equivalente en ningún alfabeto). En este caso se cambia el símbolo Δ por la letra d (diferencial).

Un ejemplo muy elemental es la *integral* de los diferenciales de longitud ($d\ell$):

$$\int d\ell = \ell$$

Esta expresión se lee:
"la integral de los diferenciales de ℓ es igual a la longitud ℓ "

Igual que en el caso de ∑ (*sumatoria*), también se indica dentro de que limites se hará la *integración*, aunque con frecuencia se usa la expresión en forma más general sin indicar los límites. En el primer caso se la llama *integral definida* (con límites) y en el segundo caso se la denomina *integral indefinida* (sin aclarar los límites).
Más adelante se verá esto en un ejemplo.

¿Para qué sirve?

Todo lo visto hasta ahora puede parecer más o menos divertido, pero todavía no alcanza para contestar una pregunta muy válida: ¿para que sirve tanta especulación *filosófica*?.
Si bien al comienzo se afirmó que el cálculo infinitesimal significó una verdadera revolución de la matemática y representó la aparición de una herramienta fundamental para la ciencia moderna, una forma más simple y práctica de *comenzar* a contestar esta pregunta es buscar un ejemplo concreto que muestre su aplicación.

Ejemplo de aplicación del cálculo infinitesimal

Supongamos un automóvil que es capaz de arrancar y llegar a la velocidad de 100 Km/h en 10 segundos (10 s).
El problema que se plantea es saber cuantos metros recorre en esos 10 segundos.

La Tabla I muestra la velocidad que va alcanzando a medida que pasan los 10 segundos (10 s):

Tabla I

t (segundos)		velocidad (v) Km/h	
t_1 =	1	v_1 =	10
t_2 =	2	v_2 =	20
t_3 =	3	v_3 =	30
t_4 =	4	v_4 =	40
t_5 =	5	v_5 =	50
t_6 =	6	v_6 =	60
t_7 =	7	v_7 =	70
t_8 =	8	v_8 =	80
t_9 =	9	v_9 =	90
t_{10} =	10	v_{10} =	100

A simple vista se ve que *por cada segundo* la velocidad aumenta 10 Km/h.
En otras palabras, la aceleración (a) del automóvil es igual a 10 [Km/h]/s (diez kilómetros por hora cada segundo).

a *(aceleración)* = 10 [Km/h]/s

También podemos deducir fácilmente una fórmula general que nos permita calcular la velocidad en cualquier momento del tiempo (t), ya que la velocidad (v) se incrementa o aumenta en forma continua a un ritmo constante (aceleración constante):

v *(velocidad)* = a *(aceleración)* . t *(tiempo)*

> Nota: tanto v *(velocidad)* como t *(tiempo)* son las *variables* de la fórmula.
> En este caso v *(velocidad)* es una *variable dependiente* de la otra *variable* t *(tiempo)*, que por este motivo la llamaremos *variable independiente.*
> Los matemáticos también acostumbran decir para estos casos que v *(velocidad) es función de* t *(tiempo).*

Si hacemos un gráfico en el que representamos el tiempo transcurrido (eje horizontal) y la velocidad (eje vertical), veremos lo siguiente (Fig. 1):

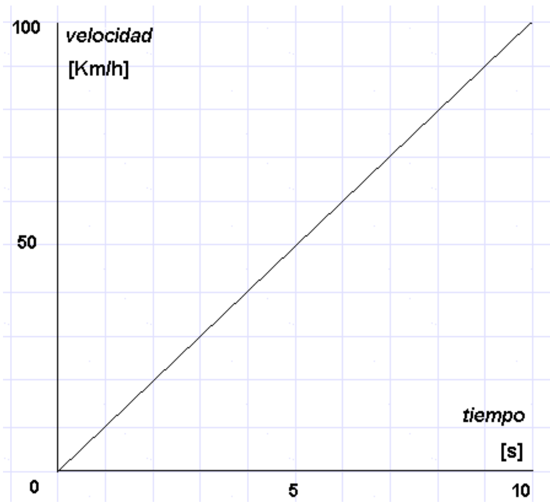

Figura 1

Es bastante obvio que la *variación constante* de la velocidad que se produce a lo largo del tiempo va a representarse como una línea recta.

¿Y que pasa con el espacio recorrido?

Vamos a recordar que el espacio (e) recorrido por un vehículo se obtiene simplemente multiplicando la velocidad (v) por el tiempo (t).

En consecuencia, una respuesta apresurada (y además equivocada) podría ser esta:

"Si el vehículo alcanzó la velocidad de 100 Km/h en 10 segundos, bastará multiplicar esa velocidad por el tiempo transcurrido para tener los metros recorridos".
Esto daría un espacio (e) igual a 277,78 metros. [1]

Esto es falso de toda falsedad, porque la velocidad del vehículo NO es constante. Al comienzo el automóvil *se mueve mucho mas despacio que al final*, tal como mostraba la tabla anterior (Tabla I).

Si queremos tener un valor más aproximado, podríamos dividir el tiempo en períodos de 1 segundo y calcular el espacio recorrido en cada uno de ellos. El espacio total sería la suma de los recorridos parciales.
Veamos esto en la Tabla II:

Tabla II

t (segundos)	velocidad (v) Km/h	e (metros por cada segundo)	e (totales parciales acumulados)
t_1 = 1	v1 = 10	2,78	2,78
t_2 = 2	v2 = 20	5,56	8,33
t_3 = 3	v3 = 30	8,33	16,67
t4 = 4	v4 = 40	11,11	27,78
t5 = 5	v5 = 50	13,89	41,67
t6 = 6	v6 = 60	16,67	58,33
t7 = 7	v7 = 70	19,44	77,78
t8 = 8	v8 = 80	22,22	100,00
t9 = 9	v9 = 90	25,00	125,00
t10 = 10	v10 = 100	27,78	152,78

Usando este método el resultado es distinto y, como era de esperar, es menor:

$$e = 152{,}78 \text{ metros}$$

El gráfico de la Figura 2 muestra cómo se hizo este cálculo: cada rectángulo parcial representa el producto (multiplicación) de cada velocidad (v_t) por la porción de tiempo elegida (Δt=1 segundo).

[1] 100 Km/h es igual a 100.000 metros cada 3.600 segundos (una hora), lo que es equivalente a 27,778 metros por segundo. En consecuencia, en 10 segundos recorrerá 277,78 metros.

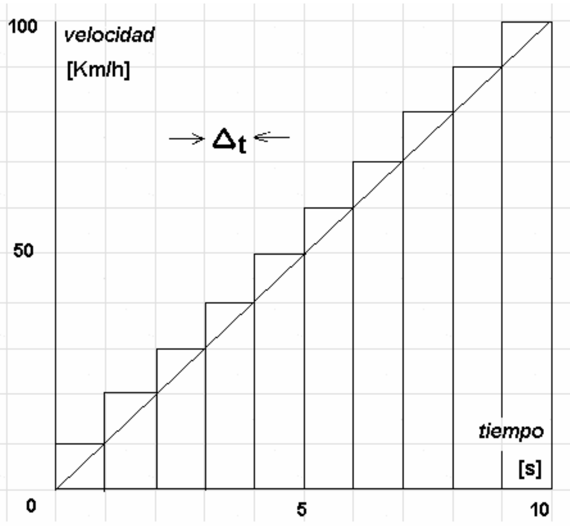

Figura 2

Si nos animamos a usar la terminología (notación) matemática vista en párrafos anteriores, deberíamos escribir:

$$e = \sum_{t=0}^{t=10} (v_t \, . \, \Delta t)$$

Si bien el método utilizado nos dio un valor razonablemente aproximado, sigue cometiendo el mismo error conceptual que el primero (que era bastante grosero).
En cada rectángulo se supone que la velocidad es constante, cosa que no es cierta.

Y aquí surge la idea: ¿por qué no usar *diferenciales* de tiempo (dt) infinitamente pequeños en lugar de períodos de 1 segundo?.
En este caso, ¡¡el error sería infinitamente pequeño y nos podríamos dar el lujo de despreciarlo!!.
Para visualizar mejor esta idea, imaginemos que los rectángulos del gráfico anterior se van haciendo cada vez más angostos hasta tener un ancho infinitesimal (dt).
La suma de esos *infinitos* rectángulos sería simplemente la superficie somberada en el gráfico de la Figura 3 (¡esa superficie es en definitiva la superficie de un vulgar y conocido triángulo!).

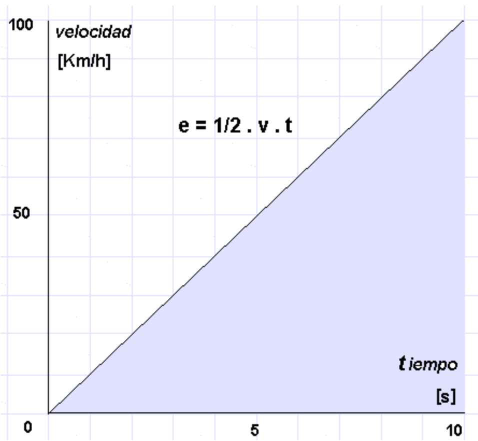

Figura 3

Usando la terminología matemática vista previamente, decimos (generalizando) que "el espacio e es igual a la *integral* de la velocidad v multiplicada por el *diferencial* de tiempo dt ".

$$e = \int v \, . \, dt$$

Como en el ejemplo pretendemos conocer el *espacio total recorrido en los 10 segundos*, nuestros *límites de integración* serán t=0 y t=10 segundos. En consecuencia, la notación matemática debe indicar también estos límites. Esto se indica de la siguiente manera:

$$e = \int_{t=0}^{t=10} v \,.\, dt$$

Avancemos un poco más: si la *superficie* del triángulo es igual al espacio (e) recorrido, podemos calcularlo muy fácilmente usando la conocida fórmula de la geometría [la superficie de un triángulo rectángulo es igual a la mitad (1/2) del producto de los dos lados(v_{10} y t_{10})]:

$$e \text{ (espacio)} = 1/2 \,.\, v_{10} \,.\, t_{10}$$

Para generalizar la fórmula (o sea, para poder usarla con cualquier valor) la podemos escribir así:

$$e \text{ (espacio)} = 1/2 \,.\, v \,.\, t$$

Sabemos además (ver párrafos anteriores) que la velocidad es igual a la aceleración (constante) multiplicada por el tiempo transcurrido (variable):

$$v = a \,.\, t$$

Si en la fórmula general del espacio reemplazamos la velocidad, tendremos otra fórmula para calcular el espacio recorrido:

$$e \text{ (espacio)} = 1/2 \,.\, a \,.\, t^2$$

En otras palabras, el espacio recorrido es *igual a la mitad de multiplicar la aceleración por el cuadrado del tiempo transcurrido.*
En nuestro caso, el resultado es:

$$1/2 \,.\, 10 \text{ [Km/h]/s} \,.\, 100 \, [s^2] = 1/2 \,.\, 2{,}7778 \, [m/s^2] \,.\, 100 \, [s^2] = 138{,}89 \, [m]$$

Y como era de esperar, es un valor menor que el valor calculado por aproximación.[2]

¿Cómo varían las cosas?

Usando los conceptos *filosóficos* del cálculo infinitesimal hemos llegado a la fórmula que nos permite calcular el espacio recorrido (e) de acuerdo (o *en función*) del tiempo transcurrido (t). En base a esta fórmula podemos hacer un gráfico que nos muestre el valor de (e) en función (o dependiendo) de (t). También podría decirse que en el gráfico vemos *como varía* (e) en función (o dependiendo) de (t). En la Figura 4 se observa que la representación no es una línea recta, sino que es una curva.

[2] Comentarios a las fórmulas:

a) con frecuencia no se utiliza [x] como signo de multiplicación para evitar confusiones con la letra x, ya que esta se usa habitualmente para identificar una variable indefinida. Por este motivo la multiplicación se ha simbolizado por un punto [.].

b) en la fórmula se incluyen las unidades (por ejemplo Km/h) para evitar posibles errores en los cálculos: es muy distinto el valor cuando se habla de kilómetros por hora (Km/h) que cuando se habla de metros por segundo (m/s).

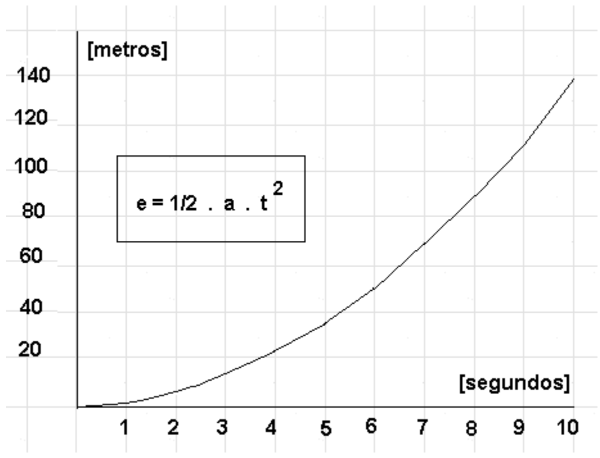

Figura 4

Supongamos por un momento que la única información a nuestra disposición es la fórmula y el gráfico, y que hemos perdido todo lo anterior.
Es decir: sabemos solamente cómo varía el espacio recorrido a medida que transcurre el tiempo, pero desconocemos la velocidad y la aceleración del vehículo.

La primera tentación (equivocada) sería pensar que si el vehículo recorrió casi 139 metros en 10 segundos, su velocidad es de 139 [m]/10 [s] ó, dicho de otra manera, 13,9 [m/s].
Esto es falso de toda falsedad, porque el espacio recorrido no varía *en forma proporcional* al tiempo. Al inicio (por ejemplo en el primer segundo) su velocidad es bastante lenta comparada con la velocidad final (por ejemplo a los 10 segundos).

Si quisiéramos intentar una solución menos grosera y más *aproximada* a nuestro problema, podríamos tomar pequeños intervalos de tiempo (Δ_t) , por ejemplo de 1 segundo, e ir probando cómo varía el espacio en distintas partes del gráfico.
Supongamos que hacemos la prueba entre (t) igual a 3 y (t) igual a 4 (1 segundo de diferencia).
Usando la fórmula, es simple calcular que en $t = 3$ el vehículo recorrió 12,50 metros y que en $t = 4$ recorrió 22,22 metros (la prueba de que esto es cierto se la dejamos al lector).
O sea que recorrió Δ_e = 9,72 metros en Δ_t = 1 segundo.
Si lo queremos describir con palabras, diremos que la velocidad (v) es igual a la variación del espacio recorrido (Δ_e) dividido por el tiempo transcurrido entre los segundos 3 y 4 (Δ_t).
Si queremos usar símbolos matemáticos (es más complicado pero más compacto) escribimos:

$$v = \frac{\Delta_e}{\Delta_t}$$

Esta sería una buena aproximación, pero.... todavía NO es la solución perfecta, ya que seguimos razonando como si el espacio variara *proporcionalmente* con el tiempo. Y sabemos por el gráfico que esto no es así.
Aquí podemos pedirle ayuda al cálculo infinitesimal.
Si queremos saber *cual es la velocidad* en un determinado punto del gráfico (o sea para cualquier valor del tiempo t) reemplazamos las variaciones Δ_e y Δ_t por *diferenciales* de espacio (de) y de tiempo (dt).
Filosofemos un poco: como el período de tiempo (dt) es infinitamente pequeño, podemos decir que el tiempo inicial y el tiempo final de ese período de tiempo están *infinitamente cerca*, o sea que el tiempo inicial y final son casi iguales (por no decir ¡¡¡¡muy, pero muy casi iguales!!!!).
De esta manera, la velocidad para cualquier valor de (t) será:

$$v = \frac{de}{dt}$$

Recordemos (ver párrafos anteriores) que la división entre dos *diferenciales* (valores infinitamente pequeños) puede dar un valor de cualquier magnitud.

Los matemáticos llaman ***derivada*** a la relación (o división) entre dos *diferenciales.*

En consecuencia, dirán que la velocidad v es la *derivada* del espacio e con respecto al tiempo t.

Suena complicado, pero es cuestión de acostumbrarse.

Derivadas e integrales: operaciones inversas

Volviendo al comienzo, recordemos que el espacio e se calculaba haciendo la integral de la velocidad v multiplicada por el *diferencial* de tiempo dt :

$$e = \int v \, . \, dt$$

Ahora hemos visto que la velocidad v se calculaba *derivando* el espacio e con respecto al tiempo t :

$$v = \frac{de}{dt}$$

Esto significa que la *derivada* y la *integral* son operaciones matemáticas *inversas* entre sí y que están ligadas una con otra.

Reemplacemos la velocidad v *en la integral:*

$$e = \int v \, . \, dt = \int \frac{de}{dt} \, . \, dt$$

Acomodando las cosas[3]*:*

$$e = \int de \, . \, \frac{dt}{dt} = \int de = e$$

Como calcular la *derivada*

Sigamos con el ejemplo del vehículo.
Habíamos llegado a la fórmula del espacio (e) en función de la aceleración (a) y el tiempo transcurrido (t):

$$e \text{ (espacio)} = 1/2 \, . \, a \, . \, t^2$$

[3] Tal vez esta demostración no se ajuste a un procedimiento matemático *ortodoxo*, pero sirve para mostrar lo que se busca. De cualquier manera, no creo que ningún matemático profesional esté leyendo estas líneas.

Razonando llegamos a que la velocidad (v) es la *derivada* del espacio (e) respecto del tiempo (t):

$$v = \frac{de}{dt}$$

Pero, ¿como calculamos la derivada?.

De acuerdo a lo que acabamos de analizar, la *derivada* (v) es la operación inversa de la *integración* (e). Si retrocedemos al comienzo, ya sabíamos que podíamos calcular la velocidad usando esta fórmula (velocidad es igual a la aceleración por el tiempo transcurrido):

$$v = a\ .\ t$$

Obviamente también podemos escribir:

$$v = \frac{de}{dt} = a\ .\ t$$

Conclusión:

$$\frac{de}{dt} = a\ .\ t$$

O también, la derivada con respecto al tiempo de la fórmula (función) que nos da el espacio:

$$\frac{d}{dt}\left[1/2\ .\ a\ .\ t^2\right] = a\ .\ t$$

En realidad hicimos un pequeño truco, ya que no *calculamos* la *derivada* sino dimos vuelta la *integral* que ya conocíamos. Pero, para tranquilidad del lector, los matemáticos saben desde hace tiempo cómo calcular las derivadas de cualquier fórmula o *función*.
Al respecto hay infinidad de libros que tratan el tema en forma muy detallada y precisa.
Tal como se decía al comienzo, el objetivo de estas líneas fue simplemente mostrar los conceptos *muy básicos* que dieron origen al cálculo infinitesimal, sin avanzar en mayores detalles.

El lector puede terminar aquí, ya que las ideas fundamentales están completadas.

Pero..... para no dejar el tema con la sensación de que *falta algo,* agregaremos dos anexos:

Anexo I: Terminaremos el ejemplo *calculando* realmente la *derivada* de la fórmula que nos permitía calcular el espacio. Esto es un procedimiento puramente matemático, que se encuentra en todos los libros. Lo encaramos simplemente como un complemento adicional.

Anexo II: De cómo una recta roza a una curva y se transforma en su *tangente* (¿?).

ANEXO I
Ejemplo de cómo calcular realmente una *derivada.*

En nuestro caso, la *función* (fórmula) que relaciona el espacio con el tiempo es:

$$e\ (\text{espacio}) = 1/2\ .\ a\ .\ t^2$$

Si aumentamos (incrementamos) el tiempo agregándole un *diferencial,* tendremos:

$$(t + dt)$$

En consecuencia es obvio que también el espacio tendrá un *incremento diferencial*:

$$(e + de)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$(e + de) = 1/2 \, . \, a \, . \, (t + dt)^2$$

Operando como nos enseñan los matemáticos tendremos:

$$(e + de) = 1/2 \, . \, a \, . \, (t^2 + 2 \, . \, t \, . \, dt + dt^2)$$

El lector recordará que al comienzo se mostró que un *diferencial* multiplicado por otro *diferencial* (o un *diferencial* multiplicado por sí mismo) era un valor *infinitamente más chico* que un simple *diferencial*. En consecuencia, podemos despreciar a dt^2 sin ningún escrúpulo de conciencia, lo que nos facilita las cosas:

$$e + de = 1/2 \, . \, a \, . \, (t^2 + 2 \, . \, t \, . \, dt)$$

Que, como sabemos (¿seguro?) por nuestros conocimientos matemáticos elementales, también se puede escribir:

$$e + de = 1/2 \, . \, a \, . \, t^2 + 1/2 \, . \, a \, . \, 2 \, . \, t \, . \, dt$$

$$e + de = 1/2 \, . \, a \, . \, t^2 + a \, . \, t \, . \, dt$$

Es fácil ver que siendo $e = 1/2 \, . \, a \, . \, t^2$ podemos simplificar mucho la fórmula, eliminándolos de ambos lados del signo igual:

$$de = a \, . \, t \, . \, dt$$

Ahora sí llegamos al punto que queríamos:

$$\frac{de}{dt} = a \, . \, t$$

O dicho de una manera algo más complicada:

$$\frac{d}{dt} [1/2 \, . \, a \, . \, t^2] = a \, . \, t$$

Es interesante saber que los matemáticos pueden obtener la derivada de cualquier función por complicada que parezca, pero no les pasa lo mismo cuando quieren obtener el resultado de ciertas integrales. Hay casos insolubles.
Todo esto ha cambiado desde que se trabaja con las computadoras, pero esto es algo que sobrepasa el objetivo de estos comentarios.

ANEXO II: De cómo una recta roza a una curva y se transforma en su *tangente.*

En primer lugar conviene aclarar que la palabra *tangente* se origina del verbo del latín *tangere*, que significa *tocar.* En este anexo vamos a analizar qué es una recta que toca (sin atravesarla) a una curva.
¿Por qué nos vamos a tomar el trabajo de plantearnos esto?
Adelantando el resultado, diremos que *la derivada de una curva en un determinado punto está representada por su recta tangente*.
¿Es imprescindible conocer esto? Tal vez no, pero es un desafío intelectual interesante, que complementa todo lo visto previamente.
Allá vamos.

Primero *filosofemos* un poco.
¿Que es un punto?

Obviamente es una abstracción, ya que se trata de un segmento (pedacito) de recta infinitamente pequeño. Tal vez hasta podríamos imaginarlo como una superficie infinitamente pequeña o hasta un volumen infinitamente pequeño, pero ¿para qué complicarnos?.
Si estamos hablando de una magnitud infinitamente pequeña, el lector ya estará sospechando que el tema a tratar debe estar relacionado con el cálculo infinitesimal. Y es cierto.

¿Cómo se identifica un punto?
Veamos la Figura 5: para identificar un punto dentro de un gráfico basta con dos referencias de cada uno de los ejes. Por ejemplo el punto A está identificado por el espacio e=22,22 metros y el tiempo t=4 segundos y el punto B está identificado por el espacio e=68,06 metros y el tiempo t=7 segundos.

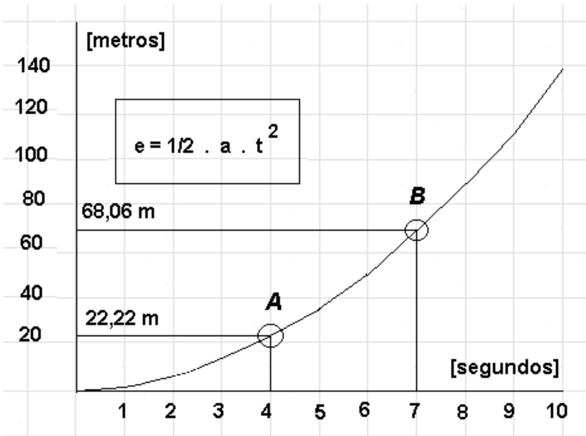

Figura 5

El punto A (lo mismo que el punto B) son puntos que pertenecen a la curva que representa al espacio en función del tiempo.

Supongamos ahora que dibujamos una linea recta que pase por los puntos A y B, tal como muestra la Figura 6. Esta linea recta *cruza* la curva por dos puntos separados; en consecuencia NO es una *tangente* a la curva (una *tangente* toca a la curva en un único punto).
Los dos puntos A y B están separados por los *incrementos* Δ_t = 3 segundos y Δ_e= 45,89 metros.
¿Cómo se mide la pendiente o inclinación de una línea recta?
Observando el gráfico es claro que la *pendiente* (o inclinación) de la linea recta está determinada por estos dos incrementos. Si por ejemplo Δ_e fuera más chico, la recta se inclinaría menos.
Sin entrar a complicarnos demasiado, podríamos afirmar que la *pendiente* de la linea recta puede *medirse* dividiendo el incremento vertical Δ_e por el incremento horizontal Δ_t . [4]

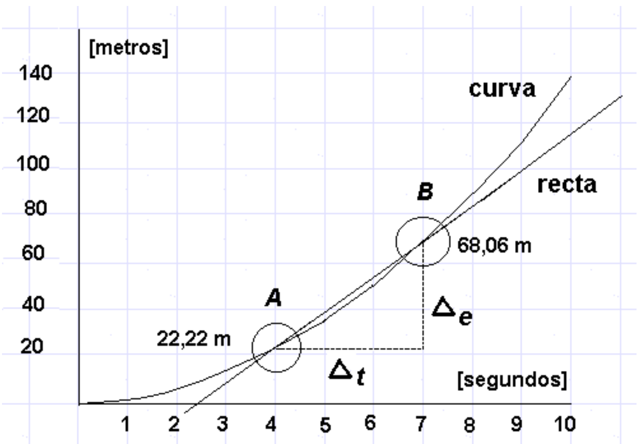

Figura 6

[4] La palabra *tangente* también se usa en trigonometría, y se la define como la relación entre ambos catetos (vertical y horizontal) de un triángulo rectángulo. Es la forma en que se mide la inclinación de la hipotenusa. En caso de duda, se sugiere al lector recurrir a los libros clásicos de geometría y trigonometría básica.

Si vamos desplazando el punto B hacia el punto A (o sea que disminuimos el valor de los incrementos Δ_e y Δ_t), la separación entre la curva y la recta también se va haciendo cada vez más chica.
¿Y si en lugar de *incrementos* hablamos de *diferenciales* infinitamente pequeños?
En este caso la separación entre los puntos A y B será infinitamente pequeña y en lugar de dos puntos podríamos suponer que *son equivalentes a un único punto*.
Y aquí llegamos a una línea recta definida por los dos diferenciales de y dt , cuya *pendiente* o inclinación es:

$$\textbf{pendiente} = \frac{de}{dt}$$

En resumen, llegamos a la conclusión de que *la pendiente de la recta tangente a la curva es igual a la derivada de la función*.
Tal vez esto no le cambie la vida al lector, pero no deja de ser una conclusión interesante.