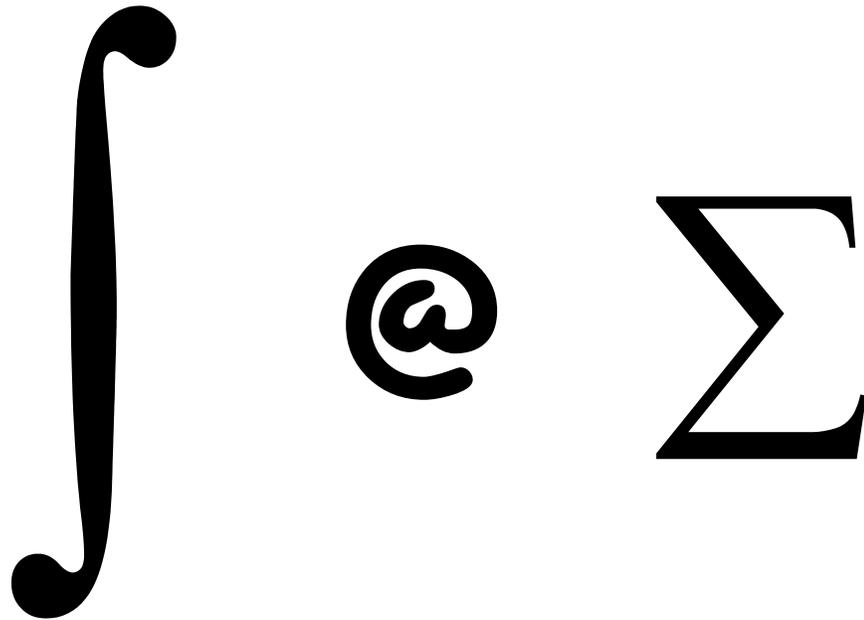


UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL GENERAL PACHECO

INTEGRACIÓN APROXIMADA

Ing. Jorge J. L. Ferrante



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIDAD DOCENTE BÁSICA MATEMÁTICA
CÁTEDRA CÁLCULO NUMÉRICO

2007

ADVERTENCIA

Esta obra es propiedad de su autor, quien perseguirá judicial y criminalmente a los que se la reimpriman; pues cuando el autor se ocupa incesantemente en proporcionar aquellas obras que son más útiles para promover la pública y particular prosperidad es uno de los más enormes atentados el que los especuladores con el sudor y el trabajo ajeno se usurpen su propiedad y se priven del fruto de sus fatigas, desvelos y penalidades.⁽¹⁾

(1) Tomado de un texto escrito de orden de S.M. el Rey para uso de los Caballeros Seminaristas del Seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Principios del siglo XIX

PROEMIO

Las siguientes páginas contienen métodos numéricos comunes para el cálculo aproximado de integrales definidas.

Se ha tratado de aplicar en cada uno de ellos la misma metodología para generalizar y unificar conceptualmente el discurso. Para ello los desarrollos en serie de Taylor han sido utilizados sistemáticamente.

El error en cada uno de ellos ha sido tomado como el infinitésimo de menor orden del correspondiente desarrollo en serie, en reemplazo a consideraciones de tipo geométrico posibles.

Los cálculos si bien son conceptualmente sencillos, son operativamente engorrosos. Una especial mención cabe hacer a los alumnos de 2° 1ª Eléctrica de Cálculo Numérico, año 2007, quienes junto al autor pudieron corregir algo que, por supuesto sabido, no era tratado con la profundidad necesaria.

El trabajo es meramente una introducción al tema en una escuela de ingeniería, tratado con el rigor estimado adecuado para un curso de insuficientes dos horas semanales.

Su mayor originalidad puede llegar a ser su facilidad de comprensión y asimilación. En ello se centró el esfuerzo al escribirlo.

General Pacheco, 6 de Junio de 2007

Ing. Jorge J. L. Ferrante
Profesor Titular Ordinario
Cálculo Numérico

INTEGRACIÓN APROXIMADA

I INTRODUCCIÓN

1 Se presentan en este trabajo métodos comunes de integración aproximada.

2 Para cada uno de ellos se efectúa el correspondiente estudio del error en un paso y en el intervalo de integración.

3 El trabajo no pretende ser exhaustivo. Quedan para el lector el estudio de otros métodos desarrollados para casos especiales, como por ejemplo aquellos orientados a la integración de funciones fuertemente oscilantes o a la estimación de integrales impropias.

4 Los métodos de integración aproximada son necesarios porque:

- No existe primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$
- Existe primitiva $F(x)$ de $f(x)$ pero su obtención es extremadamente laboriosa o exige artificios demasiado sofisticados.
- La primitiva $F(x)$ de $f(x)$ es de muy laboriosa evaluación.
- La función $f(x)$ está dada por una tabla de valores.
- La función $f(x)$ está dada por un gráfico en el cual se pueden medir ordenadas.
- La función $f(x)$ es un tren de señales detectadas electrónicamente a espacios de tiempo constantes.

5 En general los métodos que se presentan a continuación se basan en la aproximación de la función a integrar mediante funciones de aproximación cuya integración sea posible fácilmente.

6 Naturalmente la aproximación trae aparejado un error cuya estimación es indispensable.

7 Este error es específico para cada uno de los métodos que se presentan. A los mismos deben sumarse los problemas que implica la utilización de una aritmética de t dígitos al efectuar los cálculos.

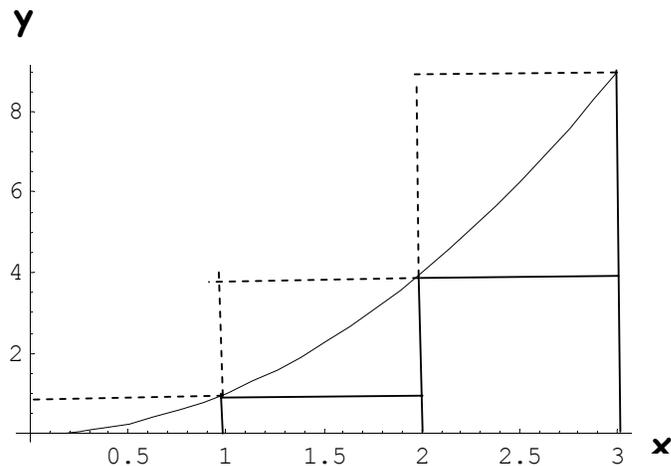
8 Se debe ser muy prudente en este aspecto puesto que una supuesta mejora en la aproximación de la integral buscada por refinamiento del paso de cálculo, además de multiplicar por varios ordenes de magnitud el trabajo, puede fracasar estrepitosamente por problemas numéricos, como se verá más adelante.

9 A continuación se presentan métodos para evaluar en forma aproximada

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

II METODOS ELEMENTALES $O(h)$

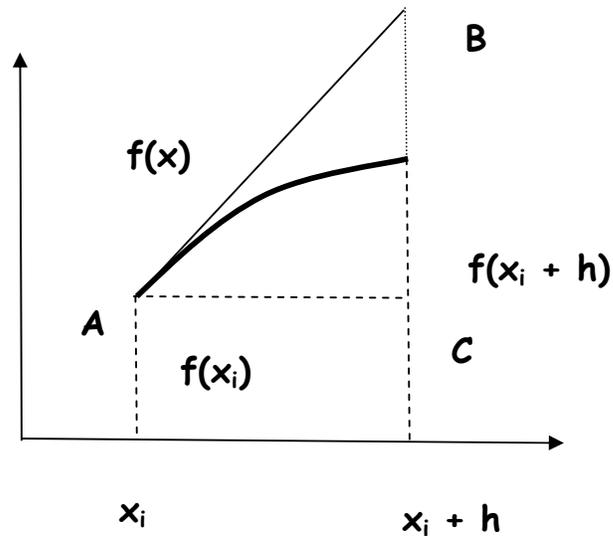
10 Estos son, tal vez, los métodos más rudimentarios para estimar el valor de I dado que la función a integrar se aproxima mediante una función "escalera" inscripta o circunscripta.



11 En el gráfico anterior se presenta en línea llena la "escalera" inscripta y en línea de trazos la circunscripta.

12 Se considera ahora la aproximación de la función dada mediante una función escalera, de paso h constante, inscrita.

13 Aislado un elemento resultante de la división en escalones, resulta:



14 Se aproxima la integral de la siguiente forma:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta \approx f(x_i)h$$

15 El error de la aproximación, supuesto función de la separación entre ordenadas h y considerando a $F(x)$ como la primitiva de $f(x)$ será

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta - f(x_i)h = F(x_i+h) - F(x_i) - f(x_i)h$$

16 Desarrollando en serie de Taylor el primer término del último miembro queda

$$F(x_i+h) = F(x_i) + f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i)}{6}h^3 + \dots$$

17 Reemplazando resulta

$$e_i(h) = F(x_i+h) - F(x_i) - f(x_i)h = \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i)}{6}h^3 + \frac{f'''(x_i)}{24}h^4 + \dots$$

18 Considerando solamente el primer término del último miembro por ser el infinitésimo de menor orden de todos los que figuran en la expresión resultante, se observa que el mismo corresponde al área del triángulo ABC de la figura de análisis puesto que la derivada evaluada en el punto x_i por el incremento de la variable independiente h da la medida del cateto BC o altura del triángulo, AC es la base h del mismo y, en consecuencia el término puede leerse como base por altura sobre dos, área del triángulo.

19 El signo es positivo, lo que indica que el cálculo, en el caso analizado, es por defecto.

20 Para estimar el error e en el intervalo $[a,b]$ se hace

$$e = \sum_i e_i(h) = \frac{h^2}{2} \sum_i f'(x_i) + \frac{h^3}{6} \sum_i f''(x_i) + \frac{h^4}{24} \sum_i f'''(x_i) + \dots$$

21 Tomando en cuenta solamente el término en h^2 y siendo

$$h = \frac{b - a}{n}$$

con n número de divisiones del intervalo $[a,b]$ queda

$$e = \frac{(b - a)^2}{2n^2} \sum_i f'(x_i) = \frac{(b - a)}{2} f'(\theta) h$$

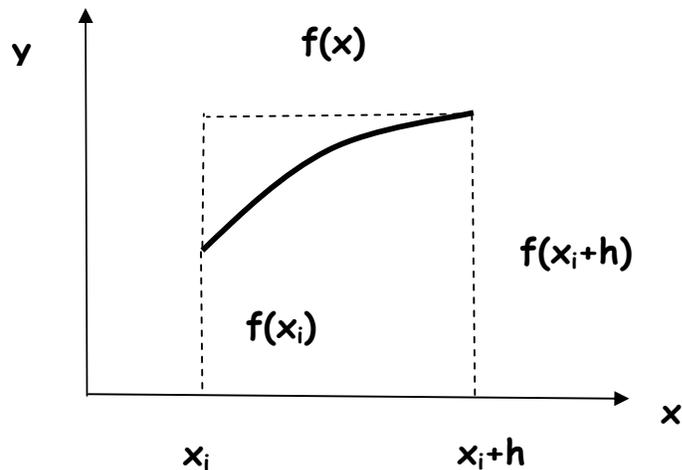
donde $f'(\theta)$ es un valor promedio de la derivada primera en el intervalo $[a,b]$.

Si $|f'(x)| < M$ en el intervalo, una cota del error será

$$|e| \leq \frac{1}{2} M h^2 n = \frac{1}{2} M (b - a) h$$

22 En conclusión este método tiene una cota de error total del mismo orden que h dado que puede ponerse $e = k h$.

23 Algo similar ocurre aproximando la función a integrar por la "escalera" externa



24 En este caso la aproximación está dada por

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta \approx f(x_i+h)h$$

y el error en el paso es

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta - f(x_i+h)h$$

de donde, suponiendo a $F(x)$ primitiva de $f(x)$ resulta.

$$e_i(h) = F(x_i+h) - F(x_i) - f(x_i+h)h$$

25 Efectuando desarrollos en serie de Taylor

$$F(x_i+h) = F(x_i) + f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i)}{6}h^3 + \dots$$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{6}h^3 + \dots$$

de donde

$$e_i(h) = F(x_i) + f(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots - F(x_i) - \left[f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots \right] h$$

$$e_i(h) \approx -\frac{1}{2} f''(x_i) h^2$$

y, extendiendo este error a todo el intervalo [a,b] resulta

$$e = -\frac{1}{2} h^2 \sum f''(x_i) = -\frac{(b-a)}{2} f''(\theta) h$$

como estimación del error, donde, como en el caso anterior, $f''(\theta)$ es un valor promedio de la derivada segunda. Una cota del error también es

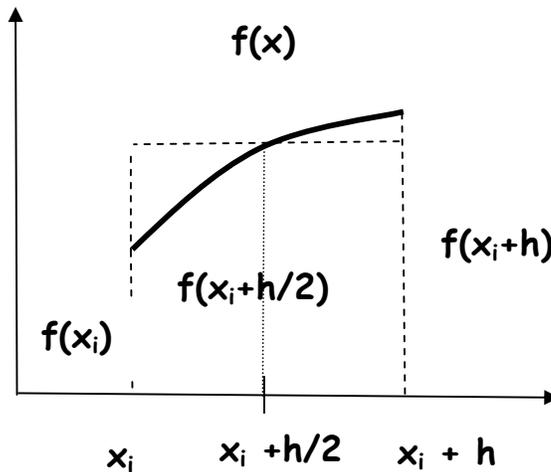
$$|e| \leq \frac{1}{2} M (b-a) h$$

26 Se debe observar el signo de esta última expresión. Ello es debido a que para el análisis se ha tomado una función creciente, con derivada primera positiva. El cálculo aproximado de la integral definida resulta en este caso un valor por exceso. Obsérvese también que, en el caso de haberse tomado como función de análisis una función decreciente, con derivada primera de signo negativo, el error resultante tendría signo positivo y la integral se aproximaría por defecto.

27 Lo mismo ocurre para el caso considerado en los párrafos 13 y siguientes, pero con aproximaciones por defecto y exceso respectivamente.

III METODO DEL PUNTO MEDIO $O(h^2)$

28 Se analiza a continuación la aproximación resultante al considerar como puntos de evaluación de la función $f(x)$, los puntos medios de cada uno de los subintervalos en que queda dividido el intervalo $[a,b]$ para la aplicación del procedimiento de cálculo.



29 En este caso, la aproximación es la siguiente:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta \approx f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)h$$

y el error en un paso

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta - f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)h$$

Mediante los desarrollos de Taylor correspondientes se llega a

$$e_i(h) = \frac{1}{24}h^3 f''(x_i) + \frac{1}{48}h^4 f'''(x_i) - \frac{1}{384}h^5 f^{iv}(x_i) + \dots$$

y, tomando solamente el primer término se obtiene para todo el intervalo:

$$e = \sum_i e_i(h) = \frac{1}{24}h^3 \sum_i f''(x_i) = \frac{1}{24}(b-a) f''(\theta) h^2$$

30 En los casos vistos en el punto II la cota del error puede expresarse en términos de h , amplitud de cada uno de los subintervalos en que se divide el intervalo de integración $[a,b]$. Por ese motivo se los denomina "Métodos de Primer Orden" por ser infinitésimo de primer orden el término error más significativo en cada uno de ellos.

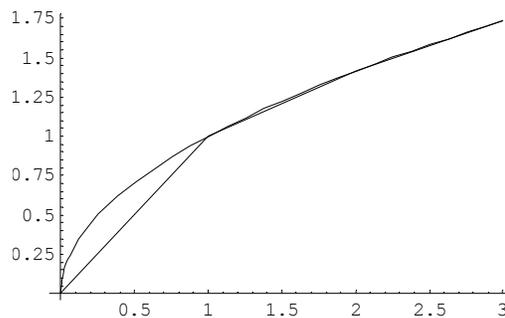
31 El método del punto medio es de segundo orden por serlo el infinitésimo utilizado como estimación del error. Además este método si bien es más preciso que los anteriores, exige la evaluación de la función en los puntos intermedios de cada subintervalo, cosa no siempre posible. Este es el caso si se dispone de una tabla de valores con paso h , a menos que se tome $2h$ como paso y $f(x+h)$ como punto intermedio, perdiendo precisión.

IV METODO DE LOS TRAPECIOS $O(h^2)$

32 En este método la función a integrar se aproxima mediante una poligonal inscrita de n lados. Naturalmente a mayor número de lados, mejor será la aproximación entre la función dada y la poligonal inscrita. El paso constante h en que se divide el intervalo $[a,b]$ depende de n dado que, como hasta ahora

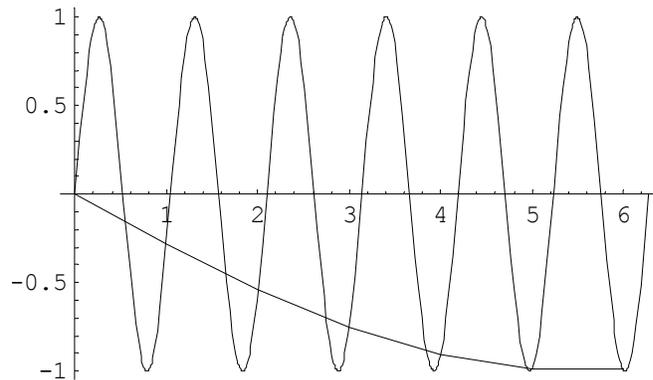
$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

33 El siguiente gráfico ilustra lo dicho

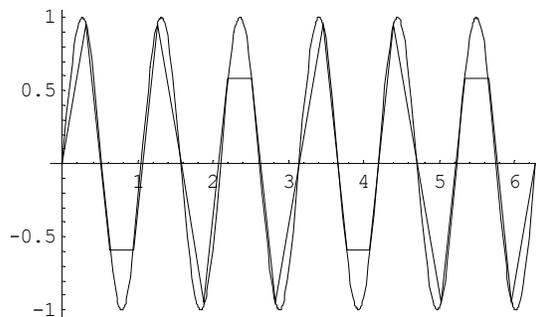


En el mismo se observa con claridad que en el subintervalo $[0,1]$ la aproximación es grosera, mientras que en los restantes la misma aparenta ser buena o aún muy buena. Definitivamente la curvatura de la función tiene mucho que ver con el grado de aproximación logrado para un dado n .

34 Se debe ser extremadamente cuidadoso al efectuar la aproximación mediante poligonales puesto que, una mala elección del paso h (o de n) puede dar lugar a "aproximaciones" como la siguiente:

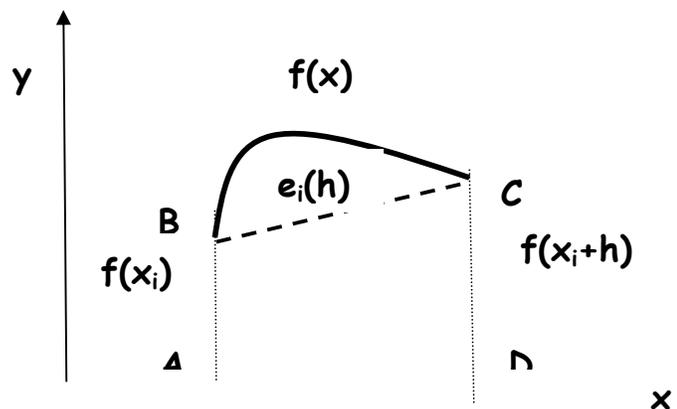


Una mejor elección de h permite la siguiente aproximación



que se presenta como una verdadera aproximación, aunque pueden apreciarse errores importantes.

35 Aislando una banda de ancho h puede efectuarse la siguiente aproximación,



$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta \approx \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_i + h)]$$

por ser el segundo término el área del trapecio ABCD, área que según la interpretación geométrica de la integral definida, aproxima a la integral que figura en el primer miembro de la expresión anterior.

36 El error en el paso es

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta) d\zeta - \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_i + h)]$$

Procediendo como en los casos anteriores mediante desarrollos en serie de Taylor resulta

$$e_i(h) = F(x_i) + f(x_i)h + \frac{f'(x_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i)}{6}h^3 + \dots$$

$$- F(x_i) - \frac{h}{2} f(x_i) - \frac{h}{2} \left[f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots \right]$$

Luego de simplificar queda finalmente, despreciando infinitésimos de orden superior en h

$$e_i(h) = -\frac{f''(x_i)}{12}h^3$$

37 El error en el intervalo [a,b] es, aproximadamente

$$e = \sum_i e_i(h) = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3} \sum_i f''(x_i) = -\frac{1}{12} (b-a) f''(\theta) h^2 = Kh^2$$

donde el signo se correlaciona con la concavidad de la curva considerada y $f''(\theta)$ es un valor promedio de las derivadas segundas en el intervalo [a,b]

38 Se observa que el método de los trapecios es un método de segundo orden por serlo el infinitésimo de menor orden tomado como error del método.

39 Debe observarse también que, salvo las ordenadas inicial y final, $f(x_0)$ y $f(x_n)$ todas las demás ordenadas se consideran dos veces en el cálculo. Ello es así porque la ordenada derecha de cualquier subintervalo (salvo el último) se toma después como ordenada izquierda del subintervalo siguiente. La ordenada $f(x_0)$ se toma como ordenada izquierda una sola vez, la primera.

40 Por ese motivo es usual escribir, como fórmula de cálculo cuando se utiliza el método de los trapecios, la siguiente expresión.

$$I = \int_a^b f(\zeta) d\zeta \approx \frac{h}{2} (E + 2P + 2I)$$

donde E representa la sumatoria de las ordenadas extremas, P la sumatoria de las ordenadas de índice par e I la sumatoria de las ordenadas de índice impar.

41 A continuación se desarrolla un ejemplo, integrando numéricamente una función cuya primitiva es conocida a efectos de evaluar la aproximación alcanzada con los métodos hasta ahora expuestos. La función es $y = f(x) = x^2$ en el $[0,1]$

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0.00	0.0000
1	0.05	0.0025
2	0.10	0.0100
3	0.15	0.0225
4	0.20	0.0400
5	0.25	0.0625
6	0.30	0.0900
7	0.35	0.1225
8	0.40	0.1600
9	0.45	0.2025
10	0.50	0.2500
11	0.55	0.3025
12	0.60	0.3600
13	0.65	0.4225

14	0.70	0.4900
15	0.75	0.5625
16	0.80	0.6400
17	0.85	0.7225
18	0.90	0.8100
19	0.95	0.9025
20	1.00	1.0000

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1.00 - 0.00}{20} = 0.05$$

Método de los rectángulos, primer caso

$$I \approx h \sum_{i=0}^{i=19} f(x_i) = 0.05 * 6.175 = 0.30875$$

Método de los rectángulos, segundo caso

$$I \approx h \sum_{i=1}^{i=20} f(x_i + h) = 0.05 * 7.175 = 0.35175$$

Método de los rectángulos, tercer caso (punto medio)

$$I \approx h \sum_{i=0}^{i=9} f(x_i + \frac{h}{2}) = 0.1 * 3.3250 = 0.3325$$

Método de los trapecios.

$$E = y_0 + y_{20} = 0.0000 + 1.0000 = 1.0000$$

$$P = y_2 + y_4 + \dots + y_{18} = 2.8500$$

$$I = y_1 + y_3 + \dots + y_{19} = 3.3250$$

$$I = 0.05/2 (1.0000 + 2*2.8500 + 2*3.3250) = 0.025*13.3500= 0.33375$$

42 Para una mejor apreciación de la aproximación alcanzada con cada uno de los métodos hasta ahora expuestos se presenta la siguiente tabla resumen

METODO	VALOR OBTENIDO	ORDEN ERROR	ERROR
RECTÁNGULOS $f(x_i)$	0.30875	$O(h)$	0.02458
RECTÁNGULOS $f(x_i+h)$	0.35175	$O(h)$	-0.01842
RECTÁNGULOS $f(x_i+h/2)$	0.33250	$O(h^2)$	0.00083
TRAPECIOS	0.33375	$O(h^2)$	-0.00042

V MEJORA DE LA APROXIMACIÓN

43 Una mejora en el valor aproximado de la integral puede lograrse a costa de un nuevo cálculo de la aproximación.

44 Para ello, teniendo en cuenta que en los métodos del punto medio y de los trapecios el error es de la forma $e = K h^2$ se calcula una primera aproximación de la integral con un paso h_1 o, lo que es lo mismo con un número de divisiones n_1 y luego se vuelve a calcular una segunda aproximación con paso h_2 o número de divisiones n_2

45 Resulta así

$$I = I_{n_1} + K \frac{(b-a)^2}{n_1^2}$$

$$I = I_{n_2} + K \frac{(b-a)^2}{n_2^2}$$

donde I es el valor exacto de la integral, I_{n_1} e I_{n_2} son los valores aproximados de la misma calculados con pasos h_1 y h_2 respectivamente y la derivada segunda involucrada se supone suficientemente constante en el intervalo considerado y despreciables los términos de la serie de Taylor que permiten aproximar el error por Kh^2 .

46 En esas condiciones puede despejarse la constante $K(b-a)^2$

$$I_{n_2} - I_{n_1} = K(b-a)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = K(b-a)^2 \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2 n_2^2} \right)$$

de donde

$$K(b-a)^2 = \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{n_2^2 - n_1^2} n_1^2 n_2^2$$

reemplazando queda

$$I = I_{n_1} + \frac{I_{n_2} - I_{n_1}}{n_2^2 - n_1^2} n_2^2$$

y finalmente

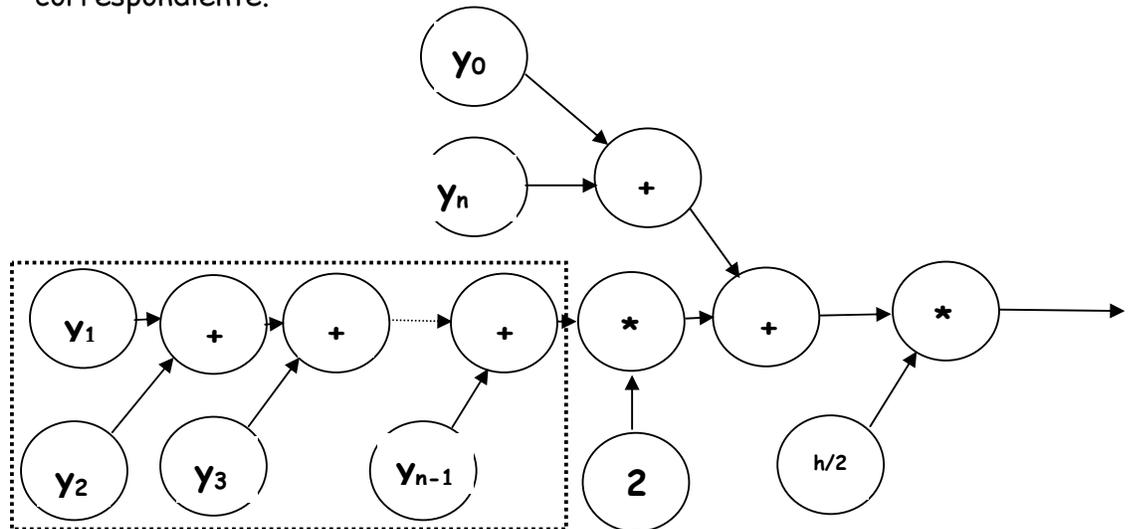
$$\begin{aligned} I &= \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} I_{n_2} - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} I_{n_1} \\ &= a_1 I_{n_1} + a_2 I_{n_2} \end{aligned}$$

47 Los valores a_1 y a_2 se encuentran tabulados en función de la relación n_2/n_1 . La siguiente tabla consigna alguno de ellos

n_2 / n_1	a_1	a_2
2/1	-0.333333	1.333333
3/2	-0.800000	1.800000
4/3	-1.285714	2.285714
5/4	-1.777777	2.777777
6/5	-2.272727	3.272727
3/1	-0.125000	1.125000
5/3	-0.562500	1.562500

VI PROBLEMAS NUMERICOS

48 Se considera a continuación la relación existente entre el error del método (de los trapecios) y la aritmética de t dígitos utilizada. Para ello se construye como base de análisis el gráfico de proceso correspondiente.



49 El error relativo resultante será la suma de los errores relativos de los términos involucrados multiplicados por sus respectivos pesos, los que han sido tratados en la publicación "Aritmética de t dígitos". Despreciando la contribución al error de todos los factores que se encuentran fuera del rectángulo es decir, considerando solamente la contribución al error de la sumatoria de las ordenadas y , más aun,

$$|e| \leq [(n-2)y_1 + (n-2)y_2 + (n-3)y_3 + (n-4)y_4 + \dots + y_{n-1}] \frac{h}{2} \varepsilon_+$$

considerando nulos los errores relativos de estas últimas, queda

donde ξ_+ es el error relativo introducido por la "máquina de sumar"

50 Dando un paso más en la simplificación, se supone que

$$y_k = \bar{y} + \delta_k$$

$$|e| < \bar{y} \left(\frac{1}{2} n(n-1) \right) \frac{h}{2} \xi_+ = \bar{y} \left(\frac{1}{2} (n^2 - n) \right) \frac{h}{2} \xi_+ = \bar{y} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(b-a)^2}{h^2} - \frac{(b-a)}{h} \right) \right) \frac{h}{2} \xi_+$$

donde \bar{y} es un valor promedio en el intervalo considerado y δ_k es un valor pequeño en términos relativos. Por ese motivo los productos $\delta_k \xi_+$ también se desprecian, con lo que resulta una expresión donde el término dominante es de la forma

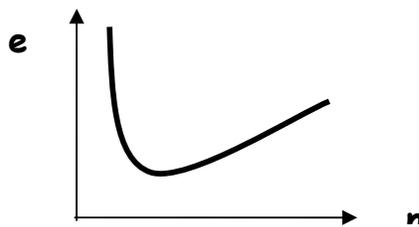
$$\bar{y} \sum_{k=1}^{k=n-1} k = \bar{y} \left(\frac{1}{2} n(n-1) \right)$$

y en esta última el término perjudicial es

$$\bar{y} \frac{1}{4} \frac{(b-a)^2}{h} \xi_+$$

que tiende a infinito cuando h tiende a cero. Es decir que el error en el computo del valor aproximado de la integral definida crece más allá de todo límite con tal de tomar h suficientemente pequeño.

51 Esto explica el hecho aparentemente desconcertante que al disminuir h (o incrementar n) el valor aproximado de la integral mejora hasta que llegado un determinado momento comienza a empeorar. Una vez presente el fenómeno, el agravamiento es progresivo.



VII METODOS BASADOS EN PARÁBOLAS DE APROXIMACIÓN O METODOS DE NEWTON - COTES

52 El método de los trapecios al aproximar la función a integrar mediante una poligonal cuyos lados están determinados por dos puntos consecutivos tomados sobre la curva representativa de la función dada, es un método en el que se reemplaza un arco de curva en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ por un segmento de recta entre los puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) .

53 Si en lugar de aproximar la función dada por una poligonal se la aproxima mediante arcos de parábola es de esperar que la aproximación mejore y que, en consecuencia, la aproximación a la integral definida de la función dada sea más precisa.

54 Naturalmente, si la aproximación debe hacerse con una parábola de segundo grado serán necesarios tres puntos consecutivos de la función para determinar los parámetros correspondientes; si se lo hace con una parábola de tercer grado serán necesarios cuatro puntos y así sucesivamente.

55 Para evitar resolver en cada uno de los casos el correspondiente sistema de ecuaciones lineales que permite hallar los mencionados parámetros, y luego efectuar la integración aproximada, se utilizará la fórmula de interpolación ascendente de Gregory - Newton analizada en el capítulo sobre diferencias finitas e interpolación.

56 Esta es, simbólicamente

$$f(x_0 + th) = \varphi(t) = \left[1 + t\Delta + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Delta^3 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} \Delta^4 + \dots \right] y_0$$

entonces la aproximación es

$$\int_{x_i}^{x_{i+k}} f(x) dx \approx \int_0^k \varphi(t) dt = h \int_0^k \left(1 + t\Delta + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Delta^3 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} \Delta^4 + \dots \right) dt$$

por ser $x = x_0 + th$

57 Según la cantidad de términos que se consideren en el polinomio de aproximación resultarán distintos procedimientos de aproximación de la integral. Especial atención se debe prestar al hecho que el número de franjas consecutivas a tomar en cuenta en cada caso dependen del grado del polinomio o parábola de aproximación que se utilice.

58 Un polinomio o parábola de segundo grado requiere dos franjas consecutivas para disponer de los tres puntos necesarios para el cálculo de las diferencias directas necesarias; una parábola de tercer grado requiere tres franjas consecutivas para dicho cálculo; etc., etc.

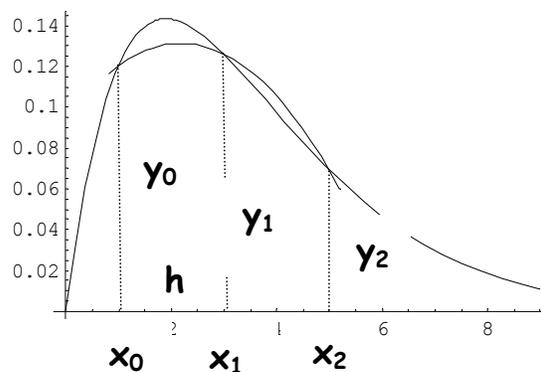
VIII PARABOLA DE SEGUNDO GRADO. METODO DE SIMPSON $O(h^4)$

59 Tomando una aproximación de segundo grado será

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx h \int_0^2 \left(1 + t\Delta + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 \right) dt$$

desarrollando queda

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx h \int_0^2 \left[y_0 + t(y_1 - y_0) + \frac{1}{2} t(t-1)(y_2 - 2y_1 + y_0) \right] dt = \\ &h \left[2y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{1}{2} (y_2 - 2y_1 + y_0) \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 \right) \right] = \\ &h \left(2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3} y_2 - \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_0 \right) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned}$$



En el gráfico anterior se pueden apreciar la función cuya integral aproximada se calcula, la parábola de segundo grado que la aproxima en el intervalo $[x_0, x_2]$ y las ordenadas que aparecen en la fórmula de cálculo. El error que se comete en el paso es proporcional al área entre ambas curvas.

60 Ese error, desde el punto de vista analítico es

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(\zeta) d\zeta - \frac{h}{3} [f(x_i + 2h) + 4f(x_i + h) + f(x_i)] =$$

$$F(x_i + 2h) - F(x_i) - \frac{h}{3} [f(x_i + 2h) + 4f(x_i + h) + f(x_i)]$$

efectuando los desarrollos en serie de Taylor resulta:

$$F(x_i + 2h) = F(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{16h^4}{4!} f^{iv}(x_i) + \frac{32h^5}{5!} f^{iv}(x_i) + \dots$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{16h^4}{4!} f^{iv}(x_i) + \dots$$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{iv}(x_i) + \dots$$

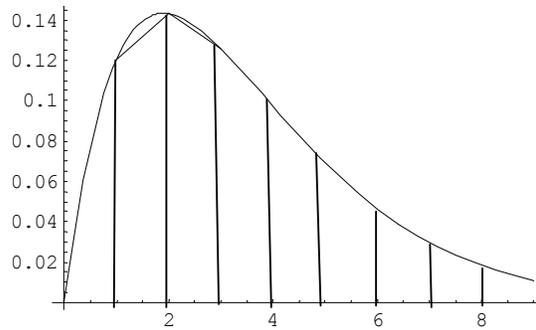
agrupando queda

$$e_i(h) = \left[\frac{32h^5}{5!} - \frac{h}{3} \left(\frac{16h^4}{4!} + \frac{4h^4}{4!} \right) \right] f^{iv}(x_i) + [\dots] f^v(x_i) + \dots$$

Tomando en cuenta solamente el primer término de la expresión anterior queda

$$e_i(h) = -\frac{1}{90} h^5 f^{iv}(x_i)$$

61 Si es necesario calcular una integral en un intervalo [a,b] se debe adoptar un n par a fin que cada dos franjas consecutivas pueda aplicarse la metodología expuesta



62 En el ejemplo gráfico anterior deberá ser

$$\int_0^8 f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6) + \frac{h}{3}(y_6 + 4y_7 + y_8) =$$

$$\frac{h}{3}[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] = \frac{h}{3}(E + 4I + 2P)$$

donde E, P e I tienen el significado anterior.

63 El error será, aproximadamente

$$e(h) = \sum_i e_i(h) = -\frac{1}{90}h^5 \sum_i f^{iv}(x_i) = -\frac{1}{90}(b-a)f^{iv}(\theta)h^4 \approx Kh^4$$

donde $y^{iv}(\theta)$ es un valor promedio de la derivada cuarta de la función en el intervalo considerado, supuesta y^{iv} suficientemente suave en $[a,b]$

Si se considera que $|y^{iv}(x)| < M$ en $[a,b]$ y que el error calculado se acumula en $n/2$ casos, resulta como cota del error en el método de Simpson:

$$|e| \leq \frac{1}{90}h^5 M \frac{n}{2} = \frac{1}{180}h^5 M \frac{(b-a)}{h} = \frac{1}{180}M(b-a)h^4 = kh^4$$

64 Se debe prestar especial atención a dos cuestiones importantes que hacen muy utilizado a este método.

- La derivada que figura en la expresión del error es una derivada de cuarto orden, lo que significa que el método es exacto para funciones de tercer grado o inferior.
- Es un método de cuarto orden lo que significa una muy buena aproximación para un h suficientemente pequeño.

65 Tomando los valores ya calculados en el ejemplo anterior se tiene:

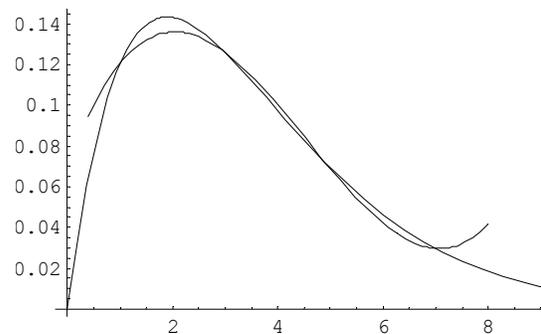
$$E = 1.00000 \quad P = 2.85000 \quad I = 3.32500$$

$$I = 0.05/3 (1.00000 + 4 \cdot 3.32500 + 2 \cdot 2.85000) = 0.333333333...$$

Este valor es el que corresponda al verdadero valor de la integral $(1/3)$ como debe ser ya que se trata de una función de segundo grado con integral exacta mediante el método de Simpson.

IX REGLA DE LOS 3/8 $O(h^4)$

66 Si la aproximación a la función $f(x)$ se hace mediante una parábola de tercer grado se obtiene la denominada "Regla de los 3/8". En este caso, como ha sido dicho, son necesarios cuatro puntos consecutivos de la curva para encontrar el polinomio aproximante de tercer grado. Estos puntos son $(x_i, f(x_i))$; $(x_i+h, f(x_i+h))$; $(x_i+2h, f(x_i+2h))$ y $(x_i+3h, f(x_i+3h))$



67 La aproximación a la integral será

$$\int_{x_i}^{x_i+3h} f(\zeta) d\zeta = \int_0^3 \varphi(t) dt = h \int_0^3 \left(1 + t\Delta + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \Delta^3\right) dt$$

Calculando cada una de las integrales y agrupando resulta:

$$\int_{x_i}^{x_i+3h} f(\zeta) d\zeta \approx \frac{3}{8} h [f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})]$$

de donde se toma el factor 3/8 para identificar al método.

68 El error en este caso es

$$e_i(h) = \int_{x_i}^{x_i+3h} f(\zeta) d\zeta - \frac{3}{8} h [f(x_i) + 3f(x_i + h) + 3f(x_i + 2h) + f(x_i + 3h)]$$

Efectuando con el soporte lógico MATHEMATICA los desarrollos de Taylor correspondientes, agrupando y cancelando resulta:

$$e_i(h) = -\frac{3}{80} f^{iv}(x_i) h^5 - \frac{9}{160} f^v(x_i) h^6 - \frac{53}{1120} f^{vi}(x_i) h^7 + \dots$$

Tomando como en todos los casos anteriores el primer término del desarrollo del error, aproximadamente puede ponerse

$$e_i(h) \approx -\frac{3}{80} f^{iv}(x_i) h^5$$

con lo cual

$$e \approx \sum_i e_i(h) = -\frac{3}{80} h^5 \sum_i f^{iv}(x_i) = -\frac{3}{80} (b-a) f^{iv}(\theta) h^4$$

o, si se considera una cota M de la derivada cuarta

$$|e| < \frac{1}{80} M (b-a) h^4$$

dado que al error en un paso hay que multiplicarlo por los $n/3$ pasos del método. El número de pasos debe ser múltiplo de tres.

X OTROS METODOS

69 Considerando polinomios de aproximación de mayor grado se obtienen expresiones similares a las encontradas para las aproximaciones mediante parábolas de segundo y tercer grado. En cada caso el trabajo material de obtención de los coeficientes de las ordenadas intervinientes y de la serie error es cada vez mayor. Por ello simplemente se presenta a continuación una tabla donde figuran dichos coeficientes y el primer término de las series error

$[X_0, X_k]$	H	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	ERROR (en un paso)
$[X_0, X_1]$	$h/2$	1	1						$-h^3/12 f''$
$[X_0, X_2]$	$h/3$	1	4	1					$-h^5/90 f^{(4)}$
$[X_0, X_3]$	$3h/8$	1	3	3	1				$-3h^5/80 f^{(4)}$
$[X_0, X_4]$	$2h/45$	7	32	12	32	7			$-9h^9/1400 f^{(8)}$
$[X_0, X_6]$	$h/140$	41	216	27	272	27	216	41	$-2368h^{11}/467775 f^{(10)}$

70 No es conveniente aproximar por polinomios de mayor grado por la alta oscilación que pueden llegar a presentar, lo que definitivamente los transforma en una mala aproximación a la función o a los datos a integrar.

XI MEJORA DE LA APROXIMACIÓN. $O(h^{n+2})$

71 En todos los métodos vistos hasta ahora, el término de error indicado como $O(h^n)$ puede ser expresado como Kh^n suponiendo constantes los factores que intervienen en el cálculo de K en el intervalo $[a, b]$. Una mejora en la estimación de la integral puede lograrse

calculando una nueva aproximación con un paso de integración doble y calculando luego

$$I = I_h + Kh^n$$

$$I = I_{2h} + K(2h)^n$$

despejando Kh^n , reemplazando en la primera y operando se obtiene

$$I \approx \frac{2^n I_h - I_{2h}}{2^n - 1}$$

como mejor aproximación al verdadero valor de la integral, con una demostrable aproximación de orden h^{n+2}

XII EJEMPLO

72 Dada la siguiente tabla de valores correspondientes a la función $f(x) = 1/x$, calcular $\ln 2$

i	x_i	$y_i = 1/x_i$
0	1.00000	1.000000
1	1.05000	0.952380
2	1.10000	0.909090
3	1.15000	0.869565
4	1.20000	0.833333
5	1.25000	0.800000
6	1.30000	0.769230
7	1.35000	0.740740
8	1.40000	0.714285
9	1.45000	0.689655
10	1.50000	0.666666
11	1.55000	0.645161
12	1.60000	0.625000
13	1.65000	0.606060
14	1.70000	0.588235
15	1.75000	0.571428
16	1.80000	0.555555

17	1.85000	0.540540
18	1.90000	0.526315
19	1.95000	0.512820
20	2.00000	0.500000

Se toma en primer lugar $h=0.1$ y se calcula

$$\int_1^2 \frac{1}{\zeta} d\zeta \approx \frac{h}{2}(E + 2P + 2I) = \frac{0.1}{2}(1.500000 + 2 * 6.187714) = 0.6937714$$

luego se toma $h=0.05$ y se calcula nuevamente

$$\int_1^2 \frac{1}{\zeta} d\zeta \approx \frac{h}{2}(E + 2P + 2I) = \frac{0.05}{2}(1.50000 + 2 * 13.116067) = 0.6933033$$

Comparando ambos resultados con $\ln 2 = 0.69314718$ se observa una buena aproximación que a continuación será mejorada mediante la expresión obrante en párrafo 70

$$I \approx \frac{2^n I_h - I_{2h}}{2^n - 1}$$

Como se ha utilizado el método de los trapecios es $n=2$ y resulta así

$$I = \frac{2^2 * 0.693303 - 0.693771}{2^2 - 1} = \frac{2.079441}{3} = 0.693147$$

con todas sus cifras coincidentes con las de $\ln 2$.

XIII METODO DE ROMBERG

72 En base a la mejora de la aproximación del valor de la integral efectuada en el párrafo 70, Romberg ha demostrado la convergencia al verdadero valor de la misma del siguiente esquema de cálculo.

Para ello se requiere calcular la aproximación mediante, por ejemplo, el método de los trapecios para valores de h ; $h/2$; $h/4$; ... y confeccionar la siguiente tabla.

PUNTOS	$h=(b-a)/4$	$h=(b-a)/8$	$h=(b-a)/16$	$h=(b-a)/32$	$h=(b-a)/64$
CÁLCULO DIRECTO	$I_{0,4}$	$I_{0,8}$	$I_{0,16}$	$I_{0,32}$	$I_{0,64}$
n=2		$I_{1,8}$	$I_{1,16}$	$I_{1,32}$	$I_{1,64}$
n=4			$I_{2,16}$	$I_{2,32}$	$I_{2,64}$
n=6				$I_{3,32}$	$I_{3,64}$
n=8					$I_{4,64}$

donde de la segunda fila en adelante el cálculo se efectúa mediante la fórmula mencionada, tomando como datos los dos valores aproximados de la fila anterior.

El valor que se obtiene en el ángulo inferior derecho corresponde al valor de la integral buscada.

73 Se calcula ahora nuevamente $\ln 2$ mediante integración aplicando el método de los trapecios y luego el esquema de Romberg. Los cálculos se encuentran resumidos en la siguiente tabla.

PUNTOS	$h= 0.5$	$h= 0.25$	$h= 0.125$
Trapecios	0.708333	0.697023	0.694121
n=2		0.693253	0.693153
n=4			0.693146

74 El lector interesado en este tipo de mejoras en la aproximación de las integrales puede consultar en la bibliografía de la materia los temas "Extrapolación al límite de Richardson" y "Metodo de Romberg". También puede consultar sobre los métodos desarrollados para evitar el pesado recálculo de funciones en puntos intermedios y nuevas sumatorias. Todos estos métodos exceden los límites del presente.

XIV FORMULA DE EULER MAC LAURIN

75 Suponiendo como hasta ahora que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ deberá ser

$$\int_{x_0}^{x_n} f(\zeta) d\zeta = F(x_n) - F(x_0)$$

76 Para calcular esa diferencia puede procederse de la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(\zeta) d\zeta = F(x_1) - F(x_0) = F(x_0 + h) - F(x_0) = hf(x_0) + \frac{1}{2!} h^2 f'(x_0) + \frac{1}{3!} h^3 f''(x_0) + \dots$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\zeta) d\zeta = F(x_2) - F(x_1) = F(x_1 + h) - F(x_1) = hf(x_1) + \frac{1}{2!} h^2 f'(x_1) + \frac{1}{3!} h^3 f''(x_1) + \dots$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(\zeta) d\zeta = F(x_3) - F(x_2) = F(x_2 + h) - F(x_2) = hf(x_2) + \frac{1}{2!} h^2 f'(x_2) + \frac{1}{3!} h^3 f''(x_2) + \dots$$

$$\int_{x_{31}}^{x_4} f(\zeta) d\zeta = F(x_4) - F(x_3) = F(x_3 + h) - F(x_3) = hf(x_3) + \frac{1}{2!} h^2 f'(x_3) + \frac{1}{3!} h^3 f''(x_3)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(\zeta) d\zeta = F(x_n) - F(x_{n-1}) = F(x_{n-1} + h) - F(x_{n-1}) = hf(x_{n-1}) + \frac{1}{2!} h^2 f'(x_{n-1}) + \frac{1}{3!} h^3 f''(x_{n-1})$$

77 Sumando miembro a miembro esas igualdades se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_n} f(\zeta) d\zeta = F(x_n) - F(x_0) = h \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i) + \frac{1}{2!} h^2 \sum_{i=0}^{i=n-1} f'(x_i) + \frac{1}{3!} h^3 \sum_{i=0}^{i=n-1} f''(x_i) + \dots$$

78 Procediendo de la misma forma se obtienen para las integrales de las derivadas sucesivas de $f(x)$ las siguientes expresiones:

$$\int_{x_0}^{x_n} f'(\zeta) d\zeta = f(x_n) - f(x_0) = h \sum_{i=0}^{i=n-1} f'(x_i) + \frac{1}{2!} h^2 \sum_{i=0}^{i=n-1} f''(x_i) + \frac{1}{3!} h^3 \sum_{i=0}^{i=n-1} f'''(x_i) + \dots$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f''(\zeta) d\zeta = f''(x_n) - f''(x_0) = h \sum_{i=0}^{i=n-1} f''(x_i) + \frac{1}{2!} h^2 \sum_{i=0}^{i=n-1} f'''(x_i) + \frac{1}{3!} h^3 \sum_{i=0}^{i=n-1} f^{iv}(x_i) + \dots$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f'''(\zeta) d\zeta = f'''(x_n) - f'''(x_0) = h \sum_{i=0}^{i=n-1} f'''(x_i) + \frac{1}{2!} h^2 \sum_{i=0}^{i=n-1} f^{iv}(x_i) + \frac{1}{3!} h^3 \sum_{i=0}^{i=n-1} f^v(x_i) + \dots$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f^{iv}(\zeta) d\zeta = f^{iv}(x_n) - f^{iv}(x_0) = h \sum_{i=0}^{i=n-1} f^{iv}(x_i) + \frac{1}{2!} h^2 \sum_{i=0}^{i=n-1} f^v(x_i) + \frac{1}{3!} h^3 \sum_{i=0}^{i=n-1} f^{vi}(x_i) + \dots$$

79 Se construye a continuación la siguiente expresión

$$\int_{x_0}^{x_n} f(\zeta) d\zeta + C_1 h [f(x_n) - f(x_0)] + C_2 h^2 [f'(x_n) - f'(x_0)] + C_3 h^3 [f''(x_n) - f''(x_0)] + \dots$$

80 Reemplazando cada uno de los términos por sus iguales y agrupando queda igual a

$$h \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i) + h^2 \left(\frac{1}{2!} + C_1 \right) \sum_{i=0}^{i=n-1} f'(x_i) + h^3 \left(\frac{1}{3!} + \frac{C_1}{2!} + C_2 \right) \sum_{i=0}^{i=n-1} f''(x_i) +$$

$$h^4 \left(\frac{1}{4!} + \frac{C_1}{3!} + \frac{C_2}{2!} + C_3 \right) \sum_{i=0}^{i=n-1} f'''(x_i) + h^5 \left(\frac{1}{5!} + \frac{C_1}{4!} + \frac{C_2}{3!} + \frac{C_3}{2!} + C_4 \right) \sum_{i=0}^{i=n-1} f^{iv}(x_i) + \dots$$

81 Calculando los C_i de forma tal que se anulen los paréntesis se obtiene

$$C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{12}$$

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = -\frac{1}{720}$$

$$C_5 = \frac{1}{30240}$$

82 Con lo cual la expresión del párrafo 79, pasando términos resulta ser

$$\int_{x_0}^{x_n} f(\zeta) d\zeta = h \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} h [f(x_n) - f(x_0)] - \frac{h^2}{12} [f'(x_n) - f'(x_0)] +$$

$$+ \frac{h^3}{720} [f'''(x_n) - f'''(x_0)] - \frac{h^5}{30240} [f^{v}(x_n) - f^{v}(x_0)] + \dots$$

donde los dos primeros términos son claramente la aproximación de la integral definida por el método de los trapecios y los restantes términos pueden ser tomados como sucesivos términos de corrección.

83 Naturalmente la aplicación de esta fórmula correctiva requiere el cálculo de derivadas sucesivas de la función a integrar, lo que puede ser un trabajo analítico laborioso u obligar a utilizar aproximaciones por diferencias finitas en avance o en retroceso según se estén evaluando en

el punto inicial o en el punto final de una función definida por tabla de valores.

84 Como ejemplo se toma el valor

$$\int_1^2 \frac{d\zeta}{\zeta} = 0.6937714$$

calculado en párrafo 72, página 27. En este caso es

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{d\zeta}{\zeta} &= 0.6937714 - \frac{(0.1)^2}{12} \left[-\frac{1}{2^2} - \left(-\frac{1}{1^2} \right) \right] + \frac{(0.1)^3}{720} \left[-\frac{6}{2^4} - \left(-\frac{1}{1^4} \right) \right] = \\ &0.6937714 - 0.000625 + 0.000007 = 0.693154 \end{aligned}$$

que aproxima mejor que el valor original (0.6937714) al valor de $\ln 2 = 0.69314718$.

XV METODOS GAUSSIANOS

85 Todos los métodos vistos hasta ahora se basan en una división uniforme del intervalo $[a,b]$ con un paso o incremento constante h .

Los métodos gaussianos, en cambio son de la forma

$$\int_a^b f(\zeta) d\zeta = \sum_i A_i f(x_i)$$

donde se buscan los puntos x_i que minimicen el error. Los factores A_i son constantes.

86 Como resulta imposible sistematizar una fórmula del tipo enunciado para cualesquier intervalo, estos se normalizan al intervalo $[-1,1]$ mediante el cambio de variable

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}$$

con lo cual

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right]dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t)dt$$

87 Se trata ahora de calcular, por ejemplo

$$\int_{-1}^1 \varphi(t)dt = A_1\varphi(t_1) + A_2\varphi(t_2)$$

expresión donde figuran cuatro incógnitas. Para calcularlas se plantean cuatro ecuaciones estableciendo que el método sea exacto para las funciones $\varphi(t)=1$; $\varphi(t)=t$; $\varphi(t)=t^2$ y $\varphi(t)=t^3$.

88 Resulta así el siguiente sistema

$$\int_{-1}^1 1 dt = t \Big|_{-1}^1 = 2 = A_1 + A_2$$

$$\int_{-1}^1 t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-1}^1 = 0 = A_1 t_1 + A_2 t_2$$

$$\int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_{-1}^1 = 0 = A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3$$

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2$$

dividiendo entre sí la segunda y la cuarta se tiene, como resultado útil, que $t_2 = -t_1$. Reemplazando en la tercera y teniendo en cuenta la primera resulta

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

y de la primera y la tercera queda que $A_1 = 1$ y $A_2 = 1$ con lo cual

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \varphi\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

89 Se calcula a continuación con este método

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{(2-1)}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{t+3}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{56}{12} = 2.3333\dots$$

que corresponde al valor exacto $7/3$ obtenido por cálculo directo.

90 Los valores A y t se encuentran tabulados para distintas cantidades de puntos en el intervalo $[-1,1]$.

NUMERO DE PUNTOS	X_i	A_i
2(*)	± 0.57735027	1.00000000
4	± 0.86113631 ± 0.33998104	0.34785485 0.65214515

NUMERO DE PUNTOS	X_i	A_i
6	± 0.93246951 ± 0.66120939 ± 0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393
8	± 0.96028986 ± 0.79666648 ± 0.52553241 ± 0.18343464	0.10122854 0.22381034 0.31370665 0.36268378
10	± 0.97390653 ± 0.86506337 ± 0.67940957 ± 0.43339539 ± 0.14887434	0.06667134 0.14945135 0.21908636 0.26926672 0.29552422

(*) Valores calculados en párrafo N° 87

XVI INTEGRALES MULTIPLES

91 En diversos problemas de ingeniería resulta necesario evaluar integrales de la forma

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

o de la forma

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$$

con los mismos o peores problemas para realizar la evaluación que aquellos que se presentan en las integrales simples.

92 Por ese motivo también se han desarrollado o adaptado métodos de integración numérica a este tipo de integrales. Naturalmente las respectivas fórmulas resultan más amplias y los cálculos correspondientes al error mucho más engorrosos. Los conceptos de aproximación no varían. Solamente corresponde pensar en tres dimensiones en lugar de hacerlo en dos, como en la totalidad de los métodos vistos.

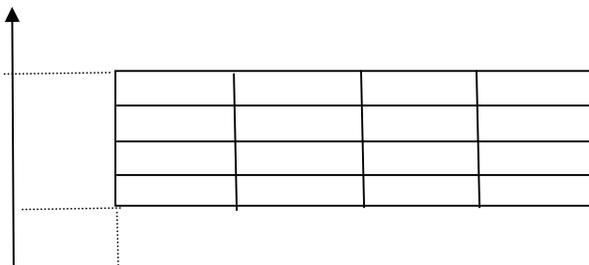
XVII METODO DE LOS PRISMAS

93 Se supone una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$ definida en el rectángulo $[a, b], [c, d]$. Se adoptan m y n y se calculan

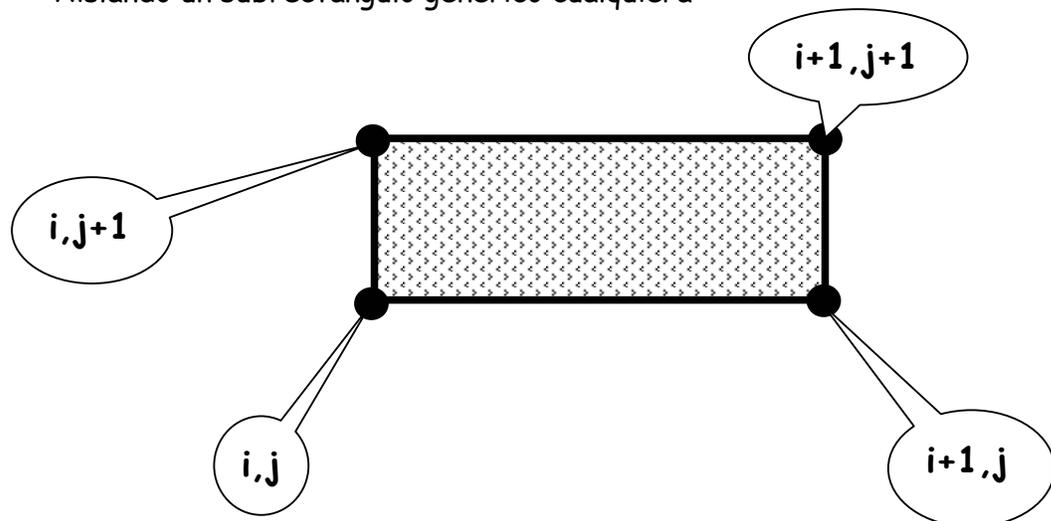
$$h = \frac{b-a}{m}$$

$$k = \frac{d-c}{n}$$

quedando entonces el rectángulo dividido en $m \cdot n$ subrectángulos



94 Aislando un subrectángulo genérico cualquiera



La función $z = f(x, y)$ toma en esos puntos los valores $f(x_i, y_j)$; $f(x_{i+1}, y_j)$; $f(x_i, y_{j+1})$ y $f(x_{i+1}, y_{j+1})$

95 Cualquiera de esos valores puede ser utilizado para formar las siguientes aproximaciones

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx hkf(x_i, y_j)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx hkf(x_{i+1}, y_j)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx hkf(x_i, y_{j+1})$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy = \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \approx hkf(x_{i+1}, y_{j+1})$$

que corresponden a aproximaciones calculadas con los valores de la función $f(x, y)$ en cada uno de los vértices del subrectángulo considerado.

96 El valor aproximado de la integral será entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy \approx hk \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)$$

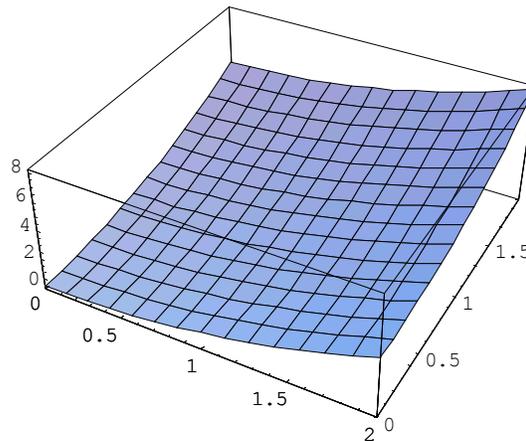
$$\iint_R f(x, y) dx dy \approx hk \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{i+1}, y_j)$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy \approx hk \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_{j+1})$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy \approx hk \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

97 Como ejemplo se calcula a continuación la siguiente integral doble

$$\int_0^2 \int_0^2 (x^2 + y^2) dx dy$$



se adopta $m=n=5$ con lo cual $h=0.4$ y $k=0.4$. En los nodos de la malla resultante la función a integrar toma los valores

0,00	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,16	0,32	0,80	1,60	2,72	4,16
0,64	0,80	1,28	2,08	3,20	4,64
1,44	1,60	2,08	2,88	4,00	5,44
2,56	2,72	3,20	4,00	5,12	6,56
4,00	4,16	4,64	5,44	6,56	8,00

donde el origen de coordenadas se encuentra en correspondencia con el elemento a_{11} de la matriz anterior, las filas se orientan según el eje "x" y las columnas según el eje "y".

Aplicando la primer fórmula establecida en párrafo 96

$$\iint_R f(x, y) dx dy \approx hk \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)$$

resulta un valor de 7.68 con un error por defecto del 27%, aplicando la formula

$$\iint_R f(x, y) dx dy \approx hk \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

se obtiene como valor aproximado 15.36 con un error por exceso del 44%

Utilizando cualquiera (observar la simetría de valores de la función) de las otras dos fórmulas se obtiene el valor 11.64 con un error por exceso del 9%

Esto puede ser debido a que en la primera expresión se evalúa la función en sus respectivos mínimos, la segunda hace lo propio en sus respectivos máximos mientras que las restantes lo hacen en valores intermedios que, en principio, justificacrían la mejor aproximación que se obtiene.

De cualquier forma, este método no es aconsejable, salvo que se esté dispuesto a utilizar h y k pequeños o muy pequeños con un gran trabajo de cálculo y la posibilidad que errores numéricos se potencien, no justificando entonces el esfuerzo.

XVIII METODO DE LOS TRAPECIOS

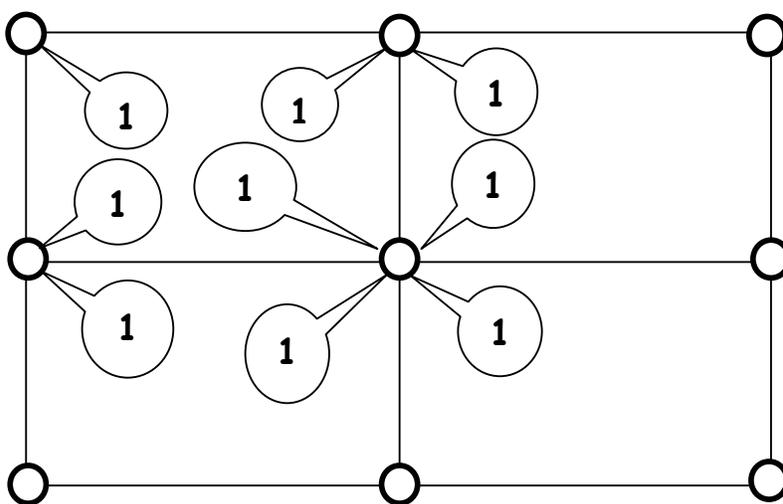
98 A continuación se presenta la fórmula de los trapecios para el cálculo de integrales dobles. Para ello se hace

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dy &= \frac{h}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x, y_{j+1}) + f(x, y_j)] dx = \\ &= \frac{h}{2} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_{j+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j) dx \right] = \\ &= \frac{h}{2} \frac{k}{2} [f(x_{i+1}, y_{j+1}) + f(x_i, y_{j+1})] + \frac{h}{2} \frac{k}{2} [f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_j)] = \\ &= \frac{hk}{4} [f(x_{i+1}, y_{j+1}) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_j)] \end{aligned}$$

que resulta de aplicar la fórmula de los trapecios en la variable y y luego en la variable x .

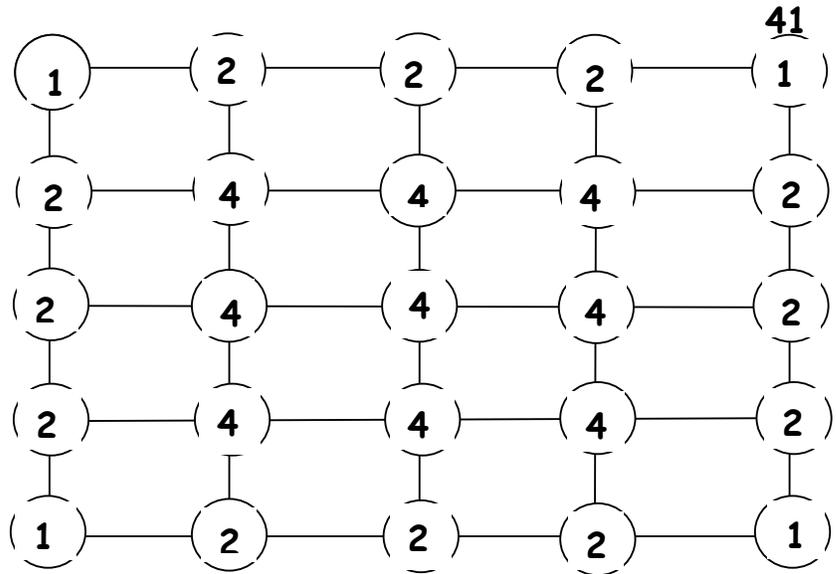
99 Notese que la expresión final resultante puede ser interpretada como el promedio de los cuatro valores de la función en cada de los vértices del subrectángulo considerado.

100 Para extender el procedimiento a un recinto rectangular R cualquiera, luego de elegir h y k (o m y n) debe aplicarse la expresión anterior en cada uno de los $m \cdot n$ subrectángulos en que queda dividido R por la partición elegida.



Las pequeñas circunferencias indican puntos en los que debe ser evaluada la función, pero es imprescindible efectuar la siguiente consideración: la función se evalúa en cada uno de esos puntos **pero una vez para cada uno de los subrectángulos adyacentes**, de tal forma que, para subrectángulos contiguos la evaluación correspondiente sea contada tantas veces como vértices confluyen en el punto de evaluación.

101 Resulta así el siguiente operador para ser aplicado sobre la malla que cubre R , indicando los valores del mismo los factores por los que debe ser multiplicado el valor de la función en esos puntos. La suma de dichos valores multiplicada por h y k dividido 4 da el valor aproximado de la integral doble.



102 Aplicando ese operador al cuadro de valores que figura en el párrafo 97 resulta, por ser $h=k=0.4$

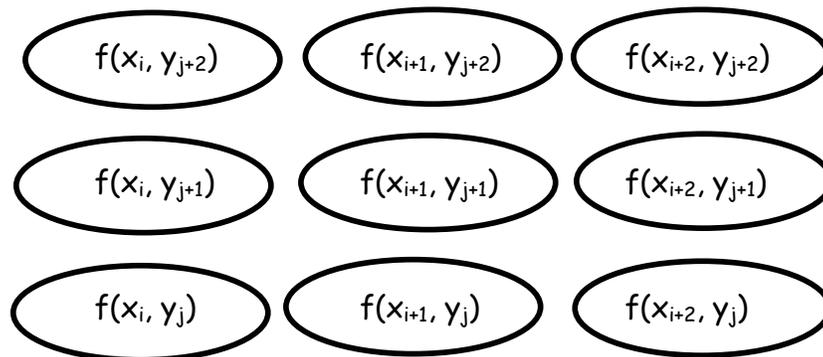
$$0 + 4 + 4 + 8 + 2 * (0.16 + 0.64 + 1.44 + 2.56) * 2 + 2 * (4.16 + 4.64 + 5.44 + 6.56) * 2 + 4 * (0.32 + 0.8 + 1.6 + 2.72 + 0.8 + 1.28 + 2.08 + 3.2 + 1.6 + 2.08 + 2.88 + 4 + 2.72 + 3.2 + 4 + 5.12) = 272$$

$$V = 272 * \frac{0.4 * 0.4}{4} = 10.88$$

con un error del 2% en exceso

XIX METODO DE SIMPSON

103 Considerando ahora cuatro subrectángulos adyacentes, se podrán afectar aproximaciones de segundo grado con cada terna de valore de la función $z = f(x,y)$.



$$\int \int_{R_{i,j}} f(x,y) dx dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y) dy \approx \frac{k}{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx [f(x,y_j) + 4f(x,y_{j+1}) + f(x,y_{j+2})] =$$

$$\frac{k}{3} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y_j) dx + 4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y_{j+1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y_{j+2}) dx \right] =$$

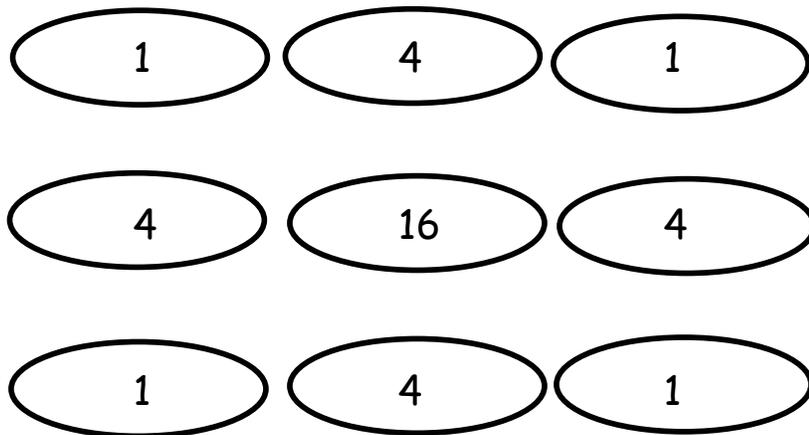
$$\frac{k}{3} h \left[f(x_i,y_j) + 4f(x_{i+1},y_j) + f(x_{i+2},y_j) + 4(f(x_i,y_{j+1}) + 4f(x_{i+1},y_{j+1}) + f(x_{i+2},y_{j+1})) + \right.$$

$$\left. + f(x_i,y_{j+2}) + 4f(x_{i+1},y_{j+2}) + f(x_{i+2},y_{j+2}) \right]$$

104 Se deduce la siguiente aproximación:

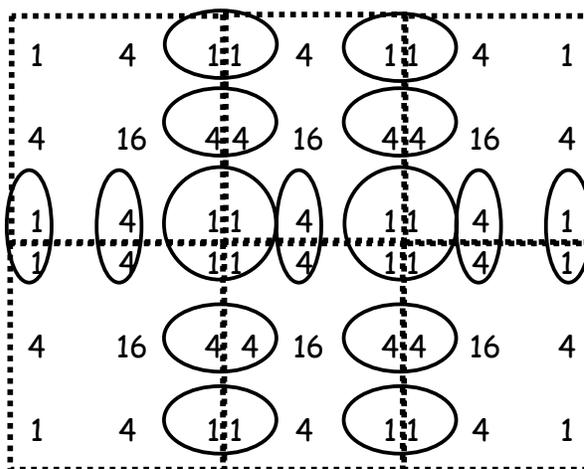
$$\int \int_{R_{i,j}} f(x,y) dx dy \approx \frac{hk}{9} \left[\begin{array}{l} f(x_i, y_j) + f(x_{i+2}, y_j) + f(x_i, y_{j+2}) + f(x_{i+2}, y_{j+2}) \\ + 4(f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+2}, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_{j+2})) \\ + 16f(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{array} \right]$$

105 Este resultado se puede representar en el siguiente esquema



donde los números corresponden a los factores por los que hay que multiplicar a los valores de la función del párrafo 103. La suma de todos ellos multiplicada por hk y dividida por 9 da una aproximación de la integral doble por la regla de Simpson sobre los cuatro subrectángulos considerados. Nótese que el valor de la suma puede ser tomado como un promedio ponderado de los nueve valores de la función en los vértices de los cuatro subrectángulos.

106 Cuando sea necesario extender este operador de cuatro subrectángulos a un recinto rectangular R, se deben adosar en forma contigua hasta cubrir la totalidad de R. Naturalmente m y n deben ser pares.



Los números destacados en la figura indican la cantidad de veces que debe ser considerada la función en el operador o molécula final resultante.

1	4	2	4	2	4	1
4	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	4
1	4	2	4	2	4	1

107 Aplicando esta molécula al ejemplo tratado en el párrafo 97, tomando ahora $h=k=0.5$ resulta el cuadro de valores:

0,00	0,25	1,00	2,25	8,00
0,25	0,50	1,25	2,50	4,25
1,00	1,25	2,00	3,25	5,00
2,25	2,50	3,25	4,50	6,25
4,00	4,25	5,00	6,25	8,00

y se calcula

$$1*0 + 4*0.25 + 2*1 + 4*2.25 + 1*4 + 4*0.25 + 16*0.5 + 8*1.25 + 16*2.5 + 4*4.25 + \\ + 2*1 + 8*1.25 + 4*2 + 8*3.25 + 2*5 + 4*2.25 + 16*2.5 + 8*3.25 + 16*4.5 + 4*6.25 + \\ + 1*4 + 4*4.25 + 2*5 + 4*6.25 + 1*8 = 384$$

con lo que resulta

$$\int_0^2 \int_0^2 (x^2 + y^2) dx dy \approx \frac{384hk}{9} = \frac{384*0.5*0.5}{9} = 10.66666.....$$

que coincide con el valor exacto de la integral doble.

108 No se ha encontrado ni se ha podido demostrar en unos pocos intentos, que el método de Simpson para integrales dobles sea exacto para funciones de segundo grado. Sin embargo existe la fuerte sospecha que así es.

BIBLIOGRAFIA

Para escribir estas páginas fueron consultados los siguientes textos:

- *CALCULO NUMERICO Y GRAFICO* Sadosky, Ed. Lib. del Colegio
- *NUMERICAL ANALYSIS* Scheid Francis, Ed. Schaum.
- *ARITMETICA DE t-DÍGITOS* Ferrante, Jorge J L, Cátedra
- *METODOS NUMERICOS Y PROGRAMACION FORTRAN* McCracken -Dorn, Ed. Limusa Wiley.
- *ANALISIS NUMERICO*. Salvadori - Baron, Ed. CECSA
- *METODOS NUMERICOS CON MATLAB*. Mathews - Fink. Ed. Prentice Hall.
- *ANALISIS NUMERICO*. Burden - Faires. Ed. Grupo Ed. Iberoamérica
- *NUMERICAL METHODS THAT WORK*. Acton Ed. Harper International

y las siguientes páginas WEB

- <http://luda.uam.mx/curso2/cp2indic.html>
- http://www.efunda.com/math/num_integration/num_int_gauss.cfm#Gauss-Legendre
- <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/BooleRuleMod.html>
- <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/approx.1/index.htm>
- crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbtalks/dhb-integrals.pdf