Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

MATRIZ INVERSA

Ing. Jorge J. L. Ferrante

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL GENERAL PACHECO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIDAD DOCENTE BÁSICA MATEMÁTICA
CÁTEDRA CÁLCULO NUMÉRICO

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

2010

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - edUTecNe

http://www.edutecne.utn.edu.ar

edutecne@utn.edu.ar

PROLOGO

Se presentan en este trabajo distintos métodos para invertir matrices.

Algunos, como un aporte a lo que necesariamente debe conocer un alumno que se inicia en el estudio del cálculo numérico, otros interesantes desde el punto de vista conceptual pero definitivamente desaconsejables desde el operativo.

Especial atención ha sido puesta en los problemas numéricos insitos en la inversión de matrices.

Un par de ejemplos con matrices de Hilbert ponen el acento en este tipo de problemas.

La idea subyacente es que no se debe tener respeto reverencial por métodos y procedimientos de cálculo, sino que, por el contrario, todos ellos deben ser analizados con espiritu crítico, analizar si cuadran al problema en estudio y, si es posible, proceder a su verificación.

No hacerlo así, implica por lo menos para la ingeniería, un riesgo muy grande.

Esta, en el fondo, es la principal enseñanza que puede dar un curso elemental de cálculo numérico.

Ing. Jorge J L Ferrante
Profesor Titular
Cálculo Numérico

I Introducción

1 En diversos problemas matemáticos, de ingeniería, económicos y de otros campos es necesaria la matriz inversa de una matriz dada. Esto es, una matriz tal que premultiplicada o posmultiplicada por la matriz dada produzca como resultado la matriz unitaria del orden considerado. Es decir, dada una matriz A, de orden n, es necesaria una matriz, llamada A^{-1} que cumpla

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

2 Se presentan a continuación métodos para calcular la matriz inversa A^{-1} de una matriz dada A.

II Aplicación reiterada del método de Gauss

3 Este método - no recomendable operativamente, por cierto- consiste en aplicar canónicamente la definición de matriz inversa y las operaciones entre matrices. En efecto, siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se supone la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

constituída por n^2 elementos desconocidos α_{ij}, i = 1, 2, 3, ..., n ; j = 1, 2, 3, ..., n

4 Por definición de matriz inversa, el producto A A^{-1} debe ser igual a la matriz unidad del mismo orden (n). Desarrollando ese producto, se tiene

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{k3} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{kn} \end{bmatrix}$$

debiendo verificarse que

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{k1} = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{k1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{k1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{k1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{k2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{k2} = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{k2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{k2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{k3} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{k3} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{k3} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{k1} = 0 \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\alpha_{kn} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\alpha_{kn} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\alpha_{kn} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\alpha_{kn} = 1 \end{cases}$$

para que se cumpla que $A\ A^{-1} = I$. Cada uno de los grupos de igualdades es un sistema de ecuaciones lineales. Aplicando a cada uno de ellos el método de Gauss, por ejemplo, se van obteniendo los elementos constitutivos de las columnas de la matriz inversa.

5 Obsérvese que:

- La matriz del sistema es siempre la misma. La matriz A dada cuya inversa se busca.
- Las incógnitas son los elementos de las columnas de la matriz inversa.
- El vector de términos independientes está constituido por 0 (ceros) excepto en la posición correspondiente a la columna de elementos que se calcula, teniendo allí el valor 1 (uno)

6 Este método requiere la solución de n SEL con igual matriz y distintos términos independientes, razón por la cual resulta más eficaz aplicar otros métodos más aptos para este tipo de problemas. Por este motivo, en párrafo 3 se calificó a este método de no recomendable operativamente. Se lo presenta por la claridad conceptual insita en el mismo.

7 Se invierte con este método la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Primer paso

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 1 \\ 0 & 0 & 4.79 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \\ 0.04166 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.20869 \\ -0.04347 \\ 0.008698 \end{bmatrix}$$

Segundo paso

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 1 \\ 0 & 0 & 4.79 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.20833 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0.043478 \\ 0.21738 \\ -0.04347 \end{bmatrix}$$

Tercer paso

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 1 \\ 0 & 0 & 4.79 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.008698 \\ -0.4349 \\ 0.20876 \end{bmatrix}$$

pudiendo escribirse, finalmente

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2086 & -0.4347 & 0.0086 \\ -0.0434 & 0.2173 & -0.4349 \\ 0.0086 & -0.0434 & 0.2087 \end{bmatrix}$$

donde, con seguridad, se han filtrado y propagado errores de redondeo. El cálculo ha sido hecho mediante una calculadora de mesa, redondeando a cuatro decimales. La matriz obtenida puede ser mejorada mediante el procedimiento descripto en el punto VI del presente trabajo.

De cualquier forma, se insiste en desaconsejar en forma vehemente este procedimiento para hallar la inversa de una matriz. Su valor es conceptual. Solamente por ello se lo incluye.

III Método de Gauss Jordan

8 Sea A la matriz cuadrada no singular cuya inversa se busca. Si se le adosa, por derecha, la matriz unidad del mismo orden se tendrá una nueva matriz de n filas y 2n columnas del siguiente aspecto.

$$A|I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

9 Si se multiplica por izquierda por A^{-1} este arreglo se tiene

$$A^{-1}\left(A|I\right) = I|A^{-1}$$

dado que A^{-1} no es conocida, la idea central del método en consideración es efectuar transformaciones sobre el arreglo hasta que el mismo tenga, a su izquierda, la matriz unidad de orden n en cuyo caso tendrá, a su derecha, la matriz A^{-1} buscada. Para esto, por sucesivas transformaciones en los elementos de A, cuyos efectos se prolonguen sobre la matriz unidad agregada, se busca la obtención de 1 (unos) en la diagonal principal de A y 0 (ceros) en el resto de las posiciones de esta matriz.

10 Se agregan a continuación los pasos de cálculo necesarios para esas transformaciones.

1º Matriz dada, ampliada con la matriz unidad del mismo orden

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

2º División de la primera fila por a_{11} llamado pivote. Naturalmente el pivote no debe ser nulo.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & ... & a_{1n}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

3º Multiplicación de la primera fila del segundo paso por a_{21}

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{21}a_{12}/a_{11} & a_{21}a_{13}/a_{11} & ... & a_{21}a_{1n}/a_{11} & a_{21}/a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

4º Sustracción de la segunda fila menos la primera fila del paso 3º anterior.

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{21}a_{12}/a_{11} & a_{21}a_{13}/a_{11} & ... & a_{21}a_{1n}/a_{11} & a_{21}/a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11} & a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11} & ... & a_{2n}-a_{21}a_{1n}/a_{11} & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

5º Multiplicación de la primera fila del segundo paso por a_{31}

$$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{31}a_{12}/a_{11} & a_{31}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{31}a_{1n}/a_{11} & a_{31}/a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11} & a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{2n}-a_{21}a_{1n}/a_{11} & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

6º Sustracción de la tercera fila menos la primera fila del paso 5º anterior. Obsérvese que la segunda fila queda modificada.

$$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{31}a_{12}/a_{11} & a_{31}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{31}a_{1n}/a_{11} & a_{31}/a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11} & a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{2n}-a_{21}a_{1n}/a_{11} & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{32}-a_{31}a_{12}/a_{11} & a_{33}-a_{31}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{3n}-a_{31}a_{1n}/a_{11} & -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

7º Continúan pasos similares en los que se multiplica la primera fila del arreglo del paso 2º por a_{41} ,a_{51}, ..., a_{n1} y luego se efectúa la sustracción entre las filas 4ª, 5ª, ..., nª y la primer fila así modificada. Se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{1n}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11} & a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{2n}-a_{21}a_{1n}/a_{11} & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{32}-a_{31}a_{12}/a_{11} & a_{33}-a_{31}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{3n}-a_{31}a_{1n}/a_{11} & -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}-a_{n1}a_{12}/a_{11} & a_{n3}-a_{n1}a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{nn}-a_{n1}a_{1n}/a_{11} & -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

11 Obsérvese que cada uno de los elementos de esta última matriz se obtiene reemplazando cada elemento que no esté en la fila o columna del pivote, por ese mesmo elemento al que se le sustrae el producto del elemento que está en su fila y el la columna del pivote multiplicado por el que está en su columna y en la fila del pivote, dividido por el pivote.

12 Por su parte, la fila del pivote queda dividida por el pivote y la columna del pivote queda dividida por el pivote cambiada de signo. Por último se observa que el pivote queda reemplazado por su inversa.

13 El procedimiento continúa con la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & \ldots & a_{1n}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

donde se ha colocado el supraíndice (1) para indicar a los elementos modificados en el primer paso de cálculo. Si el elemento $a_{22}^{(1)}$ es distinto de cero, se lo toma como pivote y se procede de la misma forma que en los pasos antes detallados hasta obtener una columna como la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

14 En esta etapa del cálculo, la segunda columna de la matriz unidad adosada se trasforma de manera similar a la transformación de la primera columna en el primer paso, la fila del nuevo pivote queda dividida por este valor y los restantes elementos se transforman según la expresión

$$a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

15 Se obtiene así una matriz con el siguiente aspecto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & \alpha_{11}^{(2)} & -a_{12}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & \alpha_{21}^{(2)} & 1/a_{22}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & \alpha_{31}^{(2)} & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & \alpha_{n1}^{(2)} & -a_{n2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

el procedimiento de cálculo continúa en la misma forma, tomando como pivote a $a_{33}^{(2)}$, ($a_{33}^{(2)} \neq 0$), $a_{44}^{(3)}$ ($a_{44}^{(3)} \neq 0$),..., $a_{nn}^{(n-1)}$ ($a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$), cumpliéndose en todos los casos que

- La fila del pivote queda dividida por el pivote.
- La columna del pivote queda dividida por el pivote y cambiada de signo.
- El pivote queda reemplazado por su inversa.
- Todo elemento que no esté en la fila o columna del pivote se modifica según la expresión.

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

16 Las columnas α's -transformadas de la matriz unidad adosada- se pueden almacenar o guardar en lugar de las columnas de matriz unidad que se generan "por izquierda". Esto se denomina inversión "in situ" pero tratándose de una computadora significa que la matriz A se pierde, quedando reemplazada por su inversa A^{-1}.

17 El siguiente seudo programa concreta el tema

1 Hacer k = 1
2 Calcular p = 1/ a_{kk}
3 Hacer i = 1
4 ¿i = k? no, seguir; si, ir a orden Nº 10
5 Hacer j = 1
6 ¿j = k ?, no, seguir, si ir a orden Nº 8
7 hacer $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}p$
8 Incrementar j en una unidad
9 ¿j < = n? si, ir a orden Nº 6, no, seguir
10 Incrementar i en una unidad
11 ¿i < = n? si, ir a orden Nº 4, no, seguir
12 Hacer l = 1
13 Hacer a_{kl} = p a_{kl}
14 Incrementar l en una unidad
15 ¿l < = n? si, ir a orden Nº 13; no, seguir

16 Hacer l = 1
17 Hacer a_{lk} = - p a_{lk}
18 Incrementar l en una unidad
19 ¿l < = n? si, ir a orden Nº 17; no, seguir
20 Hacer a_{kk} = p
21 Incrementar k en una unidad
22 ¿k < = n? si, ir a orden Nº 2; no, salir

al salir, en el lugar de A, estará A^{-1}

18 Se desarrolla a continuación un ejemplo.
La matriz a invertir es la siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Primer paso, k=1

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1-\frac{3*4}{5} & 6-\frac{3*2}{5} \\ -\frac{8}{5} & 0-\frac{8*4}{5} & 9-\frac{8*2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ -0.6 & -1.4 & 4.8 \\ -1.6 & -6.4 & 5.8 \end{bmatrix}$$

Segundo paso, k = 2

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ -0.6 & -1.4 & 4.8 \\ -1.6 & -6.4 & 5.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.2-\frac{(-0.6)*0.8}{(-1.4)} & -\frac{0.8}{(-1.4)} & 0.4-\frac{0.8*4.8}{(-1.4)} \\ \frac{(-0.6)}{(-1.4)} & \frac{1}{(-1.4)} & \frac{4.8}{(-1.4)} \\ -1.6-\frac{(-0.6)*(-6.4)}{(-1.4)} & -\frac{(-6.4)}{(-1.4)} & 5.8-\frac{(-6.4)*4.8}{(-1.4)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1428 & 0.5714 & 3.1428 \\ 0.4285 & -0.7143 & -3.4285 \\ 1.1428 & -4.5714 & -16.1428 \end{bmatrix}$$

Tercer paso, k= 3

$$\begin{bmatrix} -0.1428 & 0.5714 & 3.1428 \\ 0.4285 & -0.7143 & -3.4285 \\ 1.1428 & -4.5714 & -16.1428 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.0797 & -0.3186 & 0.1947 \\ 0.1857 & 0.2566 & -0.2124 \\ -0.0708 & 0.2831 & -0.0615 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0797 & -0.3186 & 0.1947 \\ 0.1857 & 0.2566 & -0.2124 \\ -0.0708 & 0.2831 & -0.0615 \end{bmatrix}$$

si se calcula, como verificación $A\ A^{-1}$. Se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0.9997 & -0.0004 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.9994 & 0.0003 \\ 0.0004 & -0.0009 & 1.0005 \end{bmatrix}$$

que "se parece" bastante a I_3. Esto es debido a que los inevitables errores numéricos debidos a la aritmética en uso hacen que A^{-1} sea una buena aproximación a la inversa y no "LA INVERSA".

IV Método del Orlado

19 La aplicación de este método requiere particionar la matriz dada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

según el siguiente esquema

$$\begin{bmatrix} & A_{n-1} & & & a_{1n} \\ & & & & a_{2n} \\ & & & & a_{3n} \\ & & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde A_{n-1} es una matriz de orden n-1

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

u_n es un vector columna

$$u_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-1n} \end{bmatrix}$$

v_n es un vector fila

$$v_n = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

y a_{nn} es un escalar.

20 Suponiendo conocida la inversa de la matriz dada, particionándola de la misma forma se puede escribir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

donde

$$P_{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n-1} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-11} & \alpha_{n-12} & \alpha_{n-13} & \dots & \alpha_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

$$r_n = \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \alpha_{3n} \\ \dots \\ \alpha_{n-1n} \end{bmatrix}$$

$$q_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn-1} \end{bmatrix}$$

y $1/\alpha_n$ es un escalar

21 Por ser $A_n A_n^{-1} = I_n$, deberá ser

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

desarrollando el producto, se tiene:

$$A_{n-1} P_{n-1} + u_n q_n = I_{n-1}$$
$$A_{n-1} r_n + \frac{u_n}{\alpha_n} = 0$$
$$v_n P_{n-1} + a_{nn} q_n = 0$$
$$v_n r_n + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1$$

22 Premultiplicando la segunda expresión por A_{n-1}^{-1} queda

$$A_{n-1}^{-1}\left(A_{n-1}r_n + \frac{u_n}{\alpha_n}\right) = r_n + \frac{A_{n-1}^{-1}u_n}{\alpha_n} = 0$$

de donde

$$r_n = -\frac{A_{n-1}^{-1}u_n}{\alpha_n}$$

reemplazando este valor de r_n en la última expresión se tiene

$$-v_n\frac{A_{n-1}^{-1}u_n}{\alpha_n} + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1$$

de donde se despeja

$$\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1}u_n$$

23 Premultiplicando la primera expresión del desarrollo del producto $A_n A_n^{-1}$ por A_n^{-1} se obtiene

$$A_{n-1}^{-1}\left(A_{n-1}P_{n-1} + u_n q_n\right) = A_{n-1}^{-1}I_{n-1}$$

$$P_{n-1} + A_{n-1}^{-1}u_n q_n = A_{n-1}^{-1}$$

$$P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1}u_n q_n$$

reemplazando esta matriz en la tercera expresión se tiene

$$v_n\left(A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1}u_n q_n\right) + a_{nn}q_n = 0$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} + \left(-v_n A_{n-1}^{-1}u_n + a_{nn}\right)q_n = 0$$

el paréntesis es la expresión encontrada en el párrafo anterior para α_n. Reemplazando resulta

$$v_n A_{n-1}^{-1} + \alpha_n q_n = 0$$

de donde, finalmente

$$q_n = -\frac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}$$

24 Si se toma este valor y se lo reemplaza en la expresión de P_{n-1} se tiene

$$P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1}\frac{u_n v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}$$

25 Premultiplicando la segunda expresión del desarrollo del producto A_n A_n^{-1} por A_n^{-1} resulta

$$A_{n-1}^{-1}\left(A_{n-1} r_n + \frac{u_n}{\alpha_n}\right) = 0$$

$$r_n + \frac{A_{n-1}^{-1} u_n}{\alpha_n} = 0$$

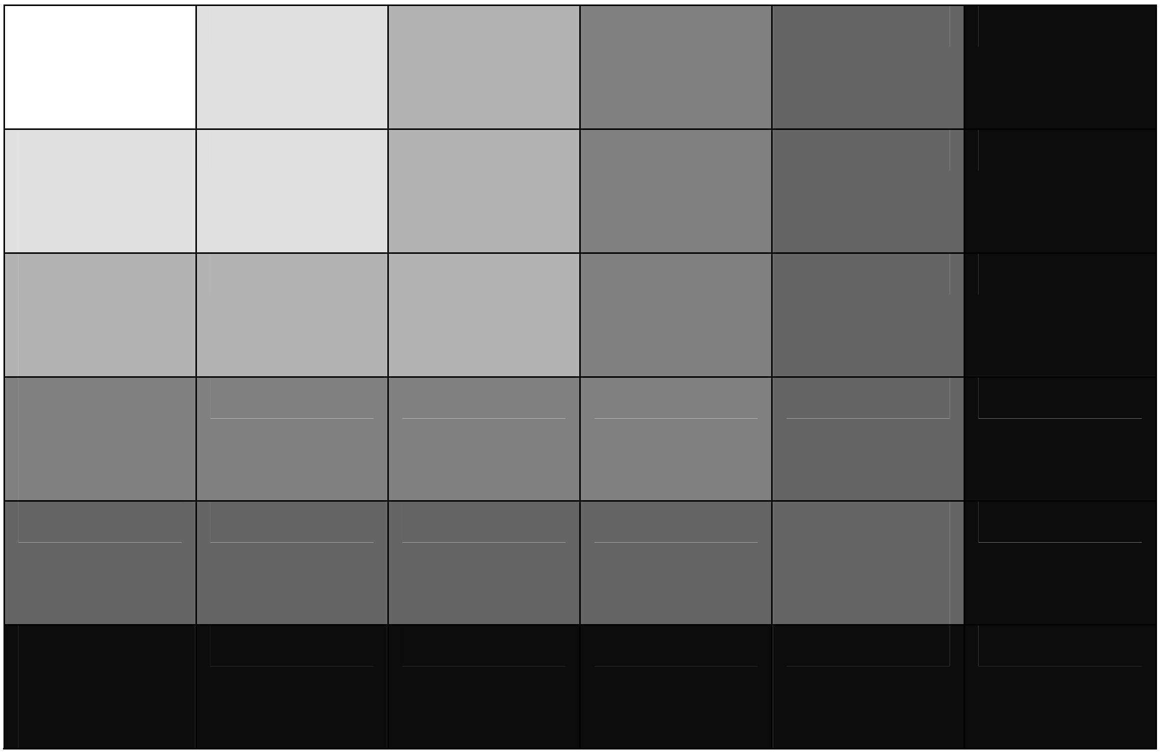
$$r_n = -\frac{A_{n-1}^{-1} u_n}{\alpha_n}$$

26 Resumiendo, puede escribirse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1}\dfrac{u_n v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & -\dfrac{A_{n-1}^{-1} u_n}{\alpha_n} \\ -\dfrac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & \dfrac{1}{a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n} \end{bmatrix}$$

donde queda claro que, si se conoce la inversa de la matriz $A_{n-1,}$ todos los elementos de esta última matriz pueden calcularse a partir de la partición de la matriz A efectuada.

27 Entonces, la idea central del método es, conociendo la inversa de A_1, (un número real) calcular la inversa de A_2, cosa que se logra orlando la matriz A_1 con los elementos de A de sombreado más suave en el gráfico que se agrega. Después de obtenida la inversa de A_2, se orla nuevamente con los elementos de sombreado más fuerte para trabajar con A_3. Obtenida por este medio la inversa de esta matriz, una nueva orla lleva a A_4 y así sucesivamente hasta que la última orla (negra) permite obtener la inversa buscada.



28 Se desarrolla un ejemplo buscando la inversa de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Primer paso

$$A_1 = [a_{11}] = [5]$$

$$A_1^{-1} = [a_{11}]^{-1} = \left[\frac{1}{5}\right] = [0.2]$$

Segundo paso

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$u_2 = [1]$$
$$v_2 = [1]$$
$$a_{22} = 5$$

Con estos valores se calcula

$$\alpha_2 = 5 - [1].[0.2].[1] = 4.8$$

$$q_2 = -\frac{[1].[0.2]}{4.8} = -0.0416$$

$$P_1 = [0.2] + [0.2]\frac{[1].[1].[0.2]}{4.8} = 0.2083$$

$$r_2 = -\frac{[0.2].[1]}{4.8} = -0.0416$$

Entonces

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix}$$

Tercer paso

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{33} = 5$$

Como A^{-1}_2 es conocida del paso anterior, se calcula

$$\alpha_3 = 5 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4.7917$$

$$q_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix} \frac{1}{4.7917} = \begin{bmatrix} 0.0087 & -0.0434 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix} + \frac{1}{4.7917} \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2086 & -0.0434 \\ -0.0434 & 0.2173 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} 0.2083 & -0.0416 \\ -0.0416 & 0.2083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4.7917} = \begin{bmatrix} 0.0087 \\ -0.0435 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} P_2 & r_3 \\ q_3 & \dfrac{1}{\alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2086 & -0.0434 & 0.0087 \\ -0.0434 & 0.2173 & -0.0435 \\ 0.0087 & -0.0434 & 0.2086 \end{bmatrix}$$

Que es la inversa buscada

29 Como verificación se calcula A A^{-1}. Resulta

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2086 & -0.0434 & 0.0087 \\ -0.0434 & 0.2173 & -0.0435 \\ 0.0087 & -0.0434 & 0.2086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9996 & 0.0003 & 0.0000 \\ 0.0003 & 0.9997 & -0.0002 \\ 0.0001 & 0.0003 & 0.9995 \end{bmatrix}$$

que se “parece” bastante a I_3

V Otros métodos

30 En numerosos casos de interés para matemática e ingeniería, por ejemplo, ecuaciones diferenciales, vibraciones de sistemas estructurales, pandeo; etc. es necesario hallar las raíces del denominado polinomio característico de una matriz. Dichas raíces se denominan autovalores y los vectores a ellas asociados, autovectores.

31 El polinomio característico resulta del desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de ese desarrollo resulta un polinomio en λ de la forma

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

32 Uno de los métodos para hallar los coeficientes del polinomio característico es el método de Leverrier Faadeva. Su demostración está completamente fuera del alcance de estas páginas pero su esquema final de cálculo resulta muy sencillo. Debe señalarse que, sin las facilidades que brindan los lenguajes algebraicos actualmente en uso, su aplicación para matrices de orden no demasiado grande resulta impracticable por la cantidad de cálculos que implica obtener las sucesivas potencias de la matriz dada y varios otros productos matriciales

33 El esquema final de cálculo mencionado es el siguiente, tomando $a_0 = 1$

$$B_1 = I_n \qquad a_1 = -\frac{1}{1} traza(AB_1)$$

$$B_2 = AB_1 + a_1 I_n \qquad a_2 = -\frac{1}{2} traza(AB_2)$$

$$B_3 = AB_2 + a_2 I_n \qquad a_3 = -\frac{1}{3} traza(AB_3)$$

....

$$B_n = AB_{n-1} + a_{n-1} I_n \qquad a_n = -\frac{1}{n} traza(AB_n)$$

debiéndose cumplir que

$$AB_n + a_n I_n = 0$$

V.1 Método de Leverrier Faadeva

34 Partiendo de la última expresión puede escribirse y despejarse

$$A^{-1}(AB_n + a_n I_n) = 0 \qquad \Rightarrow B_n + a_n A^{-1} = 0 \qquad \Rightarrow A^{-1} = -\frac{B_n}{a_n}$$

obteniéndose así la inversa buscada.

V.2 Aplicación del Teorema de Cayley Hamilton

35 Por otra parte, el teorema de Cayley Hamilton establece que toda matriz es raíz de su polinomio característico. Es decir que

$$p(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + a_3 A^{n-3} + ... + a_{n-1} A + a_n = 0$$

Entonces, multiplicando este polinomio por A^{-1} se tiene

$$A^{-1}\left(a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + a_3 A^{n-3} + ... + a_{n-1} A + a_n\right) = 0$$

$$a_0 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + a_3 A^{n-4} + ... + a_{n-1} I + a_n A^{-1} = 0$$

Despejando de esta última A^{-1} resulta finalmente

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left(a_0 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + a_3 A^{n-4} + ... + a_{n-1} I\right)$$

36 A título de ejemplo se calcula con este método la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Se toma

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y se calcula

$$B_1 = I_3 \qquad\qquad a_1 = -\frac{1}{1}Tr(AB_1) = -15$$

Se calcula

$$B_2 = AB_1 + a_1 I_3 = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 3 & -14 & 6 \\ 8 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz se calcula

$$a_2 = -\frac{1}{2}Tr(AB_2) = 31$$

Y luego

$$B_3 = AB_2 + a_2 I_3 = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 22 \\ 21 & 29 & -24 \\ -8 & 32 & -7 \end{bmatrix}$$

Y con esta última matriz

$$a_3 = -\frac{1}{3}Tr(AB_3) = -113$$

Aplicando V.1 resulta

$$A^{-1} = -\frac{B_3}{a_3} = \frac{\begin{bmatrix} 9 & -36 & 22 \\ 21 & 29 & -24 \\ -8 & 32 & -7 \end{bmatrix}}{113} = \begin{bmatrix} 0.079646 & -0.318584 & 0.19469 \\ 0.185841 & 0.256637 & -0.212389 \\ 0.0707965 & 0.233186 & -0.0619469 \end{bmatrix}$$

Para aplicar V.2 se calculan ahora, haciendo notar el incremento en los cálculos, lo que, definitivamente permite calificar a este método de "académico"

$$A^2 = \begin{bmatrix} 53 & 24 & 52 \\ 66 & 13 & 66 \\ 112 & 32 & 97 \end{bmatrix}$$

Con los elementos obtenidos se calcula finalmente la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{113}\left(\begin{bmatrix} 53 & 24 & 52 \\ 66 & 13 & 66 \\ 112 & 32 & 97 \end{bmatrix} - 15\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix} + 31\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.079646 & -0.318584 & 0.19469 \\ 0.185841 & 0.256637 & -0.212389 \\ 0.0707965 & 0.233186 & -0.0619469 \end{bmatrix}$$

Que coinciden con la hallada por aplicación del método de Gauss Jordan en párrafo 18 precedente.

37 Se aplica ahora, como nuevo ejemplo, el método de Leverrier - Faadeva a un caso extremo, el de invertir una matriz de Hilbert de orden 5. Esta matriz es la siguiente:

$$H_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Todas ellas, independientemente del orden, están muy mal condicionadas y encontrar sus respectivas inversas es un serio problema numérico.

Siguiendo el procedimiento descripto se obtiene la siguiente matriz inversa

$$\begin{pmatrix} 25. & -300. & 1050. & -1400. & 630. \\ -300. & 4800. & -18900. & 26880. & -12600. \\ 1050. & -18900. & 79380.1 & -117600. & 56700. \\ -1400. & 26880. & -117600. & 179200. & -88200.1 \\ 630. & -12600. & 56700. & -88200.1 & 44100. \end{pmatrix}$$

Como verificación se calcula el producto de la matriz H_5 por su inversa. Se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0.999998 & 1.15297\times10^{-8} & -2.73173\times10^{-6} & 2.50044\times10^{-6} & -2.0034\times10^{-6} \\ -1.50952\times10^{-6} & 1. & -1.52156\times10^{-6} & 1.46129\times10^{-6} & -1.16591\times10^{-6} \\ -1.11389\times10^{-6} & 6.64138\times10^{-8} & 1. & 1.05953\times10^{-6} & -8.38825\times10^{-7} \\ -8.89559\times10^{-7} & 5.9709\times10^{-8} & -8.36339\times10^{-7} & 1. & -6.58922\times10^{-7} \\ -7.42925\times10^{-7} & 5.31666\times10^{-8} & -6.86512\times10^{-7} & 6.95867\times10^{-7} & 1. \end{pmatrix}$$

Que es bastante "parecida" a la matriz I_5

Intentando el mismo procedimiento con la matriz H_6 los resultados son calamitosos. Ocurre que, para este tipo de matrices, cuanto mayor es el orden, más cercano a cero es su determinante lo que explica la extrema inestabilidad que poseen.

Los cálculos han sido efectuados con MATHEMATICA 6 operando como calculadora en aptitud de efectuar producto de matrices.

Cabe señalar que, aplicando el comando Inverse[...] cuando H_6 es manejada como una matriz de elementos fraccionarios, se obtiene la inversa buscada, pero si algún elemento de H_6 lleva un punto, lo que motiva el cálculo en aritmética de t dígitos, los resultados son malos.

VI Corrección de los elementos de la inversa

37 Como se ha visto en los ejemplos anteriores, la inversa de una matriz A, calculada con una aritmética de t dígitos está afectada por inevitables errores y por su propagación a través del algoritmo de cálculo elegido, de manera tal que, una vez finalizado el cálculo, no se dispone de la inversa buscada sino de una aproximación a la misma.

$$B \approx A^{-1}$$

38 Si B es una buena aproximación a A^{-1} el producto BA será cercano a la matriz unidad del orden considerado y

$$R = I - BA$$

será una matriz "pequeña", en el sentido de alguna de sus normas.

39 Obsérvese que los elementos de R son los desvíos de BA con respecto a la matriz unidad ya que por ser B una buena aproximación a A^{-1}, BA es bastante "parecida" a I

40 De la última expresión puede escribirse

$$BA = I - R$$

multiplicando por izquierda por B^{-1} se tiene

$$B^{-1}BA = B^{-1}(I - R)$$

de donde

$$A = B^{-1}(I - R)$$

Invirtiendo

$$A^{-1} = \left[B^{-1}(I - R)\right]^{-1}$$

De donde

$$A^{-1} = (I - R)^{-1} B$$

Por ser $\|R\| < 1$, se puede efectuar el siguiente desarrollo

$$A^{-1} = (I - R)^{-1} B = \left(I + R + R^2 + R^3 + R^4 + \ldots\right)B$$

Expresión en la que el factor I + R + R^2 + R^3 + R^4 +…puede ser considerado como correctivo de los elementos de B. Por ser supuestamente "pequeña" R sus sucesivas potencias serán todavía menores, razón por la cual es esperable una buena corrección con pocos términos en el factor.

41 Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

El cálculo de su inversa aplicando el algoritmo de Gauss Jordan da

$$B = \begin{bmatrix} 0.0797 & -0.3186 & 0.1947 \\ 0.1857 & 0.2566 & -0.2124 \\ -0.0708 & 0.2831 & -0.0619 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1.0003 & 0.0002 & 0.0001 \\ -0.0009 & 0.9994 & -0.0006 \\ 0.0001 & -0.0001 & 0.9999 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.0003 & -0.0002 & -0.0001 \\ 0.0009 & 0.0005 & 0.0006 \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = 10^{-8} \begin{bmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 21 & 24 & 33 \\ 11 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Entonces I + R + R^2

$$I + R + R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 10^{-4} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 10^{-8} \begin{bmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 21 & 24 & 33 \\ 11 & 9 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.999699920 & -0.0002000070 & -0.000100100 \\ 0.000900210 & 1{,}000600240 & 0.000600330 \\ -0.000099890 & 0.000100900 & 1.000100080 \end{bmatrix}$$

Calculando (I + R + R^2) B se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0.079646017 & -0.318584070 & 0.194690265 \\ 0.185840707 & 0.256637168 & -0.212389380 \\ -0.070796309 & 0.283186048 & -0.061947074 \end{bmatrix}$$

Que es una mejor aproximación a A^{-1}