



Centro Educativo de Nivel Secundario N° 451
Anexo Universidad Tecnológica Nacional

Dirección de Capacitación No Docente

Dirección General de Cultura y Educación
Provincia de Buenos Aires

MATEMATICA

Segundo Año
Módulo 6



LIBROS BACHILLER 2011

Formato digital - PDF

Publicación de edUTecNe - Editorial de la U. T. N.

Sarmiento 440 - (C1041AAJ) - Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Argentina

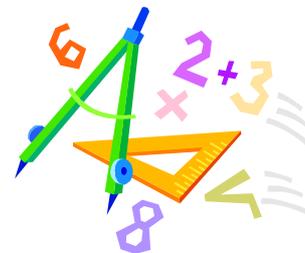
<http://www.edutecne.utn.edu.ar>

edutecne@utn.edu.ar

© Universidad Tecnológica Nacional -U.T.N. - Argentina

La Editorial de la U.T.N. recuerda que las obras publicadas en su sitio web son de libre acceso para fines académicos y como un medio de difundir el conocimiento generado por autores universitarios, pero que los mismos y edUTecNe se reservan el derecho de autoría a todos los fines que correspondan.

CAPÍTULO 6



- Figuras, polígonos.
- Cuadriláteros.
- Clasificación y propiedades.
- Simetría.
- Figuras Circulares.

Vamos a repasar

ELEMENTOS DE UNA FIGURA



Antes de entrar específicamente en el tema de cuadriláteros, abordaremos algunos conceptos básicos que nos permitirán seguir desarrollando los sucesivos temas de geometría que vamos a tratar. Vamos a repasar los elementos fundamentales de una figura plana. Observemos por ejemplo la siguiente figura:

A

B

D

C

Lados y Vértices

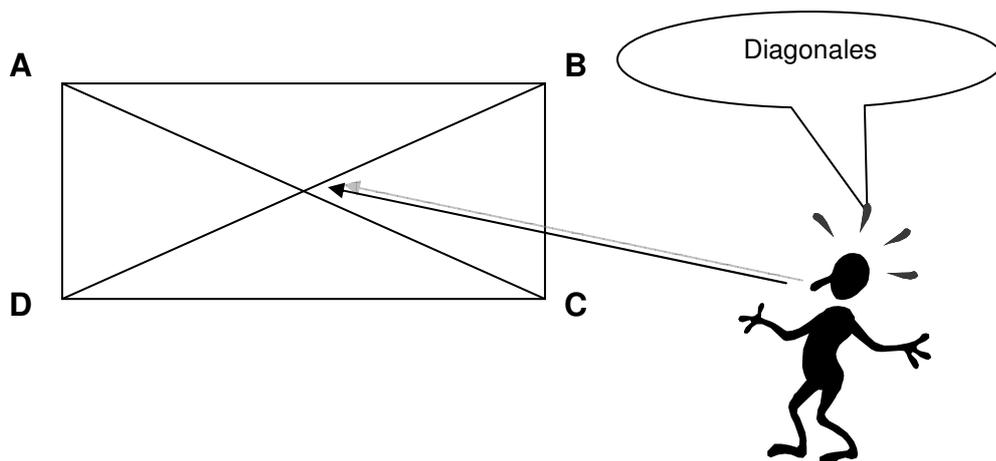


Los **lados** de la figura son los **bordes** de la misma, es decir, \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} .

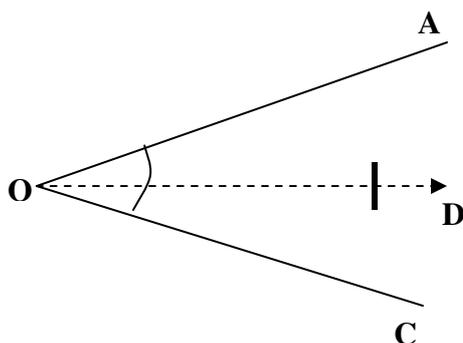
Los **vértices** son los **puntos** que unen dos **lados consecutivos**, es decir los puntos A, B, C y D son los vértices de la figura.

Los vértices A y C; B y D se llaman vértices opuestos.

Las **diagonales** son los **segmentos** que unen **vértices opuestos**, entonces deducimos que AC y BD son las diagonales.



BISECTRIZ DE UN ÁNGULO



Llamamos **bisectriz de un ángulo** a la **semirrecta que divide al ángulo en dos partes congruentes**. En la figura la apreciamos en forma simbólica del siguiente modo:

$$\widehat{AOD} = \widehat{DOC}$$

La semirrecta OD divide al ángulo \widehat{AOC} en dos partes congruentes, es decir que \widehat{AOD} es congruente con \widehat{DOC} .

PERÍMETRO DE UNA FIGURA

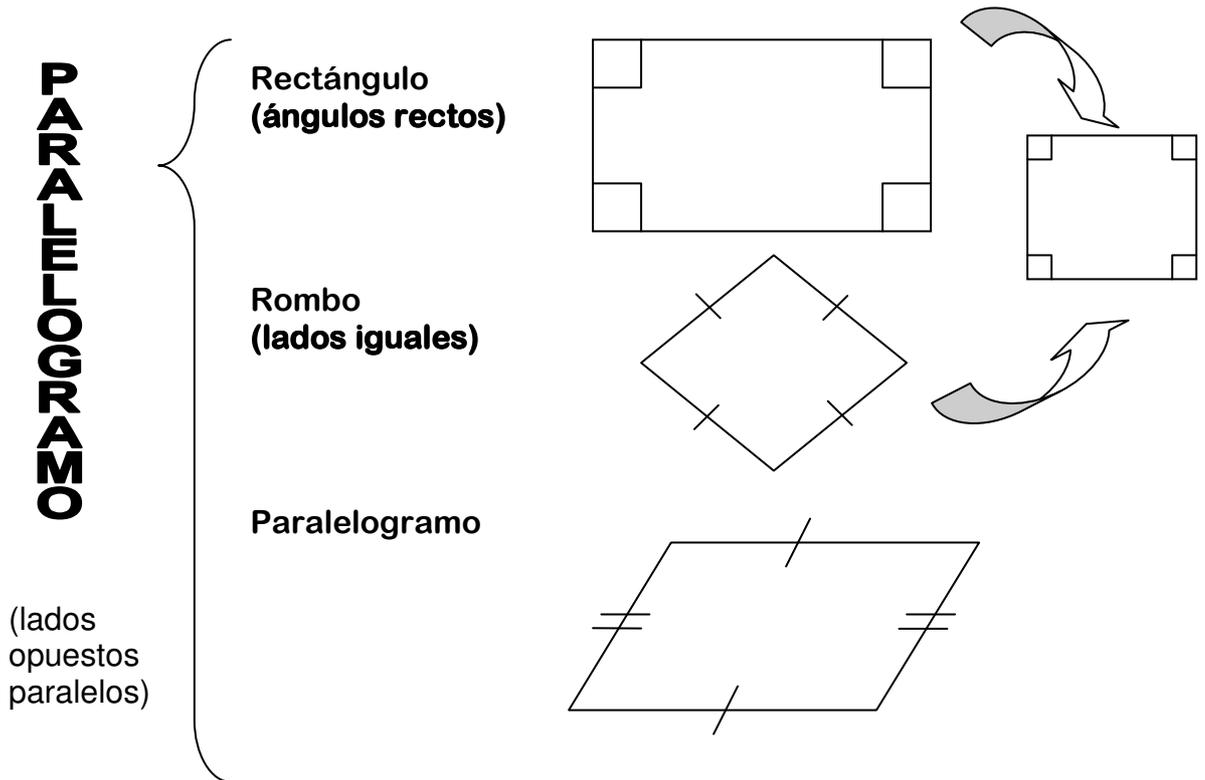
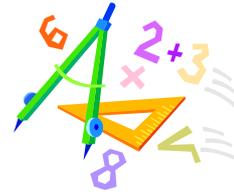


Conceptualmente podemos decir que el **perímetro de una figura es el contorno de la misma**, si queremos averiguar el perímetro de una figura debemos sumar todos los lados de la misma.

En los problemas donde nos piden calcular los lados de una figura o el perímetro de la misma, debemos antes que nada saber las propiedades de los lados según la figura de que se trate. Por ejemplo, si nos piden calcular el perímetro de un rectángulo, sabemos que tiene dos pares de lados paralelos

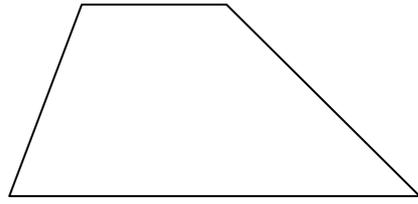
e iguales. En algunos casos en los datos figuran incógnitas, tendremos que plantear una ecuación y resolverla.

CUADRILÁTEROS
Clasificación de los distintos tipos:

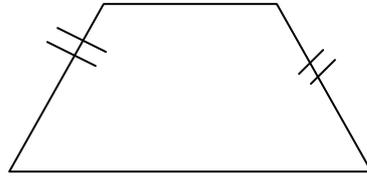


TRAPECIO

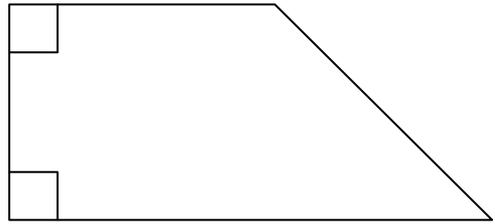
Trapecio Escaleno



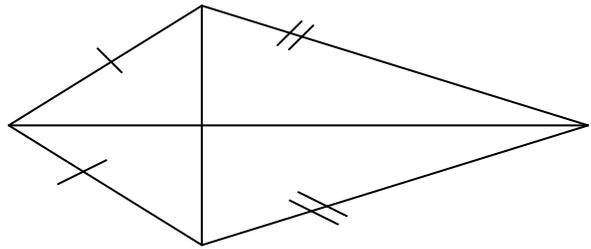
Trapecio Isósceles



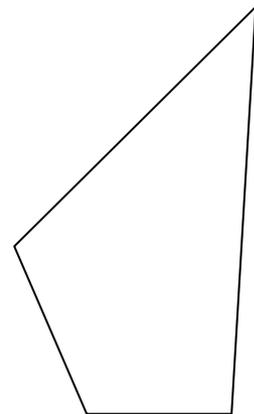
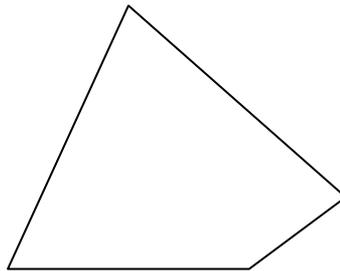
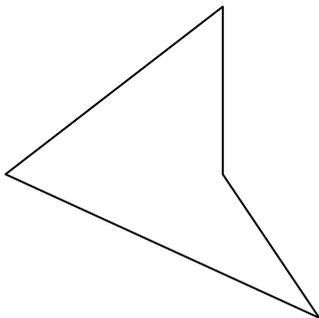
Trapecio Rectángulo



Romboide



OTROS CUADRILÁTEROS

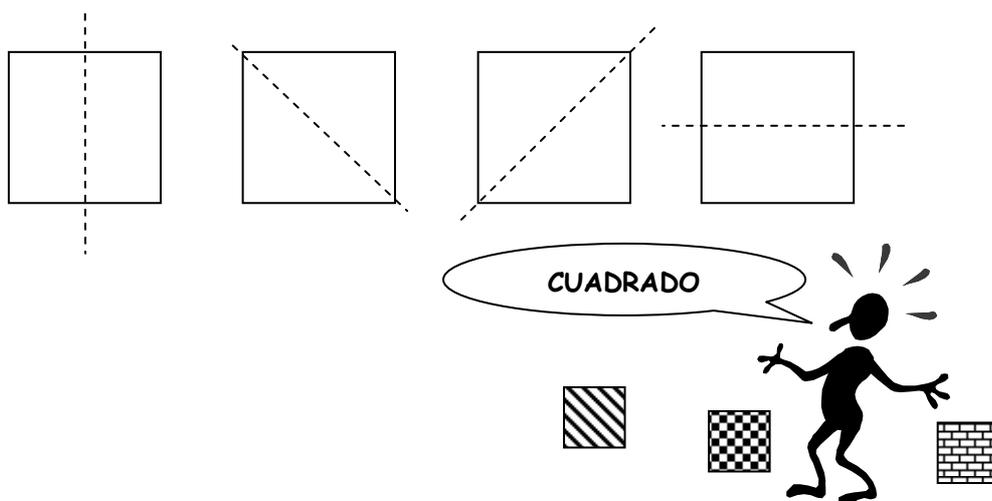


Observando el cuadro anterior vemos que hay tres grupos de cuadriláteros. Aquellos que tienen dos pares de lados opuestos paralelos llamados **paralelogramos**.

Otros que tienen **un par** de lados opuestos paralelos llamados **trapezios** y aquellos que no tienen **ningún** par de lados opuestos paralelos llamados **trapezoides**.

Si dibujamos un cuadrado en un papel cualquiera y lo recortamos para poder plegarlo sobre sí mismo de modo que las dos partes en las que efectuamos los dobleces quedan superpuestas coincidiendo de manera exacta ¿De cuántas maneras podríamos doblarlo?

Fíjese por ejemplo si la plegamos siguiendo la línea punteada, las partes superpuestas coinciden.



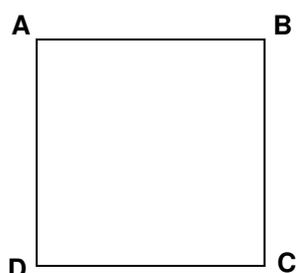
Pero también se cumple lo pedido si plegamos por cualquiera de las otras líneas punteadas que se indican en los dibujos que se dan a continuación.

A estas líneas “punteadas” se las denomina Ejes de Simetría. Doblando el cuadrado por sus distintos ejes de simetría podemos decir que sus lados son todos congruentes y sus ángulos también.

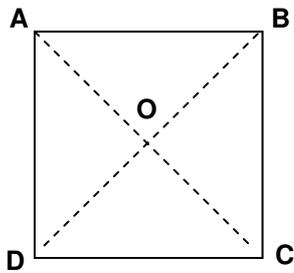
Es decir:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$$



Y que sus diagonales son congruentes, es decir que las medidas de las diagonales son iguales.



$$\overline{AC} =_c \overline{BD}$$

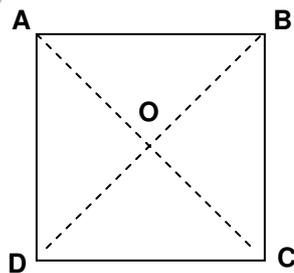
Y además que la medida de \overline{AO} es la misma que la de \overline{OC} y que la medida de \overline{BO} es la misma que la de \overline{OD} . Decimos entonces que las diagonales se cortan mutuamente en segmentos congruentes y el punto donde se cortan es el punto medio de cada una de ellas.

Es decir $\overline{AO} =_c \overline{OC}$ y $\overline{DO} =_c \overline{OB}$.

Todas las propiedades de los cuadriláteros podemos deducirlas a partir de sus ejes de simetría.

Vamos a resumir las propiedades de los cuadriláteros:

CUADRADO



Lados: (1) Todos los lados son congruentes. (2) Los lados opuestos son paralelos.

Lenguaje Simbólico: (1)

$$\overline{AB} =_c \overline{BC} =_c \overline{CD} =_c \overline{AD}$$

$$\overline{BC} // \overline{AD} \text{ y } \overline{AB} // \overline{CD}$$

Diagonales: (1) Las diagonales son congruentes y se cortan perpendicularmente en el punto medio. (2) Además son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen (3).

Lenguaje Simbólico: $\overline{AC} =_c \overline{BD}$ (1)

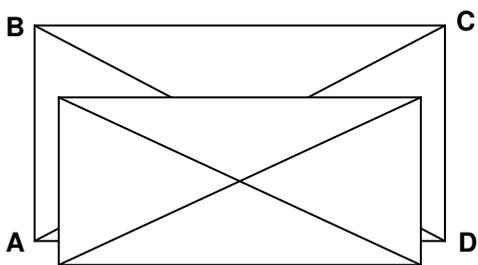
$$\left. \begin{array}{l} \overline{BO} =_c \overline{OD} \\ \overline{AO} =_c \overline{OC} \end{array} \right\} (2) AC \perp BD$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} =_c \widehat{CAD} = 45^\circ \\ \widehat{ABD} =_c \widehat{DBC} = 45^\circ \end{array} \right\} (3)$$

Ángulos: Tienen cuatro ángulos rectos (todos miden 90°).

Lenguaje Simbólico: $\widehat{A} =_c \widehat{B} =_c \widehat{C} =_c \widehat{D} = 90^\circ$

RECTÁNGULO



Lados: (1) Los lados opuestos son congruentes y paralelos (2).

Lenguaje Simbólico:

$$\overline{AB} =_c \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} =_c \overline{AD}$$

$$\overline{BC} // \overline{AD} \text{ y } \overline{AB} // \overline{CD}$$

Diagonales: Las diagonales son congruentes (1) y se cortan mutuamente en el punto medio (2).

Lenguaje Simbólico:

$$\overline{AC} =_c \overline{BD} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AO} =_c \overline{OC} \\ \overline{BO} =_c \overline{OD} \end{array} \right\} (2)$$

Ángulos: Tiene cuatro ángulos rectos (todos miden 90°)

$$\text{Lenguaje Simbólico: } \hat{A} =_c \hat{B} =_c \hat{C} =_c \hat{D} = 90^\circ$$

ROMBO

Lados: Todos los lados son congruentes.

Lenguaje Simbólico: $\overline{AB} =_c \overline{BC} =_c \overline{CD} =_c \overline{AD}$

Diagonales: Las diagonales se cortan perpendicularmente (1) en su punto medio (2) y además son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen (3).

Lenguaje Simbólico:

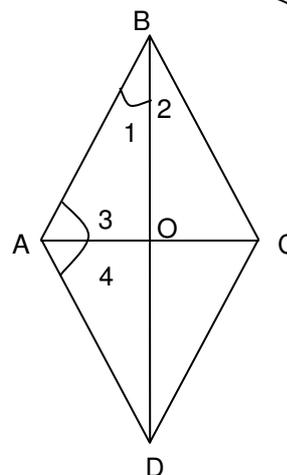
$$\overline{BD} \perp \overline{AC} (1)$$

$$\overline{AO} =_c \overline{OC}$$

$$\overline{BO} =_c \overline{OD} (2)$$

$$\hat{1} =_c \hat{2}$$

$$\hat{3} =_c \hat{4} (3)$$



Ángulos: Los ángulos opuestos son congruentes.

Lenguaje Simbólico: $\hat{A} =_c \hat{C}$ y $\hat{B} =_c \hat{D}$

ROMBOIDE

Lados: Tienen dos pares de lados consecutivos congruentes.

Lenguaje Simbólico: $\overline{AB} = \overline{BC}$
 $\overline{AD} = \overline{CD}$

Diagonales: Las diagonales son perpendiculares (1). La diagonal principal es la que es eje de simetría de la figura (en este caso BD es la diagonal principal) (2). La diagonal principal corta a la otra en su punto medio y es bisectriz de los ángulos cuyos vértices unen (3).

Lenguaje Simbólico:

$$\overline{AC} \perp \overline{BD} \quad (1)$$

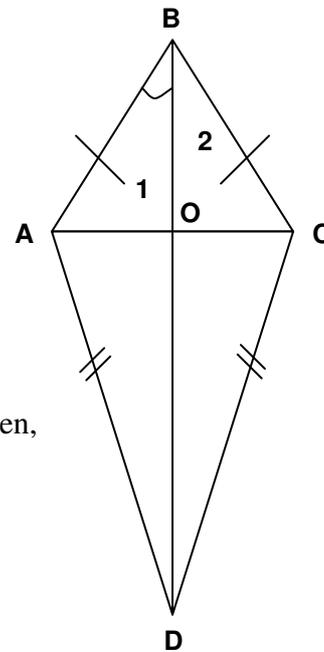
$$\overline{AO} = \overline{OC} \quad (2)$$

$$\widehat{1} = \widehat{2} \quad (3)$$

Ángulos: Los ángulos que unen la diagonal no principal son congruentes.

Lenguaje Simbólico: $\widehat{A} = \widehat{C}$

$\widehat{B} \neq \widehat{D}$ (ya que la diagonal AC no es eje de simetría de la figura, fíjese que si doblamos el romboide por la diagonal AC el ángulo B y el ángulo D no coinciden, por lo tanto no son congruentes)



PARALELOGRAM

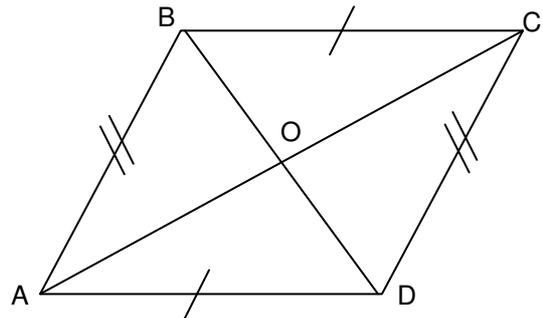
Lados: Los lados opuestos son congruentes (1) y paralelos (2).

Lenguaje Simbólico:

$$\overline{BC} = \overline{AD} \text{ y } \overline{AB} = \overline{CD} \quad (1)$$

$$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \text{ y } \overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad (2)$$

Diagonales: Las diagonales no son iguales pero se cortan mutuamente por su punto medio.



Lenguaje Simbólico: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$

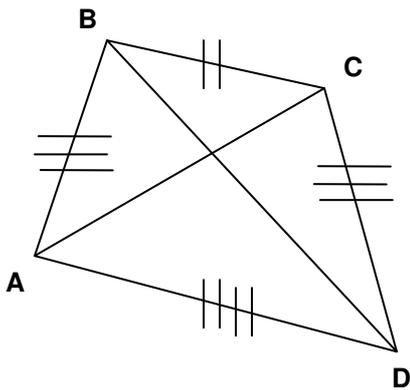
Ángulo: Los ángulos opuestos son congruentes (1) y los ángulos que están del mismo lado son conjugados internos entre paralelas (2), es decir que suman 180° .

Lenguaje Simbólico:

$$(1) \widehat{A} = \widehat{C} \text{ y } \widehat{B} = \widehat{D}$$

$$(2) \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ y } \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$$

TRAPECIO ESCALENO



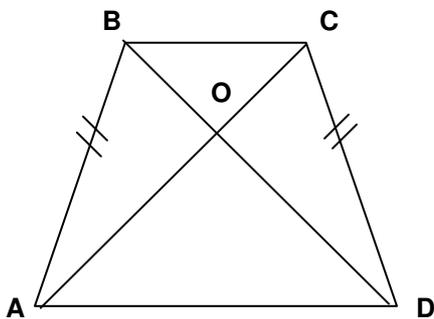
Lados: Tiene un par de lados paralelos (que se llaman bases) en este caso \overline{BC} y $\overline{AD} \Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Los cuatro lados son distintos.

Diagonales: son distintas y no se cortan en su punto medio.

Ángulos: los cuatro ángulos son distintos pero los ángulos del mismo lado son conjugados internos entre paralelas, es decir que suman 180° .

Lenguaje Simbólico: $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ y $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$

TRAPECIO ISÓSCELES



Lados: Tiene un par de lados paralelos que son las bases ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$). Los lados no paralelos son congruentes.

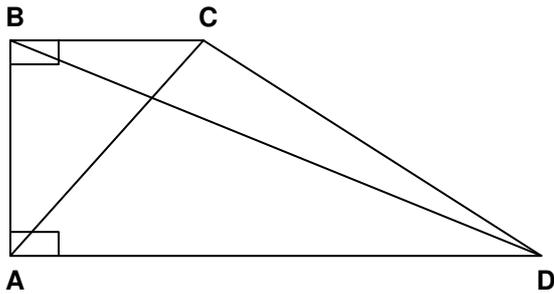
Lenguaje Simbólico: $\overline{AB} = \overline{CD}$

Diagonales: Las diagonales son congruentes pero no se cortan en el punto medio.

Lenguaje Simbólico: $\overline{AC} = \overline{BD}$
 $\overline{AO} \neq \overline{OC}$ y $\overline{BO} \neq \overline{OD}$

Ángulos: Los ángulos adyacentes a las bases son congruentes.

TRAPECIO RECTÁNGULO



Lados: Tiene un par de lados opuestos y paralelos (bases).

Lenguaje Simbólico: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Diagonales: No son congruentes.

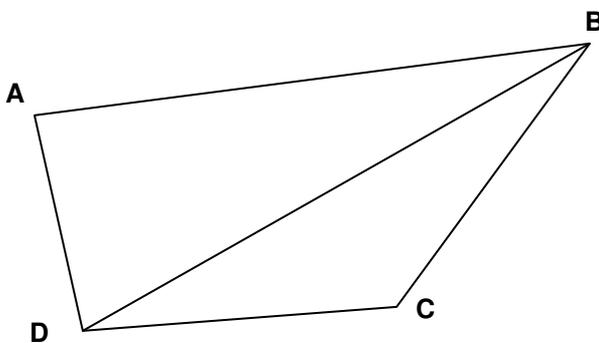
Lenguaje Simbólico: $\overline{AC} \neq \overline{BD}$

Ángulos: Tiene dos ángulos rectos

$\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$

ÁNGULOS INTERIORES DE UN CUADRILÁTERO

Cualquier cuadrilátero puede ser dividido en dos triángulos, si se traza una de sus diagonales.

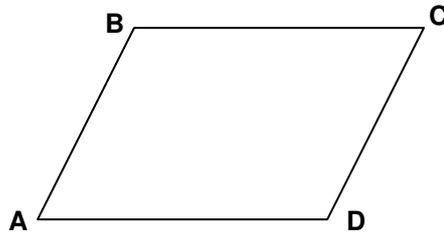


Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° , entonces la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$ (ya que quedan determinados dos triángulos).

Podemos decir entonces que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360° .

Trabajemos Juntos

1ª) Dado el siguiente paralelogramo ABCD, si el ángulo $\widehat{A} = 58^\circ$. Calcular los restantes ángulos del paralelogramo.



Para poder resolver este problema, debemos tener en cuenta las propiedades del paralelogramo. Se sabe que los ángulos opuestos de cualquier paralelogramo son congruentes, por lo tanto $\widehat{A} = \widehat{C}$ y $\widehat{B} = \widehat{D}$

Es decir:

$$\widehat{A} = 58^\circ \text{ entonces } \widehat{C} = 58^\circ$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 360^\circ - 58^\circ - 58^\circ$$

$$B + D = 244^\circ$$

$$\text{Pero con } B = D \text{ entonces } 2B = 244^\circ$$

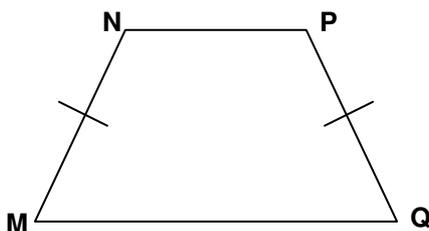
$$B = 122^\circ \text{ y } D = 122^\circ$$

O sea que: $\widehat{A} = \widehat{C}$ y $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow \widehat{C} = 58^\circ$ y $\widehat{D} = 122^\circ$

La suma de los 4 ángulos tiene que dar 360°, esta sería una forma de verificar el ejercicio.

2ª) Cuando en un problema de geometría los datos vienen dados por ecuaciones, primero debemos establecer las relaciones geométricas, es decir, debemos pensar en las propiedades de la figura que estamos analizando.

Veamos el siguiente ejemplo, dado un Trapecio Isósceles:



$$\widehat{M} = X + 40^\circ$$

$$\widehat{Q} = 2X - 20^\circ$$

Como se trata de un trapecio isósceles los ángulos de la base son congruentes, es decir:

$$\widehat{M} = \widehat{Q}$$

A partir de esta relación geométrica (que \widehat{M} y \widehat{Q} son congruentes), reemplazo los datos dados:

$$x + 40^\circ = 2x - 20^\circ$$

Me quedó planteada una ecuación, entonces tengo que resolverla, para eso despejamos x .

$$40^\circ + 20^\circ = 2x - x$$

$$\boxed{60^\circ = x}$$

Si $x=60$ reemplazo ahora este valor en cada uno de los ángulos.

$$\widehat{M} = x + 40^\circ = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$$

Para calcular el ángulo \widehat{N} , sabemos que $\overline{NP} \parallel \overline{MQ}$, por lo tanto \widehat{M} y \widehat{N} son ángulos conjugados internos entre paralelas y suman 180° .

$$\widehat{M} + \widehat{N} = 180^\circ$$

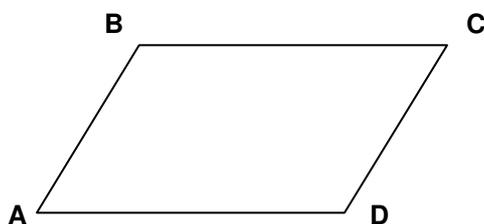
$$\widehat{N} = 180^\circ - \widehat{M}$$

$$\widehat{N} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

El ángulo \widehat{P} mide también 80° (entre los 4 ángulos deben sumar 360°).

Trabajemos Juntos

Dado el siguiente paralelogramo:



$$\overline{AB} = 2x + 6 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = x + 12 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 7 \text{ cm}$$

Se pide calcular el perímetro.

Pensemos en los datos que nos dieron. \overline{AB} y \overline{CD} , son dos lados del paralelogramo.

¿Cómo son esos lados?

Recordemos las propiedades del paralelogramo, respecto a los lados: “Los lados opuestos en un paralelogramo son iguales y paralelos”.

Por lo tanto $\overline{AB} = \overline{CD}$
 $2x + 6 \text{ cm} = x + 12 \text{ cm}$

Resolvemos la ecuación:

$$2x - x = 12 \text{ cm} - 6 \text{ cm}$$

$$x = 6 \text{ m}$$

Reemplazamos la x en los lados dados:

$$\overline{AB} = 2 \cdot 6 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = 6 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

Como tenemos que averiguar el perímetro del paralelogramo, sabemos que el mismo es la suma de todos los lados. O sea:

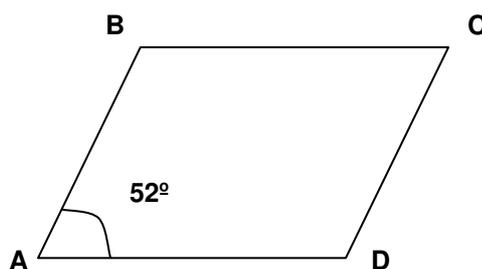
$$\text{Perímetro} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$$

$$= 18 \text{ cm} + 18 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$$

Observe que el lado $\overline{AD} = 7 \text{ cm}$, porque es igual a su opuesto \overline{BC} , que bien sabemos que es de 7 cm.

Trabajemos Juntos

Averiguar la medida de los ángulos que faltan en cada cuadrilátero.



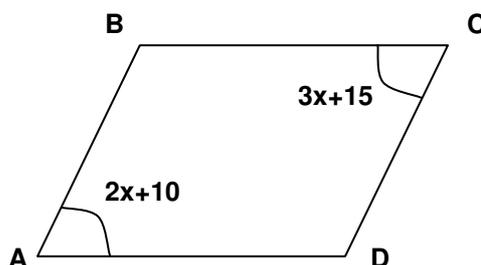
Si el ángulo \hat{A} vale 52° el ángulo \hat{B} vale $180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$, ya que como \hat{A} y \hat{B} son ángulos conjugados internos entre paralelas, la suma de ambos es igual a 180° . El ángulo \hat{C} es congruente con el A por lo tanto $\hat{C} = 52^\circ$ y \hat{D} es congruente con \hat{B} o sea es igual 128° .

b) En el siguiente trapecio isósceles el ángulo \hat{A} vale 74° , como se trata de un trapecio isósceles los ángulos de las bases son congruentes es decir el ángulo $\hat{D} = 74^\circ$.

Recordar que $\widehat{D} = \widehat{C}$ y que $\widehat{B} = \widehat{A}$.

Seguimos Trabajando Juntos

Hallar el valor de x en cada figura y los ángulos interiores de cada cuadrilátero.



Como el ángulo \widehat{A} es congruente con el ángulo \widehat{C} porque son ángulos opuestos en paralelogramos.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = 2x + 10^\circ \\ \widehat{C} = 3x - 15^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Podemos} \\ \text{igualarlos} \end{array}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$$

$$2x + 10^\circ = 3x - 15^\circ \quad \text{Nos queda una ecuación con una sola incógnita: } x$$

$$2x - 3x = -15^\circ - 10^\circ$$

$$-x = -25^\circ$$

$$\boxed{x = 25^\circ}$$

Como ya calculamos el valor de x podemos determinar ahora el ángulo $\widehat{A} = 2x + 10^\circ$ reemplazando ahora el valor de x .

$$\widehat{A} = 2 \cdot 25^\circ + 10^\circ = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$$

$$\widehat{A} = 60^\circ$$

$$\widehat{C} = \widehat{A} = 60^\circ$$

$$\widehat{C} = 3x - 15^\circ = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$

$$B + D = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = \dots\dots\dots$$

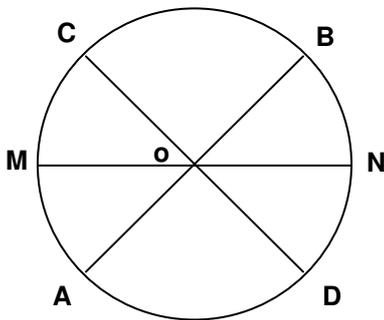
B = D entonces

$$B = \frac{\dots\dots\dots}{2}$$

FIGURAS CIRCULARES

Si tomamos una soga y la colocamos alrededor de un aro o de cualquier objeto circular, observaremos que la cantidad de soga necesaria para bordear dicho objeto es aproximadamente tres veces y un poco más la longitud del diámetro.

Entendemos por diámetro a cualquier segmento que pase por el centro de la circunferencia.



\overline{AB} ; \overline{CD} y \overline{MN} son diámetros.

Esta relación que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es un número irracional conocido con el nombre griego de Pi (π).

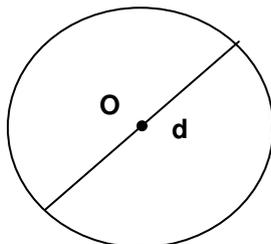
Nota: Se llama N° irracional porque contiene infinitas cifras decimales no periódicas, hasta el día de hoy la computadoras siguen buscando más cifras del número Pi.

Podemos entonces calcular la longitud de una circunferencia con la fórmula.

$$\text{Long } C(O;d) = \pi \cdot d$$



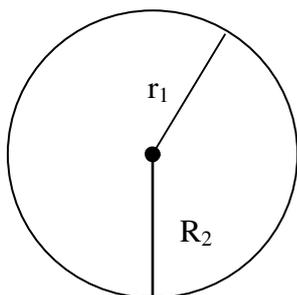
Se lee longitud de la circunferencia de centro O y diámetro d.



También podemos expresar la longitud de una circunferencia en función de su radio.

$$\text{Long } C(O; r) = 2 \pi r$$

Definición de Radio



Llamamos radio al segmento comprendido entre el centro de la circunferencia y su perímetro. Por ejemplo: r_1 y r_2 son radios.

Ejemplos:

- a) Calcular la longitud de una circunferencia cuyo radio es $r = 5\text{cm}$
Longitud = $2 \pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 5\text{cm} = 10\text{cm} \cdot 3,14 = 31,4\text{cm}$
- b) Calcular el diámetro de una circunferencia cuyo perímetro es igual a 400m.

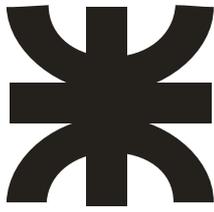
$$P = 2 \pi r$$

$$400\text{m} = 2 \pi r$$

$$\frac{400\text{m}}{2 \pi} = r$$

$$\frac{200\text{m}}{3,14} = r$$

$$\mathbf{r = 63,6\text{m}}$$



NOMBRE Y APELLIDO: _____

DEPENDENCIA: _____

Matemática

Actividad 10

1) En un rectángulo $abcd$ sus diagonales son $\overline{ac} = 4x - 10\text{ cm}$ y $\overline{bd} = 3x - 2\text{ cm}$.

Calcula la medida de sus diagonales. **GRAFICAR**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) En un rombo $abcd$, $a = 18^\circ$. Calcula \widehat{b} , \widehat{c} y \widehat{d} . **GRAFICAR**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) En un trapecio isósceles $abcd$, $bc // ad$ ¿Cuánto miden cada uno de sus lados no paralelos, si $\overline{ab} = 4x + 20\text{ cm}$ y $\overline{cd} = 2x + 36\text{ cm}$? **GRAFICAR**

.....

.....

.....

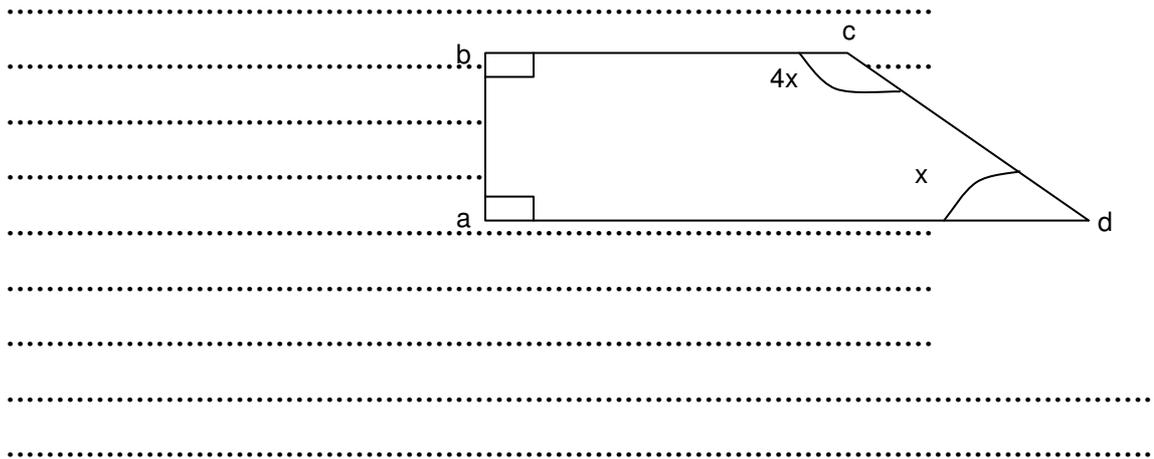
.....

.....

.....

.....

4) En el trapecio abcd:



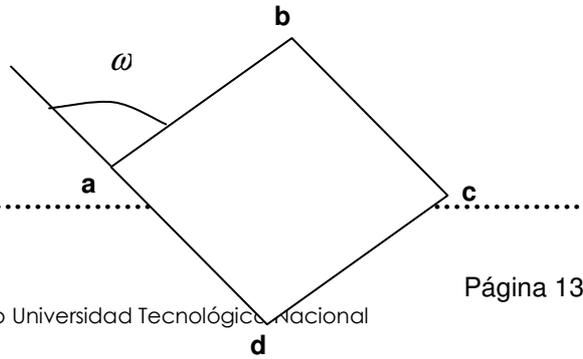
Calcular \hat{c} y \hat{d}

.....

5) En abcd paralelogramo:
 Hallar los 4 ángulos interiores.
 $\hat{a} = 125^\circ$

.....

6) En el rombo:
 Hallar los 4 ángulos interiores.
 $\hat{a} = 113^\circ$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

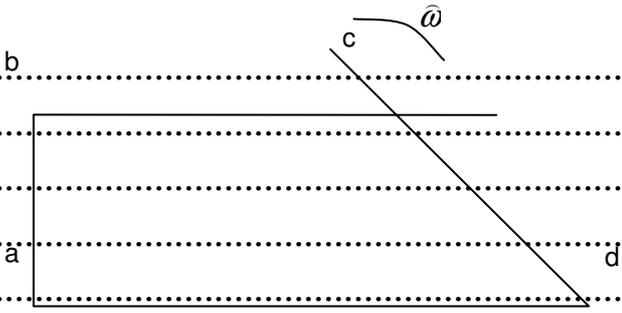
.....

.....

.....

.....

7) abcd trapecio rectángulo. GRAFICAR
 $\hat{\omega} = 114^\circ$
 Hallar los ángulos interiores.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

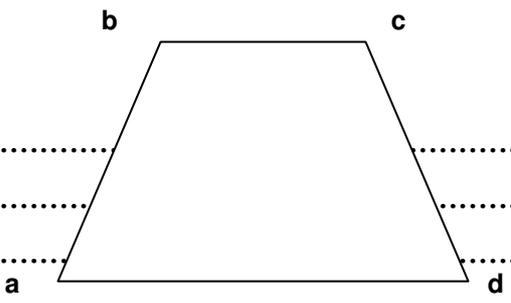
.....

.....

.....

.....

8) abcd trapecio isósceles
 $\overline{ab} = 3x - 7 \text{ cm}$
 $\overline{cd} = 2x + 2 \text{ cm}$
 Hallar los lados congruentes.



.....

.....

.....

.....

