Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES USANDO LA FUNCIÓN MÓDULO

Lic Adriana Favieri

http://adrimatematica.blogspot.com/

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Haedo

Marzo 2009

Ecuaciones e Inecuaciones con módulo

Vamos a resolver ecuaciones e inecuaciones usando la función módulo, por ello vamos a recordar su definición.

Definición Función Módulo

La función se define de la siguiente manera :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

$|3| = 3$

Ejemplo 2

$|-4| = 4$

Ecuaciones simples con sólo una expresión de módulo

Ejemplo 3

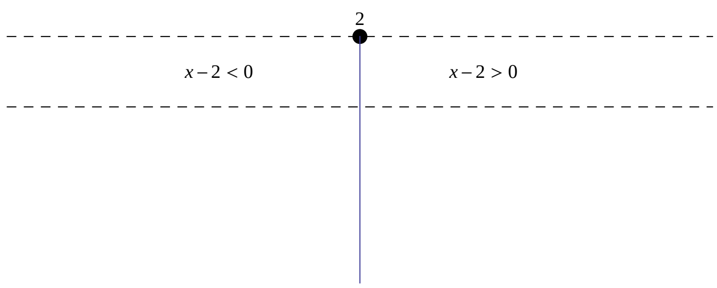
Vamos a resolver la ecuación

$|x - 2| = 6$

- Resolución algebraica

Para poder eliminar las barras de módulo hay que usar la definición, es decir, hay que saber cuándo lo que está dentro del módulo es positivo o negativo. Para hacer la resolución más sencilla vamos a utilizar un método gráfico, que nos ayuda a visualizar los intervalos en que la expresión que está afectada por el módulo es positiva o negativa.

En este caso en particular $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, entonces dividimos la recta numérica en dos intervalos y determinamos su signo :



Ahora que sabemos el signo pasamos a la ecuación y eliminamos las barras de módulo de acuerdo al mismo y resolvemos la ecuación.

2

$x-2<0$	$x-2>0$
$2-x=6$	$x-2=6$

2

$x-2<0$	$x-2>0$
$2-x=6$	$x-2=6$
$-x=4$	$x=8$

2

$x-2<0$	$x-2>0$
$2-x=6$	$x-2=6$
$-x=4$	$x=8$
$x=-4$	$x=8$

Y verificamos que el resultado esté dentro del intervalo en el que estamos trabajando. Si el resultado no está dentro del intervalo en el que estamos trabajando, entonces ese resultado no nos sirve, no es solución de la ecuación.

2

$x-2<0$	$x-2>0$
$2-x=6$	$x-2=6$
$-x=4$	$x=8$
$x=-4$	$x=8$

Entonces el conjunto solución es :

$\boxed{S=\{-4,\ 8\}}$

- Resolución geométrica

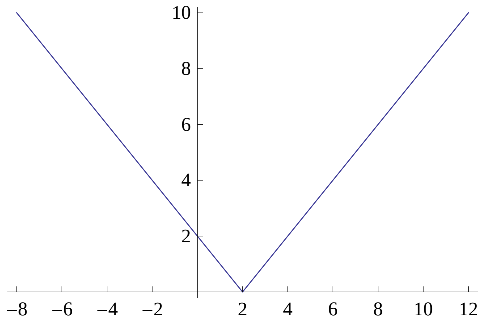
Geométricamente se interpreta como intersección de dos funciones :

la función módulo (a la izquierda de la igualdad)
la función constante (a la derecha de la igualdad)

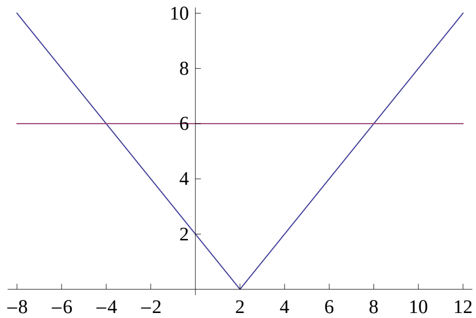
En nuestro caso las funciones son :
$y_1 = | x - 2 |$
$y_2 = 6$

Veamos

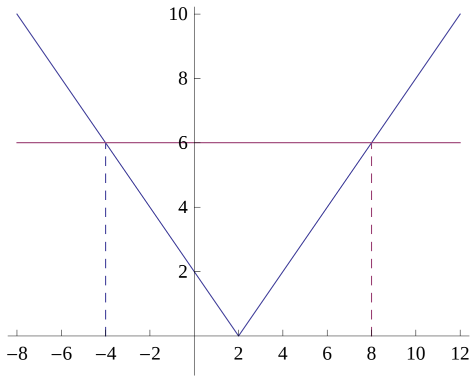
1) graficamos la función módulo $y_1 = | x - 2 |$



2) en el mismo gráfico trazamos $y_2 = 6$



3) observamos cuál son las abscisas de los puntos de intersección



y vemos que los puntos son : x = 4 x = 8

Ecuaciones con más de una expresión de módulo

Ejemplo 4

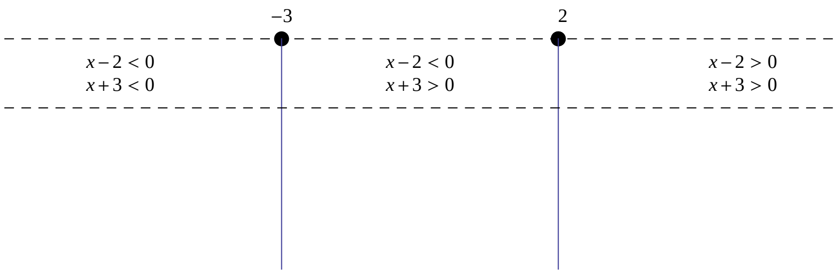
Vamos a resolver la ecuación

| x - 2 | + | x + 3 | =6

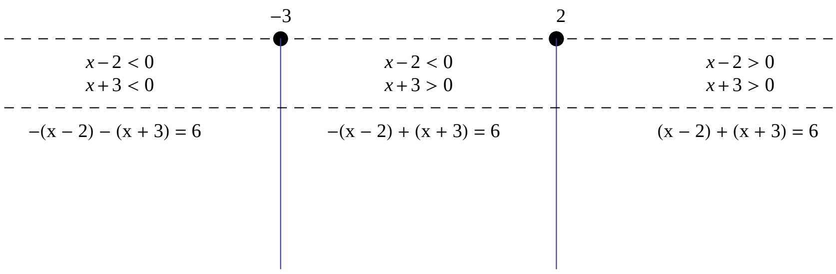
- Resolución algebraica

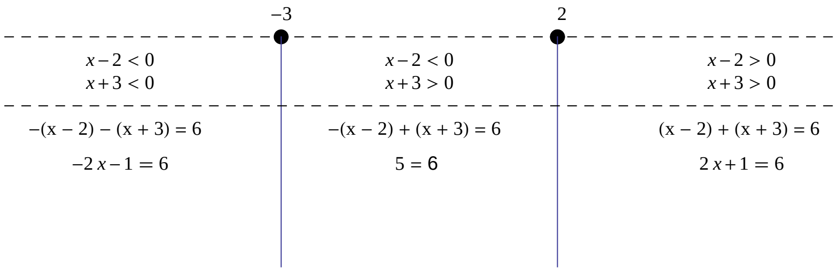
Para poder eliminar las barras de módulo hay que usar la definición, es decir, hay que saber cuándo lo que está dentro del módulo es positivo o negativo. Para hacer la resolución más sencilla vamos a utilizar un método gráfico, que nos ayuda a visualizar los intervalos en que la expresión que está afectada por el módulo es positiva o negativa.

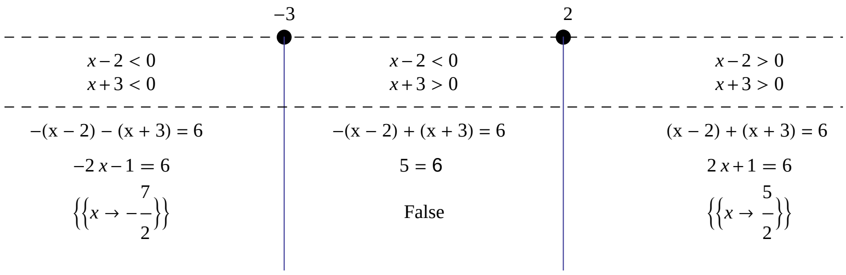
En este caso, como tenemos dos módulos, debemos considerar dos opciones
x - 2 = 0 ⇔ x = 2 y x + 3 = 0 ⇔ x = -3,
entonces dividimos la recta numérica en tres intervalos y determinamos el signo de cada expresión:



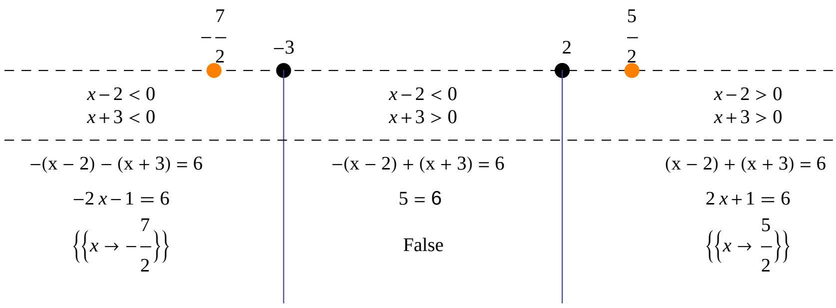
Ahora que sabemos el signo de cada expresión pasamos a la ecuación y eliminamos las barras de módulo de acuerdo al mismo y resolvemos la ecuación.







Y verificamos que los resultados obtenidos en cada intervalo estén en el mismo. Si el resultado no está dentro del intervalo en el que estamos trabajando, entonces ese resultado no nos sirve, no es solución de la ecuación.



Nota: que en el interval (-3,2) nos haya dado falso quiere decir que ningún valor del intervalo es solución.

Entonces el conjunto solución es :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}}$$

- Resolución geométrica

Geométricamente se interpreta como intersección de dos funciones :

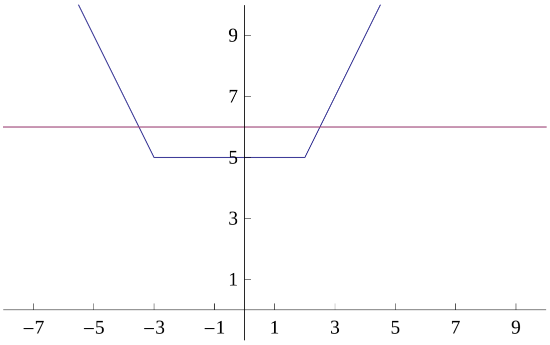
la función módulo (a la izquierda de la igualdad)
la función constante (a la derecha de la igualdad)

En nuestro caso las funciones son :
$y_1 = | x - 2 | + | x + 3 |$
$y_2 = 6$

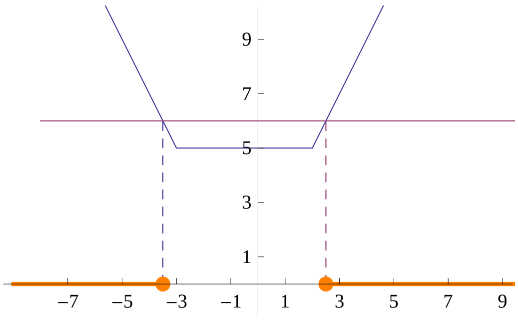
Veamos

1) graficamos la función módulo $y_1 = | x - 2 | + | x + 3 |$

2) en el mismo gráfico trazamos $y_2 = 6$



3) observamos cuál son las abscisas de los puntos de intersección, y el rango de valores comprendidos entre ellos será la solución.



Entonces el conjunto solución es :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}}$$

Ejercicios

- Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones, tanto en forma algebraica como geométrica

- Nivel 1

1) $|x-9|=5$ Rta: $x == 4 \,||\, x == 14$
2) $|x-5|=4$ Rta: $x == 1 \,||\, x == 9$
3) $|x-5|=10$ Rta: $x == -5 \,||\, x == 15$

4) $|x+3|=11$ Rta: $x == -14 \,||\, x == 8$
5) $|x+9|=1$ Rta: $x == -10 \,||\, x == -8$
6) $|x+3|=2$ Rta: $x == -5 \,||\, x == -1$

7) $|x-3|=2$ Rta: $x == 1 \,||\, x == 5$
8) $|x-5|=1$ Rta: $x == 4 \,||\, x == 6$
9) $|x-5|=11$ Rta: $x == -6 \,||\, x == 16$

10) $|x+4|=8$ Rta: $x == -12 \,||\, x == 4$
11) $|x+2|=2$ Rta: $x == -4 \,||\, x == 0$
12) $|x+8|=4$ Rta: $x == -12 \,||\, x == -4$

- Nivel 2

1) $|7x-5|=14$ Rta: $x == -\frac{9}{7} \,||\, x == \frac{19}{7}$
2) $|9x-4|=18$ Rta: $x == -\frac{14}{9} \,||\, x == \frac{22}{9}$
3) $|10x-4|=20$ Rta: $x == -\frac{8}{5} \,||\, x == \frac{12}{5}$

4) $|6x+7|=12$ Rta: $x == -\frac{19}{6} \,||\, x == \frac{5}{6}$
5) $|12x+7|=24$ Rta: $x == -\frac{31}{12} \,||\, x == \frac{17}{12}$
6) $|8x+6|=16$ Rta: $x == -\frac{11}{4} \,||\, x == \frac{5}{4}$

7) $|3x-5|=6$ Rta: $x == -\frac{1}{3} \,||\, x == \frac{11}{3}$
8) $|9x-9|=18$ Rta: $x == -1 \,||\, x == 3$
9) $|6x-7|=12$ Rta: $x == -\frac{5}{6} \,||\, x == \frac{19}{6}$

10) $|10x+6|=20$ Rta: $x == -\frac{13}{5} \,||\, x == \frac{7}{5}$
11) $|8x+2|=16$ Rta: $x == -\frac{9}{4} \,||\, x == \frac{7}{4}$
12) $|4x+7|=8$ Rta: $x == -\frac{15}{4} \,||\, x == \frac{1}{4}$

- Nivel 3

1) $|\frac{11}{14}x - \frac{1}{4}| = \frac{22}{3}$ Rta: $x == -\frac{85}{22} \,||\, x == \frac{91}{22}$
2) $|\frac{11}{14}x - \frac{1}{4}| = \frac{22}{3}$ Rta: $x == -\frac{85}{22} \,||\, x == \frac{91}{22}$
3) $|\frac{12}{17}x - \frac{5}{13}| = 8$ Rta: $x == -\frac{165}{26} \,||\, x == \frac{545}{78}$

4) $|\frac{2}{3}x + \frac{3}{7}| = 4$ Rta: $x == -\frac{31}{7} \,||\, x == \frac{25}{7}$
5) $|\frac{9}{13}x + \frac{2}{5}| = 6$ Rta: $x == -\frac{256}{45} \,||\, x == \frac{224}{45}$
6) $|\frac{4}{7}x + \frac{2}{3}| = \frac{16}{3}$ Rta: $x == -9 \,||\, x == 7$

7) $|\frac{4}{7}x - \frac{2}{3}| = \frac{16}{3}$ Rta: $x == -7 \,||\, x == 9$
8) $|\frac{8}{13}x - \frac{5}{9}| = \frac{16}{3}$ Rta: $x == -\frac{215}{36} \,||\, x == \frac{265}{36}$
9) $|\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}| = 6$ Rta: $x == -\frac{36}{5} \,||\, x == \frac{44}{5}$

10) $|\frac{7}{11}x + \frac{1}{2}| = \frac{14}{3}$ Rta: $x == -\frac{124}{21} \,||\, x == \frac{100}{21}$
11) $|\frac{2}{3}x + \frac{6}{13}| = 8$ Rta: $x == -\frac{110}{13} \,||\, x == \frac{98}{13}$
12) $|\frac{3}{4}x + \frac{4}{13}| = 8$ Rta: $x == -\frac{72}{13} \,||\, x == \frac{200}{39}$

- Nivel 4

1) $|x-4| + |x-8| = 11$ Rta: $x == \frac{1}{2} \,||\, x == \frac{23}{2}$
2) $|x-5| + |x-10| = 15$ Rta: $x == 0 \,||\, x == 15$
3) $|x-8| + |x-16| = 17$ Rta: $x == \frac{7}{2} \,||\, x == \frac{41}{2}$

4) $|x-6| + |x-12| = 18$ Rta: $x == 0 \,||\, x == 18$
5) $|x-9| + |x-18| = 16$ Rta: $x == \frac{11}{2} \,||\, x == \frac{43}{2}$
6) $|x-6| + |x-12| = 12$ Rta: $x == 3 \,||\, x == 15$

7) $|x-14| - |x-28| = \frac{7}{3}$ Rta: $x == \frac{35}{3}$
8) $|x-12| - |x-24| = 2$ Rta: $x == 10$
9) $|x-14| - |x-28| = \frac{7}{3}$ Rta: $x == \frac{35}{3}$

10) $|x-6| - |x-12| = 1$ Rta: $x == 5$
11) $|x-16| - |x-32| = \frac{8}{3}$ Rta: $x == \frac{40}{3}$
12) $|x-4| - |x-8| = \frac{2}{3}$ Rta: $x == \frac{10}{3}$

- Nivel 5

1) $8\ |x-5|+4\,|x-10\,|=83$ Rta: $x==-\frac{1}{4}\ ||\ x==\frac{163}{12}$
2) $10\ |x-7|+5\,|x-14\,|=143$ Rta: $x==-\frac{1}{5}\ ||\ x==\frac{283}{15}$
3) $10\ |x-5|+5\,|x-10\,|=103$ Rta: $x==-\frac{1}{5}\ ||\ x==\frac{203}{15}$

4) $6\ |x-6|+3\,|x-12\,|=75$ Rta: $x==-\frac{1}{3}\ ||\ x==\frac{49}{3}$
5) $6\ |x-4|+3\,|x-8\,|=51$ Rta: $x==-\frac{1}{3}\ ||\ x==11$
6) $4\ |x-2|+2\,|x-4\,|=19$ Rta: $x==-\frac{1}{2}\ ||\ x==\frac{35}{6}$

7) $4\ |x-7|-2\,|x-14\,|=56$ Rta: $x==-28\ ||\ x==28$
8) $6\ |x-3|-3\,|x-6\,|=36$ Rta: $x==-12\ ||\ x==12$
9) $10\ |x-8|-5\,|x-16\,|=160$ Rta: $x==-32\ ||\ x==32$

10) $8\ |x-3|-4\,|x-6\,|=48$ Rta: $x==-12\ ||\ x==12$
11) $4\ |x-4|-2\,|x-8\,|=32$ Rta: $x==-16\ ||\ x==16$
12) $6\ |x-2|-3\,|x-4\,|=24$ Rta: $x==-8\ ||\ x==8$

Inecuaciones simples con sólo una expresión de módulo

Ejemplo 5

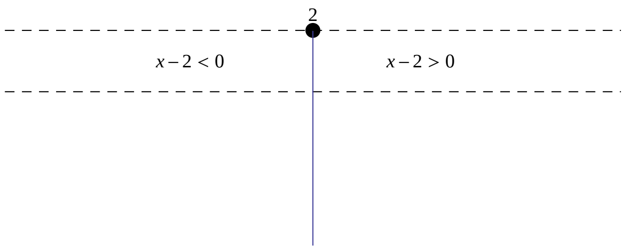
Vamos a resolver la ecuación

$| x - 2 | \geq 6$

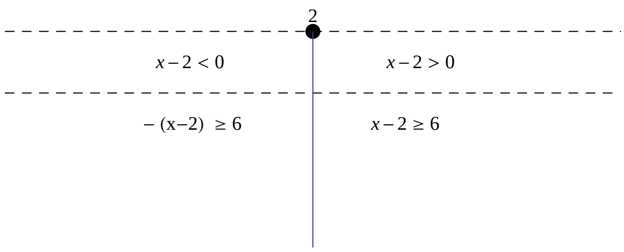
- Resolución algebraica

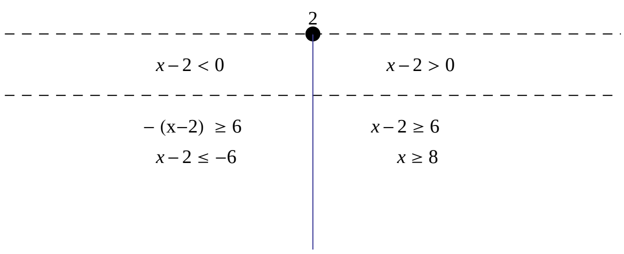
Para poder eliminar las barras de módulo hay que usar la definición, es decir, hay que saber cuándo lo que está dentro del módulo es positivo o negativo. Para hacer la resolución más sencilla vamos a utilizar un método gráfico, que nos ayuda a visualizar los intervalos en que la expresión que está afectada por el módulo es positiva o negativa.

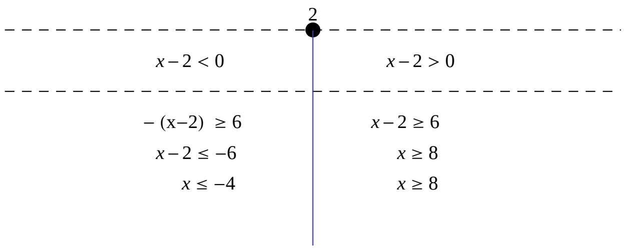
En este caso en particular x - 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2, entonces dividimos la recta numérica en dos intervalos y determinamos su signo :



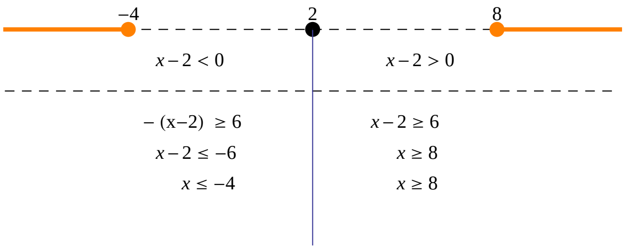
Ahora que sabemos el signo pasamos a la ecuación y eliminamos las barras de módulo de acuerdo al mismo y resolvemos la ecuación.







Y verificamos que el resultado esté dentro del intervalo en el que estamos trabajando. Si el resultado no está dentro del intervalo en el que estamos trabajando, entonces ese resultado no nos sirve, no es solución de la ecuación.



Entonces el conjunto solución es :

$$\boxed{S = (-\infty,\ -4] \cup [8,\ +\infty)}$$

- Resolución geométrica

Geométricamente se interpreta como intersección de dos funciones

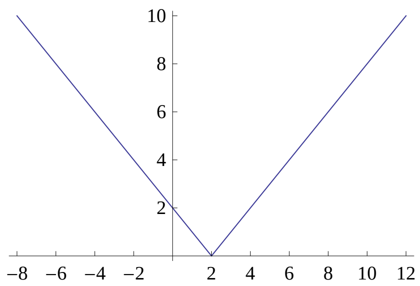
la función módulo (a la izquierda de la igualdad)
la función constante (a la derecha de la igualdad)

y luego se analiza en el gráfico, de acuerdo a la inecuación, para qué valores de x la función de la izquierda se mantiene menor o mayor que la función de la derecha.

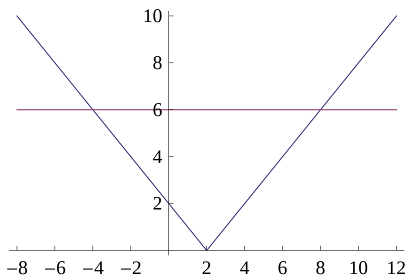
En nuestro caso las funciones son :
$y_1 = | x - 2 |$
$y_2 = 6$

Veamos

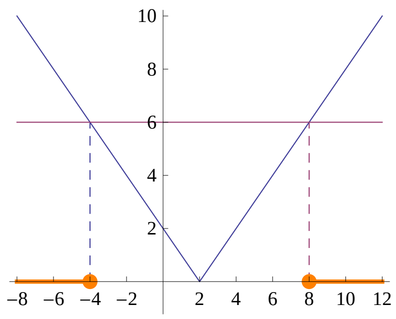
1) graficamos la función módulo $y_1 = | x - 2 |$



2) en el mismo gráfico trazamos $y_2 = 6$



3) observamos cuál son las abscisas de los puntos de intersección



y vemos que el gráfico del módulo se mantiene mayor (por encima) que el gráfico de y= 6, para los $x \leq 4$ $x \geq 8$

Entonces el conjunto solución es : $\boxed{S = (-\infty, \ -4] \cup [8, \ +\infty)}$

Inecuaciones con más de una expresión de módulo

Ejemplo 6

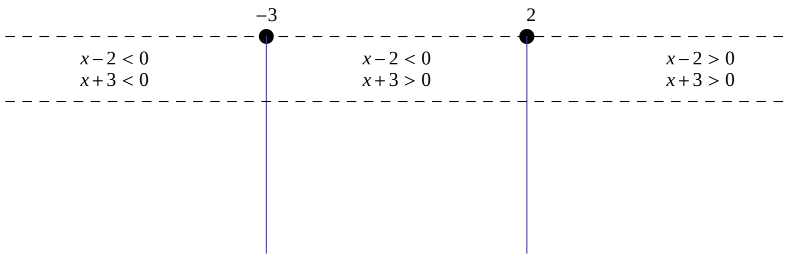
Vamos a resolver la ecuación

$| x- 2 | +| x+ 3 | \geq 6$

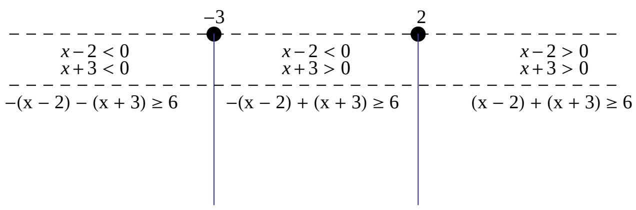
- Resolución algebraica

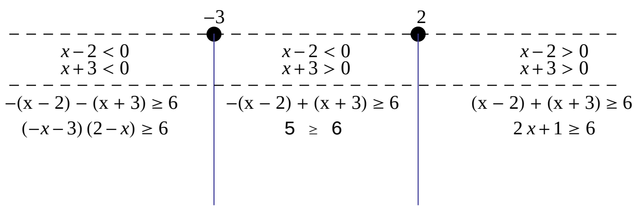
Para poder eliminar las barras de módulo hay que usar la definición, es decir, hay que saber cuándo lo que está dentro del módulo es positivo o negativo. Para hacer la resolución más sencilla vamos a utilizar un método gráfico, que nos ayuda a visualizar los intervalos en que la expresión que está afectada por el módulo es positiva o negativa.

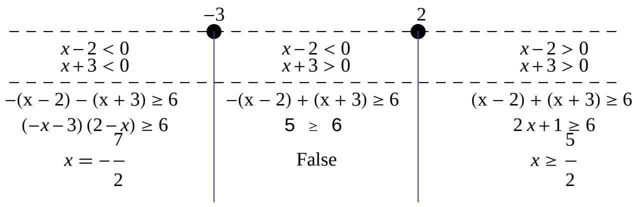
En este caso, como tenemos dos módulos, debemos considerar dos opciones
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ y $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$,
entonces dividimos la recta numérica en tres intervalos y determinamos el signo de cada expresión:



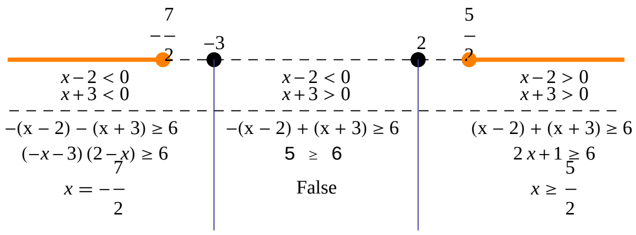
Ahora que sabemos el signo de cada expresión pasamos a la ecuación y eliminamos las barras de módulo de acuerdo al mismo y resolvemos la ecuación.







Y verificamos que los resultados obtenidos en cada intervalo estén en el mismo. Si el resultado no está dentro del intervalo en el que estamos trabajando, entonces ese resultado no nos sirve, no es solución de la ecuación.



Nota: que en el interval (-3,2) nos haya dado falso quiere decir que ningún valor del intervalo es solución.

Entonces el conjunto solución es :

$$\boxed{S = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)}$$

■ Resolución geométrica

Geométricamente se interpreta como intersección de dos funciones :

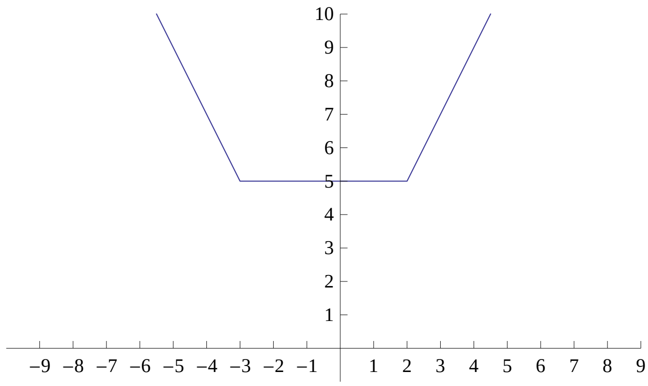
la función módulo (a la izquierda de la igualdad)
la función constante (a la derecha de la igualdad)

y luego se analiza en el gráfico, de acuerdo a la inecuación, para qué valores de x la función de la izquierda se mantiene menor o mayor que la función de la derecha.

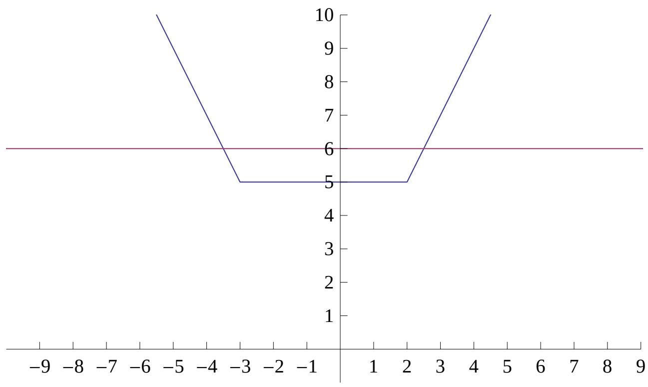
En nuestro caso las funciones son :
y_1 = | x - 2 |
y_2 = 6

Veamos

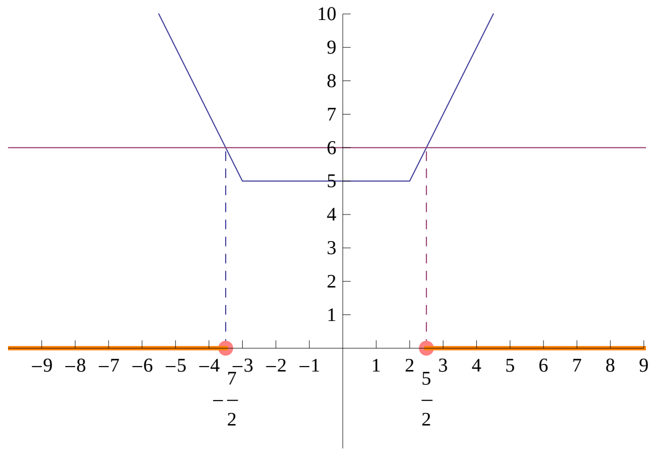
1) graficamos la función módulo y_1 = | x - 2 |



2) en el mismo gráfico trazamos y_2 = 6



3) observamos cuál son las abscisas de los puntos de intersección



y vemos que el gráfico del módulo se mantiene mayor (por encima) que el gráfico de y= 6, para los $x \leq -\frac{7}{2}$ $x \geq \frac{5}{2}$

Entonces el conjunto solución es :

$$\boxed{S = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)}$$

Ejercicios

- Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, tanto en forma algebraica como geométrica

- Nivel 1

1) $|x-2| > 6$ Rta: $x < -4 \,||\, x > 8$
2) $|x-7| > 11$ Rta: $x < -4 \,||\, x > 18$
3) $|x-9| > 11$ Rta: $x < -2 \,||\, x > 20$

4) $|x+8| > 5$ Rta: $x < -13 \,||\, x > -3$
5) $|x+5| > 12$ Rta: $x < -17 \,||\, x > 7$
6) $|x+9| > 2$ Rta: $x < -11 \,||\, x > -7$

7) $|x-9| < 6$ Rta: $3 < x < 15$
8) $|x-3| < 11$ Rta: $-8 < x < 14$
9) $|x-6| < 6$ Rta: $0 < x < 12$

10) $|x+7| < 10$ Rta: $-17 < x < 3$
11) $|x+7| < 5$ Rta: $-12 < x < -2$
12) $|x+9| < 12$ Rta: $-21 < x < 3$

- Nivel 2

1) $|5x-3|>10$ Rta: $x<-\frac{7}{5} \,||\, x>\frac{13}{5}$
2) $|12x-8|>24$ Rta: $x<-\frac{4}{3} \,||\, x>\frac{8}{3}$
3) $|6x-2|>12$ Rta: $x<-\frac{5}{3} \,||\, x>\frac{7}{3}$

4) $|6x+6|>12$ Rta: $x<-3 \,||\, x>1$
5) $|3x+7|>6$ Rta: $x<-\frac{13}{3} \,||\, x>-\frac{1}{3}$
6) $|11x+2|>22$ Rta: $x<-\frac{24}{11} \,||\, x>\frac{20}{11}$

7) $|7x-8|<14$ Rta: $-\frac{6}{7}<x<\frac{22}{7}$
8) $|7x-2|<14$ Rta: $-\frac{12}{7}<x<\frac{16}{7}$
9) $|4x-2|<8$ Rta: $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$

10) $|12x+8|<24$ Rta: $-\frac{8}{3}<x<\frac{4}{3}$
11) $|2x+6|<4$ Rta: $-5<x<-1$
12) $|3x+4|<6$ Rta: $-\frac{10}{3}<x<\frac{2}{3}$

- Nivel 3

1) $|\frac{2}{3}x-\frac{6}{13}|>8$ Rta: $x<-\frac{98}{13} \,||\, x>\frac{110}{13}$
2) $|\frac{4}{7}x-\frac{2}{3}|>\frac{16}{3}$ Rta: $x<-7 \,||\, x>9$
3) $|\frac{5}{8}x-\frac{6}{11}|>\frac{20}{3}$ Rta: $x<-\frac{404}{55} \,||\, x>\frac{476}{55}$

4) $|\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}|>6$ Rta: $x<-\frac{44}{5} \,||\, x>\frac{36}{5}$
5) $|\frac{2}{3}x+\frac{3}{7}|>4$ Rta: $x<-\frac{31}{7} \,||\, x>\frac{25}{7}$
6) $|\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}|>\frac{10}{3}$ Rta: $x<-\frac{23}{5} \,||\, x>\frac{17}{5}$

7) $|\frac{5}{7}x-\frac{4}{11}|<\frac{20}{3}$ Rta: $-\frac{832}{165}<x<\frac{928}{165}$
8) $|\frac{9}{13}x-\frac{2}{5}|<6$ Rta: $-\frac{224}{45}<x<\frac{256}{45}$
9) $|\frac{8}{13}x-\frac{5}{9}|<\frac{16}{3}$ Rta: $-\frac{215}{36}<x<\frac{265}{36}$

10) $|\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}|<\frac{10}{3}$ Rta: $-\frac{25}{3}<x<5$
11) $|\frac{11}{13}x+\frac{1}{6}|<\frac{22}{3}$ Rta: $-\frac{30}{11}<x<\frac{86}{33}$
12) $|\frac{5}{9}x+\frac{2}{3}|<\frac{10}{3}$ Rta: $-\frac{32}{5}<x<\frac{64}{15}$

- Nivel 4

1) $|x-8|+|x-16|>14$ Rta: $x<5 \,||\, x>19$
2) $|x-7|+|x-14|>11$ Rta: $x<5 \,||\, x>16$
3) $|x-3|+|x-6|>16$ Rta: $x<-\frac{7}{2} \,||\, x>\frac{25}{2}$

4) $|x-2|+|x-4|<15$ Rta: $-\frac{9}{2}<x<\frac{21}{2}$
5) $|x-4|+|x-8|<17$ Rta: $-\frac{5}{2}<x<\frac{29}{2}$
6) $|x-4|+|x-8|<12$ Rta: $0<x<12$

7) $|x-16|-|x-32|>\frac{8}{3}$ Rta: $x>\frac{40}{3}$
8) $|x-10|-|x-20|>\frac{5}{3}$ Rta: $x>\frac{25}{3}$
9) $|x-8|-|x-16|>\frac{4}{3}$ Rta: $x>\frac{20}{3}$

10) $|x-12|-|x-24|<2$ Rta: $x<10$
11) $|x-6|-|x-12|<1$ Rta: $x<5$
12) $|x-10|-|x-20|<\frac{5}{3}$ Rta: $x<\frac{25}{3}$

- Nivel 5

1) $8\,|x-9|+4\,|x-18|>147$ Rta: $x<-\frac{1}{4} \,||\, x>\frac{97}{4}$
2) $4\,|x-4|+2\,|x-8|>35$ Rta: $x<-\frac{1}{2} \,||\, x>\frac{67}{6}$
3) $10\,|x-3|+5\,|x-6|>63$ Rta: $x<-\frac{1}{5} \,||\, x>\frac{41}{5}$

4) $10\,|x-6|+5\,|x-12|<123$ Rta: $-\frac{1}{5}<x<\frac{81}{5}$
5) $8\,|x-9|+4\,|x-18|<147$ Rta: $-\frac{1}{4}<x<\frac{97}{4}$
6) $8\,|x-7|+4\,|x-14|<115$ Rta: $-\frac{1}{4}<x<\frac{227}{12}$

7) $4\,|x-6|-2\,|x-12|>48$ Rta: $x<-24 \,||\, x>24$
8) $10\,|x-4|-5\,|x-8|>80$ Rta: $x<-16 \,||\, x>16$
9) $10\,|x-6|-5\,|x-12|>120$ Rta: $x<-24 \,||\, x>24$

10) $8\,|x-9|-4\,|x-18|<144$ Rta: $-36<x<36$
11) $6\,|x-9|-3\,|x-18|<108$ Rta: $-36<x<36$
12) $4\,|x-6|-2\,|x-12|<48$ Rta: $-24<x<24$