Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

Dos enfoques en la enseñanza de la noción de límite de funciones reales de una variable real

Lic. Graciela Elena Gay

Profesora Adjunta de Análisis Matemático I y III
Facultad Regional Concordia
Universidad Tecnológica Nacional (U.T.N.) - Argentina

El presente trabajo ha sido la Tesina de Graduación de la carrera Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Lomas de Zamora - Argentina.
La Tesina ha tenido por Directora a la Magister Marta Beatríz Bergallo, Profesora con Dedicación Exclusiva en la Universidad Nacional del Litoral, en la Carrera Licenciatura en Matemática Aplicada de la Facultad de Ingeniería Química.

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - edUTecNe

http://www.edutecne.utn.edu.ar

edutecne@utn.edu.ar

“Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar
mediante el estudio
servirle de ayuda y ornato”

Francis Bacon.

Dos enfoques en la enseñanza de la noción de límite de funciones reales de una variable real.

“Me complace la oportunidad de mencionar las personas a quienes debo mi agradecimiento. En primer lugar a la directora de este trabajo la Mg. Marta B. Bergallo por su dedicación, esfuerzo y generosidad con que llevó adelante esta obra. Al Dr. Roberto Macías y a la Dra. Olga Avila por sus aportes y sugerencias luego de leer los manuscritos de este trabajo; y a mi esposo e hijos por la paciencia que me brindaron. A todos ellos muchísimas gracias.”

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En nuestra cultura la noción de límite ya estaba en los griegos, con el método de exhaución para encontrar magnitudes geométricas (longitud, área, etc.). El ingenio de los matemáticos del siglo XVII, especialmente Newton y Leibniz, al idear y perfeccionar estrategias de pensamiento eficaces para modelar matemáticamente los cambios y las transformaciones en los fenómenos físicos, y ante el desafío de cuantificar y tratar adecuadamente las relaciones de causa y efecto, condujeron a la elaboración de las ideas fundamentales del cálculo. Ha sido necesario el trabajo de muchas generaciones de matemáticos para llegar a la expresión que hoy se puede dar a la noción de límite, presentable y manejable incluso en un nivel elemental [1].

Con todo, el cálculo infinitesimal presenta profundidades que asombran y ponen a prueba la pericia de los más expertos [2]. Por ello muchos alumnos que se introducen por primera vez en terreno tan sutil experimentan dificultades ante ciertos puntos especialmente delicados, que abundan en el campo [3]. Es natural que nuestros estudiantes encuentren difícil aquello que el trabajo colectivo de muchos matemáticos tardó varios siglos en pulir adecuadamente hasta llegar a su forma actual [4]. En consecuencia la enseñanza del cálculo es un tanto delicada, por lo que debemos procurar no dejar de lado la explicitación de las motivaciones de los modos de pensar, para que sea más suave y llevadera la tarea de quienes empiezan [5, 6].

Los profesores de cálculo sabemos que la noción de límite de funciones de una variable es una de las más difíciles de manejar. La experiencia y las investigaciones en la enseñanza del límite funcional muestran que no sólo es difícil una primera comprensión de la definición, sino que lograr una relativa confianza en el uso la manipulación de dichas definiciones (hacer cuentas) lleva todo el curso, y conseguir una internalización de esta idea lleva varios años a los aprendices del cálculo [7, 8].

Bernard Cornu ha realizado investigaciones donde se combinan los estudios epistemológicos y el análisis de las respuestas de los alumnos, de dieciocho años aproximadamente, enfrentados a tareas y procesos de aprendizaje donde está involucrado el concepto de límite [9]. Este investigador insiste en la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite que radica no sólo en su riqueza y complejidad sino en el hecho que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática. Sostiene el autor que se puede recordar la definición del concepto, pero construir la concepción fundamental es algo muy distinto.

En este trabajo se presentan dos definiciones del límite de una función real de variable real, basadas en diferentes puntos de vista, y se pretende evaluar el grado de asimilación de cada una de estas definiciones, estableciendo una comparación entre los resultados del proceso enseñanza-aprendizaje, obtenidos mediante cada uno de los enfoques propuestos.

Una de las definiciones presentadas, se basa en el concepto de entorno, que es en general, como se ha enseñado límite funcional real de una variable real en estos últimos años. La otra definición involucra sucesiones de números reales. Debido a estas características, nos referiremos al estudio de límite funcional basado en la primera definición como el enfoque clásico o continuo y al que se basa en la segunda, como el enfoque discreto.

En este trabajo exponemos la experiencia llevada a cabo con estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática de la ciudad de Concordia perteneciente a la provincia de Entre Ríos. Dicha experiencia consistió en enseñar a dos grupos homogéneos de alumnos de primer año de dicha carrera, en la materia Análisis Matemático I, las nociones de límite funcional real de una variable real con un enfoque distinto en cada grupo.

Basados en la experiencia de la autora de este trabajo en la enseñanza de estas nociones a estudiantes que han iniciado la carrera de Profesorado de Matemática, y luego de un exhaustivo estudio del tema propuesto con ambos enfoques, formulamos las hipótesis a ser investigadas en este trabajo. Ellas se refieren al grado de asimilación, comprensión y manipulación de las nociones de límite funcional real de una variable real, alcanzado por los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática de la ciudad de Concordia, cuando estos alumnos han aprendido estas nociones con sendos enfoques metodológicos. Para estudiar estas hipótesis, cada uno de los grupos que habíamos formado, fue considerado como una muestra estadística del conjunto de estudiantes de primer año de la carrera antes mencionada. Luego de la transposición de los contenidos, evaluamos los niveles de aprendizaje de las nociones internalizadas por los estudiantes de cada muestra, mediante la resolución de ejercicios en forma individual y presencial. Posteriormente, utilizamos la información obtenida a partir de las evaluaciones para estudiar, estadísticamente y desde un punto de vista cuantitativo, las hipótesis de investigación antes formuladas.

Durante el desarrollo de esta experiencia realizamos un seguimiento continuo de los estudiantes no sólo para determinar el grado de comprensión de las definiciones y propiedades que estábamos enseñando, sino también para detectar las dificultades que estos alumnos presentaban. Este seguimiento nos permitió retroalimentar la acción docente, e insistir en ciertos puntos delicados que existen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las nociones de límite funcional mediante estos enfoques.

Esta obra está dividida en capítulos. En el capítulo segundo presentamos la definición del límite funcional real de una variable real correspondiente a cada uno de los dos enfoques trabajados. Seguidamente proponemos las hipótesis a ser investigadas en este trabajo y describimos la experiencia desarrollada durante el primer cuatrimestre del ciclo lectivo del año 2005, la cual nos permitió analizar las hipótesis propuestas al comienzo.

En el capítulo tres presentamos las notas teóricas sobre sucesiones y una noción intuitiva de límite funcional. Estos contenidos fueron desarrollados en los dos grupos en forma conjunta. Además, estas notas contienen los conceptos previos necesarios para desarrollar posteriormente las nociones de límite funcional a partir de sucesiones de números reales.

En los capítulos cuatro y cinco incluimos las notas teórico-prácticas sobre las nociones de límite de funcional real de variable real, desarrolladas con los enfoques clásico y discreto, respectivamente. Dichas notas han sido escritas de tal manera que su lectura resulte amena y su comprensión accesible, en particular para los estudiantes de Cálculo I de cualquier carrera, especialmente en aquellas que tienen una formación fuerte en Matemática. Las notas sobre el límite funcional real con el enfoque clásico, fueron confeccionadas sobre la base del libro "Calculus I"de los autores Salas y Hille [10]. Dicho libro se adapta muy bien a la asignatura Análisis Matemático I de la carrera Profesorado de Matemática, poniendo énfasis en tres ideas básicas: el límite, la derivada y la integral, siendo riguroso en las demostraciones de los distintos resultados. Hemos agregado en estas notas algunos resultados que consideramos importantes, especialmente aquellos que permitieran establecer claramente diferencias entre un enfoque y otro, como puede ser, por ejemplo, la no existencia de un límite.

En cuanto a las notas teóricas del mismo tema con enfoque discreto, fueron realizadas luego de una ardua búsqueda bibliográfica. Tuvimos en cuenta los conceptos propuestos en el libro "Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático"de los autores Miguel de Guzmán y Baldomero Rubio [11] y fueron confeccionadas de manera que resulten paralelas a las correspondientes al enfoque clásico. Es decir, los mismos resultados sobre límite finito han sido escritos con los dos enfoques metodológicos.

En el capítulo seis exhibimos las notas en donde explicamos y demostramos la equivalencia entre las dos definiciones metodológicas dadas, como cierre teórico del tema tratado, punto que fue desarrollado en forma simultánea en ambos grupos.

En el capítulo siete mostramos el estudio estadístico realizado con los resultados de las evaluaciones de sendas muestras, el cual midió desde un punto de vista cuantitativo el grado de asimilación y manipulación de la definición y propiedades de las nociones de límite funcional real, alcanzado por los estudiantes de cada grupo.

Para finalizar este trabajo presentamos las conclusiones obtenidas a partir del estudio que llevamos a cabo en el capítulo anterior y del seguimiento permanente realizado a los estudiantes de cada muestra durante el desarrollo de la experiencia.

Capítulo 2

Objetivos y Metodología

2.1. Introducción

La idea y definición de límite, en especial la del límite de funciones reales, es una cuestión matemáticamente delicada. Piénsese que se logró la definición $\varepsilon - \delta$ actual recién en la segunda mitad del siglo XIX. El abordaje de este tema ofrece dificultades de índole técnico-didáctica que hace que la comprensión fina de él ocurra en etapas sucesivas y posteriores, cuando el estudiante logre una madurez matemática suficiente.

En la primera etapa del siglo XX el tratamiento del concepto de límite en los libros españoles estaba ligado a los conceptos de sucesión y variable. Además la idea de infinitésimo estaba implícitamente subyacente en ella y, efectivamente, el lenguaje de infinitésimos se utilizaba abundantemente a lo largo del tema. La definición del límite funcional real de una variable real a partir de sucesiones de números reales, fue usada en los libros hispánicos hasta aproximadamente 1965. En esta época esta definición fue completada con una interpretación geométrica del límite de una función en un punto, la cual utilizó entornos simétricos.

Como es bien conocido, a comienzos de los años setenta, triunfó en casi todo el mundo occidental la enseñanza de las llamadas "matemáticas modernas". Siguiendo los libros españoles las ideas de esta matemática, los conjuntos y las aplicaciones eran los cimientos sobre los que se pretendía construir el edificio de la matemática, y las estructuras, las herramientas para construir dicho edificio. Estas ideas se vieron reflejadas en el tratamiento del límite: la orientación topológica, no fue casual sino que fue justamente la preconizada por los pioneros de la reforma de la matemática, Papy y Dieudonné entre otros, de acuerdo con las ideas bourbakistas. Por ello los conceptos de conjunto, número real y entorno se utilizaban constantemente. En la segunda mitad del siglo XX, aproximadamente entre 1967 y 1975, la definición de límite fue evolucionando hasta un mayor formalismo. En algunos libros españoles se enfatizó la definición por sucesiones, aunque también apareció de modo residual la definición topológica que utilizó entornos generales; en cambio en otros textos del mismo país se enfatizó la definicón topológica y se quiso conducir progresivamente al alumno a partir de ciertos ejemplos hasta dicha definición. Las notaciones evolucionaron desde las correspondientes a la definición de límite por sucesiones hasta la definición topológica, adaptándose a cada tipo de definición; y se inició el uso de la simbología de los cuantificadores.

A medidados de la década del setenta, sugerido como una orientación didáctica en los nuevos diseños curriculares españoles, se escribió una definición de límite funcional donde los entornos de la definición topológicos se expresaban como distancias entre puntos, y donde también se utilizaron los símbolos de los cuantificadores. A esta definición se la llamó métrica. Estos diseños curriculares se implementaron en la mayoría de los países del mundo occidental, salvo raras excepciones, y su aceptación fue universal.

Desde 1980 hasta nuestros días, la definición de límite se presenta prioritariamente en forma métrica, aunque también se utilizan las definiciones por sucesiones y la topológica. La definición métrica la llamamos definición clásica del límite funcional real de una variable real, puesto que ella es la que nos acompaña en casi todos los libros desde 1980 hasta hoy [12].

En el siguiente capítulo presentamos dos definiciones del límite funcional real que darán lugar a los dos enfoques tratados en este trabajo para la enseñanza del mencionado tema. Asimismo formulamos conjeturas sobre los resultados de dicho proceso de enseñanza-aprendizaje desde ambos puntos de vista, e incluimos una descripción de la metodología empleada para evaluar tales conjeturas.

2.2. Dos definiciones de un mismo concepto

La definición clásica de límite de una función de variable real como puede ser encontrada en un libro de cálculo, como por ejemplo el de *Salas y Hille* [10], dice:

Definición 2.1 **($\varepsilon - \delta$).** *Sea f una función definida al menos en algún conjunto de la forma $(c-p;c)\cup(c;c+p)$ con $p>0$. Se dice que l es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c, y se simboliza*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l,$$

si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$ entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Ejemplo 1: Probemos que $\lim_{x\to 3} \frac{5}{2}x$ es 15/2 según la definición 2.1.

En efecto, buscamos una relación entre $|f(x) - L|$ y $|x - c|$ que nos permita hallar un valor δ que satisfaga las condiciones de dicha definición.

$$|f(x) - L| = |(5/2)x - (15/2)| = (5/2)|x - 3|$$

En consecuencia es suficiente tomar $\delta \leq (2/5)\varepsilon$ para asegurar que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Luego probamos el lmite propuesto aplicando la definición:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\delta = (2/5)\varepsilon$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ esto implica que $|(5/2)x-(15/2)| < \varepsilon$, que es lo que queríamos probar.

Como podemos ver, esto es verdaderamente complicado para una persona que recibe esta información por primera vez [8].

En este trabajo pretendemos confrontar el *enfoque continuo* dado por la definición anterior, frente al discreto en la enseñanza del concepto de límite. Se entiende por *enfoque discreto* del concepto mencionado, aquél que viene dado por medio de sucesiones de acuerdo a la siguiente definición:

Definición 2.2 (vía sucesiones). *Diremos que* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *si y sólo si para toda sucesión* $\{x_n\}$ *que converja a* c *con* $x_n \neq c$ *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Ejemplo 2: Probaremos que $\lim_{x\to 3} \frac{5}{2}x$ es $15/2$ según la definición 2.2.

Estudiar el límite de la función $y = (5/2)x$ para $x \to 3$, según la definición 2.2, equivale a estudiar el límite de la sucesión de los valores funcionales $\{(5/2)x_n\}$, siendo $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de números reales que converge a 3 y $x_n \neq 3\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

En efecto: Consideremos la sucesión constante $\{y_n\} = \{5/2\}$. Esta converge a $5/2$ por ser una sucesión de términos constantes. Además sabemos, por las condiciones impuestas al comienzo, que $\{x_n\}$ converge a 3. Luego la sucesión $\{y_n x_n\} = \{(5/2)x_n\}$ converge a $15/2$, por ser esta última una nueva sucesión de números reales que es producto de otras dos convergentes en $\mathbb{R}$. Como este razonamiento de cumple para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a 3, con $x_n \neq 3$, entonces el límite de $(5/2)x$ es $15/2$ cuando $x \to 3$.

A la definición $\varepsilon - \delta$ de límite funcional real de una variable real, la llamaremos de aquí en adelante definición "clásica", debido a que ella ha sido la más usada en estos últimos años. Para funciones reales de una variable real ambas definiciones son equivalentes.

En la última década, los resultados obtenidos de la enseñanza de este concepto a partir de la definición clásica, muestran que aún los alumnos destacados que consiguen dominar el concepto de límite tienen grandes dificultades para expresar en forma escrita sus conclusiones. Pretendemos con este trabajo determinar con cuál de las definiciones presentadas, los alumnos serían efectivamente capaces de asimilar el concepto de límite de una función, aplicarlo correctamente a los problemas propuestos, realizar cálculos más rápidamente, y sentirse más cómodos con el concepto en pocas semanas.

Como consecuencia del estudio que hemos realizado de las nociones de límite funcional a partir de sucesiones de números reales, y de la experiencia adquirida en varios años de enseñanza de estas nociones con el enfoque clásico, realizamos las siguientes conjeturas:

Hipótesis I: El grado de aprendizaje y manipulación de la definición de límite funcional real de una variable real, que los estudiantes de primer año de 2005 de la carrera Profesorado de Matemática de Concordia logran, es mayor cuando dicho concepto se les enseñe mediante el enfoque discreto (es decir, por medio de sucesiones de números reales), que cuando ellos internalizan la definición de límite funcional a partir del enfoque clásico.

Hipótesis II: Los estudiantes de primer año de 2005 de la carrera Profesorado de Matemática de Concordia, alcanzan un grado de aprendizaje y manejo de las propiedades y corolarios de las nociones de límite funcional real a partir de sucesiones de números reales, que es igual al grado de asimilación que éstos logran de dichas propiedades cuando la transposición didáctica de ellos se efectúa por medio del enfoque continuo $\varepsilon - \delta$.

Dichas conjeturas fueron estudiadas sobre la base de una experiencia en aula con alumnos de primer año de la carrera Profesorado de Matemática perteneciente al Instituto Profesorado Concordia D-54, de la ciudad de Concordia que cursaron la asignatura "Análisis Matemático I". Los detalles de dicha experiencia están expuestos en la siguiente sección. A partir de los resultados de la misma, ambas conjeturas fueron consideradas como hipótesis de investigación y analizadas estadísticamente. Tanto este análisis como los resultados se presentan en el capítulo 7.

2.3. Descripción de la experiencia realizada

Este trabajo lo llevamos a cabo con los alumnos de primer año, división única, de la carrera Profesorado de Matemática específicamente en la asignatura Análisis Matemático I durante el primer cuatrimestre del año 2005. Elegimos este grupo de treinta y dos alumnos para realizar la experiencia, frente a otros grupos de estudiantes que utilizan el concepto antes mencionado como herramienta para describir procesos físicos, económicos, etc., dejando un poco de lado el formalismo y la rigurosidad de las demostraciones y corolarios propios del quehacer matemático. Mientras que para los de la carrera docente de matemática es fundamental que alcancen un aprendizaje intenso, riguroso y formal de la disciplina, para que en el futuro ellos puedan realizar una tarea docente eficaz.

En el equipo docente que llevó adelante este trabajo estuvimos: el profesor adscripto a la cátedra Análisis Matemático I y la profesora titular desde 1995 de ese espacio curricular en dicha carrera e Institución, quien es la autora de este trabajo.

En los años anteriores a 2005, durante el primer cuatrimestre de la materia anual Análisis Matemático I de dicha Institución, con una carga de cuatro horas semanales, desarrollábamos en primer lugar el tema "Números Reales". Los contenidos de esta unidad temática eran: *intervalos y entornos en la recta real, cotas y extremos, postulado de Cantor, axiomática de los números reales*, entre otros temas. Luego retomábamos, del Curso Introducción para ingresantes a la carrera Profesorado en Matemática, funciones reales de una variable real, especialmente *composición de funciones* y *función inversa.* El tiempo dedicado al desarrollo de lo dicho anteriormente era, aproximadamente un mes. Posteriormente, durante dos meses, enseñábamos la teoría y la práctica de las nociones de *límite funcional real de una variable real* mediante el enfoque clásico. Continuábamos con la enseñanza teórico-práctica de *sucesiones de números reales*, cerrando esta parte con *sucesiones monótonas* y la *obtención del número e*, como límite de una sucesión monótona creciente y acotada superiormente. El tiempo empleado para el desarrollo teórico-práctico de *sucesiones de números reales* era de tres semanas aproximadamente, período durante el cuál, sólo demostrábamos algunas propiedades y resultados. Para finalizar el primer cuatrimestre de la asignatura, introducíamos la definición de *función continua* y comenzábamos con algunos resultados importantes sobre la continuidad de funciones.

La experiencia desarrollada durante el primer cuatrimestre del año 2005 con los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática en la misma asignatura y con la misma carga horaria, comenzó con la enseñanza de las nociones de *número real* las cuales abarcaron, entre otros temas, las definiciones de *conjunto acotado*, *supremo e ínfimo y sus propiedades*, el *axioma de completitud*, etc., y retomamos, del Curso Introducción para ingresantes a la carrera Profesorado en Matemática, *funciones reales de variable real*, especialmente *composición de funciones* y *funciones inversas*. La enseñanza de estas nociones implicó aproximadamente un mes de trabajo.

Luego de ello, presentamos la definición y las distintas propiedades de *sucesiones de números reales*, tal como puede apreciarse en las notas del capítulo 3. Durante el desarrollo de este tema, los alumnos participaron activamente en las demostraciones de los distintos resultados. Debemos destacar que fue allí donde los estudiantes intentaron formalizar la demostración de cada propiedad, y tomaron conciencia de lo que realmente es el ejercicio natural del cálculo, desconocido por ellos hasta ese momento. Hemos desarrollado, durante aproximadamente un mes, los contenidos del tema mencionado, necesarios para la enseñanza posterior de las nociones de límite funcional vía sucesiones, superando notablemente al número de propiedades y corolarios que sobre este tema habíamos demostrado los años anteriores. Las propiedades relativas a *sucesiones monótonas* y el desarrollo teórico del *número e* fueron presentados didácticamente a los alumnos antes de comenzar con series numéricas.

Una vez finalizada la transposición del tema *Sucesiones de números reales*, dimos comienzo a la enseñanza de las nociones de *límite funcional*. La idea intuitiva de dicho concepto fue presentada didácticamente a todos los estudiantes en forma conjunta, tal como puede verse en las últimas secciones del capítulo 3. Posteriormente dividimos el curso en dos grupos homogéneos, con iguales características, para estudiar el problema central de este trabajo estadísticamente. A los efectos de formar los grupos con las condiciones requeridas, en primer lugar tuvimos en cuenta los resultados del curso introductorio de cada alumno a la carrera, llevado a cabo al comienzo del mes de marzo. En segundo lugar, consideramos el desenvolvimiento de los alumnos durante la transposición de los temas *Números reales y Sucesiones.* Finalmente dado que en el grupo de treinta y dos alumnos habia cuatro que eran recursantes, éstos fueron distribuidos de manera que cada grupo tenga dos de ellos. En consecuencia formamos dos grupos con dieciseis alumnos cada uno, de manera que cada uno de éstos contenga alumnos con rendimientos aproximadamente iguales, tanto en lo conceptual como en lo procedimental y actitudinal. Así obtuvimos dos grupos de alumnos con las condiciones requeridas, llamando a cada uno de ellos *Epsilon-delta* y *Sucesiones*, con quienes realizamos la experiencia objeto de este trabajo, presentando formal y rigurosamente las nociones de límite funcional. A cada grupo, en forma separada, se le enseñó dichas nociones, durante dos meses y medio, a razón de cuatro horas semanales con cada uno de ellos, de la siguiente forma:

Grupo 1 **(Sucesiones):** Enseñanza de la teoría de límite funcional en una variable mediante el enfoque discreto, (por medio de sucesiones de números reales). La misma estuvo a cargo de la profesora titular, y en la enseñanza de la práctica del tema colaboró el profesor adscripto a la cátedra. Los temas desarrollados fueron abordados a partir de bibliografía acorde al enfoque [11].

Grupo 2 (Epsilon-delta): Enseñanza de la teoría de límite funcional en una variable mediante el enfoque continuo, a cargo de la profesora titular, y en la enseñanza de la práctica del tema colaboró el profesor adscripto. Los temas desarrollados fueron abordados a partir de bibliografía acorde al enfoque [10].

En el proceso de enseñanza-aprendizaje teórico-práctico que se llevó a cabo en cada grupo, se procuró que los estudiantes puedan:

- Manipular los objetos matemáticos.
- Encontrar apoyo en la intuición visual de los conceptos y procesos de pensamiento.
- Activar su propia capacidad mental.
- Reflexionar sobre su propio proceso de pensamiento.
- Hacer transferencia a otros aspectos del trabajo mental.
- Adquirir confianza en sí mismo.
- Disfrutar de su propia actividad mental.

Durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje los docentes realizamos un seguimiento continuo de los alumnos, para descubrir dudas, errores y avances en el aprendizaje, y de esa forma retroalimentar la acción docente.

Durante las clases se desarrollaron los temas, tal como pueden verse en las notas teóricas de los capítulos 4 y 5, se trató de incentivar la participación de los alumnos, y se ofrecieron ejercicios rutinarios y no rutinarios de enunciado verbal algunos, y otros escritos. Tales ejercicios fueron resueltos en clase, en forma individual algunos de ellos, y otros de a dos, para propiciar situaciones de discusión del problema planteado. A los efectos de estudiar estadísticamente el grado de cumplimiento de la Hipótesis 1, una vez finalizada la transposición didáctica de la primera parte del tema, que corresponde al trabajo con la definición propiamente dicha de límite funcional real de una variable real, evaluamos a los dos grupos en forma escrita e individual. Esta evaluación fue nominal debido a que es parte de las actividades curriculares del espacio Análisis Matemárico I de la carrera. En esta prueba, evaluamos el nivel de aprendizaje y manipulación de la definición de límite funcional real de una variable real, tema crucial de este trabajo. Esta evaluación consistió en demostrar límites propuestos, aplicando la definición. Durante ella cada grupo, en forma individual y presencial, resolvió los mismos ejercicios, los que pueden verse en el Anexo. Luego, continuamos trabajando en forma análoga a la anterior para desarrollar propiedades y corolarios correspondientes a las nociones estudiadas.

Una vez finalizada, en cada grupo, la transposición didáctica de la teoría y de la práctica, de los temas correspondientes a cada enfoque metodológico, reunimos a los dos grupos con el fin de presentar ambos enfoques a todos los alumnos de primer año, y mostrar su equivalencia como cierre teórico del tema. Dos semanas después, para terminar la experiencia y también para finalizar el primer cuatrimestre de la materia anual, evaluamos por segunda vez. En ésta medimos el nivel de aprendizaje y manipulación de las propiedades y distintos resultados de la noción de límite funcional real de una variable real. Esta vez propusimos, en la evaluación, razonamientos y ejercicios los cuales fueron validados y resueltos por los alumnos de cada grupo en forma análoga a la primera prueba. Con esta evaluación se estudió estadísticamente el grado de cumplimiento de la Hipótesis 2 propuesta al comienzo. Este estudio, junto al seguimiento que realizamos a los alumnos en esta etapa durante el desarrollo de la experiencia, nos permitió verificar fehacientemente dichas hipótesis. Los ejercicios y razonamientos evaluados en las dos pruebas se anexan a este trabajo.

Capítulo 3

Notas Sobre Sucesiones y Nociones de Límite

En este capítulo se presentan las notas sobre *Sucesiones de números reales* y *Noción intuitiva de límite funcional*, temas desarrollados con la totalidad de los alumnos de primer año de la carrera Profesorado en Matemática, en el marco de la asignatura "Análisis Matemático I".

Estas notas no constituyen el material de estudio ni de los alumnos ni de los docentes de la asignatura involucrada. Se presentan aquí con el fin de mostrar los resultados previos necesarios para el desarrollo del tema *Límite funcional real vía sucesiones* y exhibir la profundidad con que fue tratado en esta experiencia.

3.1. Sucesiones de números reales

3.1.1. Introducción

Hay muchos procesos que llevan a asociar a cada número natural n un determinado número que puede designarse x_n, y se obtiene así un objeto

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

llamado *sucesión*. En general, la simbolizaremos $\{x_n\}$ y x_n es su término general.

La mayor parte de las veces una sucesión se determina mediante una fórmula para obtener x_n a partir de n. Por ejemplo:

(a) $\quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Así $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{4}, x_3 = \frac{64}{27}, \cdots$

(b) $\quad y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, de donde $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{13}{12}, y_3 = \frac{57}{60}, \cdots$

Otras veces se indica qué número es x_1, y qué fórmula permite obtener cada uno de los demás a partir del anterior. Por ejemplo:

$$(c) \qquad x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$(d) \qquad y_1 = 1,\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n+1},\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

También es usual dar los dos primeros términos y una fórmula para obtener cada uno de los demás a partir de los dos que le preceden. Por ejemplo:

$$(e) \qquad x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n,\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$(f) \qquad y_1 = 2,\ y_2 = 2,\ y_{n+2} = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n),\ n \in \mathbb{N}$$

Por supuesto que no es estrictamente necesario numerar los términos de una sucesión a partir de 1. Si la definimos mediante

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^n$$

lo razonable es que n tome los valores $3, 4, 5, \cdots$. Hay algunos casos en que resulta cómodo y conveniente que n sea $0, 1, 2, 3, \cdots$ como en el siguiente ejemplo:

$$(g) \qquad y_0 = \frac{1}{0!},\ y_n = y_{n-1} + \frac{1}{n!},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

Una sucesión puede definirse también mediante varias fórmulas que sirven para determinados valores de n. Por ejemplo:

$$(h) \qquad x_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \\ 2 + \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

$$(i) \qquad y_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{n+1}, & \text{si } n \text{ no es múltiplo de 5;} \\ \\ 2 + \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es múltiplo de 5.} \end{cases}$$

En todos los casos, y para comprender mejor qué características tiene una determinada sucesión, es aconsejable siempre conocer bien sus primeros términos.

Si se tiene una sucesión donde todos los términos son iguales, ésta se denomina *sucesión constante*, por ejemplo

$$(j) \qquad x_n = 5,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$$

Es muy útil algunas veces determinar si una sucesión, o una parte de ella, es creciente o decreciente. Entendemos por una *sucesión* $\{x_n\}$ *creciente (decreciente)*, a aquella cuyos términos están ordenados de manera creciente (decreciente), es decir, satisfacen que $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$). Esto mismo es equivalente a afirmar que $x_{n+1} - x_n > 0$ ($x_{n+1} - x_n < 0$), o bien, en el supuesto de que los términos de la sucesión sean positivos, comprobar si el cociente x_{n+1}/x_n es mayor (menor) que 1. Unas veces será más fácil explorar $x_{n+1} - x_n$, y otras examinar el cociente x_{n+1}/x_n, según sea la estructura de x_n. También se podría ensayar la inducción, o recurrir a igualdades o desigualdades conocidas.

Ejemplo 1: Consideremos

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

De esta forma tenemos que

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{y} \quad x_n = \frac{n}{n+1}.$$

Luego,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}.$$

Como $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \ \forall\, n$ entonces $x_{n+1}/x_n > 1$ con lo que $x_{n+1} > x_n \ \forall\, n$. Luego, la sucesión $\{x_n\} = \{n/(n+1)\}$ es creciente.

Ejemplo 2: Estudiamos ahora la sucesión cuyo término general es

$$x_n = \frac{n+2}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

De esta manera

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \quad \text{y} \quad x_n = \frac{n+2}{n}$$

Luego,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = \frac{n^2+3n-(n^2+3n+2)}{(n+1)n} = \frac{-2}{n^2+n} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$$

Así, $x_{n+1} - x_n < 0 \ \forall\ n$, es decir que $x_{n+1} < x_n \ \forall\ n$. Concluímos entonces que: $\{x_n\} = \{(n+2)/n\}$ es decreciente.

Las sucesiones crecientes y las sucesiones decrecientes se denominan también *sucesiones monótonas*, y bajo esta acepción se consideran asimismo las sucesiones en las que el crecimiento o el decrecimiento no es estricto, es decir, se entiende que una sucesión monótona es la que verifica

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$$

o bien

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$$

En el primer caso la sucesión puede tener infinitos términos mayores que cualquier número positivo, o bien puede ser *acotada*, es decir todos sus términos son menores que algún número A fijado. Se dice entonces que A es una *cota superior* de la sucesión. Análogamente, en el segundo caso la sucesión puede tener infinitos términos menores que cualquier número negativo, o bien puede ser acotada, es decir, todos sus términos son mayores que algún número B fijado. Se dice entonces que B es una *cota inferior* de la sucesión.

Por otro lado, también podemos pensar en sucesiones de números completamente arbitrarios, obtenidos sin una regla dada a priori. Por ejemplo, podemos empezar a construir una sucesión lanzando sucesivas veces un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y anotando el inverso del resultado obtenido. Podría salir lo siguiente:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \cdots$$

Es claro que no podemos concluir este experimento para obtener la sucesión completa, pero podemos pensar en la gran cantidad de resultados que serían posibles.

3.1.2. La noción de límite de una sucesión

La observación de una sucesión creciente ($x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$) y acotada (todos los términos son menores que algún número A) nos sugiere la existencia de un número x al cual los términos de la sucesión se acercan cada vez más, llegando a estar tan próximos a él como se desee. Por ejemplo la sucesión

$$x_n = \frac{n-1}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

tiene todos los términos

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{2}{3}, \cdots, x_{100} = \frac{99}{100}, \cdots$$

menores que 1 y se acercan mucho a 1 cuando n es grande.

Definición 3.1. *Diremos que un número x es el límite de una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$ si a cada número positivo ε se le puede hacer corresponder algún término de la sucesión, de tal manera que él y todos los que le siguen difieran de x en menos de ε.*

Cuando se da una situación como la que se describe en la definición anterior, se dice también que $\{x_n\}$ *converge* a x, o bien más explícitamente, que $\{x_n\}$ converge a x cuando n tiende a infinito, y esto se expresa de alguna de estas maneras:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ o bien } x_n \to x \text{ cuando } n \to \infty$$

y a veces se omite la notación $n \to \infty$.

Simbólicamente:

$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. En general, el valor de N que verifica la condición de la definición depende del ε elegido previamente.

Ejemplo 3: Sea la sucesión $\{x_n\} = \{1/n\}$. Mostraremos, utilizando la definición 3.1, que el límite de esta sucesión es 0, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En efecto: Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Luego, podemos afirmar que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = [1/\varepsilon] + 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se verifica que $|x_n| < \varepsilon$. La notación $[x]$ indica la parte entera del número real x, es decir el mayor entero k que satisface $k \leq x$. En particular, si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces $N = 101$. Esto nos dice que a partir de $n = 101$ y todos los valores enteros positivos n que le siguen, se verifica que $|x_n| < 0{,}01$. Se dice que la sucesión $\{x_n\} = \{1/n\}$ es convergente, y que su límite es 0.

Siguiendo los pasos de este ejemplo, intente demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Observación 3.2. *Nótese que también para $\varepsilon > 0$ dado, el valor de $N = [1/\varepsilon] + 1$ sirve para demostrar que la sucesión $\{x_n\} = \{a + 1/n\}$ tiene límite a, para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Pruébelo.*

Ejemplo 4: La sucesión $1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$ no es convergente porque sus términos oscilan entre cero y uno.

Ejemplo 5: La sucesión creciente $2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$ de los números primos no es convergente porque los valores x_n crecen más allá de cualquier número, es decir esta sucesión tiene infinitos términos muy grandes, y más grandes que cualquier número A que fijemos.

Sucesiones como las de los ejemplos 4 y 5 no pueden ser convergentes, es decir, son *divergentes*. Pero el que tengan términos positivos y muy grandes, se expresa también usando la palabra “límite”, ahora de la siguiente forma.

Definición 3.3. *Diremos que una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$ tiene límite $+\infty$ si a cada número positivo ε se le puede hacer corresponder algún término de la sucesión de tal manera que él y todos los que le siguen sean mayores que ε. Esto se expresa de alguna de las siguientes maneras:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ o bien } x_n \to +\infty, \text{ con } n \to \infty$$

y a veces se omite la notación $n \to \infty$.

Simbólicamente:

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow$ *para cada* $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ *tal que* $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $n \geq N$ *se cumple que* $x_n > \varepsilon$.

Ejemplo 6: Sea la sucesión $\{x_n\} = \{2n + 1\}$. Mostraremos, utilizando la definición 3.3 que el límite de esta sucesión es $+\infty$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} (2n + 1) = +\infty$$

En efecto: Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera,

$$x_n = 2n + 1 > \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\varepsilon - 1}{2}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = [(\varepsilon - 1)/2 + 1]$ tal que $2n + 1 > \varepsilon\ \forall\ n \geq N$. En particular, si $\varepsilon = 100$, entonces $N = 50$, es decir a partir de $n = 50$ y todos los que le siguen, se cumple que $x_n = 2n + 1$ es mayor que 100. Así como tomamos $\varepsilon = 100$, se puede tomar cualquier otro valor positivo para ε, y encontraremos un valor $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que se verifica que $x_n > \varepsilon$, $\forall\ n \geq N$.

Ejemplo 7: Estudiemos ahora la sucesión dada por

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ es par;} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

es decir $1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \cdots$. Dicha sucesión no tiene límite $+\infty$ porque no cumple con la definición correspondiente. Esto se debe a que para todo entero n impar se verifica que $x_n = 1$ y, por lo tanto no existe un entero positivo a partir del cual todos los valores x_n sean mayores que cualquier número positivo ε.

Teniendo en cuenta la definición 3.3, podemos establecer cuándo una sucesión tendrá límite $-\infty$. Esto lo haremos a través del siguiente razonamiento:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ significa } \lim_{n\to\infty} (-x_n) = +\infty$$

Definición 3.4. *Diremos que una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$ tiene límite $-\infty$ si a cada número positivo ε se le puede hacer corresponder algún término de la sucesión de tal manera que él y todos los que le siguen sean menores que $-\varepsilon$.*

Simbólicamente:

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow$ *dado* $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ *tal que* $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $n \geq N$ *se cumple que* $x_n < -\varepsilon$.

Ejemplo 8: Sea la sucesión $\{x_n\} = \{-n+1\}$. Veamos que: $\lim_{n\to\infty}(-n+1) = -\infty$.

En efecto: Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera

$$x_n < -\varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon + 1$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = [\varepsilon + 2]$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple que $-n+1 < -\varepsilon$. En particular, si $\varepsilon = 1000$, $N = 1002$. Luego a partir de $n = 1002$ y todos los valores enteros que le siguen, resulta que $x_n = -n+1 < -1000$.

Las definiciones 3.3 y 3.4 se pueden escribir en forma conjunta de la siguiente manera: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se cumple que $|x_n| > \varepsilon$.

3.1.3. Propiedades de las sucesiones de números reales

Los resultados que presentamos a continuación, constituyen una herramienta de mucha utilidad para el cálculo del límite de sucesiones cuyo término general tiene una expresión compuesta o, en sí, complicada.

El siguiente teorema asegura la unicidad del límite finito de una sucesión dada.

Teorema 3.5. *Si la sucesión* $\{u_n\}$ *es tal que* $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2 \in \mathbb{R}$, *entonces* $l_1 = l_2$.

Demostración. Supongamos que $l_1 \neq l_2$. Tomemos $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$, entonces dado que $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ se tiene que $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$, se cumple que $|u_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$. Análogamente, dado que $\lim_{n\to\infty} u_n = l_2$ resulta que $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_2$, se cumple que $|u_n - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\} > 0$. Luego, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se cumple

$$\begin{array}{rcl} |l_1 - l_2| & \leq & |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \\ & < & \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} + \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} = |l_1 - l_2| \end{array}$$

Esto es una contradicción que provino de suponer que $l_1 \neq l_2$. Por lo tanto $l_1 = l_2$. Luego, concluímos que el límite finito de una sucesión de números reales, si existe, es único. $\square$

A continuación veremos que, a partir de cierto término en adelante, en una sucesión con límite no nulo, todos los términos conservan el signo de dicho límite.

Teorema 3.6 (Conservación de signo). *Si* $\{u_n\}$ *converge a* $u \neq 0$ *para* $n \to \infty$, *entonces a partir de un número* $n \in \mathbb{Z}^+$ *se cumple que* u_n *toma el mismo signo que* u. *Simbólicamente:*

(a) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = u > 0$*, entonces a partir de un valor* $n \in \mathbb{Z}^+$ *(y todos los valores que le siguen) se cumple que* $u_n > 0$*. Análogamente,*
(b) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = u < 0$*, entonces a partir de un valor* $n \in \mathbb{Z}^+$ *(y todos los valores que le siguen) se cumple que* $u_n < 0$*.*

Demostración. (a) $\lim_{n\to\infty} u_n = u > 0$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ es $|u_n - u| < \varepsilon$. Esto último es equivalente a decir que $u-\varepsilon < u_n < u+\varepsilon$. Tomando $\varepsilon = u/2$ se cumple que $\exists N_u > 0$ tal que $\forall\, n \geq N_u$ se cumple $u/2 \leq u_n \leq 3u/2$. Como $u > 0$ se tiene que $u_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_u$.

Análogamente se prueba (b), a partir de la definición de límite finito, en este caso negativo. Se debe tomar $\varepsilon = -u/2$ y, siguiendo el mismo razonamiento anterior, se demuestra la tesis propuesta. □

El siguiente es un resultado que, si bien no es útil a los fines de calcular límites, nos servirá como herramienta para justificar varios de los razonamientos que siguen.

Teorema 3.7. *Las sucesiones convergentes son acotadas.*

Demostración. Si $\{x_n\}$ converge a x, a partir de alguno de sus términos, todos ellos están cerca de x, y los que no estén en tal situación son solamente una cantidad finita. Esta descripción cualitativa puede ser suficiente para probar que las sucesiones convergentes son acotadas. No obstante, se puede determinar un número A tal que sea $|x_n| \leq A$ para todo n, de la siguiente manera:

Al número positivo $\varepsilon = 1$ le corresponde algún término x_r tal que $|x_n - x| < 1$ si $n \geq r$. Entonces $|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$ si $n \geq r$. El número

$$A = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \cdots, |x_{r-1}|, 1 + |x|\}.$$

es la cota superior de la sucesión. □

Veremos que, cuando se trata de sucesiones con límites finitos, el límite de la suma de dos sucesiones es igual a la suma de los límites.

Teorema 3.8. *Si* $\{u_n\}$ *y* $\{v_n\}$ *convergen a* u *y* v*, respectivamente, con* $u, v \in \mathbb{R}$*, entonces* $\{u_n + v_n\}$ *converge a* $(u + v)$ *y* $\{-u_n\}$ *converge a* $(-u)$*.*

Demostración. Lo que difieren $(u_n + v_n)$ y $(u + v)$ está condicionado por la suma $|u_n - u| + |v_n - v|$, puesto que:

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, se pretende encontrar algún r tal que para todo $n \geq r$ resulte que $(u + v)$ y $(u_n + v_n)$ difieran en menos de ε. Para ello, teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, sabemos que $\exists\; r_1 = r_1(\varepsilon)$ tal que $|u_n - u| < \varepsilon/2\; \forall\; n \geq r_1$. De la misma manera, dado que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, tenemos que $\exists\; r_2 = r_2(\varepsilon)$ tal que $|v_n - v| < \varepsilon/2\; \forall\; n \geq r_2$. Luego,

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geq \max\{r_1, r_2\} = r$.
Por otro lado: $|-u_n - (-u)| = |u_n - u| < \varepsilon/2$ para $n \geq r_1$. Así, $-u_n$ converge a $-u$. □

Veamos el siguiente resultado, que es una consecuencia del teorema 3.8 que acabamos de probar.

Corolario 3.9. *Si $\{u_n\}$ converge a u, entonces $\{|u_n|\}$ converge a $|u|$.*

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, $u \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se cumple que $|u_n - u| < \varepsilon$. Por la propiedad del valor absoluto de números reales, se tiene que para esos n es $||u_n| - |u|| \leq |u_n - u| < \varepsilon$. Luego, tenemos que $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |u|$. □

De manera similar a lo hecho para la suma, veremos que para sucesiones con límites finitos, el límite de la sucesión cuyo término general es el producto de los términos generales de cada sucesión, es igual al producto de los límites de dichas sucesiones.

Teorema 3.10. *Si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ convergen a u y v respectivamente, con $u, v \in \mathbb{R}$ entonces $\{u_n v_n\}$ converge a uv.*

Demostración. La desigualdad que relaciona $|u_n v_n - uv|$ con $|u_n - u|$ y $|v_n - v|$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} |u_n v_n - uv| &= |u_n v_n - u v_n + u v_n - uv| \\ &= |(u_n - u)v_n + u(v_n - v)| \\ &\leq |u_n - u||v_n| + |u||v_n - v| \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, se pretende encontrar un r tal que $|u_n v_n - uv|$ sea menor que ε cuando $n \geq r$. Puesto que las sucesiones convergentes son acotadas, existe algún número positivo A que verifica $|v_n| \leq A$ para todo n. Puede elegirse A de modo que sea también $|u| \leq A$. (Piense cómo habría que tomar A para que ésto se verifique). Resulta entonces, para cada n, $|u_n v_n - uv| \leq A[|u_n - u| + |v_n - v|]$. Además dado $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/2A$, existen $p = p(\varepsilon)$ y $q = q(\varepsilon)$ tales que

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2A} \quad \text{para} \quad n \geq p \quad \text{y} \quad |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2A} \quad \text{para} \quad n \geq q$$

Luego,

$$|u_n v_n - uv| \leq A[|u_n - u| + |v_n - v|] < A\frac{2\varepsilon}{2A} = \varepsilon$$

para $n \geq r = \max\{p, q\}$. □

El siguiente resultado involucra una sucesión acotada, que no necesariamente será convergente, y otra cuyo límite es nulo.

Teorema 3.11. *Si* $\{u_n\}$ *es una sucesión acotada y* $\{v_n\}$ *es otra sucesión que converge a cero, entonces la sucesión* $\{u_n v_n\}$ *converge a cero. Simbólicamente:*

$$|u_n| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \quad y \quad \lim_{n\to\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = 0.$$

Demostración. Si $\{u_n\}$ es constantemente cero $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, la conclusión es trivialmente cierta. Luego, si este no es el caso, claramente $M > 0$. Además $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Esto significa que dado $\varepsilon^* = \varepsilon/M > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon^*) > 0$ tal que si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple que $|v_n - 0| < \varepsilon/M$.
Consideremos ahora la expresión $|u_n v_n| = |u_n||v_n - 0|$. Luego, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple que $|u_n v_n - 0| < M\varepsilon/M = \varepsilon$. En consecuencia $\lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = 0$. □

A continuación calcularemos el límite de una sucesión a partir del límite de aquélla formada por sus recíprocos, siempre que todos ellos sean números reales no nulos.

Teorema 3.12. *Si* $\{u_n\}$ *converge a un número* u *distinto de cero y cada término de la sucesión es también distinto de cero, entonces* $\{u_n^{-1}\}$ *converge a* u^{-1}.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, se trata de encontrar, algún r que verifique que $|u_n^{-1} - u^{-1}| < \varepsilon$ cuando $n \geq r$. Puesto que:

$$|u_n^{-1} - u^{-1}| = \left|\frac{u - u_n}{u_n u}\right|$$

se requiere obtener una cota inferior positiva para $|u_n|$, es decir, un número positivo δ para el cual se satisfaga que $|u_n| \geq \delta$ para todo n. Supuesto que existe tal δ, resulta

$$|u_n^{-1} - u^{-1}| \leq \frac{|u - u_n|}{\delta|u|}$$

Por otro lado, dado que $u_n \to u$ cuando $n \to \infty$, se tiene que dado $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon\delta|u| > 0$, $\exists\, r = r(\varepsilon)$ tal que para todo $n \geq r$ se verifica que $|u_n - u| < \widetilde{\varepsilon}$. Luego,

$$|u_n^{-1} - u^{-1}| \leq \varepsilon\frac{\delta|u|}{\delta|u|} = \varepsilon$$

para $n \geq r$. Sólo falta probar, pues, la existencia de δ. Para ello consideremos el número positivo $|u|/2$, al cual le corresponde un término u_p tal que $|u_n - u| < |u|/2$ si $n \geq p$. De aquí resulta que $|u_n| = |u + (u_n - u)| \geq |u| - |u_n - u| > |u| - |u|/2$. Finalmente tenemos que $|u_n| > |u|/2$ para $n \geq p$. Luego,

$$\delta = \min\{|u_1|, |u_2|, |u_3|, \cdots, |u_{p-1}|, |u|/2\} > 0$$

con lo que se concluye la demostración. □

Si los términos generales de dos sucesiones convergentes verifican cierta relación, ésta se mantiene en el límite.

Teorema 3.13. *Si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ convergen a u y v, respectivamente con u y $v \in \mathbb{R}$ y para cada n se verifica que $u_n \leq v_n$, entonces $u \leq v$.*

Demostración. La prueba consiste en suponer $u > v$ y obtener a partir de ahí una contradicción. Tomemos $\varepsilon = (u - v)/3$. A este ε le corresponden términos u_p y v_q tales que $|u_n - u| < \varepsilon$ para $n \geq p$ y $|v_n - v| < \varepsilon$ para $n \geq q$. Si r es el mayor de p y q, se verifica: $|v_r - v| < \varepsilon = (u - v)/3$ con lo que $3\varepsilon = u - v \Rightarrow v = u - 3\varepsilon$.
Luego, $v_r < v + \varepsilon \Rightarrow v_r < u - 2\varepsilon < u - \varepsilon$ por ser $\varepsilon > 0$ y como $-\varepsilon < u_r - u < \varepsilon$, se tiene que $u - \varepsilon < u_r$. Luego, $v_r < u - \varepsilon < u_r$ siendo $r = \text{máx}\{p, q\}$, lo cual contradice la hipótesis $u_r \leq v_r$. En consecuencia, la tesis es cierta, es decir $u \leq v$. □

El siguiente resultado se conoce como la Ley del Emparedado o Propiedad Sandwich.

Teorema 3.14. *Sean $\{u_n\}$, $\{x_n\}$ y $\{v_n\}$ tres sucesiones tales que a partir de un término n se cumple que $u_n \leq x_n \leq v_n$, y $\text{lím}_{n\to\infty} u_n = \text{lím}_{n\to\infty} v_n = l$, $l \in \mathbb{R}$ entonces* $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = l$.

Demostración. Por hipótesis sabemos que $\exists\ n_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq n_1$ se verifica que $u_n \leq x_n \leq v_n$. Además, $\text{lím}_{n\to\infty} u_n = l$, es decir que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq n_2$ se cumple que $|u_n - l| < \varepsilon$, lo que resulta equivalente a $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. Análogamente, como $\text{lím}_{n\to\infty} v_n = l$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_3 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq n_3$ se verifica que $|v_n - l| < \varepsilon$. De aquí se tiene que $l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$.
Tomemos $N = \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$; entonces $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se verifica: $l - \varepsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < l + \varepsilon$, es decir que $-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon\ \forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$. Luego, $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = l$. □

A continuación presentamos algunos resultados que involucran límites infinitos.

Teorema 3.15. *Si $\{x_n\}$ tiende a cero tomando valores positivos para $n \to \infty$, entonces $\{x_n^{-1}\}$ tiende a $+\infty$ para $n \to \infty$. Simbólicamente:*

$$\textit{Si} \lim_{n\to\infty} x_n = 0^+ \quad \textit{y} \quad x_n \neq 0 \forall\ n \in \mathbb{Z}^+ \quad \textit{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{-1} = +\infty$$

Demostración. Si $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = 0^+$, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple que $|x_n - 0| < \varepsilon$. Luego, $0 < x_n < \varepsilon$, es decir, $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$. De esta manera se tiene que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica que $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} = R$, con $R > 0$. Entonces $\text{lím}_{n\to\infty} 1/x_n = +\infty$, por definición 3.3. □

El siguiente teorema involucra dos casos similares en los que los límites de las sucesiones difieren en el signo. Las demostraciones son muy semejantes y es por ello que se desarrolla sólo una de ellas, dejándose la restante para que la complete el lector.

Teorema 3.16. *Si $\{x_n\}$ tiene límite $+\infty$ $(-\infty)$, entonces $\{x_n^{-1}\}$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ y lo hace tomando valores positivos (negativos). Simbólicamente:*

$$\textit{Si} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty(-\infty) \quad \textit{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{-1} = 0^+(0^-).$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, en virtud de la hipótesis sobre $\{x_n\}$ se tiene que, dado $\widetilde{\varepsilon} = 1/\varepsilon$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\ n \geq N$ se verifica que $x_n > \widetilde{\varepsilon}$ ($x_n < -\widetilde{\varepsilon}$). De esta manera, $0 < x_n^{-1} < \varepsilon$ ($|x_n^{-1} - 0| < \varepsilon$ y $-\varepsilon < 1/x_n < 0$). Luego, $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} = 0^+$ (0^-). $\square$

Veamos ahora la situación recíproca de la anterior, es decir, cuando tenemos una sucesión que tiende a cero con valores negativos, la sucesión formada con sus recíprocos tiende $-\infty$. Se demuestra de manera similar el caso de una sucesión que tiende a cero con valores positivos. Para ésta, el límite de la sucesión formada por sus recíprocos, será $+\infty$.

Teorema 3.17. *Si $\{u_n\}$ tiende a cero tomando sólo valores negativos para $n \to \infty$, ($u_n < 0\ \forall\ n$), entonces $\{u_n^{-1}\}$ tiende a $-\infty$ para $n \to \infty$. Simbólicamente:*

$$\textit{Si} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0^- \quad y \quad u_n \neq 0\ \forall\ n, \quad \textit{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty.$$

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0^-$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se verifica que $-\varepsilon < u_n < 0$. Es decir, $\frac{1}{u_n} < -\frac{1}{\varepsilon} < 0$. Luego, $\lim_{n\to\infty} 1/u_n = -\infty$, por definición 3.4, es decir, $\{u_n^{-1}\} \to -\infty$ para $n \to \infty$. $\square$

En el siguiente teorema el signo del símbolo ∞ se omite pues la conclusión es independiente del mismo. En ambas apariciones de este símbolo, el signo es el mismo.

Teorema 3.18. *Si $\{u_n\}$ tiende a $l_1 \in \mathbb{R}$ para $n \to \infty$ y $\{y_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$, entonces $\{u_n + y_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$. Simbólicamente:*

$$\textit{Si} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = l_1,\ l_1 \in \mathbb{R} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty \quad \textit{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} (u_n + y_n) = \infty.$$

Demostración. Consideramos dos casos:

(a) Si $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{u_n + y_n\} = +\infty$.

En efecto: Si $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, dado $\varepsilon_1 > 0$ cualquiera, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon_1) > 0$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$, se cumple que $y_n > \varepsilon_1$. Por otro lado, si $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$, $l_1 \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon_2 > 0$ cualquiera, $\exists N_2 = N_2(\varepsilon_2) > 0$ tal que $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_2$, se verifica que $l_1 - \varepsilon_2 < u_n < l_1 + \varepsilon_2$.
Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica $u_n + y_n > \varepsilon^* = (l_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1$. Luego, $\lim_{n\to\infty}(u_n + y_n) = +\infty$, por definición 3.3.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ y $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(u_n + y_n) = -\infty$.

En efecto: Su demostración es análoga a la anterior. Intente escribirla siguiendo los mismos pasos que los del caso anterior, usando la definición 3.4. $\square$

En la siguiente afirmación, valen las mismas consideraciones acerca del signo de ∞, que para el teorema anterior. La demostración se realiza para el caso de signo positivo, es decir: $+\infty$. La que corresponde a $-\infty$, es similar y se deja para el lector.

Teorema 3.19. *Si $\{u_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$ y $\{v_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\{u_n + v_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$.*

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, dado $\varepsilon_1 > 0$ cualquiera, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon_1) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$, se cumple que $u_n > \varepsilon_1$. Análogamente, si $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$, dado $\varepsilon_2 > 0$, $\exists N_2 = N_2(\varepsilon_2) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_2$, se cumple que $v_n > \varepsilon_2$.
Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica $u_n + v_n > \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$; con $\varepsilon > 0$. Luego, $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = +\infty$. □

Veamos una propiedad similar a la anterior, donde en lugar de involucrar a la suma de sucesiones con límite ∞, relaciona el producto de dichas sucesiones. El signo del resultado obedece a la regla de los signos para el producto de números.

Teorema 3.20. *Si $\{u_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$ y $\{v_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$, entonces $\{u_n v_n\}$ tiende a ∞ para $n \to \infty$, y es fácil discernir según que cada uno de ellos sea $+\infty$ o $-\infty$.*

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, dado $\varepsilon_1 > 0$ cualquiera, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon_1) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$, se cumple que $|u_n| > \varepsilon_1$. Análogamente, si $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$, dado $\varepsilon_2 > 0$, $\exists N_2 = N_2(\varepsilon_2) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_2$, se verifica que $|v_n| > \varepsilon_2$.
Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se cumple $|u_n v_n| = |u_n||v_n| > \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$. Luego, $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \infty$. □

Los teoremas 3.10 y 3.20 permiten calcular el límite del producto de sucesiones convergentes y de sucesiones con límite ∞, respectivamente. Veamos ahora otro resultado para el producto de una sucesión convergente a un límite no nulo por otra con límite infinito.

Teorema 3.21. *Si $\lim_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n v_n = \infty$.*

Demostración. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$, entonces por el corolario 3.9, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = |u| \neq 0.$$

Luego, dado $\varepsilon_1 = |u|/2$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon_1) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$, se cumple que $||u_n| - |u|| < |u|/2$ con lo que $-|u|/2 + |u| < |u_n|$ para esas n. Luego, podemos afirmar que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$, se cumple que $|u_n| > |u|/2$.
Por otro lado, si $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$, dado $\varepsilon_2 > 0$, $\exists N_2 = N_2(\varepsilon_2) > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_2$, se cumple que $|v_n| > \varepsilon_2$.
Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica que $|u_n v_n| = |u_n||v_n| > \varepsilon_2|u|/2$. Como $|u|/2 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_2 > 0$ cualquiera, llamamos $\varepsilon = \varepsilon_2|u|/2 > 0$ con lo cual se cumple que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se verifica que $|u_n v_n| > \varepsilon$. Luego, $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \infty$. □

El resultado siguiente es una herramienta que se necesitará para la demostración del teorema 3.23 que sigue.

Teorema 3.22. *Sea* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$*, con* $l \in \mathbb{R}$*, y sea además* $k > l$*, entonces* $\exists\, N$ *positivo tal que* $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $n \geq N$*, se cumple que* $u_n < k$*.*

Demostración. Sea $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, $l \in \mathbb{R}$. Como por hipótesis es $k > l$, resulta $k - l > 0$. Por definición de límite de una sucesión, podemos afirmar que dado $\varepsilon = k - l$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple $|u_n - l| < k - l$. Por propiedad del valor absoluto de un número real se cumple que $(u_n - l) \leq |u_n - l|$. Por lo tanto, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica que $(u_n - l) \leq |u_n - l| < k - l$. Luego, existe $N > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple $u_n < k$.
Análogamente si $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, y k es un número real menor que l, entonces existe $N > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$ se cumple que $u_n > k$. □

A continuación veremos una afirmación que nos permitirá calcular el límite de sucesiones que involucren logaritmos. Asimismo, la utilizaremos para el cálculo del límite en el cual haya alguna sucesión en los exponentes de algunas expresiones.

Teorema 3.23. *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$*, con* $l \in \mathbb{R}$ *y* $l > 0$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \log_b u_n = \log_b[\lim_{n\to\infty} u_n]$$

con $b > 1$*.*

Demostración. Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} u_n = l > 0$ con $l \in \mathbb{R}$. Consideremos la sucesión constante $\{1/l\}$; luego, por teorema 3.10 es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{l} = 1$$

Siendo $b > 1$ y $\varepsilon > 0$, resulta $b^\varepsilon > 1$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} u_n/l = 1 < b^\varepsilon$. Por el teorema 3.22 se cumple que $\exists\, N_1 > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_1$ se verifica $u_n/l < b^\varepsilon$.
Por la misma razón, siendo $b^{-\varepsilon} < 1$, resulta que $\exists N_2 > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N_2$ se verifica $u_n/l > b^{-\varepsilon}$.
Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica que

$$0 < b^{-\varepsilon} < \frac{u_n}{l} < b^\varepsilon.$$

Por la propiedad de monotonía del logaritmo en base $b > 1$, es

$$\log_b(b^{-\varepsilon}) < \log_b(\frac{u_n}{l}) < \log_b(b^\varepsilon).$$

Luego, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq N$, se verifica que

$$-\varepsilon < \log_b(\frac{u_n}{l}) < \varepsilon$$

Esto es equivalente a afirmar que $|\log_b(u_n) - \log_b(l)| < \varepsilon$. Aplicando la definición de límite de una sucesión resulta la tesis, pues es $\lim_{n\to\infty} \log_b u_n = \log_b l$; es decir $\lim_{n\to\infty} \log_b(u_n) = \log_b[\lim_{n\to\infty} u_n]$, si $b > 1$. □

Ejemplo 9: Sabemos que $\lim_{n\to\infty}(1+1/n) = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+1/n) = \ln[\lim_{n\to\infty}(1+1/n)] = \ln 1 = 0.$$

Veamos ahora cómo calcular el límite de una sucesión particular.

Teorema 3.24. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a un número real k entonces, para cualquier número real $b > 1$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} b^{x_n} = b^{\lim_{n\to\infty} x_n} = b^k.$$

Demostración. Debemos probar que, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se cumple que

$$|b^{x_n} - b^k| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N \tag{3.1}$$

A fin de establecer una relación entre $|b^{x_n} - b^k|$ y $|x_n - k|$, usaremos propiedades de la función logarítmica $y = log_b x$ y supondremos que $\varepsilon < b^k$. Concretamente, debido a que dicha función logarítmica es creciente y que $b^k - \varepsilon$, b^{x_n} y $b^k + \varepsilon$ son todos números positivos, se tiene que (3.1) es equivalente a la siguiente afirmación:

$$log_b(1 - \varepsilon b^{-k}) < x_n - k < log_b(1 + \varepsilon b^{-k}) \quad \forall\, n \geq N \tag{3.2}$$

Para llegar a esta conclusión también se usó el hecho que

$$\begin{aligned} log_b(b^k \pm \varepsilon) &= log_b[b^k(1 \pm \varepsilon b^{-k})] \\ &= log_b b^k + log_b(1 \pm \varepsilon b^{-k})] \\ &= k + log_b(1 \pm \varepsilon b^{-k})] \end{aligned}$$

Por otro lado, la hipótesis de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ a k permite afirmar que, para cada $\sigma > 0$ dado, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - k| < \sigma$ para todo $n \geq r$.
Finalmente, si tomamos $\sigma = \min\{-log_b(1 - \varepsilon b^{-k}), log_b(1 + \varepsilon b^{-k})\}$ sabemos que para este valor existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - k| < \sigma$ para todo $n \geq N$. Pero teniendo en cuenta la expresión del σ seleccionado, se ve fácilmente que

$$log_b(1 - \varepsilon b^{-k}) \leq -\sigma < x_n - k < \sigma \leq log_b(1 + \varepsilon b^{-k}) \quad \forall\, n \geq N \tag{3.3}$$

Es decir que hemos encontrado $N \in \mathbb{N}$ con el cual se cumple (3.2) y, equivalentemente (3.1). □

Si formamos una sucesión a partir de otras dos convergentes, donde los elementos de una forman las bases y los de la otra, los exponentes, el límite de la misma se calcula en función de los límites individuales.

Teorema 3.25 (Sucesión que es potencia de otras dos). *El límite de una sucesión formada por potencias donde las bases son los términos de una sucesión de números positivos que tiende a un límite finito y positivo, y los exponentes corresponden a una sucesión que tiende a un límite finito es igual a una potencia que tiene por base el límite de las bases y por exponente el límite de los exponentes. Simbólicamente:*

$$\lim_{n\to\infty}({x_n}^{y_n}) = [\lim_{n\to\infty} x_n]^{[\lim_{n\to\infty} y_n]}$$

si $\lim_{n\to\infty} x_n$ *es un número real positivo, y* $\lim_{n\to\infty} y_n$ *es un número real.*

Demostración. Consideramos la expresión $x_n^{y_n}$, y le aplicamos el logaritmo en base b con $b > 1$. De esta manera se obtiene

$$\log_b(x_n^{y_n}) = y_n \log_b x_n.$$

Aplicamos límite para $n \to \infty$ y resulta en virtud del teorema 3.23,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \log_b(x_n^{y_n}) &= \lim_{n\to\infty}(y_n \log_b x_n)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \log_b x_n\right)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)\log_b[\lim_{n\to\infty} x_n]\\ &= \log_b\left([\lim_{n\to\infty} x_n]^{[\lim_{n\to\infty} y_n]}\right)\end{aligned}$$

Luego, como el último miembro derecho es un número real, tenemos que

$$b^{\lim_{n\to\infty}\log_b(x_n^{y_n})} = (\lim_{n\to\infty} x_n)^{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

Luego, a partir del teorema 3.24 se sigue que

$$b^{\lim_{n\to\infty}\log_b(x_n^{y_n})} = \lim_{n\to\infty}\left(b^{\log_b(x_n^{y_n})}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n}$$

Finalmente, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = (\lim_{n\to\infty} x_n)^{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

□

Los ejemplos y corolarios siguientes, son consecuencia directa del teorema que acabamos de demostrar.

Ejemplo 10: Estudiemos el límite de la sucesión

$$\left\{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{\frac{3n+1}{5n-4}}\right\}$$

Si dividimos cada numerador y denominador por n, resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{4}{n}} = \frac{3}{5}$$

En consecuencia, por el teorema 3.25 es:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{\frac{3n+1}{5n-4}} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n-4}} = 2^{3/5}$$

Corolario 3.26. *Sea la sucesión* $\{x_n{}^{y_n}\}$. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0^+$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = l$, *con* $l \in \mathbb{R}^+$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n{}^{y_n}) = [\lim_{n\to\infty} x_n]^{[\lim_{n\to\infty} y_n]} = 0^l = 0$$

Ejemplo 11: Consideremos la sucesión

$$\left\{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}} = 0^{1/2} = 0$$

Corolario 3.27. *Sea la sucesión* $\{x_n{}^{y_n}\}$. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, $l \in \mathbb{R}^+$, *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n{}^{y_n}) = [\lim_{n\to\infty} x_n]^{\lim_{n\to\infty} y_n} = l^0 = 1$$

Ejemplo 12: Sea la sucesión

$$\left\{\left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right\}$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n+1}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

3.2. Una noción del límite funcional

3.2.1. Introducción

La idea de límite aparece intuitivamente en muchas situaciones. En Geometría Elemental se define la longitud de una circunferencia como el *límite* a que tiende una sucesión de perímetros de polígonos inscriptos en ella (o circunscriptos), cuando la longitud de cada lado tiende a cero. La misma idea se utiliza para definir el área de un círculo mediante áreas de polígonos inscriptos o circunscriptos. En Física, para definir la velocidad instantánea se recurre al *límite* de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado se hace cada vez menor. Estas ideas sólo pueden hacerse precisas mediante la definición previa del límite de sucesiones y del límite de funciones, siendo el primero un caso particular del segundo.

3.2.2. La idea de límite

Empezamos con un número l y una función f definida "cerca del número c aunque no necesariamente en el propio c". Una traducción grosera de la expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad (l \text{ es el límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ tiende a } c)$$

podría ser: *cuando x se aproxima (tiende) a c, $f(x)$ se aproxima (tiende) a l* o, análogamente, *para x próximo a c pero distinto de c, $f(x)$ está próximo a l.*

Hemos ilustrado esta idea en la Figura 3.1. La curva representa la gráfica de la función f. El número c aparece en el eje x, el límite l en el eje y. Cuando x se aproxima a c a lo largo del eje x, $f(x)$ se aproxima a l a lo largo del eje y.

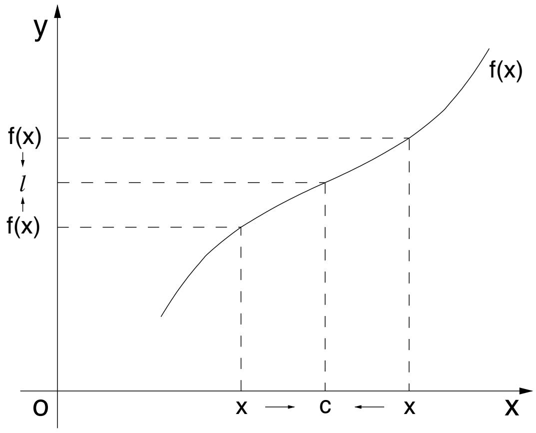

Figura 3.1: $\lim_{x \to c} f(x) = l$

Al tomar el límite cuando x se aproxima a c no importa el hecho de que f no esté definida en c, ni qué valor tomaría en ese punto si lo estuviera. Lo único que importa es cómo f está definida "cerca de c". Por ejemplo, en la Figura 3.2 la gráfica de f tiene un trazo discontinuo y está definida peculiarmente en c. Sin embargo, se verifica que $\lim_{x \to c} f(x) = l$ puesto que, cuando x se aproxima a c, $f(x)$ se aproxima a l.

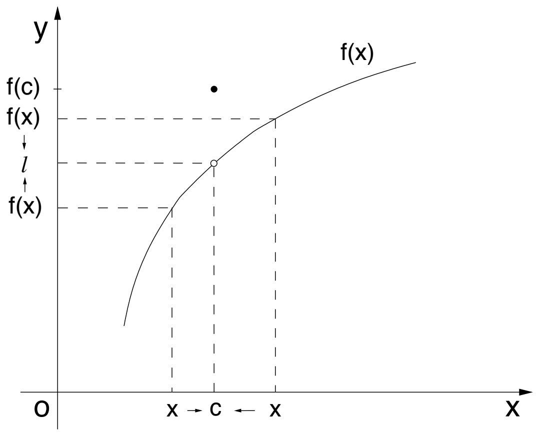

Figura 3.2: $\lim_{x \to c} f(x) = l$

Los números x que están cerca de c se dividen en dos clases: los que están a la izquierda de c y los que están a la derecha de c. Escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = l \quad (l \text{ es el límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ tiende a } c \text{ por la izquierda})$$

para indicar que cuando x se aproxima a c por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a l. Análogamente,

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = l \quad (l \text{ es el límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ tiende a } c \text{ por la derecha})$$

para indicar que cuando x se aproxima a c por la derecha, $f(x)$ se aproxima a l. En cada caso, nos referimos a ellos como *límites por izquierda y derecha* respectivamente. Como ejemplo, véase la Figura 3.3. Obsérvese que en este caso los límites por la derecha y por la izquierda de 5, no coinciden.

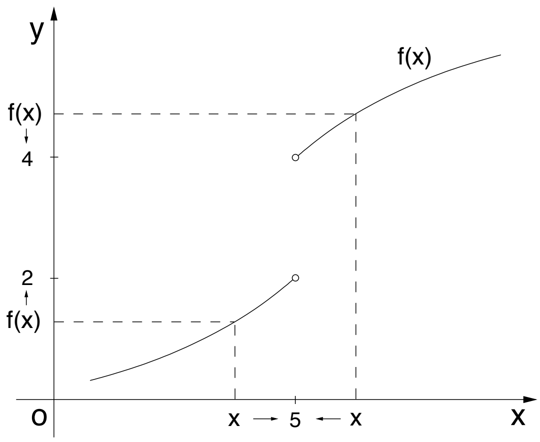

Figura 3.3: $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 4$

Los límites por la derecha o por la izquierda son llamados *límites laterales*. Es intuitivamente obvio (y cuanto se dice en esta sección sólo descansa en la intuición) que

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = l$$

Una primera consecuencia de esta conclusión es que, si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

o alguno de ellos o ambos no existen, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c no existe.

Ejemplo 13: Para la función f representada en la Figura 3.4

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = 4$$

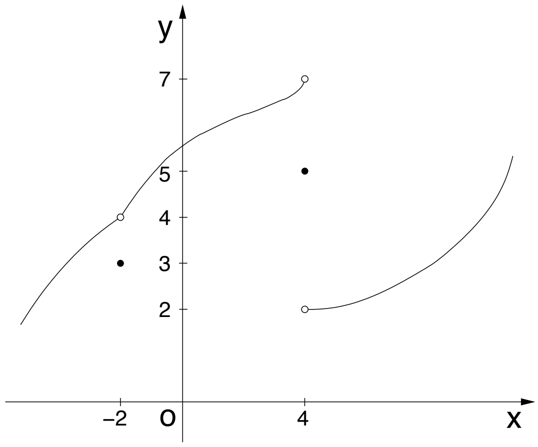

Figura 3.4: Gráfica del ejemplo 13

Luego, $\lim_{x\to-2} f(x) = 4$, no importando el hecho que $f(-2) = 3$. Examinando la gráfica de f cerca de $x = 4$, hallamos que $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 7$ mientras que $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$. Dado que estos límites laterales difieren, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 4 no existe.

Ejemplo 14: Consideremos la función f representada en la Figura 3.5. Cuando x se aproxima a 3, por cualquier lado, $f(x)$ se hace arbitrariamente grande. Al hacerse arbitrariamente grande, $f(x)$ no puede quedarse cerca de ningún número fijo l. Luego, $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe.

Observemos ahora lo que ocurre cerca de 7. Cuando x se aproxima a 7 por la izquierda, $f(x)$ toma valores negativos arbitrariamente grandes en magnitud o valor absoluto (es decir, menores que cualquier número negativo fijado con anterioridad). En esas circunstancias $f(x)$ no puede aproximarse a un número fijo. Luego, $\lim_{x\to 7^-} f(x)$ no existe. Puesto que el límite por izquierda en $x = 7$ no existe, decimos que $\lim_{x\to 7} f(x)$ no existe.

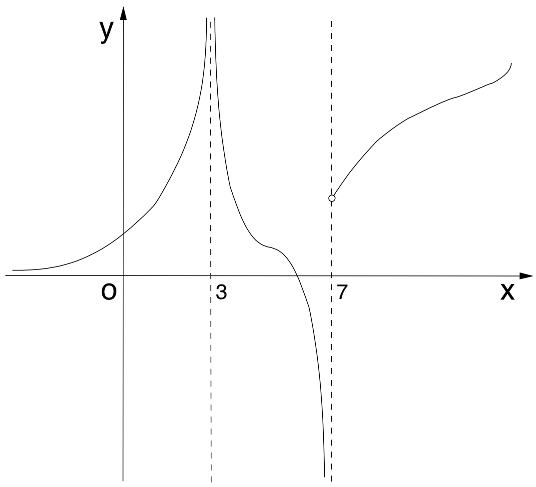

Figura 3.5: Gráfica del ejemplo 14

Nuestro próximo ejemplo es algo más sofisticado.

Ejemplo 15: Sea f la función definida de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional;} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Consideremos un número real c cualquiera. Cuando x se aproxima a c, toma valores tanto racionales como irracionales. Al suceder ésto, $f(x)$ salta abruptamente hacia abajo y hacia arriba entre 0 y 1, no pudiendo permanecer próxima a ningún número fijo l. Por consiguiente, $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

Observación 3.28. *Cuando no se ha dado la gráfica de la función estudiada, puede resultar útil dibujarla. Sin embargo, los límites pueden calcularse prescindiendo de las gráficas.*

Ejemplo 16: Vemos que $\lim_{x \to 3}(2x + 5) = 11$, pues cuando x tiende a 3, $2x$ tiende a 6, y $2x + 5$ tiende a 11.

Ejemplo 17: Tenemos que $\lim_{x \to 2}(x^2 - 1) = 3$, pues cuando x tiende a 2, x^2 tiende a 4, y $x^2 - 1$ tiende a 3.

Ejemplo 18: Resulta aquí que

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

pues cuando x tiende a 3, $x - 1$ tiende a 2, y $\frac{1}{x-1}$ tiende a $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 19: Vemos, a partir de la Figura 3.6, que el $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ no existe.

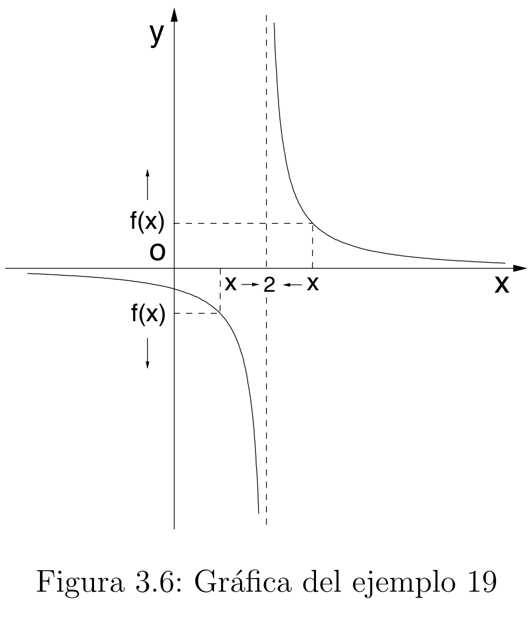

Figura 3.6: Gráfica del ejemplo 19

Ejemplo 20: Afirmamos aquí que $\lim_{x\to 2}(x-2)/(x-2) = 1$. Notemos que, en $x = 2$ la función no está definida: tanto el numerador como el denominador valen 0. Pero como hemos dicho anteriormente, ésto no importa. Para todo $x \neq 2$, cerca de 2,

$$\frac{x-2}{x-2} = 1 \quad \text{de manera que} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} 1 = 1$$

Ejemplo 21: Veamos que,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2} = 0$$

Observemos que, en $x = 2$ la función no está definida: tanto el numerador como el denominador valen 0. Pero esto no importa. Para todo $x \neq 2$ cerca de 2,

$$\frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)} = x-2$$

de ahí que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0.$$

Ejemplo 22: En este caso, $\lim_{x\to 2}(x-2)/(x^2-4x+4)$ no existe.

Este resultado no proviene del hecho de que la función no esté definida en $x = 2$, sino del hecho que, para todo $x \neq 2$ próximo a 2, se verifique

$$\frac{x-2}{x^2-4x+4} = \frac{1}{x-2}$$

y de que, como ya hemos visto en el Ejemplo 19,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} \quad \text{no existe.}$$

Ejemplo 23: Si $f(x)$ es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \neq 2; \\ 45, & x = 2. \end{cases}$$

entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$. En efecto, para $x \neq 2$ cerca de 2, $f(x) = 3x-1$; de ahí que $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(3x-1) = 5$. No importa que $f(2) = 45$.

Ejemplo 24: Si definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 1; \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

entonces $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. Se obtiene esta conclusión, puesto que los límites laterales son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x) = 2$$

Ejemplo 25: Si $f(x)$ es la función del ejemplo 24, entonces $\lim_{x\to 1{,}03} f(x) = 2{,}06$. Esta conclusión se debe a que, para los valores de x suficientemente próximos a 1,03, los valores de la función se calculan por la fórmula $2x$, esté x a la izquierda o a la derecha de 1,03.

Todas las conclusiones obtenidas en esta sección fueron construídas sobre la base de la intuición, pero no tiene porqué ser así. Uno de los grandes éxitos del cálculo ha sido su capacidad para formular de manera precisa los enunciados relativos a los límites.

3.3. Trabajo Práctico: Noción intuitiva de límite

En los ejercicios 1 a 12 se consideran un número c y la gráfica de la función f. Utilice la gráfica de f para hallar

(a) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ (d) $f(c)$

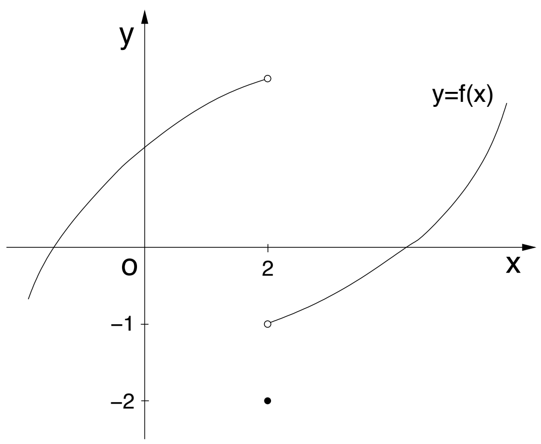

Figura 3.7: Ejercicio 1 con $c = 2$.

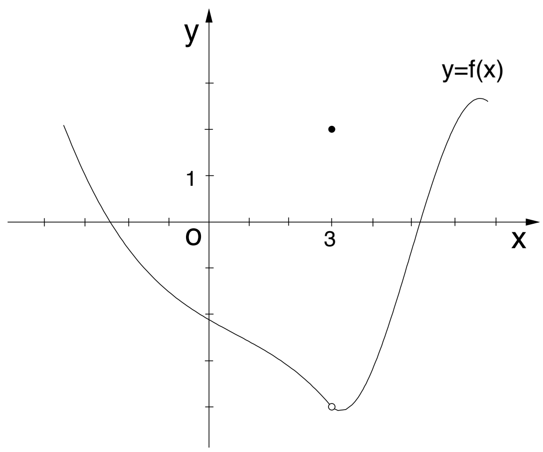

Figura 3.8: Ejercicio 2 con $c = 3$.

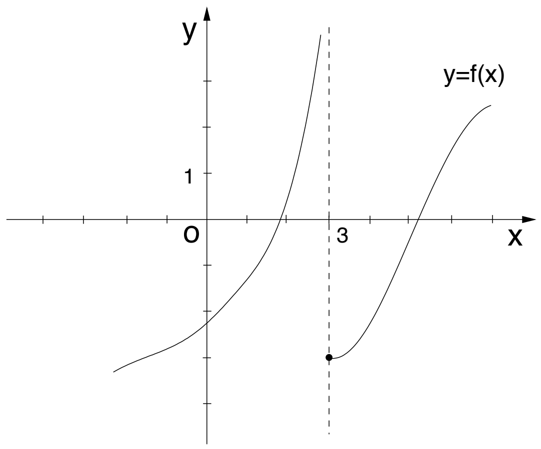

Figura 3.9: Ejercicio 3 con $c = 3$.

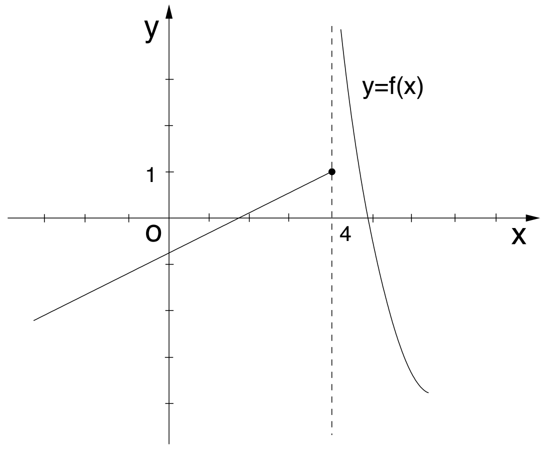

Figura 3.10: Ejercicio 4 con $c = 4$.

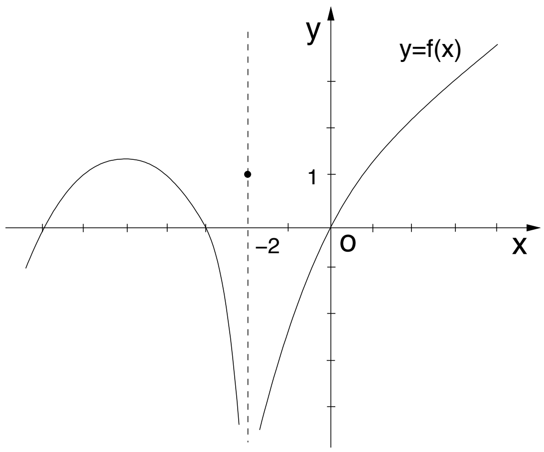

Figura 3.11: Ejercicio 5 con $c = -2$.

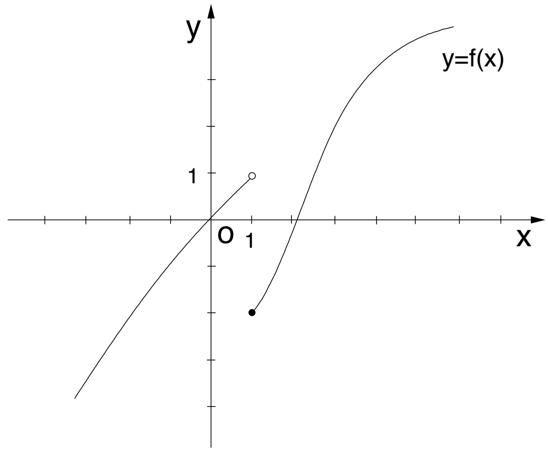

Figura 3.12: Ejercicio 6 con $c = 1$.

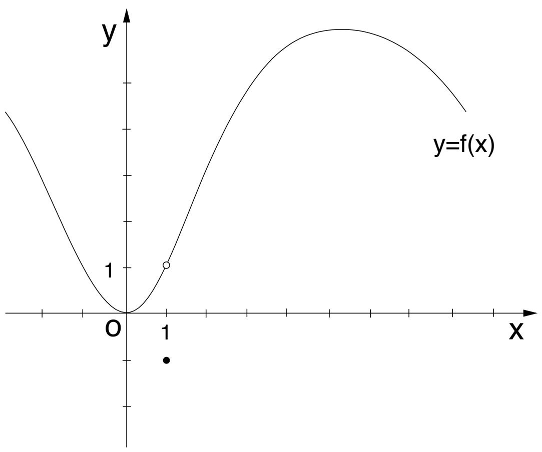

Figura 3.13: Ejercicio 7 con $c = 1$.

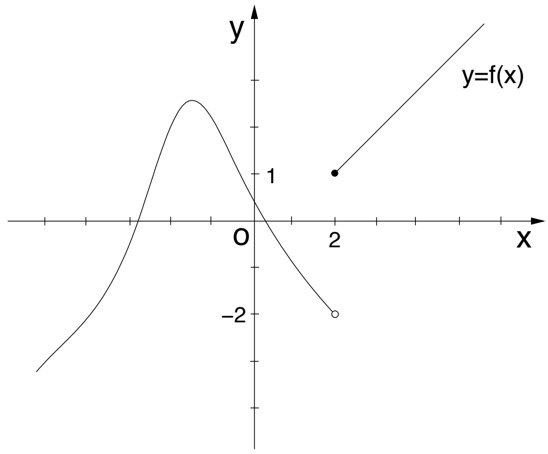

Figura 3.14: Ejercicio 8 con $c = -1$.

Ejercicios 13 y 14: Indique los valores de c para los cuales $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

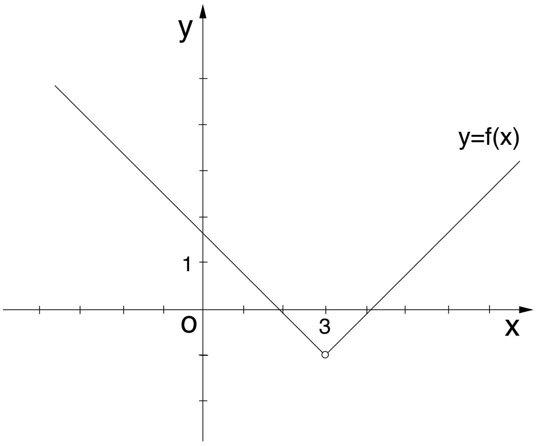

Figura 3.15: Ejercicio 9 con $c = 3$.

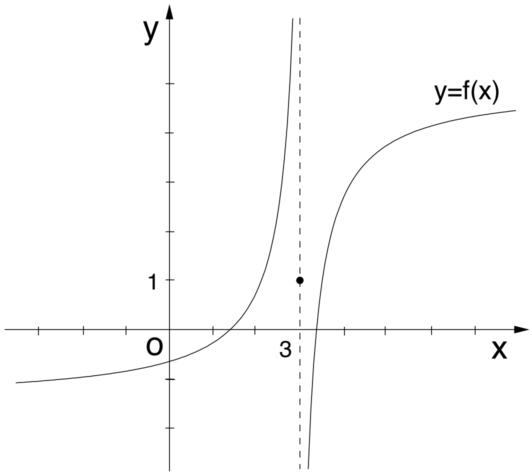

Figura 3.16: Ejercicio 10 con $c = 3$.

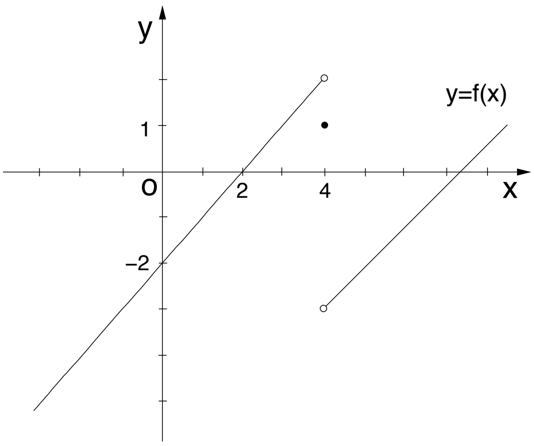

Figura 3.17: Ejercicio 11 con $c = 2$.

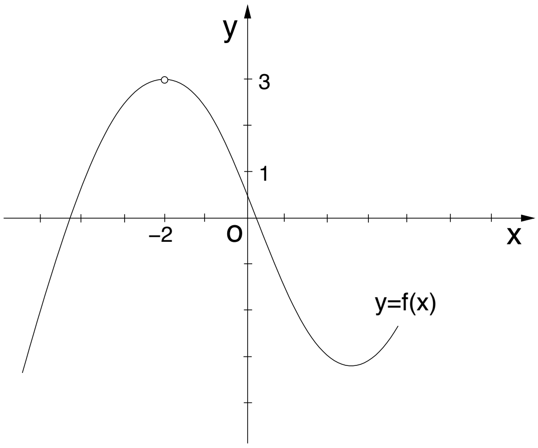

Figura 3.18: Ejercicio 12 con $c = -2$.

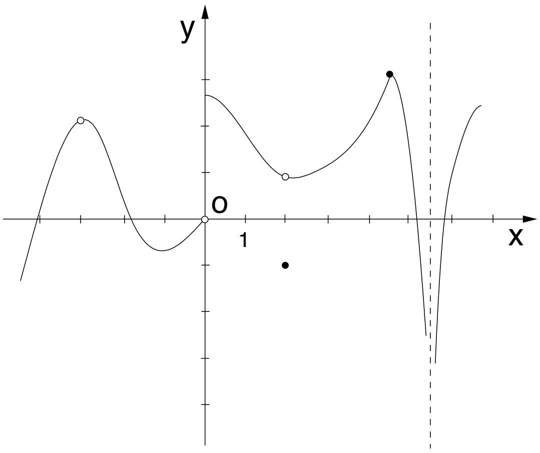

Figura 3.19: Ejercicio 13.

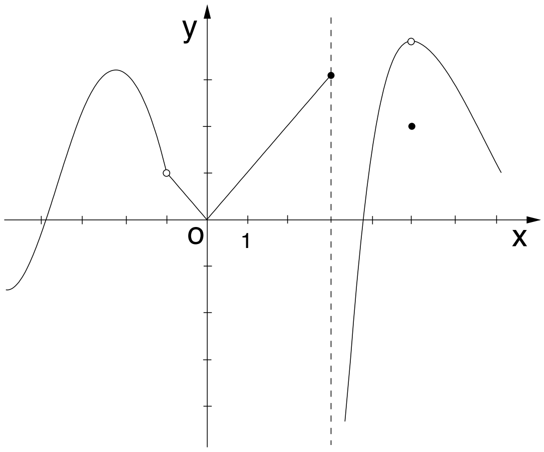

Figura 3.20: Ejercicio 14.

Ejercicios 15 a 50: Decida, con razonamientos intuitivos, si existe o no el límite indicado y calcúlelo en caso de existir.

15. $\lim_{x\to 0}(2x-1)$
16. $\lim_{x\to 1}(2-5x)$
17. $\lim_{x\to -2} x^2$
18. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}$
19. $\lim_{x\to -3}(|x|-2)$
20. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$
21. $\lim_{x\to 1}\dfrac{3}{x+1}$
22. $\lim_{x\to 0}\dfrac{4}{x+1}$
23. $\lim_{x\to -1}\dfrac{2}{x+1}$
24. $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{3x-6}$
25. $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x-3}$
26. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$
27. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$
28. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$
29. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$
30. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$
31. $\lim_{x\to 0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
32. $\lim_{x\to 1}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
33. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x-5x^2}{x}$
34. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{6-2x}$
35. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$
36. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$
37. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x+1}$
38. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

39. $\lim_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 1, & x\neq 0;\\ 3, & x=0.\end{cases}$
40. $\lim_{x\to 1} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 3x, & x<1;\\ 3, & x>1.\end{cases}$
41. $\lim_{x\to 4} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 4;\\ 0, & x=4.\end{cases}$
42. $\lim_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$
43. $\lim_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0;\\ 1+x, & x>0.\end{cases}$
44. $\lim_{x\to 1} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 2x, & x<1;\\ x^2+1, & x>1.\end{cases}$
45. $\lim_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 2, & x \text{ racional};\\ -2, & x \text{ irracional}.\end{cases}$
46. $\lim_{x\to 1} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 2x, & x \text{ racional};\\ 2, & x \text{ irracional}.\end{cases}$
47. $\lim_{x\to 2} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 3x, & x<1;\\ x+2, & x\geq 1.\end{cases}$
48. $\lim_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 2x, & x\leq 1;\\ x+1, & x>11.\end{cases}$
49. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}.$
50. $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{30}}{x-5}.$

51. **(Use calculadora)** Dé una estimación de $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x$ (medido en radianes) después de calcular el cociente para los valores $x=\pm1,\pm0.1,\pm0.01$,±0.001.

52. **(Use calculadora)** Dé una estimación de

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}\qquad \text{(medido en radianes)}$$

después de calcular el cociente para los valores $x=\pm1,\pm0.1,\pm0.01$,±0.001.

53. **(Use calculadora)** Dé una estimación de

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{3/2}-1}{x-1}$$

después de calcular el cociente para los valores $x=$0.9,0.99,0.999,0.9999 y $x=$1.1, 1.01, 1.001, 1.0001.

Capítulo 4

Enfoque Continuo de la Teoría del Límite Funcional en una Variable

4.1. Introducción

Entre todos los conceptos que se presentan en el Cálculo Infinitesimal, el de *límite* es sin duda el más importante y quizás también el más difícil. En este capítulo presentamos formalmente la definición de este concepto utilizando la idea de entorno y entorno reducido.

4.2. Definición de límite

Sea f una función y c un número real. No exigiremos que f esté definida en c, pero sí que f esté definida en, al menos, un conjunto de la forma $(c-p,c)\cup(c,c+p)$ con $p>0$. Esto garantiza que podamos hablar de $f(x)$ para todos los $x\neq c$ que estén "suficientemente próximos a c".

Decir que $\lim_{x\to c} f(x)=l$ es equivalente a decir que $|f(x)-l|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño con tal que $|x-c|$ sea también arbitrariamente pequeño pero distinto de cero.

De manera más formal, presentamos la siguiente "definición fundamental", a la cual nos referiremos como la definición $\varepsilon-\delta$ del límite de una función.

Definición 4.1 (El límite de una función). *Sea f una función definida al menos en algún conjunto de la forma $(c-p,c)\cup(c,c+p)$ con $p>0$. Luego,* $\lim_{x\to c} f(x)=l$ *si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $0<|x-c|<\delta$ entonces $|f(x)-l|<\varepsilon$.*

Las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 ilustran esta definición.

En general, el δ que verifica la condición de la definición, depende del ε elegido previamente. No exigimos que exista un único número δ que "sirva"para todos los ε sino, más bien, que para cada ε exista un δ que "sirva"para él particularmente.

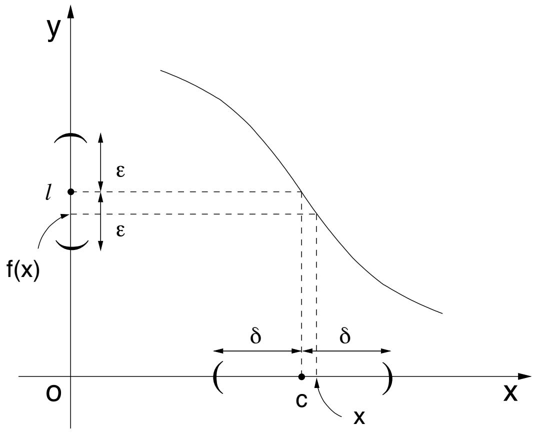

Figura 4.1: $\lim_{x\to c} f(x) = l$

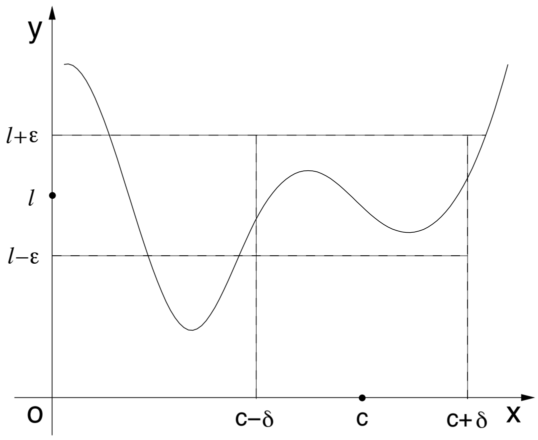

Figura 4.2: Una elección posible de ε.

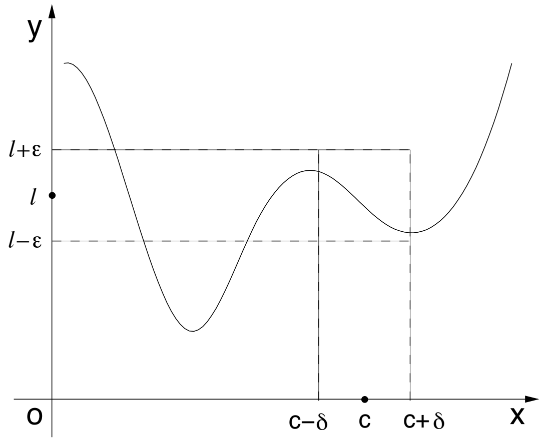

Figura 4.3: Otra elección posible de ε.

En las Figuras 4.2 y 4.3 visualizamos dos elecciones de ε, y para cada una de ellas mostramos un δ apropiado. Para que un δ sea apropiado, en todos los puntos que se encuentran a una distancia de c menor que δ (con la posible excepción del propio c) la función debe tomar valores que estén a una distancia de l menor que ε. En la Figura 4.3, partimos de un ε más pequeño y tuvimos que usar un δ también más pequeño.

El δ de la Figura 4.4 es demasiado grande para el ε dado. En particular, los puntos designados en dicha figura por x_1 y x_2 no son aplicados por la función a distancias de l menores que ε.

Observación 4.2. *Siempre que se diga* $\lim_{x\to c} f(x) = l$*, se presupone que* $f(x)$ *está definida al menos en algún conjunto de la forma* $(c-p, c) \cup (c, c+p)$ *con* $p > 0$.

A continuación aplicamos la definición $\varepsilon - \delta$ de límite a una amplia variedad de funciones. A quien no haya usado nunca argumentos del tipo $\varepsilon - \delta$ ("Dado ε, encuentre un δ"), estos le podrán parecer algo confusos en un principio. Normalmente se requiere algún tiempo para familiarizarse con la idea $\varepsilon - \delta$ para definir el límite.

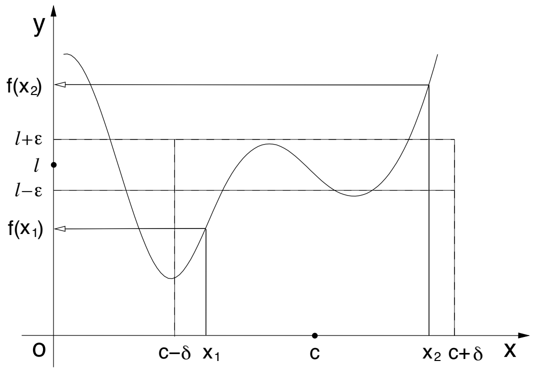

Figura 4.4: Un δ demasiado grande.

Ejemplo 1: Demostremos que $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$.

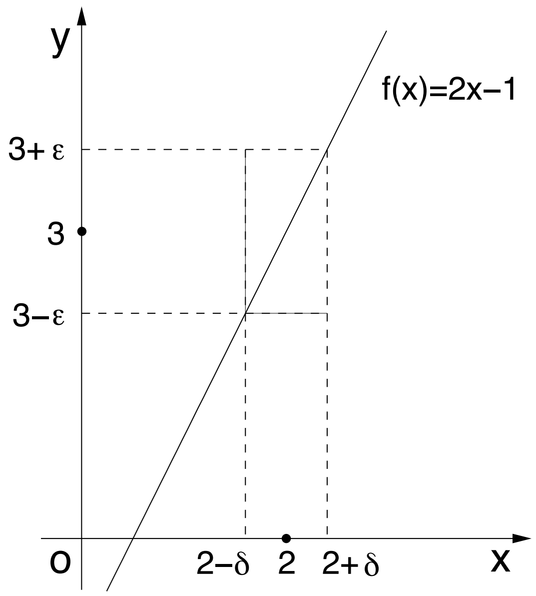

Figura 4.5: Gráfica del ejemplo 1.

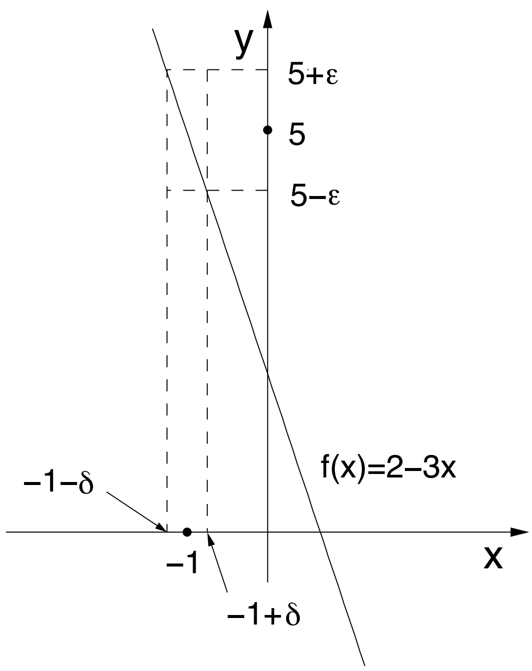

Figura 4.6: Gráfica del ejemplo 2.

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, se cumple que $|(2x-1)-3| < \varepsilon$. Lo primero que tenemos que hacer es establecer una relación entre $|(2x-1)-3|$ y $|x-2|$. En este caso, dicha relación es sencilla: $|(2x-1)-3| = |2x-4| = 2|x-2|$. A partir de ello, es suficiente tomar $\delta = \varepsilon/2$ pues de esta manera para aquellos $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan que $|x-2| < \delta$, se cumplirá que $|(2x-1)-3| < \varepsilon$. En efecto: $|(2x-1)-3| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon$.

Observación 4.3. *En el Ejemplo* 1*, hemos escogido $\delta = \varepsilon/2$, pero podríamos haber escogido cualquier δ positivo, $\delta \le \varepsilon/2$. En general, si un determinado δ resulta apropiado,* *cualquier $\delta > 0$ más pequeño también lo será.*

Ejemplo 2: Probemos que $\lim_{x\to -1}(2-3x) = 5$.

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-(-1)| < \delta$ entonces $|(2-3x)-5| < \varepsilon$. Para hallar una relación entre $|x-(-1)|$ y $|(2-3x)-5|$, simplificamos ambas expresiones: $|x-(-1)| = |x+1|$ y $|(2-3x)-5| = |-3x-3| = 3|x+1|$.

Podemos hacer que el miembro izquierdo de la última expresión sea menor que ε tomando $|x-(-1)| < \varepsilon/3$. Esto sugiere tomar $\delta = \varepsilon/3$. Veamos que ese δ sirve. Si $0 < |x-(-1)| < \varepsilon/3$, entonces $3|x-(-1)| < \varepsilon$ con lo que $|(2-3x)-5| < \varepsilon$.

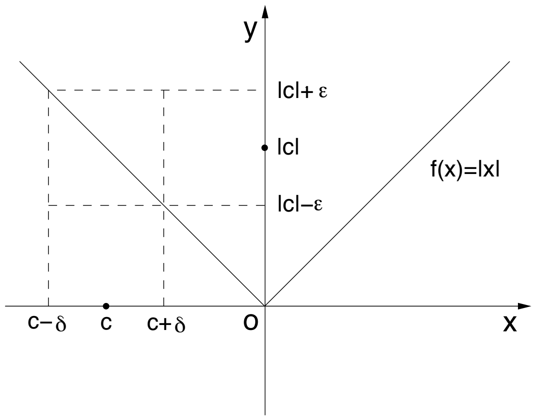

Figura 4.7: Gráfica del ejemplo 3.

Ejemplo 3: Veamos que $\lim_{x\to c}|x| = |c|$.

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un número $\delta > 0$ tal que si, $0 < |x-c| < \delta$ entonces $||x|-|c|| < \varepsilon$. Puesto que $||x|-|c|| \leq |x-c|$ podemos escoger $\delta = \varepsilon$. Luego si $0 < |x-c| < \varepsilon$ entonces $||x|-|c|| < \varepsilon$, lo que demuestra el resultado planteado.

Observación 4.4. *En la demostración del ejemplo anterior se usó el hecho que $||x|-|c|| \leq |x-c|$ lo que proviene de propiedades del valor absoluto tales como $a^2 = |a|^2$, $ab \leq |ab| = |a||b|$, por lo que*

$$(x-c)^2 = x^2 - 2xc + c^2 \geq |x|^2 - 2|x||c| + |c|^2 = (|x|-|c|)^2$$

De aquí que $\sqrt{(|x|-|c|)^2} \leq \sqrt{(x-c)^2}$ por lo que se deduce finalmente el resultado buscado.

Ejemplo 4: Demostremos que $\lim_{x\to c} x = c$.

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$, entonces $|x-c| < \varepsilon$. Evidentemente, podemos escoger $\delta = \varepsilon$.

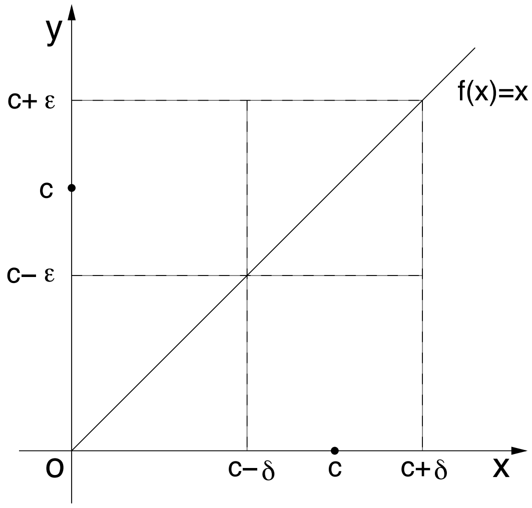

Figura 4.8: Gráfica del ejemplo 4.

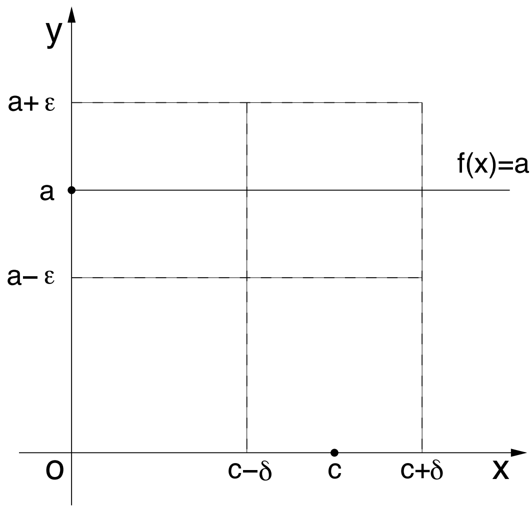

Figura 4.9: Gráfica del ejemplo 5.

Ejemplo 5: Probemos ahora la siguiente igualdad $\lim_{x\to c} a = a$.

La función que está involucrada aquí, es la función constante $f(x) = a$. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - a| < \varepsilon$. Pero $|f(x) - a| = |a - a| = 0$ cualquiera sea x. Luego, no importa cual sea el δ escogido, siempre se verificará que $|f(x) - a| = 0 < \varepsilon$.

Habitualmente los razonamientos $\varepsilon - \delta$ se desarrollan en dos fases. En una primera etapa, realizamos una pequeña tarea algebraica, denominada "hallemos un δ". Esta actividad supone partir de un $\varepsilon > 0$ dado y establecer una relación entre $|f(x) - l|$ y $|x - c|$ de modo tal que, a partir de ella, se pueda elegir claramente el δ en función de ε de manera de poder asegurar que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cada vez que $|x - c| < \delta$. La segunda etapa consiste en demostrar que el δ seleccionado sirve para nuestros fines, comprobando que

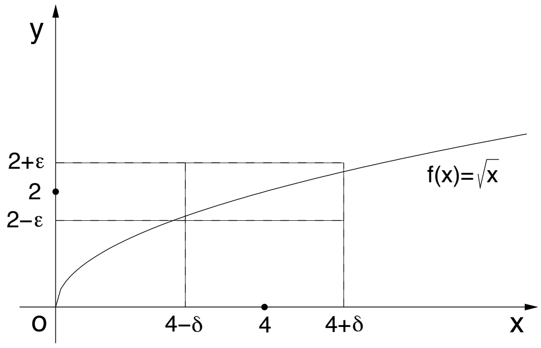

Figura 4.10: Gráfica del ejemplo 6.

para nuestra elección de δ, es cierta la implicación

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Los dos ejemplos siguientes son más complicados, pero pueden dar una idea mejor de cómo hallar un δ.

Ejemplo 6: Consideremos el siguiente límite $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$.

Primera etapa: *Hallemos un* δ. Buscamos un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 4| < \delta$, entonces $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$. Intentaremos encontrar ahora una relación entre $|\sqrt{x} - 2|$ y $|x - 4|$. Como estamos trabajando con la función $f(x) = \sqrt{x}$, debemos considerar $x \geq 0$ para que f tome valores reales. Esto se asegura tomando $\delta \leq 4$. Teniendo en mente esta restricción para el δ, escribimos

$$x - 4 = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$$

Si tomamos valores absolutos al primer y último miembro de las igualdades anteriores, teniendo en cuenta que $|\sqrt{x} + 2| > 1$, para todo $x \geq 0$ podemos concluir que $|\sqrt{x} - 2| < |x - 4|$. Esta última desigualdad sugiere tomar simplemente $\delta = \varepsilon$. Pero recordemos ahora el requisito previo de que ha de ser $\delta \leq 4$. Podemos satisfacer todos los requerimientos tomando δ como el mínimo entre 4 y ε.
Veamos ahora la segunda etapa: la comprobación de que el δ elegido sirve. Sea $\varepsilon > 0$. Escojamos $\delta = \min\{4, \varepsilon\}$ y supongamos que $0 < |x - 4| < \delta$. Puesto que $\delta \leq 4$, tenemos que $x \geq 0$ y podemos escribir $|x - 4| = |\sqrt{x} + 2||\sqrt{x} - 2|$. Como $|\sqrt{x} + 2| > 1$, podemos concluir que $|\sqrt{x} - 2| < |x - 4|$. Al ser $|x - 4| < \delta$ y $\delta \leq \varepsilon$, resulta que $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$. Con ésto concluimos que efectivamene $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.

Ejemplo 7: Probemos ahora que $\lim_{x\to 3} x^3 = 27$.

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$. *Hallemos un* δ. Buscamos un número $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x-3| < \delta$, entonces $|x^3 - 27| < \varepsilon$. La relación que necesitamos entre $|x - 3|$ y $|x^3 - 27|$ se halla

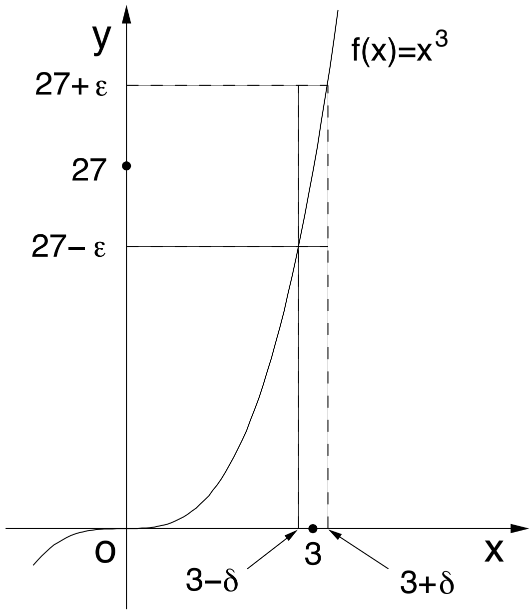

Figura 4.11: Gráfica del ejemplo 7.

factorizando el binomio $x^3 - 27$ como $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$. Luego, tomando valores absolutos

$$|x^3 - 27| = |x-3||x^2+3x+9| \tag{4.1}$$

En este punto necesitamos hallar un control de $|x^2+3x+9|$ para los valores de x cercanos a 3. Supongamos en un principio que los valores de x no difieren de 3 en más de una unidad. Con esto estamos haciendo una elección de δ. Veamos dónde nos lleva. Si $|x-3| < 1$, entonces $2 < x < 4$ y

$$\begin{aligned} |x^2+3x+9| &\leq |x^2| + |3x| + |9| \\ &= |x|^2 + 3|x| + 9 \\ &< 16 + 12 + 9 = 37 \end{aligned}$$

De (4.1) se deduce que si $|x-3| < 1$ entonces

$$|x^3 - 27| < 37|x-3| \tag{4.2}$$

Si además, suponemos que $|x-3| < \varepsilon/37$, obtenemos que $|x^3-27| < \varepsilon$. Pero $\varepsilon/37$ es otra elección de δ. De los dos valores seleccionados, elijamos el más conveniente, es decir, aquel que nos asegure todas las deducciones realizadas. Un valor que cumple con este requisito es δ igual al mínimo entre 1 y $\varepsilon/37$.

Comprobemos que este δ sirve. Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/37\}$ y supongamos que $0 < |x-3| < \delta$. Entonces, $|x-3| < 1$ y $|x-3| < \varepsilon/37$. Por (4.2), $|x^3-27| < 37\varepsilon/37 = \varepsilon$. Luego, $\text{lím}_{x\to 3} x^3 = 27$.

Existen muchas maneras diferentes de formular un mismo resultado relativo a los limites. Algunas veces una formulación es más conveniente que las demás; otras veces es otra. En cualquier caso es útil saber que las siguientes formulaciones son equivalentes:

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = l$ $\quad$ (ii) $\lim_{x\to c}(f(x) - l) = 0$

(iii) $\lim_{x\to c} |f(x) - l| = 0$ $\quad$ (iv) $\lim_{h\to 0} f(c + h) = l$

Se deja como ejercicio para los alumnos la demostración de la equivalencia entre (i), (ii), (iii), es decir, $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$. Probemos a continuación la equivalencia entre (i) y (iv).

Proposición 4.5. (i) $\lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow (iv)$ $\lim_{h\to 0} f(c + h) = l$.

Demostración: Caso $(i) \Rightarrow (iv)$*:* Si $\lim_{x\to c} f(x) = l$, por la definición 4.1, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Consideremos la siguiente sustitución en la definición anterior: $x = c + h$ (Nótese que no se ha afirmado nada sobre el signo de h). Luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |c+h-c| < \delta \Rightarrow |f(c+h)-l| < \varepsilon$. Esto, según la definición 4.1, corresponde a $\lim_{h\to 0} f(c + h) = l$. □

Caso $(i) \Leftarrow (iv)$*:* Si se parte de que $\lim_{h\to 0} f(c + h) = l$, y se sustituye $c + h$ por x en la definición correspondiente, de manera análoga a lo que se hizo en el caso anterior, se llega rápidamente a la conclusión (i). □

Ejemplo 8: Para $f(x) = x^3$ tenemos que

$\lim_{x\to 2} x^3 = 8,$ $\quad$ $\lim_{x\to 2}(x^3 - 8) = 0$

$\lim_{x\to 2} |x^3 - 8| = 0,$ $\quad$ $\lim_{h\to 0}(2 + h)^3 = 8$

Consideremos ahora las siguientes afirmaciones:

$$(a)\ \lim_{x\to c} f(x) = l \quad \text{y} \quad (b)\ \lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$$

y establezcamos relaciones entre ellas. Concretamente, veremos que se verifica que $(a) \Rightarrow (b)$, mientras que el razonamiento recíproco es falso.

Proposición 4.6. $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *implica que* $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$.

Demostración: Si $\lim_{x\to c} f(x) = l$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$. Pero $||f(x)|-|l|| \leq |f(x)-l| < \varepsilon$. Luego $||f(x)|-|l|| < \varepsilon$ si $0 < |x-c| < \delta$. Así, según la definición 4.1, se tiene que $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$. □

Por otro lado, veamos que $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$ no implica que $\lim_{x\to c} f(x) = l$ mediante un contraejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ (racional);} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{I} \text{ (irracional).} \end{cases}$$

Entonces $|f(x)| = 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Luego $\lim_{x\to c} |f(x)| = 1$ para cualquier c. Sin embargo, $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe para ninguna elección de c. Probemos esta última afirmación.

En efecto: Primero veremos que el número 1 no es el límite buscado, y luego demostraremos que ningún número real $l \neq 1$, es dicho límite. Sea $\varepsilon = 1{,}5$. Para cualquier entorno reducido de c que se elija, se cumple que, si $0 < |x-c| < \delta$ y $x \in \mathbb{I}$ entonces $f(x) = -1$ cualquiera sea el δ que se tome. Por lo tanto para esos x es $|f(x) - l| = |-1-1| = 2 > \varepsilon = 1{,}5$. Luego $\lim_{x\to c} f(x) \neq 1$.

Para probar que ningún número real $l \neq 1$ es el límite de $f(x)$, para cuando x tiende a un valor c real cualquiera, elegimos $\varepsilon = |1-l|/2$ que es positivo pues $l \neq 1$. En cualquier entorno reducido de c que se tome, se verifica que: si $0 < |x-c| < \delta$ y $x \in \mathbb{Q}$, es $f(x) = 1$. Por lo tanto, para esas x se tiene que:

$$|f(x) - l| = |1-l| > \frac{|1-l|}{2} = \varepsilon$$

cualquiera sea el δ que se tome. Esto es suficiente para asegurar que la función f no admite a ningún número real distinto de 1 como límite en un punto c real. En consecuencia, $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$.

Nos ocuparemos ahora de las definiciones $\varepsilon - \delta$ de los límites laterales. Se trata de los enunciados $\varepsilon - \delta$ habituales, excepto que para un límite por la izquierda, el δ debe emplearse sólo del lado izquierdo de c mientras que para un límite por la derecha, el δ ha de emplearse sólo por el lado derecho de c.

Definición 4.7 (Límite por la izquierda). *Sea f una función definida al menos en un intervalo de la forma $(c-p, c)$, con $p > 0$.*

Diremos que $\lim_{x\to c^-} f(x) = l^-$ *(y se lee l^-* es el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a c por la izquierda *y se lo denomina límite lateral izquierdo de $f(x)$), si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $c - \delta < x < c$ entonces $|f(x) - l^-| < \varepsilon$.*

Definición 4.8 (Límite por la derecha). *Sea f una función definida al menos en un intervalo de la forma $(c, c+p)$, con $p > 0$.*

Diremos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = l^+$ *(y se lee l^+* límite de $f(x)$ cuando x se acerca a c por la derecha *y se lo denomina límite lateral derecho de $f(x)$), si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $c < x < c + \delta$ entonces $|f(x) - l^+| < \varepsilon$.*

Como veremos en el siguiente ejemplo, existen funciones para las cuales estos límites laterales son distintos. En estos casos, el límite (bilateral) no existe.

Ejemplo 9: Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Luego $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

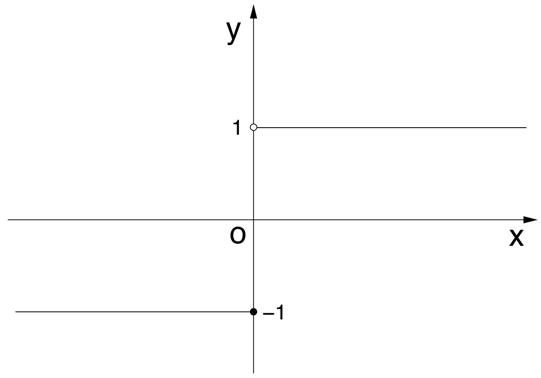

Figura 4.12: Gráfica del ejemplo 9.

A partir de la gráfica de la Figura 4.12, se observa que los límites laterales de la función $f(x)$ en $x = 0$ son 1 y -1, por derecha y por izquierda, respectivamente. Esto se puede demostrar muy fácilmente a partir de las definiciones dadas, ya que la función $f(x)$ toma valores constantes, a uno y otro lado de $x = 0$; valores que coinciden con dichos límites laterales. Luego, dado $\varepsilon > 0$, cualquiera sea el $\delta > 0$ que se tome, se puede comprobar lo afirmado anteriormente.

Veamos a continuación que no existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$. Para ello probaremos en primer lugar que el número 1 no es el límite buscado. En segundo lugar, veremos que ningún número real $l \neq 1$, puede ser dicho límite. Si se verifican las 2 afirmaciones anteriores, entonces los valores de f no tienen límite en el punto $x = 0$.

Veamos que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$. Consideremos $\varepsilon = 1/2$. Cualquiera sea el entorno reducido de cero que tomemos, digamos de radio $\delta > 0$ cualquiera, contiene puntos x negativos; es decir, existen x tales que $-\delta < x < 0$. Para estos valores, $f(x) = -1$. Luego, $|f(x) - 1| > 1/2$. Esto es suficiente para afirmar que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$.

Veamos ahora que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq l$ para cualquier número real $l \neq 1$. Para ello consideremos $\varepsilon = |1-l|/2$ que es positivo pues $l \neq 1$. Luego, cualquiera sea el entorno reducido de cero, digamos de radio $\delta > 0$ cualquiera, contiene valores positivos. Es decir, existen puntos x tales que $0 < x < \delta$ para los cuales, $f(x) = 1$. Luego, $|f(x) - l| = |1 - l| > \varepsilon$. Con ello podemos afirmar que ningún número real $l \neq 1$ es el $\lim_{x\to 0} f(x)$.

De ambas afirmaciones, podemos concluir que no existe número real que sea límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero. Luego, dicho límite no existe.

Los limites (uni)laterales nos dan una manera sencilla de determinar cuándo un límite (bilateral) existe. La demostración de este resultado es sencilla, puesto que cualquier δ que sirva para el límite, tambien será apropiado para los limites laterales y que cualquier δ que sirva para los dos limites laterales servirá para el límite.

Proposición 4.9.

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = l \quad y \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = l$$

Demostración: Caso ($\Rightarrow$): Si $\lim_{x\to c} f(x) = l$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, tanto si $c - \delta < x < c$ como si $c < x < c + \delta$, se verifica que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Por lo tanto, tenemos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = l$. □

Caso ($\Leftarrow$): Si $\lim_{x\to c^+} f(x) = l$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que si

$$c < x < c + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{4.3}$$

Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = l$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que si

$$c - \delta_2 < x < c \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{4.4}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego dado $\varepsilon > 0$, veamos que este δ sirve.

Consideremos los x tales que $0 < |x - c| < \delta$ y $x \neq c$. Entonces $c - \delta < x < c + \delta$. Luego, para los x tales que $c - \delta < x < c$ se tiene que $c - \delta_2 \leq c - \delta < x < c$ y luego por (4.4) podemos afirmar que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Para los x tales que $c < x < c + \delta$ se tiene que $c < x < c + \delta \leq c + \delta_1$ y de esta manera por (4.3) podemos afirmar que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Finalmente hemos probado que cualquiera sea x tal que $0 < |x - c| < \delta$, se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Luego, $\lim_{x\to c} f(x) = l$. □

4.3. Algunos teoremas sobre límites

Como hemos visto en la última sección, puede resultar tedioso aplicar cada vez el criterio $\varepsilon - \delta$ para calcular el límite de una función. A continuación, veremos algunos teoremas generales acerca de los límites, a partir de los cuales podremos ahorrarnos buena parte de ese trabajo repetitivo. Naturalmente, estos teoremas (al menos los primeros) han de ser demostrados por medio del método $\varepsilon - \delta$.

Empezaremos por demostrar que el límite, si existe, es único.

Teorema 4.10 (Unicidad del limite). *Si* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to c} f(x) = m$*, entonces* $l = m$*.*

Demostración: Vamos a demostrar que $l = m$ probando que la hipótesis $l \neq m$ lleva a una contradicción. Supongamos que $l \neq m$. Como $\lim_{x\to c} f(x) = l$, sabemos que dado $\varepsilon = |l - m|/2 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_1$ entonces

$$|f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2} \tag{4.5}$$

Por otro lado, dado que $\lim_{x\to c} f(x) = m$, sabemos que, con el ε anterior dado, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_2$ entonces

$$|f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2} \tag{4.6}$$

Tomemos ahora un número x_1 que satisfaga $0 < |x_1 - c| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, por (4.5) y (4.6) es

$$|f(x_1) - l| < \frac{|l - m|}{2} \quad \text{y} \quad |f(x_1) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned}|l-m| &= |[l-f(x_1)]+[f(x_1)-m]| \\ &\leq |l-f(x_1)|+|f(x_1)-m| \\ &< \frac{|l-m|}{2}+\frac{|l-m|}{2} \\ &= |l-m|\end{aligned}$$

Luego, concluimos que $|l-m|<|l-m|$, lo cual es un absurdo. El mismo provino de suponer que $l \neq m$. Luego $l=m$. □

El siguiente resultado constituye una herramienta muy útil a la hora de calcular límites, a partir de otros conocidos.

Teorema 4.11. *Si* $\lim_{x\to c} f(x)=l$ *y* $\lim_{x\to c} g(x)=m$, *entonces*

(i) $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=l+m$
(ii) $\lim_{x\to c}[\alpha f(x)]=\alpha l$, *para cada* α *real*
(iii) $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]=lm$.

Demostración: Demostraremos cada ítem separadamente.
(i) Sea $\varepsilon>0$. Probaremos que existe un $\delta>0$ tal que si $0<|x-c|<\delta$ entonces $|(f(x)+g(x))-(l+m)|<\varepsilon$. Obsérvese que:

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(l+m)| &= |(f(x)-l)+(g(x)-m)| \\ &\leq |f(x)-l|+|g(x)-m| \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Conseguiremos que $|(f(x)+g(x))-(l+m)|$ sea menor que ε haciendo que $|f(x)-l|$ y $|g(x)-m|$ sean ambos menores que $\varepsilon/2$.

Dado que $\lim_{x\to c} f(x)=l$ y $\lim_{x\to c} g(x)=m$, sabemos que existen dos números positivos, δ_1 y δ_2, tales que si $0<|x-c|<\delta_1$, entonces $|f(x)-l|<\frac{1}{2}\varepsilon$ y si $0<|x-c|<\delta_2$, entonces $|g(x)-m|<\frac{1}{2}\varepsilon$.
Ahora definamos $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ y observemos que,

$$\text{si} \quad 0<|x-c|<\delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x)-l|<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{y} \quad |g(x)-m|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

A partir de ello y de (4.7) tenemos que $|(f(x)+g(x))-(l+m)|<\varepsilon$.

Resumiendo, hemos encontrado $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, que hace que, si $0<|x-c|<\delta$ entonces $|(f(x)+g(x))-(l+m)|<\varepsilon$. Por consiguiente, (i) queda demostrado.

(ii) Para demostrar este ítem, fijemos un número real α cualquiera. Hay dos posibilidades: $\alpha\neq 0$ o bien $\alpha=0$. Consideremos además un $\varepsilon>0$ dado.

Si $\alpha \neq 0$, tendremos que dado $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/|\alpha| > 0$, y puesto que $\lim_{x\to c} f(x) = l$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \widetilde{\varepsilon}$. Luego,

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) - \alpha l| &= |\alpha||f(x) - l| \\ &< |\alpha|\widetilde{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - c| < \delta, \end{aligned}$$

de lo que se deduce que $\lim_{x\to c} \alpha f(x) = \alpha l$.

Si $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \alpha f(x) &= \lim_{x\to c} [0f(x)] \\ &= \lim_{x\to c} 0 \\ &= 0 \\ &= 0l \end{aligned}$$

por ser el límite de una constante igual a la constante misma.

En ambos casos, queda demostrado (ii).

(iii) Empezaremos con un poco de álgebra:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &= |(f(x)g(x) - f(x)m) + (f(x)m - lm)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)m| + |f(x)m - lm| \\ &= |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l| \\ &< |f(x)||g(x) - m| + (1 + |m|)|f(x) - l| \end{aligned} \tag{4.8}$$

Consideremos ahora $\varepsilon > 0$. Puesto que $\lim_{x\to c} f(x) = l$ y $\lim_{x\to c} g(x) = m$, sabemos que

- dado $\varepsilon_1 = 1$ existe un número $\delta_1 > 0$ tal que, si $0 < |x - c| < \delta_1$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon_1$ y por consiguiente para $0 < |x - c| < \delta_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - l) + l| \\ &\leq |f(x) - l| + |l| \\ &< 1 + |l| \end{aligned} \tag{4.9}$$

- dado $\varepsilon_2 = \varepsilon/(2 + 2|l|)$ existe un número $\delta_2 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon_2 \tag{4.10}$$

- dado $\varepsilon_3 = \varepsilon/(2 + 2|m|)$ existe un número $\delta_3 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_3 \tag{4.11}$$

Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y observemos que para los x tales que $0 < |x - c| < \delta$, se verifican (4.9), (4.10) y (4.11). Con ello y (4.8) se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &< (1 + |l|)\varepsilon_2 + (1 + |m|)\varepsilon_3 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado (iii) y en consecuencia, el teorema.

□

Los resultados del teorema 4.11 se extienden fácilmente (por inducción matemática) a cualquier colección finita de funciones en el sentido siguiente:

Si $\text{lím}_{x\to c} f_1(x) = l_1,\ \text{lím}_{x\to c} f_2(x) = l_2, \cdots,\ \text{lím}_{x\to c} f_n(x) = l_n$, entonces

$$\lim_{x\to c} [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)] = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \tag{4.12}$$

y

$$\lim_{x\to c} [\alpha_1 f_1(x) \alpha_2 f_2(x) \cdots \alpha_n f_n(x)] = \alpha_1 l_1 \alpha_2 l_2 \cdots \alpha_n l_n \tag{4.13}$$

Observación 4.12. *A partir de estos resultados es fácil ver que todo polinomio de la forma $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ verifica que:*

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) \tag{4.14}$$

Demostraremos esta igualdad, sin usar el criterio $\varepsilon - \delta$. En su lugar, aplicaremos el teorema 4.11 y sus generalizaciones.

En efecto, ya sabemos que $\text{lím}_{x\to c} x = c$. Además, si $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{x\to c} x^k = \lim_{x\to c} \underbrace{xx x \cdots x}_{k \text{ veces}}$$

Como consecuencia de (4.13) para $k \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\lim_{x\to c} x^k = \underbrace{\lim_{x\to c} x \lim_{x\to c} x \cdots \lim_{x\to c} x}_{k \text{ veces}} = c^k \tag{4.15}$$

También sabemos que $\text{lím}_{x\to c} a_0 = a_0$. Por ello, de (4.12) y (4.15) resulta que:

$$\lim_{x\to c} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0,$$

es decir, $\text{lím}_{x\to c} P(x) = P(c)$.

Aplicamos este resultado para calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lclcr} \text{lím}_{x\to 1}(5x^2 - 12x + 2) & = & 5(1)^2 - 12(1) + 2 & = & -5 \\ \text{lím}_{x\to 0}(14x^5 - 7x^2 + 2x + 8) & = & 14(0)^5 - 7(0)^2 + 2(0) + 8 & = & 8 \\ \text{lím}_{x\to -1}(2x^3 + x^2 - 2x - 3) & = & 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 3 & = & -2 \end{array}$$

Un caso especial de límite de un producto de funciones es cuando uno de los límites es cero. En ese caso no es necesario que el otro límite exista.

Teorema 4.13. *Si para algún número* $\delta_1 > 0$, $|f(x)| \leq M$ *para* $0 < |x - c| < \delta_1$ *y* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, *entonces* $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = 0$.

Demostración: Consideremos $\varepsilon > 0$. Si $f(x)$ es idénticamente cero alrededor de c, la conclusión es trivialmente cierta. Luego, si este no es el caso, claramente $M > 0$. Por hipótesis se sabe que $|f(x)| \leq M$ para $0 < |x-c| < \delta_1$; además se sabe que $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. Luego, dado $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_2$ entonces $|g(x)| = |g(x) - 0| < \widetilde{\varepsilon}$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; así para $0 < |x - c| < \delta$ se tiene:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - 0| &= |f(x)||g(x)| \\ &< M\widetilde{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

En consecuencia, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$, con lo que se concluye que

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$$

$\square$

Ejemplo 10: Consideremos las funciones $g(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ definida como 1 para los $x \in \mathbb{Q}$ y como 0 para los $x \in \mathbb{I}$ (irracionales). Probaremos que $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

En efecto: Ya hemos visto que $\lim_{x\to c} x = c$, $\forall\ c \in \mathbb{R}$. En particular para $c = 0$ es $\lim_{x\to 0} x = 0$.

Por otro lado, de manera análoga a lo realizado en el contraejemplo presentado para mostrar que el razonamiento recíproco de la proposición 4.6 es falso, se puede probar que la función $f(x)$ definida más arriba no tiene límite cuando $x \to 0$ (se deja para los alumnos dicha demostración). Es decir que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Sin embargo, $f(x)$ es acotada; particularmente lo es en cualquier entorno reducido de cero. Concretamente cualquiera sea $\delta > 0$, se verifica que $|f(x)| \leq 1$ siempre que $0 < |x - 0| < \delta$.

Finalmente, se verifican las hipótesis del teorema 4.13 para las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Por lo tanto, se puede afirmar que $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

A continuación estudiaremos límites de recíprocos y de cocientes de funciones.

Teorema 4.14. *Si* $\lim_{x\to c} g(x) = m$ *con* $m \neq 0$ *y* $g(x) \neq 0$ *en las proximidades de* c, *entonces*

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$$

Demostración: Para $g(x) \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)||m|}.$$

Puesto que $\lim_{x\to c} g(x) = m$, dado $\varepsilon = |m|/2$, existe δ_1 tal que si $0 < |x-c| < \delta_1$, entonces $|g(x) - m| < |m|/2$. Luego, si $m = |m| > 0$ y $0 < |x-c| < \delta_1$, entonces $0 < \frac{m}{2} < g(x) < \frac{3}{2}m$. Así, $|g(x)| > \frac{|m|}{2}$ para esos valores de x.
Por otro lado, si $m < 0$ y $0 < |x-c| < \delta_1$ se tiene que $3m/2 < g(x) < m/2 < 0$, de lo que se sigue que $|g(x)| > |m|/2$.
En consecuencia, cualquiera sea el signo de m, si $0 < |x-c| < \delta_1$, entonces $|g(x)| > |m|/2$.
De ello, tenemos que $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$. Luego, para $0 < |x-c| < \delta_1$ es:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x)-m|}{|g(x)||m|} < \frac{2}{|m|^2}|g(x)-m|$$

Tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Nuevamente, puesto que $\lim_{x\to c} g(x) = m$, dado $\widetilde{\varepsilon} = (m^2/2)\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta_2$ entonces $|g(x) - m| < \widetilde{\varepsilon}$. Luego, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$$

□

Ejemplo 11: En virtud del teorema 4.14, podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}; \quad \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{7}; \quad \lim_{x\to -3} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{3}.$$

Una vez sabido que los recíprocos no presentan dificultad, los cocientes resultan fáciles de manejar.

Teorema 4.15. *Si* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to c} g(x) = m$ *con* $m \neq 0$ *y* $g(x) \neq 0$ *cerca de* c*, entonces*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

Demostración: La clave está en observar que el cociente puede escribirse como un producto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}.$$

Dado que $\lim_{x\to c} f(x) = l$ y $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$, la regla del producto (parte (iii) del teorema 4.11) da

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l\frac{1}{m} = \frac{l}{m}$$

□

Observación 4.16. *Como consecuencia inmediata de este teorema sobre cocientes se puede ver que si* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *son polinomios y* $Q(c) \neq 0$*, se verifica que*

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)} \tag{4.16}$$

En virtud de ello, podemos calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{rcccl} \lim_{x\to 2}\frac{3x-5}{x^2+1} & = & \frac{6-5}{4+1} & = & \frac{1}{5} \\ \\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{1-x^2} & = & \frac{27-27}{1-9} & = & 0 \end{array}$$

Veremos a continuación que, cuando la función del denominador tiene límite cero, el resultado es diferente.

Teorema 4.17. *Si* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *con* $l \neq 0$ *y* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$*, entonces* $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ *no existe.*

Demostración: Supongamos, por el contrario, que existe un número real L tal que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Entonces $g(x) \neq 0$ para $x \to c$; es decir para $0 < |x-c| < \delta$ para algún $\delta > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} l = \lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left[g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right] \\ &= \lim_{x\to c} g(x) \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \\ &= 0L = 0 \end{aligned}$$

lo cual contradice nuestra hipótesis de que $l \neq 0$. Luego, $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ no existe. □

Ejemplo 12: El teorema 4.17 permite asegurar que los siguientes límites no existen.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{3x-7}{x^2-4} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{5}{x}.$$

Si $l_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ y $l_2 = \lim_{x\to c} g(x)$, los casos problemáticos en el límite del cociente $f(x)/g(x)$ se presentan cuando $l_1 = l_2 = 0$ (o no existen por ser los dos infinitos) y esta circunstancia se presenta en muchas ocasiones. El siguiente teorema nos ayuda a resolver algunos de estos casos.

Teorema 4.18. *Si* $f(x) = g(x)$ *en un entorno reducido de* c*, y* $\lim_{x\to c} f(x) = L$*, entonces* $\lim_{x\to c} g(x) = L$*.*

Demostración: Si $f(x) = g(x)$ en un entorno reducido de c, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $0 < |x-c| < \delta_1$. Además, como $\lim_{x\to c} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_2 > 0$ (en general función de ε), tal que si $0 < |x-c| < \delta_2$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $0 < |x-c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $f(x) = g(x)$, para esas x. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x-c| < \delta$. Finalmente, concluimos que $\lim_{x\to c} g(x) = L$. □

Presentamos a continuación ejemplos donde se visualiza la utilidad de este teorema para el cálculo del límite de un cociente de funciones cuando los límites de dichas funciones son ambos cero.

Ejemplo 13: Calculemos los límites que existan:

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$, (b) $\lim_{x\to 4} \frac{(x^2-3x-4)^2}{(x-4)}$

(c) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(2x^2+7x+5)^2}$,

En cada uno de los tres casos, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, por lo que hemos de tener cuidado.

(a) En primer lugar factorizamos el numerador:

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$$

Para $x \neq 3$ tenemos que

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = (x+2)$$

es decir que estamos en presencia de dos funciones: $f(x) = x+2$ y $g(x) = (x^2 - x - 6)/(x-3)$ que coinciden en todo punto de un entorno reducido de 3 y tales que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$. Luego, en virtud del teorema 4.18

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 5$$

(b) Obsérvese que:

$$\frac{(x^2-3x-4)^2}{x-4} = \frac{[(x+1)(x-4)]^2}{x-4} = \frac{(x+1)^2(x-4)^2}{x-4}$$

Luego, para $x \neq 4$

$$\frac{(x^2-3x-4)^2}{x-4} = (x+1)^2(x-4)$$

Luego, siguiendo el mismo razonamiento que en el ítem anterior, se ve que se verifican las hipótesis del teorema 4.18 para las funciones $f(x) = (x+1)^2(x-4)$ y $g(x) = (x^2-3x-4)^2/(x-4)$ y el número $L = 0$. Finalmente concluimos que,

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x^2-3x-4)^2}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+1)^2(x-4) = 0$$

(c) Puesto que:

$$\frac{x+1}{(2x^2+7x+5)^2} = \frac{x+1}{[(2x+5)(x+1)]^2} = \frac{x+1}{(2x+5)^2(x+1)^2}$$

se puede ver que, para $x \neq -1$

$$\frac{(x+1)}{(2x^2+7x+5)^2} = \frac{1}{(2x+5)^2(x+1)}$$

En este caso, por el teorema 4.17,

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{(2x+5)^2(x+1)} \quad \text{no existe,}$$

y por consiguiente por el teorema 4.18, considerando que este teorema es válido también para el caso en que L no es finito,

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(2x^2+7x+5)^2} \quad \text{tampoco existe.}$$

El siguiente resultado se conoce como Teorema de la Función Intermedia o del encaje o del emparedado y permite calcular ciertos límites mediante comparaciones con otras funciones que tienen límites coincidentes.

Teorema 4.19 (Teorema de la Función Intermedia o del encaje). *Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto de centro c, excepto posiblemente en el propio c, y si $\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$ entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L.*

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que $|h(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_1$ y $|g(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_2$.

Como $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x de un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c, existe $\delta_3 > 0$ tal que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para $0 < |x-c| < \delta_3$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces, si $0 < |x - c| < \delta$, se sigue que para todo x se verifica que $|h(x) - L| < \varepsilon$, $|g(x) - L| < \varepsilon$ y $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Luego, tenemos que $L - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$, de donde podemos concluir que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - c| < \delta$. Por lo tanto, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

$\square$

Ejemplo 14: Vamos a demostrar que $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$ mediante un poco de geometría sencilla y el teorema de la Función Intermedia.

En efecto: Para $x > 0$, próximo a cero tenemos que el área del triángulo OAP es igual a $\sin(x)/2$, el área del sector circular de radio $r = 1$ y ángulo central de x radianes es igual a $r^2x/2$ que es igual a $x/2$ y el área del triángulo OAQ es igual a $\tan(x)/2$ que es igual a $\sin(x)/2\cos(x)$, como puede observarse en la Figura 4.13

Dado que el triángulo OAP está contenido en el sector circular que a su vez está contenido en el triángulo OAQ (y todas las inclusiones son estrictas), tenemos que

$$\frac{1}{2}\sin(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

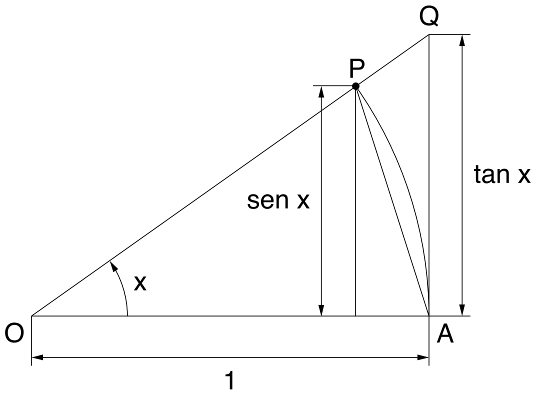

Figura 4.13: Gráfica del ejemplo 14

que es equivalente a

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Tomando los recíprocos resulta

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Esta desigualdad se ha obtenido para los $x > 0$ próximos a cero. Pero dado que $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x)/(-x) = \sin(x)/(x)$, la última desigualdad también se verifica para $x < 0$ próximo a cero.

Podemos entonces aplicar el teorema de la Función Intermedia o del encaje. Dado que

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Observación 4.20. *En esta sección todos los enunciados se refieren a límites bilaterales. Aunque no nos detendremos a demostrarlo, todos estos resultados siguen siendo válidos en el caso de los límites (uni-)laterales.*

4.4. Límite infinito y generalización del concepto de límite

4.4.1. Límite infinito

En la sección anterior analizamos y aplicamos la definición de límite de una función real de variable real, cuando el mismo es un número real. Estudiamos la existencia o no de estos límites.

La no existencia de límite finito puede deberse a alguno de los siguientes casos:

(a) Existen límites finitos distintos a derecha y a izquierda de la abscisa de tendencia. Tal es el caso de la función $|x|/x$ en el origen.

(b) La función oscila, como sucede en el origen con la función $\sin(\pi/x)$.

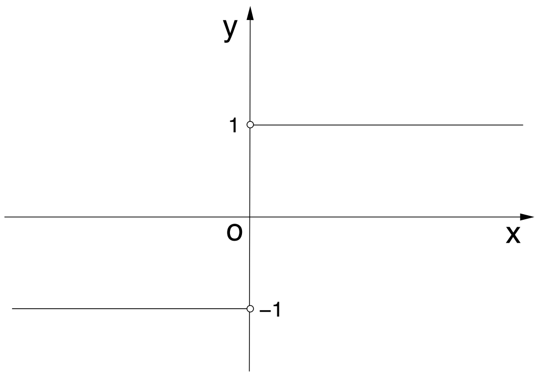

Figura 4.14: Gráfica de la función $|x|/x$.

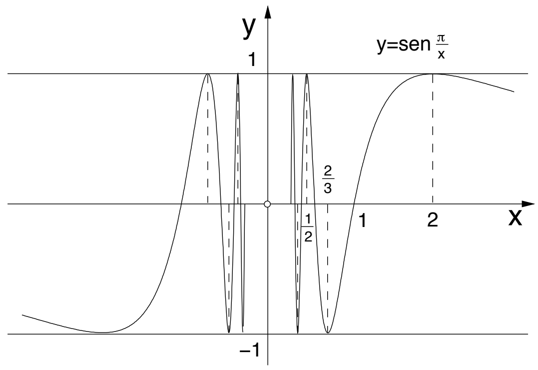

Figura 4.15: Gráfica de la función $\sin(\pi/x)$.

(c) O bien, cuando x se aproxima al punto de acumulación, los valores de la función superan, en valor absoluto, a cualquier número prefijado. Para este último caso, consideremos la función $f(x) = 1/x$, que no tiene límite finito en el origen. Si prefijamos cualquier $\varepsilon > 0$, siempre es posible encontrar un entorno reducido del punto de acumulación 0, en el cual los valores correspondientes de la función son mayores, en valor absoluto, que ε.

Por ejemplo, si $\varepsilon = 10^6$, $|\frac{1}{x}| > 10^6$, lo cual equivale a: $|x| < \frac{1}{10^6}$.

Es decir, $0 < |x - 0| < 1/10^6$ entonces $|1/x| > 10^6$, y en el entorno reducido de 0, de radio 10^{-6}, cualquier x del dominio tiene una imagen mayor, en valor absoluto, que 10^6. En general, dado $\varepsilon > 0$ basta considerar $\delta = 1/\varepsilon$ para que se verifique que:

$$\text{Para cada } x \text{ tal que} \quad 0 < |x - 0| < \delta \quad \text{se tiene que} \quad |\frac{1}{x}| > \varepsilon$$

Definición 4.21. *Sea f una función definida al menos en algún conjunto de la forma $(a-p, a) \cup (a, a+p)$, con $p > 0$. Una función tiene* límite infinito *en el punto a, si y sólo si, para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ, tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)| > \varepsilon$.*

En este caso, interesa especialmente ε "tan grande como se quiera", ver (Figura 4.17). Por convención, para indicar la situación anterior, se admite la notación siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

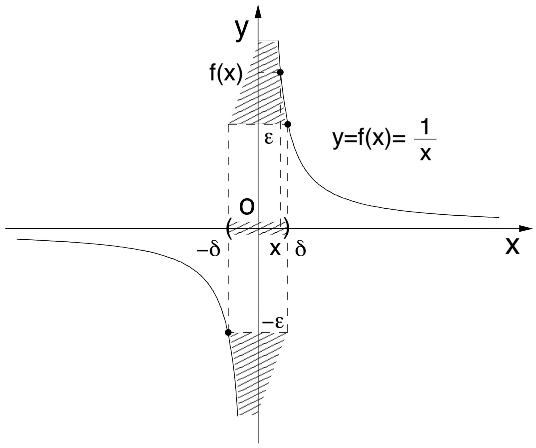

Figura 4.16: Gráfica de la función $1/x$.

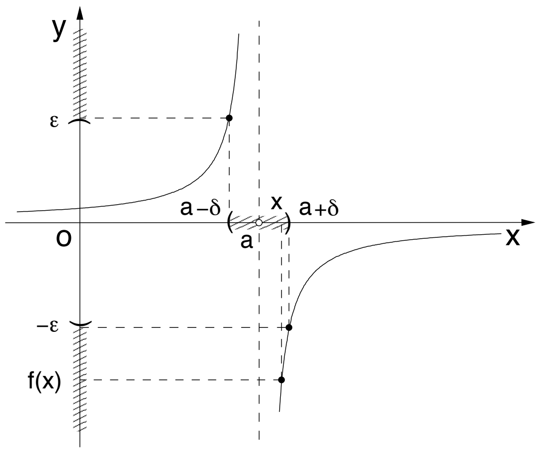

Figura 4.17: La recta $x = a$ se denomina asíntota vertical al gráfico de f.

El concepto de límite infinito se puede diversificar considerando el signo de los valores de la función:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \text{tal que si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \text{ (Figura 4.18)}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \text{tal que si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon \text{ (Figura 4.19)}$$

4.4.2. Generalización del concepto de límite

Interesa también considerar una definición de límite para cada uno de los casos siguientes:

1. límite finito para $x \to \pm\infty$
2. límite infinito para $x \to \pm\infty$

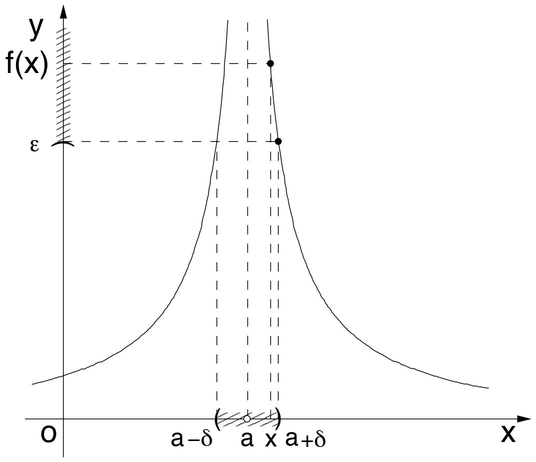

Figura 4.18: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

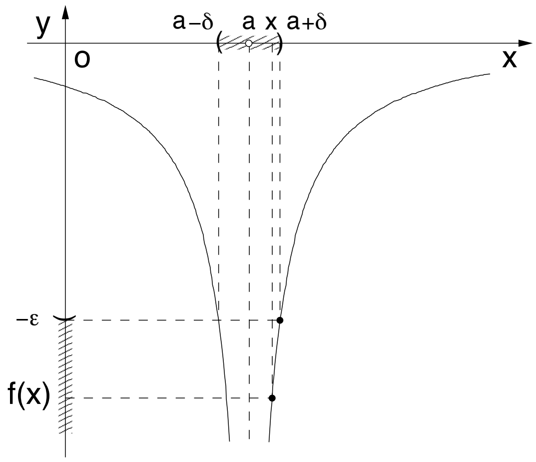

Figura 4.19: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Sea f una función definida en un conjunto no acotado del tipo $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]\cup[a,+\infty)$. Presentamos las siguientes definiciones para los casos propuestos:

$1^{er}Caso$: Límite finito en un conjunto no acotado.

(a) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $(-\infty,b]\cup[a,+\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad \text{tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } |x| > \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

(b) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $[a,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad \text{tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } x > \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

(c) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $(-\infty,b]$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad \text{tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } x < -\delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

La recta de ecuación $y = l$ se denomina *asíntota horizontal* al gráfico de la función $f(x)$. De acuerdo con el gráfico, se verifica $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$. Así, decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Obsérvese que, en este caso, debe elegirse el mayor entre los números δ y δ' como se puede ver en la Figura 4.20. Si se observa la Figura 4.16, podemos afirmar según lo que acabamos de mencionar que para la función $f(x) = 1/x$ se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

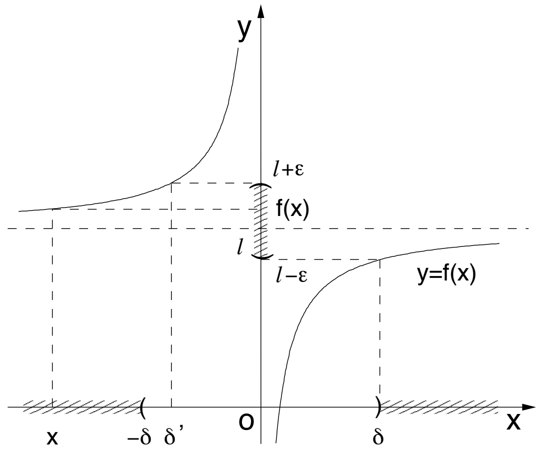

Figura 4.20: Gráfica de f y su asíntota horizontal.

Esto se probará formalmente en el ejercicio 1 del Trabajo Práctico sobre Límites Infinitos.

Ejemplo 15: Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

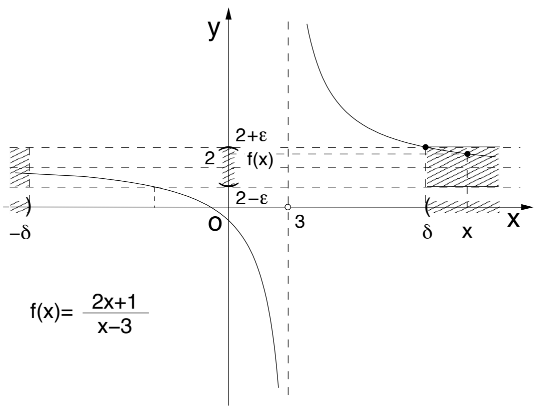

Figura 4.21: Gráfica del ejemplo 15.

Para calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$, es conveniente dividir numerador y denominador por $x \neq 0$. Resulta así que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$$

Se verifica, además, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

Ejemplo 16: Sea $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2+1}$

Para calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se puede dividir numerador y denominador por x^2

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^2-4x+3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

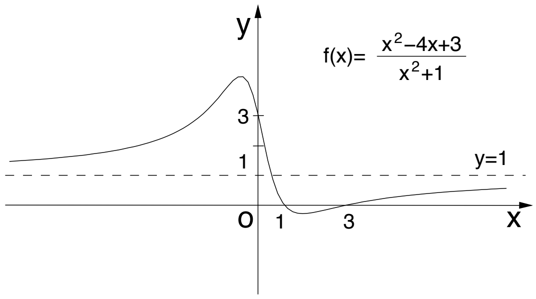

Figura 4.22: Gráfica del ejemplo 16.

Resulta también $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Ejemplo 17: Sea $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Para calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ podemos dividir numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$. Como la función $|x|$ se define

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0; \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

entonces deben calcularse separadamente $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Considerando $x > 0$, resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Si es $x < 0$, resulta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x}\right) = -1$$

2^{do}*Caso*: Límite infinito en un conjunto no acotado.

(a) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $(-\infty, b] \cup [a, +\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } |x| > \delta$$

$$\Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

(b) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $[a, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } x > \delta$$

$$\Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

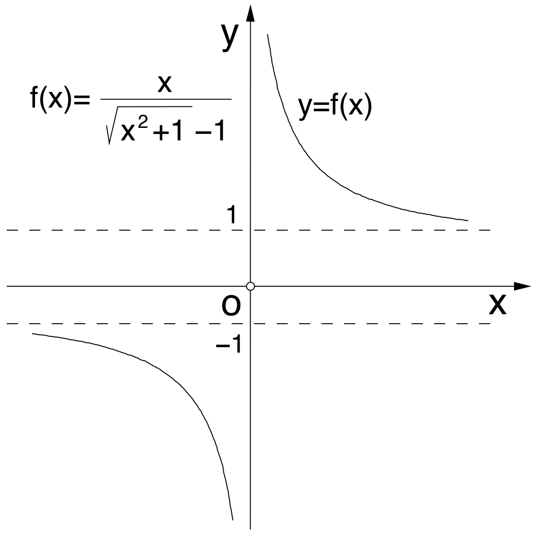

Figura 4.23: Gráfica del ejemplo 17.

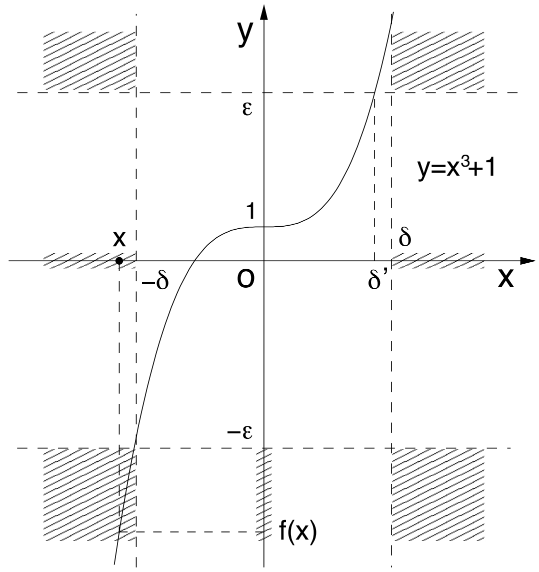

Figura 4.24: Gráfica del ejemplo 18.

(c) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $[a, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } x > \delta$$

$$\Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

(d) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $(-\infty, b]$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } x < -\delta$$

$$\Rightarrow f(x) > \varepsilon$$

(e) Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $(-\infty, b]$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, x \text{ en el dominio de } f \text{ y } x < -\delta$$

$$\Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Ejemplo 18: Sea $f(x) = x^3 + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 + 1) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 1) = -\infty$$

Luego decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

4.5. Guías de Trabajos Prácticos

En esta sección incluimos los Trabajos Prácticos presentados por los alumnos y que fueron resueltos por los estudiantes de ambos grupos; con la metodología correspondiente.

4.5.1. Trabajo Práctico: Cálculo de límites a partir de la definición

1. (a) ¿Cuál de los δ representados en la Figura 4.25 son apropiados para el ε dado?

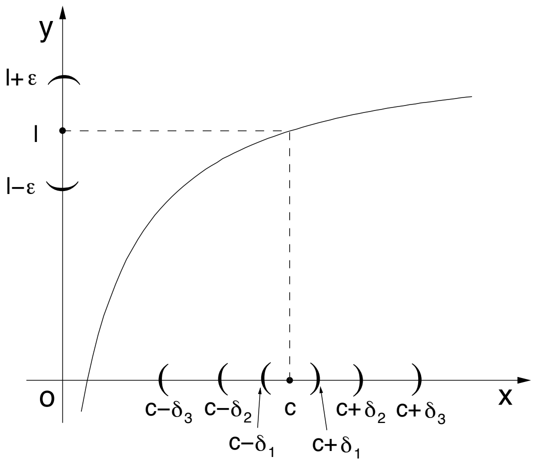

Figura 4.25: $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

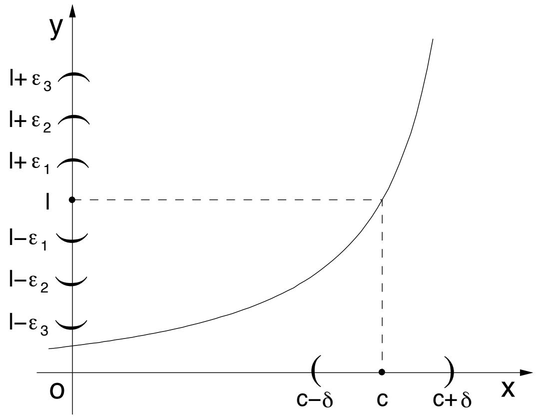

Figura 4.26: $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

(b) ¿Para cuál de los ε representados en la figura 4.26 sirve para el δ especificado?

2. Halle, para los siguientes límites, el mayor δ que sirva para un ε arbitrario dado.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} 5x = 20$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{2}x = 1$ (d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{5}x = \frac{2}{5}$

3. Dé una demostración $\varepsilon - \delta$ para los límites siguientes:

(a) $\lim\limits_{x\to 4}(2x-5) = 3$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1) = 5$ (c) $\lim\limits_{x\to 3}(6x-7) = 11$
(d) $\lim\limits_{x\to 0}(2-5x) = 2$ (e) $\lim\limits_{x\to 2} |1-3x| = 5$ (f) $\lim\limits_{x\to 2} |x-2| = 0$

4. Sea f una función de la cual sólo se sabe que

$$\text{si} \quad 0 < |x-3| < 1 \quad \text{entonces} \quad |f(x)-5| < 0{,}1$$

¿Cuál de los siguientes asertos es necesariamente cierto?

(a) Si $|x-3| < 1$, entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
(b) Si $|x-2{,}5| < 0{,}3$, entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
(c) $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.
(d) Si $0 < |x-3| < 2$, entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
(e) Si $0 < |x-3| < 0{,}5$, entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$.

(f) Si $0 < |x-3| < \frac{1}{4}$, entonces $|f(x)-5| < \frac{1}{4}(0{,}1)$.

(g) Si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|f(x)-5| < 0{,}2$.

(h) Si $0 < |x-3| < 1$, entonces $|f(x)-4{,}95| < 0{,}05$.

(i) Si $\lim_{x\to 3} f(x) = l$, entonces $4{,}9 \leq l \leq 5{,}1$.

5. Supongamos que $|A-B| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Demostrar que $A = B$. Sugerencia: Suponer que $A \neq B$ y considerar $\varepsilon = \frac{1}{2}|A-B|$.

6. Dé los cuatro enunciados de límite equivalentes tomando

(a)$f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad c = 3$ (b)$f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}, \quad c = 1$

7. Demuestre que
$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$$

8. Dé una demostración $\varepsilon - \delta$ de la equivalencia de los enunciados de límite (i) al (iv)

9. (a) Demuestre que $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ para $c > 0$. Sugerencia: Si x y c son positivos, se verifica
$$0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{c}}|x-c|$$

(b) Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

10. Dé una demostración $\varepsilon - \delta$ de los siguientes enunciados

(a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1$ (d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = 0$

11. Demuestre las siguientes proposiciones (a) Si $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \text{ racional;} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{array} \right]$ entonces no existe $\lim_{x\to c} f(x)$ para ningún número c.

(b) $\lim_{x\to c^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(c-|h|) = l$.

(c) $\lim_{x\to c^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(c+|h|) = l$.

4.5.2. Trabajo Práctico: Cálculo de límites por propiedades

1. Suponiendo que

$$\lim_{x\to c} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to c} g(x) = -1, \quad \lim_{x\to c} h(x) = 0,$$

calcule los límites que existan.

(a) $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)]$ (b) $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$ (c) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(d) $\lim_{x\to c} \dfrac{h(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{f(x) - g(x)}$

2. Suponiendo que

$$\lim_{x\to c} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to c} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to c} h(x) = -2,$$

calcule los límites que existan.

(a) $\lim_{x\to c}[3f(x) + 2h(x)]$ (b) $\lim_{x\to c}[h(x)]^3$ (c) $\lim_{x\to c} \dfrac{h(x)}{x - c}$

(d) $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (e) $\lim_{x\to c} \dfrac{4}{f(x) - h(x)}$ (f) $\lim_{x\to c}[3 + g(x)]^2$

3. Si me piden que calcule

$$\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)$$

respondo que este límite es cero puesto que

$$\lim_{x\to 4} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right] = 0$$

y menciono el teorema 4.11 (sobre el límite de un producto) como justificación. Compruebe que el límite es, en realidad, $-1/16$ y diga dónde me he equivocado.

4. Si me piden que calcule

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3},$$

respondo que ese límite no existe puesto que $\lim_{x\to 3}(x - 3) = 0$ y menciono el teorema 4.18 (sobre límite de un cociente) como justificación. Compruebe que el límite es, en realidad, 7 y diga dónde me he equivocado.

5. Calcule los límites que existan

(1)	$\lim_{x\to 2} 3$	(2)	$\lim_{x\to 3}(5-4x)^2$	(3)	$\lim_{x\to -4}(x^2+3x-7)$
(4)	$\lim_{x\to -2} 3\lvert x-1\rvert$	(5)	$\lim_{x\to\sqrt{3}} \lvert x^2-8\rvert$	(6)	$\lim_{x\to 3} 2$
(7)	$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+1}{3x^5+4}$	(8)	$\lim_{x\to 2} \frac{3x}{x+4}$	(9)	$\lim_{x\to 0} \left(x-\frac{4}{x}\right)$
(10)	$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x}$	(11)	$\lim_{x\to 5} \frac{2-x^2}{4x}$	(12)	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$
(13)	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1}$	(14)	$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4}$	(15)	$\lim_{h\to 0} h\left(1-\frac{1}{h}\right)$
(16)	$\lim_{h\to 0} h(1+\frac{1}{h})$	(17)	$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$	(18)	$\lim_{x\to 2} (\frac{x^2-4}{x-2})$
(19)	$\lim_{x\to -2} \frac{(x^2-x-6)^2}{x+2}$	(20)	$\lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{1-x}$	(21)	$\lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{(3x-1)(x^4-2)}$
(22)	$\lim_{h\to 0} \frac{1-\frac{1}{h^2}}{1-\frac{1}{h}}$	(23)	$\lim_{h\to 0} \frac{1-\frac{1}{h^2}}{1+\frac{1}{h^2}}$	(24)	$\lim_{t\to 0} \frac{t+\frac{a}{t}}{t+\frac{b}{t}}$
(25)	$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$	(26)	$\lim_{t\to 1} \frac{t^2+2t+1}{t^3+3t^2+3t-1}$	(27)	$\lim_{x\to -4} \left(\frac{3x}{x+4}+\frac{8}{x+4}\right)$
(28)	$\lim_{x\to -4} \left(\frac{2x}{x+4}+\frac{8}{x+4}\right)$	(29)	$\lim_{x\to -4} \left(\frac{2x}{x+4}-\frac{8}{x+4}\right)$	(30)	$\lim_{t\to 0} \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}$

6. Calcule los límites que existan

(a) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)$ (b) $\lim_{x\to 4} \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)\right]$

(c) $\lim_{x\to 4} \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)(x-2)\right]$ (d) $\lim_{x\to 4} \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)^2\right]$

7. Calcule los límites que existan

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x+12}{x-3}$ (b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3}$

(c) $\lim_{x\to 3} \frac{(x^2+x-12)^2}{x-3}$ (d) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{(x-3)^2}$

8. Suponiendo que $f(x)=x^2-4x$, calcule los límites

(a) $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(1)}{x-3}$ (d) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(2)}{x-3}$

9. Exhiba un ejemplo en el que $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ exista, sin que existan ni $\lim_{x\to c} f(x)$ ni $\lim_{x\to c} g(x)$.

10. Exhiba un ejemplo en el que $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ exista sin que existan ni $\lim_{x\to c} f(x)$ ni $\lim_{x\to c} g(x)$.

11. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

    a) Si $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ existe, pero $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to c} g(x)$ no existe.

    b) Si $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ existen entonces $\lim_{x\to c} g(x)$ no existe.

    c) Si $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)}$ existe, entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.

    d) Si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)}$ existe.

    e) Si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$ existe.

    f) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$.

    g) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$

12. i) Compruebe que

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[(f(x)+g(x)) + |f(x)-g(x)|\right]$$

    ii) Halle una expresión similar para $\min\{f(x), g(x)\}$.

13. Sean $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ y $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Demuestre que si

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = l,$$

    entonces $\lim_{x\to c} h(x) = l = \lim_{x\to c} H(x) = l$. (Sugerencia: Utilice el ejercicio 12).

14. Suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

    i) Demuestre que si l es positivo entonces $f(x)$ es positiva para todo $x \neq c$ en un intervalo de la forma $(c-\delta, c+\delta)$, para algún $\delta > 0$.

ii) Demuestre que si l es negativo entonces $f(x)$ es negativa para todo $x \neq c$ en un intervalo de la forma $(c-\delta, c+\delta)$, para algún $\delta > 0$. Sugerencia: Utilizar un razonamiento $\varepsilon - \delta$ tomando $\varepsilon = l$.

15. Suponiendo que $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ y que $f(x)g(x) = 1$, para todo x real, demuestre que $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe. Sugerencia: Suponga que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y llegue a una contradicción.

4.5.3. Trabajo Práctico: Límites infinitos

1. Demuestre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. Demuestre que $\lim_{x \to 4} \dfrac{1}{x-4} = \infty$.

3. Demuestre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

4. Demuestre que $\lim_{x \to 0} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

5. Demuestre que $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

6. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x-5}{2x-3}$, (b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3-2x+3}{3x^2-5x+1}$,

(c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{x^2-3x+5}$, (d)$\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-2}$

(e) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{8x-3x^2+1}{9x^2-2x+4}$, (f)$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$,

(g)$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$, (h)$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

(i) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{3x+\sqrt{9x^2+x+2}}$, (j)$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{3x+\sqrt{9x^2+x+2}}$

Sugerencia: en los ejercicios de (f) a (j), divida numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$.

7. Calcule los siguientes límites laterales:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0^+}(3^{\frac{1}{x}}) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-}(3^{\frac{1}{x}}),$$

$$\text{(b) } \lim_{x\to 0^+}(e^{\frac{-1}{x}}) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-}(e^{\frac{-1}{x}}).$$

8. Calcule los siguientes límites laterales:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0^-}\frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0^+}\frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}},$$

$$\text{(c) } \lim_{x\to 0^+}\frac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}} \qquad \text{(d)} \lim_{x\to 0^-}\frac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}},$$

donde en (b) se puede dividir numerador y denominador por $3^{\frac{1}{x}}$.

Capítulo 5

Enfoque Discreto de la Teoría del Límite Funcional en una Variable

5.1. Introducción

Una sucesión de números x_n que converge a c se puede interpretar como un camino en la recta real que conduce a c. Naturalmente hay muchas sucesiones con esta propiedad. De forma análoga, hay también muchas sucesiones de números reales que tienen límite infinito.

Supongamos ahora que tenemos una función f que está definida en un intervalo I, y que c tiene una de las siguientes características:

1. Es un número interior a I.
2. Es un número que es extremo de I, aunque I sea abierto.
3. Es $+\infty$, si I no es acotado por la derecha.
4. Es $-\infty$, si I no es acotado por la izquierda.

En cualquiera de los cuatro casos hay sucesiones de números de I distintos de c cuyo límite es c. Si elegimos una de ellas, $\{x_n\}$, podemos obtener también la sucesión $\{f(x_n)\}$ de las correspondientes imágenes. ¿Qué puede suceder con $\{f(x_n)\}$? ¿Tendrá también límite? ¿Qué relación tiene este límite con f y c?

Algunas veces la respuesta es muy sencilla. Por ejemplo, la función x^2 transforma una sucesión $\{x_n\}$ que converge a un número c en la sucesión $\{x_n^2\}$ cuyo límite sabemos que es c^2. Si pensamos en la función $f(x) = \sin(1/x)$, quizá podemos apreciar que para las sucesiones $\{x_n\}$ de números positivos que convergen a cero el comportamiento de $\{f(x_n)\}$ puede ser muy diferente.

Para la función $\sqrt{x}\ln x$ por el momento no tenemos medios para saber si es convergente o no la sucesión que resulta al transformar mediante ella una sucesión de números positivos que converge a cero.

5.2. Definición de límite

Cuando afirmamos que f tiene límite en c lo que queremos expresar es que todas las sucesiones cuyo límite es c se transforman, mediante f, en sucesiones que tienen todas el mismo límite. En términos completamente precisos esto se formula de la siguiente manera:

Supongamos que f es una función definida en un intervalo I, y que c se encuentra en una de las cuatro situaciones de la sección anterior. En los cuatro casos existen muchas sucesiones de números de I cuyo límite es c.

Definición 5.1.

$$l = \lim_{x \to c} f(x), \quad (l \text{ es el límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ tiende a } c)$$

significa que cada sucesión de números del dominio de f distintos de c, cuyo límite es c, se transforma mediante f en una sucesión que tiene límite l. Simbólicamente:

$\lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset D_f$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, con $x_n \neq c$ se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$$

El conocimiento de las sucesiones de números y de sus propiedades, nos permitirá entonces estudiar la noción de límite para funciones. Conviene hacer varios comentarios acerca de la definición:

- l puede ser un número, y también $+\infty$ o $-\infty$. Para referirnos al primer caso hablaremos de la existencia de límite finito, y de límite infinito en los otros casos. En consecuencia en estos últimos, el límite finito no existe.

- Si c es extremo del intervalo (a, b) o $[a, b]$ donde $f(x)$ está definida, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = l$ se llama *límite lateral*.

  Si $c = a$ y $\lim_{x \to c} f(x) = l_1$, entonces l_1 se llama *límite lateral derecho*.

  Si $c = b$ y $\lim_{x \to c} f(x) = l_2$, entonces l_2 se llama *límite lateral izquierdo*.

- Aunque c pertenezca al intervalo I en el que está definida la función, el valor $f(c)$ no interviene en absoluto, puesto que la definición se refiere a sucesiones de números de I distintos de c.

- Cuando se trata de investigar si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c, conviene empezar eligiendo una sucesión $\{x_n\}$ de números distintos de c tal que $\{f(x_n)\}$ sea lo más sencilla posible. Si $\{f(x_n)\}$ no tiene límite, ya hemos terminado: $f(x)$ no tiene límite al tender x a c. Si $\{f(x_n)\}$ tiene límite l, entonces l es el único candidato posible. Pero para poder afirmar que l es el límite (finito o infinito) de f cuando x tiende a c, tenemos que estar seguros de que *para cualquier otra elección de* $\{x_n\}$*, en las mismas condiciones resulta también que* l *es el límite de* $\{f(x_n)\}$.

- Para una función f hay muchas maneras de elegir c, y f puede tener límite en unos puntos y no tenerlos en otros.

Suelen utilizarse las siguientes notaciones:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l, \quad \text{ó} \quad f(x) \to l \text{ cuando } x \to c$$

En algunos casos el límite de una función puede obtenerse muy fácilmente. Por ejemplo, $5x$, $8x$, y $7x^2$ tienen las tres límite 0 cuando x tiende a 0. Es decir, cualquiera de las tres funciones transforma una sucesión $\{x_n\}$ que converge a 0 en otra que también converge a 0. Pero aún en casos sencillos como éstos la noción de límite tiene interés bajo otro aspecto. La forma de tender a cero cuando x tiende a cero, es distinta para cada una, y ésto puede ponerse de manifiesto considerando los cocientes entre ellos. El cociente $(5x)/(8x)$ es la función constante $5/8$, la cual quiere decir que la función $(5x)$ es constantemente $5/8$ de la función $(8x)$ aún cuando x tiende a 0 y $x \neq 0$. En el caso de $(7x^2)/(5x)$, este cociente es igual a $(7x)/5$, que también tiene límite 0 cuando x tiende a 0. Esto pone de manifiesto que $7x^2$ se aproxima a 0 más rápidamente que $5x$, cuando x tiende a 0. Se sugiere realizar las respectivas gráficas para apreciar bien esta circunstancia.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = k$ para algún $k \in \mathbb{R}$ cualquiera. Probemos, usando la definición, que $\lim_{x\to c} k = k$.

En efecto: Sea $\{x_n\}$ convergente a c, con $x_n \neq c$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} k = k$$

La última igualdad se verifica en virtud de que la sucesión constante $\{k\}$ converge a k. Luego, el límite de la función constante es la constante misma para cualquier comportamiento de la variable independiente.

Ejemplo 2: Sea $f(x) = x$ la función identidad. Probemos que $\lim_{x\to c} f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$.

En efecto: Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria que converge a c, con $x_n \neq c$. Entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

Ejemplo 3: Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostremos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

En efecto: Sea $\{x_n\}$ convergente a 0 y $x_n \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Luego, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Nótese aquí que, no obstante este resultado obtenido, se tiene que $f(0) = 0$.

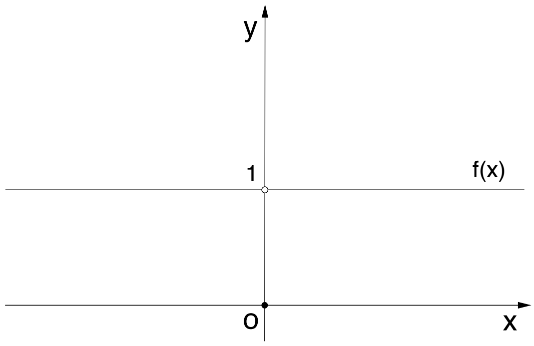

Figura 5.1: Gráfica del ejemplo 3.

Ejemplo 4: Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq 0; \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Queremos demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

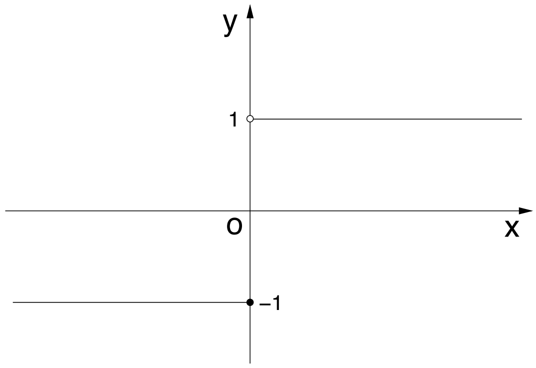

Figura 5.2: Gráfica del ejemplo 4.

En efecto: Analicemos el comportamiento por la derecha de cero. Sea $\{x_n\} = \{\frac{1}{2^n}\}$. Esta sucesión tiende a cero para $n \to \infty$ tomando siempre valores positivos, y además $x_n \neq 0$. Es por ello que $f(x_n) = f(\frac{1}{2^n}) = 1$, de lo que se deduce que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

Estudiemos ahora la situación a la izquierda de cero: Sea $\{x_n\} = \{-\frac{1}{2^n}\}$, sucesión que tiende a cero, cuando $n \to \infty$ tomando valores negativos y $x_n \neq 0$. Luego, $f(x_n) = f(-\frac{1}{2^n}) = -1$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(-1) = -1$.

En consecuencia existen dos sucesiones distintas que tienden a cero, y sus correspondientes sucesiones de valores funcionales convergen a límites diferentes. Esto es suficiente para asegurar que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Ejemplo 5: La función $f(x) = 1/x$ definida en el intervalo $(0, +\infty)$ tiene límite para cualquier c que pueda considerarse, es decir, para $c = 0$ (en este caso, el límite es el lateral derecho), c positivo y $c = +\infty$. Los resultados son:

(a) $\lim_{x\to 0} 1/x = +\infty$

(b) $\lim_{x\to c} 1/x = \frac{1}{c}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} 1/x = 0$

La justificación de ellos se basa en propiedades de las sucesiones.

En efecto:

(a) Sabemos que: "Si una sucesión $\{u_n\}$ converge a cero tomando valores positivos (negativos), entonces la sucesión $\{u_n^{-1}\}$ tiende a $+\infty$ $(-\infty)$, siendo $u_n \neq 0$ para todo n"(teoremas 3.15 y 3.17 respectivamente).

Sea $\{x_n\}$ convergente a cero tomando valores positivos con $x_n \neq 0$ y $f(x)$ definida en $(0, +\infty)$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}$$

y por la propiedad anterior, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$$

En consecuencia $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, es decir cuando x tiende a cero tomando sólo valores positivos, $f(x)$ tiende a $+\infty$. Este es el caso del límite lateral derecho.

(b) Sabemos que: "Si una sucesión $\{u_n\}$ converge a un número u distinto de cero y cada término de la sucesión es también distinto de cero, entonces $\{u_n^{-1}\}$ converge a $\{u^{-1}\}$"(teorema 3.12).

Sea $\{x_n\}$ convergente a c positivo con $x_n \neq 0$ y $x_n \neq c$. Entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{c}$$

en virtud de la propiedad anterior. Luego, $\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$.

(c) Sabemos que: "Si una sucesión $\{u_n\}$ tiende a $+\infty$ $(-\infty)$ cuando $n \to \infty$, entonces la sucesión $\{u_n^{-1}\}$, converge a cero tomando valores positivos (tomando valores negativos), (teorema 3.16).

Sea $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera que tiende a $+\infty$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$$

por la propiedad anterior (tomando valores positivos). En consecuencia,

$$\lim_{x\to +\infty} 1/x = 0.$$

Ejemplo 6: La función de Dirichlet se define en $[0, 1]$ mediante $f(x) = 1$ si x es racional, y $f(x) = -1$ si x es irracional. Esta función no tiene límite en ningún c que se elija, pues siempre se pueden elegir sucesiones con todos los términos racionales o bien todos irracionales que converjan a c, de tal manera que $\{f(x_n)\}$ resulta, en primer caso la sucesión constante $\{1\}$, y la sucesión constante $\{-1\}$ en el segundo.

Ejemplo 7: El límite en 0 de la función $f(x) = \sin(1/x)$ definida en $(0, 1]$ tampoco existe, pues se encuentran sucesiones $\{x_n\}$ convergentes a 0 tomando valores positivos para los que $\{f(x_n)\}$ converge a valores diferentes.

En efecto: Sea $\{x_n\} = \{1/(\pi n)\}$. Esta sucesión tiende a cero tomando valores positivos y $x_n \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\pi n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$$

Sea $\{x_n\} = \{1/(\pi/2 + 2n\pi)\}$. Esta sucesión tiende a cero tomando valores positivos y para todo n es $x_n \neq 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{(\pi/2) + 2n\pi}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$$

Luego, $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ no existe para x tendiendo a cero positivamente (límite lateral derecho).

5.3. Los límites laterales

Algunas veces estudiamos el límite en c de una función f que sólo está definida en un intervalo (c, b) o $[c, b)$, a la derecha de c. Entonces es natural que a tal límite lo denominemos también *límite por la derecha*. Un sentido análogo tiene el *límite por la izquierda*. Pero aunque f esté definida en (a, b) y c sea un punto interior, el estudio del límite de f en c puede desdoblarse, considerando por separado las definiciones de f en los intervalos (a, c) y (c, b), a la izquierda y a la derecha respectivamente, de c. Los resultados que se obtuvieran en ambos casos serían los *límites laterales* (por la izquierda y por la derecha) de f en c.

Hay situaciones en las que puede existir uno de los dos límites laterales y no el otro, o ninguno de los dos, o ambos. Y en este último caso pueden ser iguales o distintos. *Solamente cuando los dos existen y son iguales resulta que f tiene límite como función definida a los dos lados de c*, lo cual se prueba en el teorema que se presenta a continuación.

Los límites de f en c por la izquierda y por la derecha se suelen designar $f(c^-)$ y $f(c^+)$ respectivamente. Para indicar que x tiende a c por la derecha, es decir $x \to c$ y $x > c$, se escribe $x \to c^+$. La notación $x \to c^-$ tiene un significado análogo. La función del ejemplo 4 nos muestra que $f(x)$ tiende a 1 para $x \to 0^+$, y $f(x) \to -1$ para $x \to 0^-$. En consecuencia $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe; sólo existen los límites laterales y son distintos.

Como ya hemos indicado, los límites (uni)laterales nos proporcionan una manera sencilla de determinar cuándo un límite (bilateral) existe.

Teorema 5.2. *Sea f una función definida al menos en algún conjunto de la forma $(c-p,c)\cup(c,c+p)$, con $p>0$. Luego,*

$$\lim_{x\to c} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x)=l \quad y \quad \lim_{x\to c^-} f(x)=l$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x)=l \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\,\{x_n\}\ /\ x_n\to c,\ \ x_n\neq c \quad \text{se tiene que} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\,\{x_n\}\ /\ x_n\to c^+,\ \ x_n\neq c \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l, \\ \\ \forall\,\{x_n\}\ /\ x_n\to c^-,\ \ x_n\neq c \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=l \ \text{ y } \ \lim_{x\to c^-} f(x)=l
\end{aligned}$$

□

5.4. Propiedades de los límites de una función real de variable real

1. **Unicidad del límite finito:** Si $l_1,l_2\in\mathbb{R}$ y $\lim_{x\to c} f(x)=l_1$ y $\lim_{x\to c} f(x)=l_2$, entonces $l_1=l_2$.

   En efecto: Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n\to c$ para $n\to\infty$ y $x_n\neq c$.

   $$\lim_{x\to c} f(x)=l_1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l_1$$

   $$\lim_{x\to c} f(x)=l_2 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l_2$$

   Por la propiedad estudiada para sucesiones que dice: "Si la sucesión $\{u_n\}$ es tal que $\lim_{n\to\infty} u_n=l_1$ y $\lim_{n\to\infty} u_n=l_2$ entonces $l_1=l_2$"(teorema 3.5), resulta que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l_1=l_2$, y como esto se cumple para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n\to c$ y $x_n\neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x)=l_1=l_2$.

2. **Conservación del signo:** Si $\lim_{x\to c} f(x)=m$ con $m\neq 0$, entonces existe un entorno reducido de c (si c es un número), o bien existe un intervalo cerrado y no acotado (si c es $+\infty$ o $-\infty$), donde la función conserva el mismo signo que el límite.

   En efecto: Sea $\lim_{x\to c} f(x)=m$ y sea $m>0$, entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n\to c$ y $x_n\neq c$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=m$, con $m>0$; y por la propiedad de las sucesiones que dice (teorema 3.6): "Si $\{u_n\}$ converge a $u > 0$, entonces a partir de un número $n \in \mathbb{Z}^+$ y todos los que le siguen, se cumple que $u_n > 0$", resulta que a partir de un número $n \in \mathbb{Z}^+$ y todos lo que le siguen se cumple que $f(x_n) > 0$, y como esto se satisface para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$ entonces nos asegura que existe un entorno reducido de c (si c es un número), o bien un intervalo cerrado y no acotado (si c es $+\infty$ o $-\infty$), en donde $f(x) > 0$.

De la misma manera se demuestra que si $\lim_{x\to c} f(x) = m$ y sea $m < 0$, entonces existe un entorno reducido del punto c (si c es un número), o bien un intervalo cerrado y no acotado (si c es $+\infty$ o $-\infty$), en donde $f(x) < 0$.

3. **Conservación del orden:** Si es $f(x) \leq g(x)$ en las proximidades de c y ambas funciones tienen límite cuando $x \to c$, es decir existen $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to c} g(x) = l_2$ entonces $\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$, con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, es decir $l_1 \leq l_2$.

   En efecto: Si $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ para $n \to \infty$ y $x_n \neq c$, se cumple $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$. Análogamente, si $\lim_{x\to c} g(x) = l_2$ entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ para $n \to \infty$ y $x_n \neq c$, se cumple $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$.

   Por hipótesis $f(x) \leq g(x)$ en la proximidad de c, entonces existe un entorno reducido de c (si c es un número), o un intervalo cerrado y no acotado (si c es un infinito), donde $f(x) \leq g(x)$.

   Si $\{x_n\}$ es una sucesión cualquiera tal que $x_n \to c$ para $n \to \infty$ y $x_n \neq c$, entonces a partir de un número $n \in \mathbb{Z}^+$, x_n pertenece al entorno reducido de c (si c es un número), o bien x_n pertenece al intervalo cerrado y no acotado (si c es infinito). En consecuencia a partir de un número $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple: $f(x_n) \leq g(x_n)$ y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ y $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$.

   Por la propiedad estudiada para sucesiones de números reales que dice (teorema 3.13): "Si u_n y v_n convergen a u y v, respectivamente, y a partir de un número $n \in \mathbb{Z}^+$ (y todos los que le siguen), se cumple que $u_n \leq v_n$, entonces $u \leq v$", resulta $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} g(x_n)$ y como este razonamiento se cumple para toda $x_n \to c$ para $n \to \infty$ y $x_n \neq c$ entonces $\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$, es decir $l_1 \leq l_2$

5.5. Límites y operaciones con funciones

Las propiedades relativas a operaciones con sucesiones, nos sirven para conocer directamente resultados sobre límites de las funciones que se obtienen al operar con otras funciones.

5.5.1. Suma de funciones

Comenzamos esta sección con el siguiente resultado

Teorema 5.3. *Si* $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1$ *y* $\lim_{x\to c} f_2(x) = l_2$ *con* $l_1 \in \mathbb{R}$ *y* $l_2 \in \mathbb{R}$*, entonces* $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$

Demostración: Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera que converge a c cuando $n \to \infty$ y $x_n \neq c$.

$$\lim_{n\to\infty} (f_1 + f_2)(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f_1(x_n) + f_2(x_n));$$

pero por hipótesis

$$l_1 = \lim_{x\to c} f_1(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) \text{ y } l_2 = \lim_{x\to c} f_2(x) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n)$$

Luego, por la propiedad que dice (teorema 3.8): "el límite de la suma de dos sucesiones convergentes es la suma de los límites de ambas", resulta

$$\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{n\to\infty} [f_1(x_n) + f_2(x_n)] = l_1 + l_2$$

y como esto se cumple $\forall \{x_n\} \ / \ \{x_n\} \to c, \ \ x_n \neq c$, resulta

$$\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to c} f_1(x) + \lim_{x\to c} f_2(x)$$

que es lo que queríamos probar.

□

Cuando alguno de estos límites no es finito, o cuando ninguno de ellos lo es, hay que analizar el comportamiento de la suma de dos sucesiones en tales casos. Es fácil comprobar que si l_1 es finito y l_2 no lo es, entonces el límite de $[f_1(x) + f_2(x)]$ es l_2, es decir:

Teorema 5.4. *Si* $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ *entonces* $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \infty$.

Demostración: Si $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \{x_n\}$ que converge a c y $x_n \neq c$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = l_1$. Por otro lado: Si $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty \Rightarrow \forall \{x_n\}$ que tiende a c y $x_n \neq c$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = \infty$ y

$$\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{n\to\infty} [f_1(x_n) + f_2(x_n)]$$

Por la propiedad que dice (teorema 3.18): "Si $\{u_n\}$ converge a u y $\{v_n\}$ tiende a ∞, entonces $\{u_n + v_n\}$ tiende a infinito", resulta que $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \infty$. □

Por otro lado, si ambos límites son infinitos iguales (los dos $+\infty$ o los dos $-\infty$), entonces el límite de $f_1 + f_2$ es el mismo infinito. Demostraremos el caso en que los dos son $+\infty$. La demostración cuando ambos límites son $-\infty$, es análoga .

Teorema 5.5. *Si* $\lim_{x\to c} f_1(x) = +\infty$ *y* $\lim_{x\to c} f_2(x) = +\infty$*, entonces* $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$

Demostración:

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \ / \ x_n \to c \text{ y } x_n \neq c, \text{ se cumple que } \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = +\infty.$$

Análogamente

$$\lim_{x\to c} f_2(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \ / \ x_n \to c \text{ y } \quad x_n \neq c, \text{ se cumple que } \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = +\infty.$$

Por otro lado:

$$\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{n\to\infty}[f_1(x_n) + f_2(x_n)] \ \ \forall \{x_n\} \ / \ x_n \to c, \text{ y } x_n \neq c$$

Por la propiedad estudiada para sucesiones que dice (teorema 3.19): "Si $\{u_n\} \to +\infty$ y $\{v_n\} \to +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = +\infty$", resulta que $\lim_{x\to c}[f_1(x) + f_2(x)] = +\infty$ que es lo que queríamos probar. □

El problema surge si uno de los límites es $+\infty$ y el otro $-\infty$. Por ejemplo: ¿Cuál es el límite de $\dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{1-x}$ cuando $x \to 1^+$? Para x próximos a 1 por la derecha se trata de sumar dos números con valor absoluto muy grande, uno positivo y el otro negativo. A priori no se puede decidir cómo es la suma. Un experimento nos puede ayudar a hacer una conjetura:

Si x es 1,0001, la suma que resulta es 0,5. Situaciones como estas se resuelven de una manera más sencilla mediante una técnica que se denomina *Regla de L'Hôpital* que permite, en el cálculo de determinados límites reemplazar a ciertas funciones por otras, bajo ciertas y determinadas condiciones.

Ejemplo 8: Demostremos los siguientes límites, usando los resultados recién obtenidos:

(a) $\lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$

(b) $\lim_{x\to +\infty}(x - 4) = +\infty$

(c) $\lim_{x\to +\infty}(x + e^x) = +\infty$

(a) Sea $f(x) = x$ y $g(x) = 2$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n \to 2$ y $x_n \neq 2$.

$$\lim_{x\to 2} x = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to +\infty} x_n = 2$$

$$\lim_{x\to 2} 2 = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to +\infty} 2 = 2$$

Luego, en virtud del teorema 5.3

$$\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 2}(x + 2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 = 2 + 2 = 4$$

(b) Sea $f(x) = x$ y $g(x) = -4$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (-4) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} -4 = -4$$

Luego, por el teorema 5.4

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to+\infty} [x + (-4)] = +\infty$$

(c) Sea $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n \to +\infty$. Por el ejercicio (b),

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{x_n}$$

y por tratarse de una sucesión exponencial de base mayor que 1, se cumple que esta sucesión tiende a $+\infty$. En consecuencia

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Luego, según lo afirmado en el teorema 5.5:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to+\infty} (x + e^x) = +\infty$$

5.5.2. Producto de funciones

Veamos este primer resultado para funciones con límites finitos.

Teorema 5.6. *Si* $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1$ *y* $\lim_{x\to c} f_2(x) = l_2$ *con* l_1 *y* $l_2 \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x) = l_1 l_2$.

Demostración:

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \{x_n\} \;/\; x_n \to c,\;\; x_n \neq c \text{ se cumple que } \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = l_1.$$

Además

$$\lim_{x\to c} f_2(x) = l_2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \{x_n\} \;/\; x_n \to c,\;\; x_n \neq c \text{ se cumple que } \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = l_2.$$

Por otro lado:

$$\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n)f_2(x_n) \;\; \forall\, \{x_n\} \;/\; x_n \to c,\;\; x_n \neq c.$$

Recordemos la propiedad que dice (teorema 3.10): "Si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son dos sucesiones de números reales que convergen a u y v, respectivamente siendo u y $v \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión de números reales $\{u_n v_n\}$ converge a uv". Luego, por esta propiedad, resulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x) &= \lim_{n\to\infty} f_1(x_n)f_2(x_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) \lim_{n\to\infty} f_2(x_n)\\ &= l_1 l_2\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 5.7. *Si* $f_1(x) = k$ *con* $k \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to c} f_2(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x) = kl = k \lim_{x\to c} f_2(x).$$

Demostración: Sea $\{x_n\}$ cualquiera tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$. Tenemos que

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

por ser el límite de la función constante, igual a la constante misma. Además,

$$\lim_{x\to c} f_2(x) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = l$$

Luego, por el teorema anterior

$$\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x) = \lim_{x\to c} kf_2(x) = kl = k \lim_{x\to c} f_2(x)$$

$\square$

Ejemplo 9: Demostremos que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ y $\lim_{x\to 4}(3x) = 12$.

En efecto: Dado que $\lim_{x\to 3} x^2 = \lim_{x\to 3}(x.x)$ y como $\lim_{x\to c} x = c$, es decir, $\lim_{x\to 3} x = 3$, por el teorema 5.6 sobre el límite del producto de funciones, resulta

$$\lim_{x\to 3} x^2 = \lim_{x\to 3} x \lim_{x\to 3} x = 3\;3 = 9.$$

Por otro lado, $\lim_{x\to 4}(3x)$ es el límite de una constante por una función que tiene límite finito para $x \to 4$. Por el corolario anterior, resulta

$$\lim_{x\to 4}(3x) = 3 \lim_{x\to 4} x = 3 \cdot 4 = 12$$

Los resultados de los teoremas sobre límite de la suma y el producto de funciones y su corolario, se extienden fácilmente (por inducción matemática) a cualquier colección finita de funciones; es decir si

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1, \lim_{x\to c} f_2(x) = l_2, \cdots, \lim_{x\to c} f_n(x) = l_n$$

con $l_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, entonces

$$\lim_{x\to c}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)] = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \cdots + k_n l_n \tag{5.1}$$

con $k_i \in \mathbb{R}$, y

$$\lim_{x\to c}[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)] = l_1 l_2 \cdots l_n \tag{5.2}$$

A partir de estos resultados es fácil ver el siguiente teorema.

Teorema 5.8. *Sea el polinomio* $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, *con* $a_i \in \mathbb{R}$ *e* $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$ *verifica* $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$, $c \in \mathbb{R}$

Demostración: Ya sabemos que $\lim_{x\to c} x = c$, para $c \in \mathbb{R}$. Aplicando (5.2) a $f(x) = x$ multiplicada k veces por sí misma, obtenemos que $\lim_{x\to c} x^k = c^k$, para cada entero positivo k.

También sabemos que $\lim_{x\to c} a_0 = a_0$. Se deduce entonces de (5.1) que

$$\lim_{x\to c}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$$

es decir, $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$.

□

Ejemplo 10:

$$\lim_{x\to 1}(5x^2 - 12x + 2) = 5(1)^2 - 12(1) + 2 = -5$$

$$\lim_{x\to 0}(14x^5 - 7x^2 + 2x + 8) = 14(0)^5 - 7(0)^2 + 2(0) + 8 = 8$$

$$\lim_{x\to -1}(2x^3 + x^2 - 2x - 3) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 3 = -2$$

El siguiente resultado trata el límite de una función acotada por otra que tiende a cero para un determinado comportamiento de la variable independiente.

Teorema 5.9. *Si dados $c \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, $\exists M_\delta > 0$ para el cual $|f(x)| < M_\delta$ para toda x tal que $0 < |x - c| < \delta$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$*

Demostración: Dado un número $c \in \mathbb{R}$, sea $\{x_n\}$ una sucesión cualesquiera de números reales que converge a c y $x_n \neq c$ y sea $\delta > 0$ un número positivo dado. Luego, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$ se verifica que $0 < |x_n - c| < \delta$. Supongamos también que, dados c y δ, existe $M_\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq M_\delta$ cada vez que x satisfaga $0 < |x_n - c| < \delta$. De esta manera tendremos que

$$|f(x_n)| \leq M_\delta \tag{5.3}$$

Por otro lado, dado que $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, cualquiera sea la sucesión $\{x_n\}$ que converge a c y $x_n \neq c$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0 \tag{5.4}$$

Luego, de las ecuaciones (5.3) y (5.4) y de la proposición de sucesiones que afirma que (teorema 3.11): "Si $\{u_n\}$ es una sucesión acotada y $\{v_n\}$ es una sucesión que converge a cero entonces $\{u_n v_n\}$ converge a cero", se tiene que $\{f(x_n)g(x_n)\}$ converge a cero. Como este razonamiento es válido para cualquier sucesión $\{x_n\}$ que converge a c, concluimos que $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

□

Observación 5.10. *Este teorema se cumple también en el caso en que c sea infinito. El enunciado y la demostración son análogos al caso anterior, siempre que se reemplace el entorno reducido de c por un dominio no acotado $(a, +\infty)$ o bien $(-\infty, b)$.*

Ejemplo 11: Sean $g(x) = x, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ y

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Probar que $\lim_{x \to 0}[f(x)g(x)] = 0$.

En efecto: En el ejemplo 2 de este capítulo, hemos demostrado que $\lim_{x \to c} x = c, \forall\, c \in \mathbb{R}$. En particular, para $c = 0$. En el ejemplo 6 del mismo capítulo hemos probado que la función $f(x)$ dada no tiene límite, cualquiera sea el c que se elija. Pero $|f(x)| \leq 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, en consecuencia $f(x)$ es acotada en toda x que satisfaga que $0 < |x| < \delta$ para todo $\delta > 0$. En consecuencia, por el teorema anterior, resulta que $\lim_{x \to 0}[f(x)g(x)] = 0$.

Ejemplo 12: Sea $h(x) = \sin(x)$, para $x \in \mathbb{R}$ y $w(x) = 1/x$ para $x > 0$. Probemos que

$$\lim_{x \to +\infty} [\sin(x)(1/x)] = 0.$$

En efecto: La función $h(x) = \sin(x)$ está acotada. Concretamente, $|\sin(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Debemos hacer notar que $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ no existe porque si consideramos dos sucesiones como por ejemplo $\{n\pi\}$ y $\{(\pi/2) + 2n\pi\}$, que tienden a $+\infty$, las sucesiones de sus correspondientes valores funcionales: $\{\sin(n\pi)\}$ y $\{\sin((\pi/2) + 2n\pi)\}$, convergen a cero y uno respectivamente. Esto es suficiente para asegurar que $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ no existe. Luego, cuando $x \to +\infty$, $h(x) = \sin(x)$ es acotada, aunque no convergente.

Por otro lado, hemos demostrado en el ejemplo 5 (c) de este capítulo, que

$$\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0.$$

En consecuencia por el teorema anterior resulta que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right] = 0$$

Veamos los siguientes teoremas sobre el límite del producto de dos funciones donde al menos una de ellas tiene límite infinito para un determinado comportamiento de la variable independiente.

Teorema 5.11. *Si* $\lim_{x \to c} f_1(x) = \infty$ *y* $\lim_{x \to c} f_2(x) = \infty$ *entonces* $\lim_{x \to c} f_1(x)f_2(x) = \infty$*, y es fácil discernir según que cada uno de ellos sea* $+\infty$ *o* $-\infty$*.*

Demostración: Si $\lim_{x \to c} f_1(x) = \infty$ entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, se cumple $\lim_{n \to \infty} f_1(x_n) = \infty$. Análogamente, si $\lim_{x \to c} f_2(x) = \infty$ entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, se cumple $\lim_{n \to \infty} f_2(x_n) = \infty$.

Ahora bien, $\lim_{x \to c} f_1(x)f_2(x) = \lim_{n \to \infty} f_1(x_n)f_2(x_n)$, $\forall\ x_n \to c$ y $x_n \neq c$. Por la propiedad de las sucesiones que dice (teorema 3.20): "Si $u_n \to \infty$ y $v_n \to \infty$, $u_n v_n \to \infty$ para $n \to \infty$", resulta que $\lim_{n \to \infty} f_1(x_n)f_2(x_n) = \infty$ y en consecuencia $\lim_{x \to c} f_1(x)f_2(x) = \infty$ que es lo que queríamos probar. $\square$

Ejemplo 13: Probemos que $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.

En efecto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)$$

Estudiaremos los límites laterales. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n\to 0^+$ y $x_n\neq 0$. Sabemos, por el ejemplo 5, que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right)=+\infty$$

Luego, por el teorema anterior,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty \tag{5.5}$$

Análogamente trabajamos para hallar

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n\to 0^-$ y $x_n\neq 0$. Tenemos que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right)=-\infty,$$

que se debe a la propiedad que dice (teorema 3.17): "Si una sucesión $\{u_n\}$ converge a cero tomando valores negativos, entonces $\{u_n^{-1}\}$ tiende a $(-\infty)$, siendo $u_n\neq 0$ para todo n". En consecuencia por el teorema anterior

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)=+\infty \tag{5.6}$$

De (5.5) y (5.6) resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Teorema 5.12. *Si* $\lim_{x\to c}f_1(x)=k\in\mathbb{R}$*,* $k\neq 0$ *y* $\lim_{x\to c}f_2(x)=\infty$ *entonces*

$$\lim_{x\to c}f_1(x)f_2(x)=\infty$$

y es fácil discernir el signo según que cada uno de ellos sea positivo o negativo.

Demostración: Si $\lim_{x\to c}f_1(x)=k\in\mathbb{R}$ y $k\neq 0$, y $\lim_{x\to c}f_2(x)=\infty$ entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n\to c$ y $x_n\neq c$, se cumple que $\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)=k$ y $\lim_{n\to\infty}f_2(x_n)=\infty$.

Estudiemos ahora el $\lim_{x\to c}f_1(x)f_2(x)$. Luego, por la definición de límite presentada, es

$$\lim_{x\to c}f_1(x)f_2(x)=\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)f_2(x_n) \tag{5.7}$$

donde $\{x_n\}$ es una sucesión cualquiera que tiende a c y $x_n \neq c$. Por la propiedad que dice (teorema 3.21): "Si $\text{lím}_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ con $u \in \mathbb{R}$ y $\text{lím}_{n\to\infty} v_n = \infty$ entonces $\text{lím}_{n\to\infty} u_n v_n = \infty$", aplicada en (5.7), resulta

$$\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n)f_2(x_n) = \infty.$$

$\square$

Ejemplo 14: Probemos que $\text{lím}_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

En efecto: Sea $f_1(x) = 2$ y $f_2(x) = x$. Vimos en el ejemplo 1 que

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 2$$

Por otro lado, en el ejemplo 8 (b) mostramos que

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

En consecuencia, por el teorema 5.12, resulta

$$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

Para finalizar esta sección nos resta analizar el caso en que un límite sea cero y el otro infinito. Por ejemplo, el producto $x \ln x$ tiene un factor con límite cero y otro con límite $(-\infty)$ cuando x tiende a cero por la derecha. No se puede decir a priori qué pasa al multiplicar un número positivo muy pequeño por otro que tiene valor absoluto muy grande. El producto $e^{-x}x^2$ presenta una problemática análoga, esta vez cuando x tiende a $+\infty$, pues el límite del factor e^{-x} es cero y el de x^2 es $+\infty$.

Estas situaciones como la del tipo $\infty - \infty$ mencionada en el límite de la suma de funciones, se resolverán posteriormente mediante la regla de L'Hôpital.

5.5.3. Cociente de funciones

El cociente f_1/f_2 de dos funciones se puede definir en los x en los cuales $f_2(x)$ es distinto de cero. No obstante, el límite de f_2 en algún punto puede ser cero.

Si l_1 es el límite de f_1 cuando x tiende a c y l_2 el de f_2, siendo l_1, $l_2 \in \mathbb{R}$ y $l_2 \neq 0$ entonces l_1/l_2 es el límite de f_1/f_2. Este resultado se basa en el análogo para sucesiones y se demuestra en el teorema que se da a continuación.

Teorema 5.13. *Si* $\text{lím}_{x\to c} g(x) = m$ *con* $m \neq 0$ *y* $m \in \mathbb{R}$, *entonces* $\text{lím}_{x\to c} 1/g(x) = 1/m$.

Demostración: Si $\text{lím}_{x\to c} g(x) = m$ entonces $\forall \{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, se verifica que $\text{lím}_{n\to\infty} g(x_n) = m$ con $m \neq 0$. En particular, dada una sucesión cualquiera $\{x_n\}$, tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, por teorema de la "conservación de signo"se verifica que, a partir de un número $n \in \mathbb{Z}^+$ y todos los que le siguen, los valores $g(x_n)$ tienen el mismo signo que m. Además por el teorema que dice (teorema 3.12): "Si $\{u\}$ converge a un número $u \neq 0$ y cada término de la sucesión es también distinto de cero, entonces $\{u_n^{-1}\}$ converge a u^{-1}", resulta que $1/g(x_n) \to 1/m$ para $n \to \infty$. Como este razonamiento se cumple $\forall \{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, entonces $\text{lím}_{x\to c} 1/g(x) = 1/m$. $\square$

Ejemplo 15: Probemos que

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

(b) $\lim_{x\to -2} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{4}$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{7}$

(d) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{3}$

En efecto:

(a) Sea $f(x) = x$. Sabemos que $\lim_{x\to 3} x = 3$; luego por teorema 5.13 se verifica que $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$.

(b) Podemos escribir

$$\lim_{x\to -2} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to -2} \left[3\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right]$$

Sabemos que $\lim_{x\to -2} 3 = 3$ y además $\lim_{x\to -2} x = -2$. En consecuencia por teorema 5.13, se cumple que

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Luego por teorema 5.6, resulta

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2} \frac{3}{x^2} &= \lim_{x\to -2} \left[3\frac{1}{x}.\frac{1}{x}\right] \\ &= \left(\lim_{x\to -2} 3\right)\left(\lim_{x\to -2} \frac{1}{x}\right)^2 \\ &= 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(c) Sea $f(x) = x^3 - 1$. Por teorema 5.3 y teorema 5.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}(x^3 - 1) &= \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2}(-1) \\ &= \lim_{x\to 2} x \lim_{x\to 2} x \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2}(-1) \\ &= 2^3 - 1 = 7 \end{aligned}$$

La función $f(x) = x^3 - 1$ tiene límite finito para $x \to 2$ y éste es distinto de cero. Luego, por el teorema 5.13 resulta que

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{7}$$

(d) Sea

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

En virtud del teorema 5.6 tenemos que

$$\lim_{x \to -3} |x| = \lim_{x \to -3} (-1)x = \lim_{x \to -3} (-1) \lim_{x \to -3} x = (-1)(-3) = 3$$

Como $f(x) = |x|$, tiene límite finito para $x \to -3$ y éste es distinto de cero, entonces por el teorema 5.13 resulta que

$$\lim_{x \to -3} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{3}$$

Una vez visto que los recíprocos no presentan dificultad, los cocientes resultan fáciles de manejar.

Teorema 5.14. *Si* $\lim_{x \to c} f(x) = l$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = m$ *con* $m \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = l/m,$$

siendo l *y* $m \in \mathbb{R}$.

Demostración: La clave de la demostración está en observar que el cociente puede escribirse como un producto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$$

con $\lim_{x \to c} f(x) = l$ y $\lim_{x \to c} 1/g(x) = 1/m$ y $m \neq 0$. La regla del producto del teorema 5.6 nos permite escribir

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \frac{1}{g(x)} = l \frac{1}{m} = \frac{l}{m} \quad \text{con } m \neq 0$$

□

Observación 5.15. *Como consecuencia inmediata de este teorema sobre cocientes se puede ver que si* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *son polinomios y* $Q(c) \neq 0$, *se verifica que*

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Ejemplo 16: Calculemos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - 5}{x^2 + 1} = \frac{6 - 5}{4 + 1} = \frac{1}{5}, \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2}{1 - x^2} = \frac{27 - 27}{1 - 9} = 0$$

Analicemos el siguiente caso especial de cocientes:

Teorema 5.16. *Si* $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *con* $l \neq 0$, $l \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, *entonces*

$$\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \infty.$$

El signo de ∞ *se obtiene a partir del signo de* l *y del signo con que* $g(x)$ *tiende a cero para* $x \to c$.

Demostración: Supongamos, por el contrario que existe un número real L tal que

$$\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = L$$

Entonces $g(x)$ es distinta de cero en un entorno reducido de c. Por otro lado, en virtud del teorema 5.6

$$l = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} g(x) \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0L = 0$$

lo cual contradice nuestra hipótesis de que $l \neq 0$. □

Corolario 5.17. *Si* $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ *con* $g(x) \neq 0$ *en un entorno de* c, *entonces* $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \infty$.

La demostración de este corolario queda como ejercicio para el lector interesado (Sugerencia: Utilizar los teoremas 3.15 y 3.17 y luego el teorema 5.11).

Ejemplo 17:

(a) Demostraremos que $\lim_{x\to 1} x^2/(x-1) = \infty$

En efecto: $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$, $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$, pero si analizamos los límites laterales de este último vemos que $\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0^+$ y $\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0^-$. De esta manera,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

(b) Probaremos que $\lim_{x\to 2}(3x-7)/(x^2-4) = \infty$

En efecto: $\lim_{x\to 2}(3x-7) = 6-7 = -1$ y $\lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$ pero $\lim_{x\to 2^+}(x^2-4) = 0^+$ y $\lim_{x\to 2^-}(x^2-4) = 0^-$. Luego,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x-7}{x^2-4} = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{3x-7}{x^2-4} = +\infty$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-7}{x^2-4} = \infty$$

(c) Veamos que $\lim_{x\to 0} 5/x = \infty$

En efecto, $\lim_{x\to 0} 5 = 5$, y $\lim_{x\to 0} x = 0$, y teniendo en cuenta que $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$ y $\lim_{x\to 0^-} x = 0^-$, se deduce que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5}{x} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{5}{x} = -\infty$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{5}{x} = \infty$$

(d) Demostremos que $\lim_{x\to +\infty}(1/x + 3)/(1/x^2) = +\infty$

En efecto: Vimos en el ejemplo 5 que $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$. En consecuencia

$$\lim_{x\to +\infty}[(1/x) + 3] = \lim_{x\to +\infty} 1/x + \lim_{x\to +\infty} 3 = 3.$$

Además,

$$\lim_{x\to +\infty} 1/x^2 = \lim_{x\to +\infty}(1/x)(1/x) = (\lim_{x\to +\infty} 1/x)(\lim_{x\to +\infty} 1/x) = 0^+.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(1/x + 3)}{(1/x^2)} = +\infty$$

El resultado que presentamos a continuación trata el límite del cociente de dos funciones cuando el dividendo es una función con límite finito y el divisor es otra con límite infinito para la misma tendencia de variable independiente.

Teorema 5.18. *Si* $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1$, $l_1 \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$, *entonces*

$$\lim_{x\to c} f_1(x)/f_2(x) = 0.$$

La forma de converger a cero depende del signo de l_1 *y del signo de* ∞*.*

Demostración: Si $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1$, entonces para cualquier sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = l_1$, $l_1 \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si $\lim_{x\to c} f_2(x) = \infty$ entonces para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = \infty \tag{5.8}$$

Por la propiedad estudiada para sucesiones que dice (teorema 3.16): "Si $x_n \to +\infty$ $(-\infty)$ entonces $x_n^{-1} \to 0^+$ (0^-)resulta en (5.8): $\lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}[f_2(x_n)]^{-1} = 0$ (el signo con que $[f_2(x_n)]^{-1}$ tiende a cero depende del signo de ∞). Luego,

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f_2(x)} = \lim_{n\to\infty}[f_2(x_n)]^{-1} = 0$$

para cualquier sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$, con $n \to \infty$ y $x_n \neq c$. En consecuencia por el teorema 5.6 del "límite del producto de funciones", resulta que

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \lim_{x\to c} f_1(x) \lim_{x\to c} \frac{1}{f_2(x)} = l_1 0 = 0$$

$\square$

Ejemplo 18: Probemos que $\lim_{x\to-\infty} -4/(2x+1) = 0^+$ (tiende a cero tomando valores positivos).

En efecto: Llamemos $f(x) = -4$ y $g(x) = 2x+1$. Sabemos que $\lim_{x\to-\infty}(-4) = -4$ y, siguiendo la demostración del ejemplo 8 (b), se tiene además que $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$. Por ello y en virtud de los teoremas 5.4 y 5.12, tenemos también que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Luego, por teorema 5.18 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0^+$ pues tanto el numerador como el denominador, toman valores negativos a medida que x tiende $-\infty$.

Los casos problemáticos en el límite del cociente de dos funciones se presentan cuando l_1 y l_2 son ambos cero o ambos infinito, y esta circunstancia se presenta en muchas ocasiones. El siguiente teorema nos permite resolver algunas de estas situaciones.

Teorema 5.19. *Supongamos que f y g son dos funciones coincidentes sobre un entorno reducido de c si $c \in \mathbb{R}$ o en un intervalo cerrado y no acotado si c es ∞ y que* $\lim_{x\to c} f(x) = l$. *Entonces* $\lim_{x\to c} g(x) = l$.

Demostración: Si $\lim_{x\to c} f(x) = l$, entonces para cualquier sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ para $n \to \infty$ y $x_n \neq c$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Como $f(x) = g(x)$ para toda x de un entorno reducido de c o bien en un intervalo cerrado y no acotado $(-\infty, a]$ o bien $[b, +\infty)$, resulta que a partir de un $n \in \mathbb{Z}^+$ es $f(x_n) = g(x_n)$ luego $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = l$. Entonces, $\lim_{x\to c} g(x) = l$, que es lo que queriamos probar. $\square$

Antes de continuar con los ejemplos, debemos recordar lo que afirmamos desde el principio: a la hora de tomar el límite cuando x tiende a un número dado c, no importa que la función esté o no definida en el número c, ni tampoco qué valor pueda tomar en dicho punto en caso de estar definida. La única cosa que importa es el comportamiento de la función en un entorno reducido de c (si c es un número), o el comportamiento de la función en un intervalo cerrado y no acotado (si c es infinito).

Ejemplo 19: Los siguientes ejemplos muestran de qué manera el teorema 5.19 resuelve situaciones como las descriptas antes. Probemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = 0$$

En efecto: En $x = 2$, la función no está definida. Tanto el numerador como el denominador valen cero. Pero esto no importa a los fines de calcular el límite. Para todo $x \neq 2$ es

$$\frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = (x-2)$$

Como $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$, entonces por teorema 5.19 se cumple

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-2)=0$$

Ejemplo 20: Calculemos los siguientes límites siempre que ellos existan:

(i) $\lim_{x\to 3}(x^2-x-6)/(x-3)$

(ii) $\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)^2/(x-4)$

(iii) $\lim_{x\to -1}(x+1)/(2x^2+7x+5)^2$

En efecto: En cada uno de los tres casos, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, por lo que hemos de tener cuidado.

(i) En primer lugar, factorizamos el numerador:

$$\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$$

Para $x\neq 3$ es

$$\frac{x^2-x-6}{x-3}=(x+2)$$

Sabemos que $\lim_{x\to 3}(x+2)=3+2=5$. Luego, por el teorema 5.19,

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x-6)/(x-3)=\lim_{x\to 3}(x+2)=5$$

(ii) Observemos que para toda $x\neq 4$

$$\frac{(x^2-3x-4)^2}{x-4}=\frac{[(x+1)(x-4)]^2}{x-4}=(x+1)^2(x-4).$$

Como $\lim_{x\to 4}(x+1)^2(x-4)=\lim_{x\to 4}(x+1)^2\lim_{x\to 4}(x-4)=25\cdot 0=0$ resulta, por teorema 5.19 que

$$\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)^2/(x-4)=\lim_{x\to 4}[(x+1)^2(x-4)]=0.$$

(iii) Puesto que

$$\frac{(x+1)}{(2x^2+7x+5)^2}=\frac{(x+1)}{[(2x+5)(x+1)]^2}=\frac{(x+1)}{(2x+5)^2(x+1)^2}$$

se puede ver que, para $x\neq -1$,

$$\frac{(x+1)}{(2x^2+7x+5)^2}=\frac{1}{(2x+5)^2(x+1)}$$

Como por el teorema 5.16

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{(2x+5)^2(x+1)} = \infty$$

resulta que, por el teorema 5.19, es

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(2x^2+7x+5)^2} = \infty$$

Presentaremos a continuación tres ejemplos donde tanto el numerador como el denominador tienen límite infinito.

Ejemplo 21: Calculemos el $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)/(x+1)$.

Observemos que para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+3x+2)}{(x+1)} &= \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 0^+$$

por el teorema 5.16 es,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

De esta manera, por el teorema 5.19 se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+3x+2)}{(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Ejemplo 22: Determinemos el $\lim_{x\to-\infty}(x+4)/(x^3-2x+1)$.

Puesto que para $x \neq 0$

$$\frac{(x+4)}{(x^3-2x+1)} = \frac{\frac{x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

Como, por teorema 5.14

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0,$$

por el teorema 5.19 resulta

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+4}{x^3-2x+1} = 0$$

Ejemplo 23: Encontremos el valor del límite $\lim_{x\to+\infty}(2x^4+3x^3-1)/(4x^4-x^2+7)$

Observemos que si $x \neq 0$

$$\frac{(2x^4+3x^3-1)}{(4x^4-x^2+7)} = \frac{(\frac{2x^4}{x^4}+\frac{3x^3}{x^4}-\frac{1}{x^4})}{\frac{4x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{7}{x^4}} = \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}}{4-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}}$$

Como por teorema 5.14 es

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}}{4-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}} = \frac{1}{2};$$

entonces por el teorema 5.19 se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^4+3x^3-1)}{(4x^4-x^2+7)} = \frac{1}{2}$$

El siguiente teorema nos permite analizar ciertos límites cuyos valores no se pueden deducir fácilmente a partir de las propiedades dadas anteriormente.

Teorema 5.20 (Propiedad Sandwich o Teorema de la Función Intermedia). *Sean f, g y h tres funciones reales definidas en un intervalo I cerrado y acotado excepto quizás en el punto $x = c \in I$. Supongamos además $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall\, x \in I$ excepto posiblemente en c y que si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$. Luego $\lim_{x\to c} g(x) = l$.*

Demostración: Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$. Como por hipótesis se cumple que: $c \in I$ y $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall\, x \in I$, excepto quizás en $x = c$, entonces a partir de un valor $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$.

Como $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$ entonces, por la definición de límite, se cumple $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = l$. Por la "Propiedad Sandwich"para sucesiones de números reales resulta que $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l$.

Como este razonamiento se verifica para toda $\{x_n\}$ tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, resulta que $\lim_{x\to c} g(x) = l$.

□

Observación 5.21. *El teorema vale en el caso que I es cerrado y no acotado y c es infinito; en este caso, la demostración es análoga a la anterior.*

Ejemplo 24: Estudiemos $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$.

En efecto: La función $f(x) = x\sin(1/x)$ está definida en todo $x \neq 0$. Si $x \to 0^+$ entonces $1/x \to +\infty$ y $|\sin(1/x)| \leq 1$. Multiplicamos miembro a miembro por $x > 0$ y resulta $-x \leq x\sin(1/x) \leq x$. Como el límite conserva la relación de orden, se deduce que

$$\lim_{x\to 0^+}(-x) \leq \lim_{x\to 0^+} x\sin(1/x) \leq \lim_{x\to 0^+} x \tag{5.9}$$

Luego, por la "Propiedad del Sandwich", resulta que $\lim_{x\to 0^+} x\sin(1/x) = 0$.

Por otro lado la función f es par pues cualquiera sea x en el dominio de f se cumple que $f(-x) = (-x)(-\sin(1/x)) = x\sin(1/x)$. Luego, $f(x) = f(-x)\ \forall\ x \in Df$; en consecuencia $f(x) = x\sin(1/x)$ es simétrica con respecto al eje $X = 0$. Entonces $\lim_{x\to 0^-} x\sin(1/x) = 0$. Como ambos límites laterales son iguales, resulta que $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

Ejemplo 25: Vamos a demostrar que $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$ mediante un poco de geometría sencilla y el teorema de la Función Intermedia.

En efecto: Para $x > 0$, próximo a cero tenemos que el área del triángulo OAP es igual a $\sin(x)/2$, el área del sector circular de radio $r = 1$ y ángulo central de x radianes es igual a $r^2x/2$ que es igual a $x/2$ y el área del triángulo OAQ es igual a $\tan(x)/2$ que es igual a $\sin(x)/2\cos(x)$, como puede observarse en la Figura 5.3

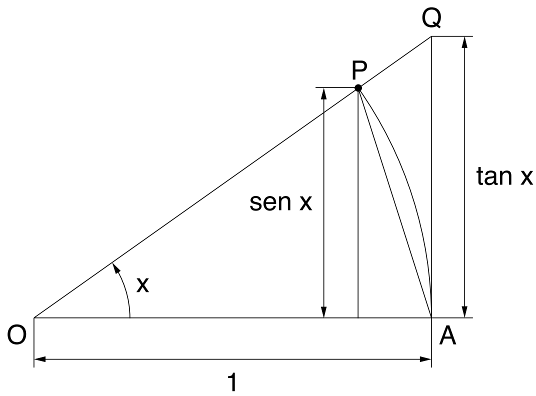

Figura 5.3: Gráfica del ejemplo 25

Dado que el triángulo OAP está contenido en el sector circular que a su vez está contenido en el triángulo OAQ (y todas las inclusiones son estrictas), tenemos que

$$\frac{1}{2}\sin(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

que es equivalente a

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Tomando los recíprocos resulta

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Esta desigualdad se ha obtenido para los $x > 0$ próximos a cero. Pero dado que $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x)/(-x) = \sin(x)/(x)$, la última desigualdad también se verifica para $x < 0$ próximo a cero.

Podemos entonces aplicar el teorema de la Función Intermedia o del encaje. Dado que

$$\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

A continuación vemos cómo resolver con el enfoque discreto un límite particular de la función raíz cuadrada.

Ejemplo 26: Estudiemos el $\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}$.

Dado que

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/2},$$

estudiar el $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$ equivale a estudiar $\lim_{n\to\infty} x_n^{1/2}$, para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to 0^+$ y $x_n \neq 0$. Por el teorema 3.25 estudiado en sucesiones: "sucesión que es potencia de otras dos", resulta que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{1/2} = \left[\lim_{n\to\infty} x_n\right]^{\lim_{n\to\infty} 1/2},$$

cualquiera sea la sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to 0^+$. Luego, $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \lim_{n\to\infty}(x_n)^{1/2} = 0^{1/2} = 0$.

5.6. Trabajos Prácticos

La primera guía de ejercicios sobre el límite funcional, correspondiente a la verificación de éstos usando la definición dada con el enfoque discreto, es exactamente la misma que la exspuesta en 4.5.1 realizando las modificaciones correspondientes en los enunciados. Los problemas sobre límites infinitos (sección 5.3.3) fueron tratados, algunos de ellos, como ejemplos en las notas de sucesiones (sección 2.1) y en las del límite funcional mediante el enfoque discreto. Además, debido a que el tratamiento del límite infinito vía sucesiones no ofrece mayores dificultades que en los casos finitos, se tomó la decisión de incluir los ejercicios sobre el cálculo de límites usando las propiedades y límites infinitos, en una sola guía de Trabajos Prácticos.

5.6.1. Trabajo Práctico: Cálculo de límites a partir de la definición

Como dijimos antes, esta coincide con la presentada en 4.5.1.

5.6.2. Trabajo Práctico: Cálculo de límites por propiedades y límites infinitos

1. Suponiendo que $\lim_{x\to c} f(x) = 2$, $\lim_{x\to c} g(x) = -1$ y $\lim_{x\to c} h(x) = 0$, calcule los límites que existan

(a) $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)]$, (b) $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$, (c) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

(d) $\lim_{x\to c} \dfrac{h(x)}{f(x)}$, (e) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{h(x)}$, (f) $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{f(x) - g(x)}$

2. Suponiendo que $\lim_{x\to c} f(x) = 3$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} h(x) = -2$, calcule los límites que existan

(a) $\lim_{x\to c}[3f(x) + 2h(x)]$, (b) $\lim_{x\to c}[h(x)]^3$, (c) $\lim_{x\to c} \dfrac{h(x)}{x-c}$,

(d) $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{h(x)}$, (e) $\lim_{x\to c} \dfrac{4}{f(x) - h(x)}$, (f) $\lim_{x\to c}[3 + g(x)]^2$

3. Si me piden que calcule
$$\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)$$
respondo que este límite es cero puesto que
$$\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right) = 0$$
y menciono el teorema sobre límite de un producto como justificación. Compruebe que el límite es en realidad $-1/16$, y diga dónde está el error en mi afirmación.

4. Si me piden que calcule
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$$
respondo que el límite finito no existe puesto que $\lim_{x\to 3}(x-3) = 0$ y menciono el teorema sobre el límite de un cociente donde el denominador tiende a cero, como justificación. Compruebe que el límite es, en realidad, 7 y diga dónde estuvo el error.

5. Calcule los límites siguientes

(1)	$\lim\limits_{x\to 2} 3$	(2)	$\lim\limits_{x\to 3}(5-4x)^2$	(3)	$\lim\limits_{x\to -4}(x^2+3x-7)$
(4)	$\lim\limits_{x\to -2} 3\lvert x-1\rvert$	(5)	$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \lvert x^2-8\rvert$	(6)	$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{3x^5+4}$
(7)	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{x+4}$	(8)	$\lim\limits_{x\to 0} (x - \dfrac{4}{x})$	(9)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x}$
(10)	$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-x^2}{4x}$	(11)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x}$	(12)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+1}$

(13)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-4}$	(14)	$\lim\limits_{h\to 0} h(1-\dfrac{1}{h})$	(15)	$\lim\limits_{h\to 0} h(1+\dfrac{1}{h})$
(16)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$	(17)	$\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{x^2-4}{x-2})$	(18)	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x^2-x-6)^2}{x+2}$
(19)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{1-x}$	(20)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{(3x-1)(x^4-2)}$	(21)	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{h^2}}{1-\frac{1}{h}}$
(22)	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{h^2}}{1+\frac{1}{h^2}}$	(23)	$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+\frac{a}{t}}{t+\frac{b}{t}}$	(24)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$
(25)	$\lim\limits_{x\to -4}(\dfrac{3x}{x+4}+\dfrac{8}{x+4})$	(26)	$\lim\limits_{x\to -4}(\dfrac{2x}{x+4}-\dfrac{8}{x+4})$	(27)	$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}$
(28)	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-5}{2x+3}$	(29)	$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-5}{2x+3}$	(30)	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+5}$
(31)	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x+3}{3x^2-5x+1}$	(32)	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-2}$	(33)	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x-3x^2+1}{9x^2-2x+4}$
(34)	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$	(35)	$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}$	(36)	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x}$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x}$

(38) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$

(39) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$

Sugerencia: en los ejercicios (34) a (39) dividir numerador y denominador por $\sqrt{x^2}=|x|$.

6. Calcule los siguientes límites laterales

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0^+}(3^{1/x}), \qquad \lim_{x\to 0^-}(3^{1/x}),$$

$$\text{(b) } \lim_{x\to 0^+}(e^{-1/x}), \qquad \lim_{x\to 0^-}(e^{-1/x}),$$

7. Suponiendo que $f(x)=x^3$, calcule los límites que siguen

$$\text{(a) } \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}, \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(2)}{x-3}$$

$$\text{(c) } \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-2}, \qquad \text{(d) } \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1},$$

En los ejercicios del 8 al 13 cuando hacemos referencia de la existencia de límite, nos referimos a la existencia de límite finito.

8. Muestre mediante un ejemplo, que $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ puede existir sin que existan ni $\lim_{x\to c} f(x)$ ni $\lim_{x\to c} g(x)$.

9. Muestre, mediante un ejemplo, que $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ puede existir sin que existan ni $\lim_{x\to c} f(x)$ ni $\lim_{x\to c} g(x)$.

10. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ existe en reales, pero $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe en $\mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to c} g(x)$ no existe en $\mathbb{R}$.

    b) Si $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ existen en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to c} g(x)$ no existe en $\mathbb{R}$.

    c) Si $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = l \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en $\mathbb{R}$.

    d) Si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)}$ existe.

    e) Si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)}$ existe en $\mathbb{R}$.

    f) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$.

    g) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$.

11. Compruebe que

    (i) $\max\{f(x), g(x)\} = (1/2)\left([f(x)+g(x)] + |f(x)-g(x)|\right)$

    (ii) Halle una expresión similar para el $\min\{f(x), g(x)\}$

12. Sean $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ y $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Demuestres que si

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = l,$$

    demuestre que $\lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} H(x) = l$.

13. Suponiendo que $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ y que $f(x)g(x) = 1$ para todo x real, demuestre que $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe en el conjunto de los números reales. (Sugerencia: suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ y, deducir una contradicción).

Capítulo 6

Equivalencia de Definiciones de Límite de una Función Real de una Variable Real

6.1. Definiciones equivalentes

Ya hemos dicho varias veces que la noción de límite de una función f en un punto c, sirve para dar un significado preciso al hecho de que $f(x)$ se acerca a un determinado valor, digamos L, cuando x se aproxima a c.

Existen varias maneras de definir este concepto. En los capítulos 4 y 5 se presentaron y estudiaron dos definiciones de esta noción de límite a partir de cada una de las cuales se dedujeron algunas propiedades que nos permitieron realizar el cálculo de éstos de manera más sencilla. Recordaremos aquí estas definiciones, dándoles un nombre propio a cada una de ellas para poder diferenciarlas. A continuación, probaremos que ambas son equivalentes.

En ambas definiciones, f es una función real a variable real, definida sobre al menos un conjunto de la forma $(c-p,c)\cup(c,c+p)$, con $c\in\mathbb{R}$ y $p>0$. La primera de las definiciones que se presentó en el capítulo 4, sección 2, a la que nos referiremos como la *definición de límite* $\varepsilon-\delta$, se enuncia de la siguiente manera:

Definición 6.1 (de límite $\varepsilon-\delta$). *Diremos que L es el límite $(\varepsilon-\delta)$ de $f(x)$ cuando x tiende a c, si y sólo si para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ (en general, función de ε), tal que si $0<|x-c|<\delta$, entonces se verifica que $|f(x)-L|<\varepsilon$.*

Otra manera de presentar el concepto de límite funcional es la que se trabajó en el capítulo 5, sección 1, a la que nos referiremos como la *definición de límite por sucesiones*, la cual se enuncia de la siguiente manera:

Definición 6.2 (de límite por sucesiones). *Diremos que L es el límite (por sucesiones) de $f(x)$ cuando x tiende a c, si y sólo si toda sucesión de números del dominio de f (D_f), distintos de c, cuyo límite es c, se transforma mediante f en una sucesión que tiene límite L.*

Simbólicamente, se expresa de la siguiente manera: L es el límite (por sucesiones) de $f(x)$ cuando x tiende a c, si y sólo si $\forall\{x_n\} \subset D_f$, con $x_n \neq c$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Presentaremos a continuación el resultado que demuestra la equivalencia entre las dos definiciones enunciadas.

Teorema 6.3. *L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a c, si y sólo si L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c.*

Demostración: Caso ($\Rightarrow$): Supongamos que L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a c. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de números en D_f distintos de c, que converge a c. Luego, dado el $\delta > 0$ antes mencionado, podemos afirmar que existe un valor $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_n - c| < \delta$ para todo $n \geq N$. Así, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$; es decir que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L. Como este razonamiento se cumple para cualquier sucesión $\{x_n\}$ que converge a c, entonces concluimos que L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c. □

Hemos probado entonces, que si L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a c, entonces L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c.

Caso ($\Leftarrow$): Supongamos ahora que L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c. Entonces, toda sucesión de números del dominio de f, distintos de c, cuyo límite es c, se transforma mediante f en una sucesión que tiene límite L.

Fijemos un número real positivo ε arbitrario. Se trata de probar la existencia de un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que verifique $0 < |x - c| < \delta$. Esto se demostrará por reducción al absurdo. Es decir, supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ para el cual, cualquiera sea el $\delta > 0$ que se tome, existe al menos un $x \in D_f$ que verifica $0 < |x - c| < \delta$ y para el cual $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Consideremos ahora la sucesión formada de la siguiente manera: para cada $n \in \mathbb{N}$, se elige $x_n \in D_f$ tal que se cumpla

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

Ya sabemos que tales x_n existen por la suposición que hicimos anteriormente, tomando $\delta = 1/n$. Así, claramente se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Sin embargo, para esta misma sucesión se verifica que $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ para todo n, lo que constituye un razonamiento absurdo pues contradice la definición de L como el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c. Luego, se concluye que L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a c.

Con esta última conclusión, queda demostrada la equivalencia de ambas definiciones.

□

Hay un resultado análogo si c es $+\infty$ (y otro paralelo si c es $-\infty$). Para estudiar la equivalencia de las definiciones para este caso donde c es $+\infty$, presentamos sendas definiciones:

Definición 6.4. *Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $[a, +\infty)$. Diremos que L es el límite ($\varepsilon - \delta$) de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (en general función de ε), tal que si $x > \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Definición 6.5. *Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $[a, +\infty)$. Diremos que L es el límite (por sucesiones) de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ si y sólo si para toda sucesión de números del dominio de $f(x)$ que tienda a $+\infty$ se transforma mediante f en una sucesión que tiene límite L.*

Teorema 6.6. *L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ si y sólo si L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$.*

Demostración: Caso ($\Rightarrow$): Suponemos que L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de números en D_f, que tiende a $+\infty$. Luego, dado el $\delta > 0$ antes mencionado, existe un valor $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \delta$ para todo $n \geq r$. Para estas x_n se verifica que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ por la hipótesis realizada. Es decir que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L conforme n tiende a ∞. Como este razonamiento se cumple para cualquier sucesión $\{x_n\}$ que tiende a $+\infty$, entonces concluimos que L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$. $\square$

Hasta aquí hemos probado que si L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$, entonces L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

Caso ($\Leftarrow$): Supongamos ahora que L es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$. Entonces, toda sucesión de números del dominio de f cuyo límite es $+\infty$, se transforma mediante f en una sucesión que tiene límite L.

Sea ε un número positivo. Se trata de probar la existencia de un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x > \delta$. Esto se demostrará por reducción al absurdo. Es decir, supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ para el cual, cualquiera sea el $\delta > 0$ que se tome, existe al menos un $x \in D_f$, con $x > \delta$, para el cual $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Consideremos ahora la sucesión formada de la siguiente manera: para cada $n \in \mathbb{N}$, se toma un $x_n \in D_f$ que cumpla $x_n > n$ y $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Ya sabemos que tales x_n existen por la suposición que hicimos anteriormente, tomando $\delta = n$. Así, claramente se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Sin embargo, para esta misma sucesión se verifica que $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ para todo n, lo que constituye un razonamiento absurdo pues contradice la definición de L como el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$. Luego, se concluye que L es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

Con esta última conclusión queda demostrada la equivalencia de ambas definiciones. $\square$

Observación 6.7. *La determinación de δ que corresponda a ε en los términos de las propiedades anteriores, no siempre es fácil. El problema se resuelve rápidamente si logramos encontrar una relación apropiada entre $|f(x) - L|$ y $|x - c|$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 1: Demostraremos, usando la definición 6.1 de límite ε–δ, que $\lim_{x\to 4}\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = 3$.

En efecto: Consideremos $\varepsilon > 0$ dado. Trabajamos en este ejemplo con los datos $f(x) = 1 + x/2$, $c = 4$ y $L = 3$. Con ellos, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$|f(x) - L| = |1 + \frac{x}{2} - 3| = \frac{|x-4|}{2} = \frac{1}{2}|x - c|.$$

A partir de ésto, cualquier número δ que elijamos con la condición que $0 < \delta \leq 2\varepsilon$, nos permitirá afirmar que para cualquier x que cumpla $0 < |x - c| < \delta$, se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Y con ello obtenemos la conclusión buscada.

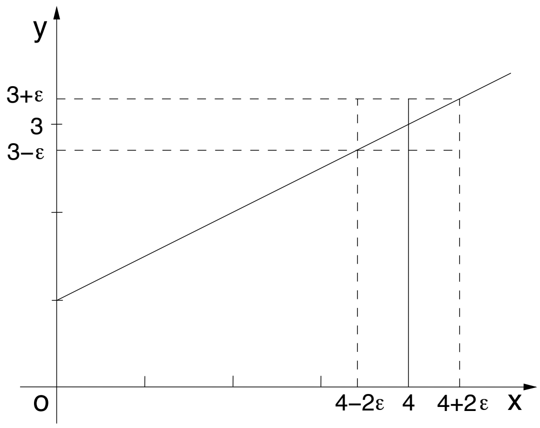

Figura 6.1: Gráfica del ejemplo 1.

El ejemplo que se presenta a continuación muestra que hay pruebas de existencia de límites finitos que van más allá de las técnicas propuestas en cada enfoque metodológico, y en las que se pone a trabajar a pleno la creatividad y el conocimiento de herramientas matemáticas utilizadas.

Ejemplo 2: Consideremos la función $f(x)$ definida en el intervalo $(0, 1)$ que toma el valor 0 para los x irracionales y si, x es racional, digamos $x = p/q$, con $0 < p < q$, p y q primos entre si, el valor de la función es $f(x) = 1/q$. Afirmamos que esta función tiene límite cero en cualquier punto, es decir $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ para cualquier $c \in [0, 1]$.

En efecto: Estudiaremos la existencia de tal límite para un número $c \in [0, 1]$ cualquiera dado, usando la vía de las sucesiones.

Si consideramos las sucesiones $\{x_n\}$ de números irracionales del $(0, 1)$, distintos de c que convergen a c, resulta que $\{f(x_n)\}$ es particularmente simple, puesto que es la sucesión constante $\{0\}$ cuyo límite es cero. De esta forma, debido a la unicidad del límite, el único candidato posible para ser el límite de f en c, es cero. Pero para que así suceda, se requiere probar que para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números del intervalo $(0,1)$ diferentes de c que converja a c, verifica que $\{f(x_n)\}$ converge a 0.

La situación más desfavorable que se podría presentar es la de la sucesión $\{x_n\}$ formada por todos términos racionales, ya que los números irracionales del $(0,1)$ no suponen inconveniente alguno en orden a que el valor correspondiente de f es cero. Así pues, consideremos una sucesión $\{x_n\}$ que converge a c de la forma $x_n = p_n/q_n \neq c$. De esta forma, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene la forma

$$\{\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \cdots, \frac{1}{q_n}, \cdots\}$$

Probaremos que estos valores tienden a cero. Para ello, consideramos un $\varepsilon > 0$ dado e intentaremos determinar un número $r \in \mathbb{N}$ para el cual se verifique que

$$|f(x_n) - 0| = \frac{1}{q_n} < \varepsilon \quad \forall\, n > r$$

Dado que ε está fijo y por el hecho que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$, cada q_n no puede repetirse infinitas veces, pues de ser así la sucesión $\{x_n\}$ tendría infinitos números iguales, pero distintos de c. Esto contradiría la convergencia de $\{x_n\}$ a c. Además, como $q_n \in \mathbb{N}$, sólo habrá un número finito de denominadores diferentes que sean menores o iguales que $1/\varepsilon$.

Por todo ello, podemos afirmar que existe un número $r \in \mathbb{N}$ para el cual $0 < q_n < 1/\varepsilon$ para $1 \leq n \leq r$. Luego, tendremos que $q_n > 1/\varepsilon$ para todo $n > r$.

Finalmente, hemos encontrado $r \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_n) - 0| < \varepsilon$ para todo $n > r$. Como además, todo el razonamiento previo se hizo para cualquier número $c \in [0,1]$, concluimos que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ para cualquier $c \in [0,1]$.

Conviene observar que, por ejemplo, el límite de f en $2/3$ es cero, mientras que $f(2/3) = 1/3$.

El ejemplo que terminamos de describir tiene un interés teórico y sirve para reflexionar sobre el significado de la noción de límite. Pero fundamentalmente nos preguntamos, ¿Cómo se encuentra un δ que corresponda a ε en este caso?

6.2. Límites infinitos

Hemos presentado los teoremas de equivalencia de las definiciones de límite finito. De forma análoga los límites infinitos se caracterizan mediante definiciones del mismo tipo que las establecidas para el caso finito. Omitiremos las corresponientes demostraciones de los siguientes teoremas de equivalencia, ya que son muy similares a las demostraciones anteriores. Presentamos a continuación sendas definiciones de límite ∞:

Definición 6.8. *Sea f una función definida al menos en algún conjunto de la forma $(c-p, c) \cup (c, c+p)$, con $c \in \mathbb{R}$ y $p > 0$. Diremos que ∞ es el límite $\varepsilon - \delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a c si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (en general función de ε), tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x)| > \varepsilon$.*

Definición 6.9. *Sea f una función y sea c un número real. Sea $f(x)$ definida al menos en algún conjunto de la forma $(c-p,c)\cup(c,c+p)$, con $p>0$. Diremos que ∞ es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c si y sólo si para toda sucesión de números del dominio de f, distintos de c, cuyo límite es c, se transforma mediante f en una sucesión que tiene límite ∞.*

El siguiente resultado establece la equivalencia entre las dos definiciones dadas. Se sugiere, al lector interesado, intentar realizar las demostraciones correspondientes, siguiendo los razonamientos utilizados en la prueba del teorema 6.3 y teniendo en cuenta las definiciones 6.8 y 6.9.

Teorema 6.10. *∞ es el límite $\varepsilon-\delta$ de $f(x)$ cuando x tiende a c si y sólo si ∞ es el límite por sucesiones de $f(x)$ cuando x tiende a c.*

Alentamos al lector a adaptar las definiciones anteriores para los casos de límite ∞ cuando la variable independiente x tiende a $+\infty$ (o $-\infty$), y a enunciar y demostrar la equivalencia de tales definiciones.

Capítulo 7

Procesamiento Estadístico de la Información Obtenida en las dos Instancias de Evaluación

7.1. Introducción

Recordemos que el objetivo principal de este trabajo es el de evaluar el grado de asimilación del concepto de límite funcional, cuando éste es presentado mediante dos definiciones basadas en enfoques diferentes, tal como puede verse en el capítulo 2.

Teniendo en cuenta la experiencia adquirida en varios años de enseñanza de las nociones de límite con el enfoque clásico y el estudio que hemos realizado de estas nociones a partir de sucesiones de números reales, formulamos las siguientes conjeturas:

Hipótesis I: El grado de aprendizaje y manipulación de la definición de límite funcional real de una variable real, que los estudiantes de primer año de 2005 de la carrera Profesorado de Matemática de Concordia logran, es mayor cuando dicho concepto se les enseñe mediante el enfoque discreto (es decir, por medio de sucesiones de números reales), que cuando ellos internalizan la definición de límite funcional a partir del enfoque clásico.

Hipótesis II: Los estudiantes de primer año de 2005 de la carrera Profesorado de Matemática de Concordia, alcanzan un grado de aprendizaje y manejo de las propiedades y corolarios de las nociones de límite funcional real a partir de sucesiones de números reales, que es igual al grado de asimilación que éstos logran de dichas propiedades cuando la transposición didáctica de ellos se efectúa por medio del enfoque continuo $\varepsilon - \delta$.

Para analizarlas, realizamos un estudio estadístico de test de hipótesis. Para ello, se llevó a cabo la experiencia descripta en el capítulo 2, con alumnos de primer año de la carrera Profesorado en Matemática, durante el cursado del primer cuatrimestre de la asignatura Análisis Matemático I. Los treinta y dos alumnos fueron separados en dos grupos homogéneos, a los que se les impartió la teoría del límite funcional, basados en cada una de las definiciones presentadas.

Consideramos a cada grupo como dos muestras independientes de tamaño n_1 y n_2, extraídas respectivamente de las poblaciones 1 y 2 en este caso coincidentes: primer año de la carrera de Profesorado de Matemática. Estos dos grupos muestrales son independientes puesto que los individuos del Grupo 1, llamado "Sucesiones"no estaban en ninguna forma apareados o equiparados con miembros correspondientes en el Grupo 2, denominado "$\varepsilon - \delta$". Se supone que enseñamos en cada una de dichas poblaciones el tema propuesto con el enfoque correspondiente.

Como fuera descripto en el capítulo 2, evaluamos, en dos oportunidades, el nivel de aprendizaje y manipulación tanto de la definición correspondiente como de las propiedades de los límites funcionales. Estos resultados fueron empleados para realizar el análisis inferencial que nos permitió, junto con el seguimiento continuo de los alumnos, arribar a las conclusiones que se exponen al final del trabajo.

7.2. Análisis de la Hipótesis I

Para estudiar la Hipótesis I estadísticamente, nos basamos en los resultados de la primera evaluación, común a ambos grupos, si bien cada uno empleó para la resolución de los ejercicios, la definición del límite funcional correspondiente. Estos resultados, correspondientes a cada grupo, constituyen las 2 muestras independientes que se utilizan para el análisis.

Exploramos las dos muestras utilizando los métodos descriptivos. En cada una de ellas, investigamos el centro, la variación, la distribución y los datos distantes. Trabajamos con los softwares *Statgraphics Statistical System, version 5.1* y *Statdisk 9.5* y generamos los siguientes resultados:

- Estadísticos descriptivos para ambos conjuntos de datos, incluyendo el tamaño muestral (n), la media aritmética muestral ($\overline{x}$) y la desviación estándar muestral (S).
- Gráficos de caja de ambos conjuntos de datos, hechos en la misma escala para que puedan compararse. El principal valor de éstos se encontraba en la impresión visual que proporcionaban como instrumento para explicar los resultados de una prueba de hipótesis, así como la verificación de las suposiciones.
- Histogramas de ambos conjuntos de datos de modo que las distribuciones puedan compararse.
- Identificación de cualquier dato distante.

Presentamos a continuación los resultados obtenidos en la primera evaluación. Recordamos que en ésta sólo evaluamos el grado de asimilación y manipulación de la definición trabajada, cuestión fundamental que fue estudiada estadísticamente y cuyo resultado, junto al seguimiento continuo realizado a los estudiantes de cada grupo durante el desarrollo de la experiencia, nos permitió determinar el grado de cumplimiento real de la Hipótesis I planteada al comienzo del trabajo.

Grupo 1, (Sucesiones): 7 – 9 – 10 – 9 – 9 – 8 – 9 – 10 – 10 – 7 – 7 – 8 – 8 – 10 – 6

	Grupo 1: (Sucesiones)	**Grupo 2, ($\varepsilon - \delta$)**
Variable:	7 9 10 9 9 8 9 10 10 7 7 8 8 10 6	6 6 5 5 5 6 5 6 5 7 7 7 4 4
Sample size	15	14
Average	8.46667	5.57143
Median	9	5.5
Mode	9	5
Geometric mean	8.36846	5.48355
Variance	1.69524	1.03297
Standard deviation	1.30201	1.01635
Standard error	0.336178	0.271631
Minimun	6	4
Maximun	10	7
Range	4	3
Lower quartile	7	5
Upper quartile	10	6
Interquartile range	3	1
Skewness	-0.364106	0.0314015
Standarized skewness	-0.575702	0.0479666
Kurtosis	-0.959523	-0.932508
Standarized kurtosis	-0.75857	-0.712214
Coeff. of variation	15.3781 %	18.2422 %
Sum	127	78

Cuadro 7.1: Salida de Statgraphics

Grupo 2, ($\varepsilon - \delta$): $6 - 6 - 5 - 5 - 5 - 6 - 5 - 6 - 5 - 7 - 7 - 7 - 4 - 4$

El procesamiento informático para este primer conjunto de datos asociados a la evaluación de la Hipótesis I, arrojó los resultados que presentamos en el cuadro 7.1.

En las Figuras 7.1 y 7.2 se muestran los histogramas correspondientes a cada grupo. En la Figura 7.3 se presentan los diagramas de caja respectivamente.

Con la intención de explorar los dos conjuntos de datos, vemos que las medias muestrales son diferentes. Los histogramas sugieren que las poblaciones tienen distribuciones que son aproximadamente normales, y los gráficos de caja parecen mostrar una diferencia con respecto a la media.

En efecto, los tres valores que divididen a los datos muestrales, acomodados en orden creciente, en cuatro grupos con aproximadamente el 25 % de los puntajes de cada uno de ellos son los denominados primer, segundo y tercer cuartil y que se exhiben en el cuadro 7.2.

En la primera muestra (grupo "Sucesiones"), el valor mínimo es 6 y el máximo 10. Además el valor que separa el 50 % inferior de los valores ordenados del 50 % superior, es $Q_2 = 9$. En consecuencia el 50 % de las calificaciones de esta muestra están entre 6 y 9 puntos. Observamos que en la muestra "Sucesiones"el valor Q_3 coincide con el valor máximo de dicha muestra, por lo tanto el 75 % de los alumnos del Grupo 1 obtuvo,

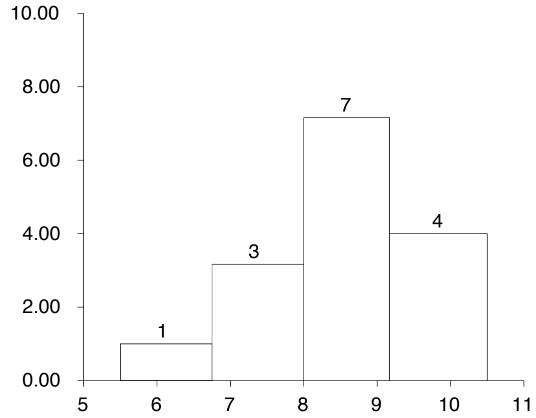

Figura 7.1: Histograma correspondiente el Grupo 1: Sucesiones.

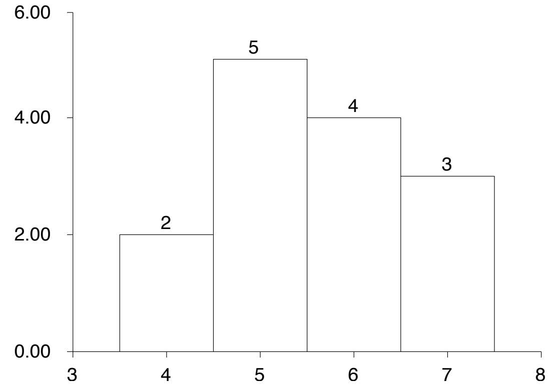

Figura 7.2: Histograma correspondiente el Grupo 2: $\varepsilon - \delta$.

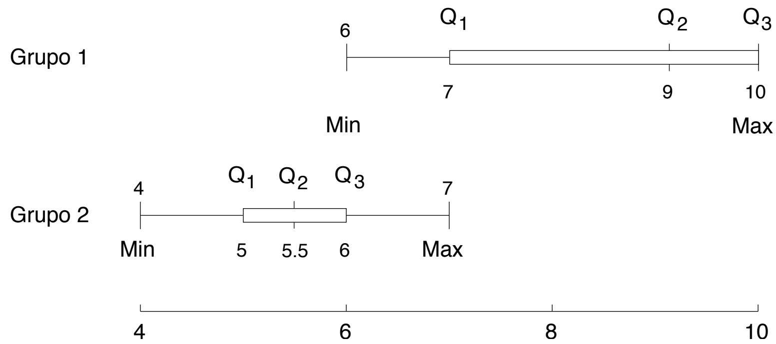

Figura 7.3: Diagrama de caja correspondiente a ambos grupos.

en la primera evaluación, una calificación entre 7 y 10 puntos. Sólo el 25 % restante de los estudiantes de esta muestra fueron calificados con un puntaje entre 6 y 7 puntos. Esto nos dice que los estudiantes del grupo "Sucesiones" lograron, en general, muy buen nivel de aprendizaje y manejo de la definición de límite funcional real de una variable real.

En la segunda muestra, es decir "$\varepsilon - \delta$", el mínimo de los datos es 4 y el máximo 7; y luego de ordenar en forma creciente las puntuaciones de dicha muestra, resulta que el 50 % de los datos es menor o igual que $Q_2 = 5{,}5$ y mayor o igual que 4; el otro 50 % de los datos es mayor o igual que este último valor Q_2 y menor o igual que 7. Observamos que el 50 % central de la información ordenada, corresponde a una puntuación entre 5 y 6 puntos. Un 25 % del resto de los estudiantes del Grupo 2 fue evaluado con notas entre 6 y 7 puntos y el otro 25 % obtuvo una calificación en dicha prueba entre 4 y 5 puntos.

	Q_1	Q_2	Q_3
Grupo 1 (Sucesiones)	7	9	10
Grupo 2 ($\varepsilon - \delta$)	5	5.5	6

Cuadro 7.2: Primer, segundo y tercer cuartil

Esto manifiesta que los estudiantes de este grupo, en general, alcanzaron un grado de comprensión y manejo de la definición del límite funcional real de una variable real, que fue inferior al logrado en este mismo tema por los estudiantes del grupo “Sucesiones”.

Para determinar si hay valores muestrales que están muy lejos de la mayoría de los datos, calculamos en cada una de las muestras ordenadas la diferencia entre Q_3 y Q_1, es decir, la longitud del intervalo al que pertenece el 50 % central de la información ordenada de cada muestra. Esta diferencia es de 3 puntos y de 1 punto para el Grupo 1 y el Grupo 2 de datos, respectivamente. Observamos que en cada muestra todos los datos mayores que Q_3 y menores que Q_1, se hallan de estos dos últimos, a una distancia menor que $1,5(Q_3 - Q_1)$. Como consecuencia de ésto, resulta que no hay, en sendos conjuntos de calificaciones, valores muestrales ubicados muy lejos de la mayoría de los datos; lo que nos permite afirmar que no hay datos distantes en las dos muestras. Esto nos dice, desde el punto de vista de la experiencia realizada, que en sendos grupos no hubo evaluaciones aplazadas. Observamos que los estudiantes de los dos grupos lograron calificaciones mayores o iguales a cuatro, lo cual significa que los dos grupos de alumnos considerados, en su totalidad han, por lo menos, comprendido las cuestiones básicas y elementales de la definición estudiada. Además esta ausencia de datos distantes en la segunda muestra, manifiesta que ningún estudiante del grupo “$\varepsilon-\delta$”logró una calificación de 8, 9 o 10 puntos, lo cual está comprobado porque la máxima calificación alcanzada por algunos estudiantes de este grupo fue de 7 puntos.

En síntesis, el análisis exploratorio anterior manifestó que el grupo “Sucesiones”tuvo menos dificultades, en cuanto al aprendizaje de la definición de límite funcional real de una variable real, que los alumnos del grupo “$\varepsilon - \delta$”en la internalización de dicha definición.

Posteriormente, estudiamos el grado de asimetría de cada una de las muestras, y aplicamos a cada una de ellas un test de normalidad para investigar si las mismas procedían o no de poblaciones normales. Esto, después, nos permitió decidir, junto con otras características de la muestra, el tipo de test de hipótesis que correspondía aplicar para el estudio de la Hipótesis I.

Se puede ver que en la caja del Grupo 1 hay un cierto sesgo, lo cual motiva a un estudio más exhaustivo para determinar si se trata o no de poblaciones con distribuciones normales.

En efecto, interesa particularmente los coeficientes de asimetría y Curtosis estandarizados, que pueden utilizarse para determinar si la muestra procede de una distribución normal. Los valores de los estadísticos fuera del rango -2 a $+2$ indican alejamiento significativo de la normalidad que tendería a invalidar cualquier test estadístico con respecto a la desviación normal. Estos estadísticos, para este caso particular que estamos estudiando se presentan en el cuadro 7.3.

En este caso, el valor del coeficiente de asimetría estandarizado está dentro del rango esperado para los datos de una distribución normal. Análogamente ocurre con el coeficiente de curtosis estandarizado. No obstante ello, realizamos para cada muestra el test de Kolmogorov-Smirnov para verificar si cada una de las muestras proviene de una distribución normal. Estos contrastes obtuvieron los siguientes resultados, los cuales se presentan

	Coef Asimetría Stand	Coef Curtosis Stand
Muestra 1	-0.576	-0.759
Muestra 2	0.048	-0.712

Cuadro 7.3: Coeficientes de asimetría y Curtosis

	D	Valor p
Muestra 1	0.192293	0.135326
Muestra 2	0.213024	0.0711533

Cuadro 7.4: Resultados del test de Kolmogorov-Smirnov

en el cuadro 7.4

Luego, concluimos, con un nivel de confianza del 95 %, que la muestra 1 "Sucesiones"tiene procedencia de una distribución normal, y la muestra 2 "$\varepsilon - \delta$"también proviene de una distribución normal con el mismo nivel de confiabilidad.

A los efectos de estudiar formalmente la Hipótesis I tuvimos en cuenta entonces que, con un nivel de confiabilidad del 95 %, las poblaciones de las que proceden sendas muestras son normales, las variaciones poblacionales desconocidas y los tamaños de las muestras son pequeños, es decir, menores o iguales a 30. Suponiendo además que las varianzas poblacionales son iguales, aplicamos el procedimiento de prueba que compara las medias de las dos distribuciones de probabilidad de los datos poblacionales, denominado "test t para la diferencia entre dos medias poblacionales".

Para ello, debido a que el test mencionado requiere la igualdad de las varianzas poblacionales, estudiamos previamente este hecho. Concretamente probamos la supocisión sobre la igualdad de las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 correspondientes a las poblaciones 1 y 2 respectivamente. Probamos la hipótesis

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

(las poblaciones tenían igual varianza) contra la alternativa

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

(las poblaciones tenían varianza distinta).

En efecto: Recordemos los siguientes datos muestrales, los cuales se presentan en el cuadro 7.5 donde S_1^2 y S_2^2 son las variancias muestrales obtenidas de las dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de las poblaciones 1 y 2 respectivamente.

Si las dos poblaciones se distribuyeron normalmente y la hipótesis nula era supuestamente verdadera, entonces el estadístico de prueba correspondiente es

$$F = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} = \frac{S_1^2}{S_1^2},$$

	n	$\overline{x}$	S^2
Muestra 1	15	8.467	1.695
Muestra 2	14	5.571	1.033

Cuadro 7.5: Datos muestrales

F	Valor p
1.64113	0.37944

Cuadro 7.6: Valores arrojados por Statgraphics

el cual tiene una distribución F con $(n_1 - 1)$ y $(n_2 - 1)$ grados de libertad para el numerador y el denominador respectivamente. Consideramos nivel de significación de la prueba $\alpha = 5\,\%$. La salida que arrojó el software Statgraphics se presenta en el cuadro 7.6.

Este resultado nos permitió concluir que no había razones suficientes para suponer que las varianzas de ambas poblaciones fueran distintas.

Deseamos probar la hipótesis que dice que las distribuciones de probabilidad de las dos poblaciones que estamos estudiando tienen el mismo valor medio, contra la alternativa que afirma que estos valores medios son distintos, con un nivel de significación de la prueba de $5\,\%$.

Planteamos la hipótesis nula H_0, frente a la alternativa H_1 de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{o} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

(El grado de asimilación y manipulación, que logran los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática, de la definición del límite funcional real de una variable real cuando esta definición se enseña mediante sucesiones de números reales, es igual al grado de aprendizaje que estos estudiantes alcanzan de dicha definición, cuando se realiza la transposición de ella con el enfoque clásico).

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{o} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

(Con el enfoque discreto en la enseñanza de la definición del límite funcional de variable real, los alumnos de primer año de la carrera Profesorado de Matemática de la ciudad de Concordia, logran un grado de aprendizaje de dicha definición diferente al grado que ellos alcanzan cuando internalizan la definición del límite funcional con el enfoque continuo).

Recordemos los datos muestrales que se presentan en el cuadro 7.5. A partir de ellos, el estadístico de contraste, bajo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, sigue una distribución t de Student con $(n_1 + n_2 - 2)$ grados de libertad:

$$T = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t_{(n_1+n_2-2)}$$

t	Valor p
6.64091	3.98309E-07

Cuadro 7.7: Valores arrojados por Statgraphics

El nivel de significación que utilizamos en esta prueba es de 5 %. El software Statgraphics arrojó los resultados que se presentan en el cuadro 7.7.

Este primer resultado manifiesta que existe suficiente evidencia para sustentar la aseveración que hay una diferencia entre las medias poblacionales. Esto, referido a nuestra experiencia significa que existe una diferencia en el grado de asimilación y manipulación de la definición de límite funcional, cuando ésta es enseñada con un enfoque discreto frente a otro continuo.

Por otro lado, el intervalo de confianza para la diferencia entre la media de la distribución de probabilidad de la población correspondiente a la muestra 1 (Sucesiones), y la media de la distribución correspondiente a la muestra 2 ($\varepsilon - \delta$), es

$$\mu_1 - \mu_2 \in [2{,}0007; 3{,}78978]$$

con un nivel de confianza del 95 %. En consecuencia podemos afirmar, que $\mu_1 - \mu_2 > 0$, o sea $\mu_1 > \mu_2$ con el 95 % de confiabilidad. Estos resultados junto con el análisis exploratorio realizado a sendos conjuntos de datos, nos permitió decir que:

"Con el enfoque discreto en la enseñanza de la definición de límite funcional real, los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado en Matemática de la cuidad de Concordia, logran un nivel mayor de comprensión y manipulación del concepto que cuando estos alumnos internalizan la definición del límite funcional con el enfoque continuo".

Cabe señalar que los resultados obtenidos a partir de este último test de hipótesis y del intervalo de confianza, nos permitieron determinar desde el punto de vista cuantitativo el grado de cumplimiento de la "Hipótesis I"planteada al principio.

7.3. Análisis de la Hipótesis II

En esta sección analizamos, interpretamos y procesamos los resultados obtenidos de la segunda evaluación. Recordamos que en esta instancia medimos el nivel de comprensión y manipulación de las propiedades y corolarios de las nociones del límite funcional real de variable real, presentadas estas propiedades con un enfoque distinto en cada grupo. Con los datos muestrales estudiamos estadísticamente el grado de cumplimiento de la Hipótesis II.

Presentamos las calificaciones correspondientes a cada grupo, las que son consideradas como las dos muestras independientes sobre las que estará basado el siguiente análisis:

Grupo 1, (Sucesiones): 10 − 9 − 9 − 8 − 9 − 8 − 8 − 8 − 7 − 7 − 6 − 6 − 5 − 5 − 5 − 6

	Grupo 1: (Sucesiones)	**Grupo 2, ($\varepsilon - \delta$)**
Variable:	10 9 9 9 8 9 8 8 8 7 7 6 6 5 5 5 6	9 9 8 8 8 6 7 7 6 6 6 5 4 4
Sample size	16	14
Average	7.25	6.64286
Median	7.5	6.5
Mode	8	6
Geometric mean	7.07604	6.4392
Variance	2.6	2.70879
Standard deviation	1.61245	1.64584
Standard error	0.403113	0.439869
Minimun	5	4
Maximun	10	9
Range	5	5
Lower quartile	6	6
Upper quartile	8.5	8
Interquartile range	2.5	2
Skewness	-0.0272604	-0.173774
Standarized skewness	-0.044516	-0.265444
Kurtosis	-1.19123	-0.880681
Standarized kurtosis	-0.972639	-0.672631
Coeff. of variation	22.2407 %	24.7761 %
Sum	116	93

Cuadro 7.8: Salida de Statgraphics

Grupo 2, ($\varepsilon - \delta$): $9 - 9 - 8 - 8 - 8 - 6 - 7 - 7 - 6 - 6 - 6 - 5 - 4 - 4$

Estudiamos estos datos en forma análoga a la realizada para la primera evaluación. En primer lugar exploramos las dos muestras utilizando los métodos descriptivos. En cada una de las dos muestras, investigamos el centro, la variación y la distribución. Generamos con el software ya mencionado, los siguientes resultados: estadísticos descriptivos para ambos conjuntos de datos, gráficos de caja e histogramas que se presentan en las figuras 7.4, 7.5 y 7.6 correspondientes a las muestras 1 y 2 respectivamente.

Con la intención de analizar los dos conjuntos de datos, vemos que las medias muestrales tienen una ligera diferencia. Los histogramas sugieren que las poblaciones tienen distribuciones que son aproximadamente normales, y las gráficas de cajas parecen mostrar ausencia de marcadas diferencias.

En efecto, los tres valores que dividen a los datos muestrales acomodados en orden creciente, en cuatro grupos con el 25 % de los puntajes en cada uno de ellos son los denominados primer, segundo y tercer cuartil. Sus valores pueden observarse en el cuadro 7.9.

En la primera muestra, es decir el grupo “Sucesiones”, el valor mínimo es 5 puntos, y el máximo 10 puntos. Además el valor que separa el 50 % inferior de los valores ordenados del 50 % superior, es $Q_2 = 7{,}5$. En consecuencia, el 50 % de las calificaciones de este grupo

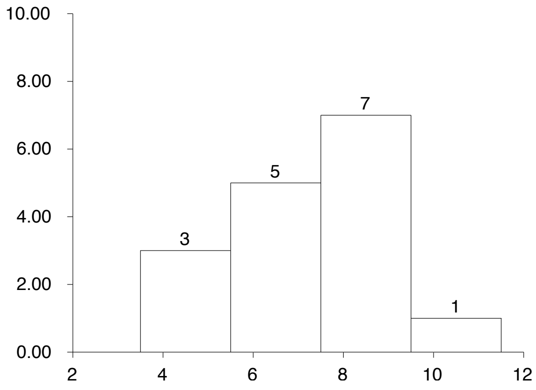

Figura 7.4: Histograma correspondiente al Grupo 1: Sucesiones.

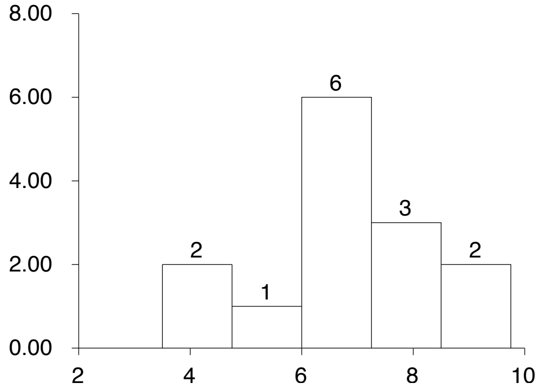

Figura 7.5: Histograma correspondiente al Grupo 2: $\varepsilon - \delta$.

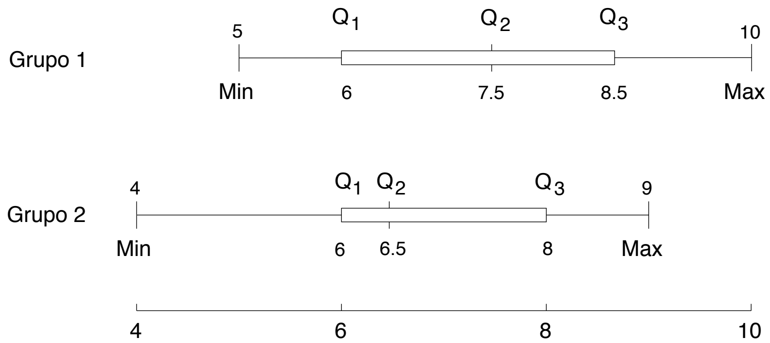

Figura 7.6: Diagrama de caja correspondiente a ambos grupos.

estuvieron entre 5 y 7,5 puntos, y el otro 50 % entre 7,5 y 10 puntos. Además el gráfico de caja nos indica que el 75 % de los estudiantes del Grupo 1 (Sucesiones) alcanzó entre 6 y 10 puntos, y el 25 % restante entre 5 y 6 puntos. Esto nos manifiesta que la muestra "Sucesiones"logró, en general, muy buen nivel de aprendizaje de las propiedades y corolarios de las nociones del límite funcional real de una variable real.

En la segunda muestra, es decir "$\varepsilon - \delta$", el mínimo de los datos es 4 puntos y el máximo 9 puntos. Luego de ordenar en forma creciente las puntuaciones de dicha muestra, resulta que el 50 % de los datos fue menor o igual que $Q_2 = 6{,}5$ y mayor o igual que 4. El otro 50 % de la información es mayor o igual que este último valor Q_2 y menor o igual que 9. Observamos que el 75 % de las calificaciones obtenidas por los estudiantes de la muestra 2 "$\varepsilon - \delta$"en esta segunda evaluación, fue mayor o igual que 6 puntos y menor o igual que 9 puntos. Sólo el 25 % restante de estudiantes obtuvo entre 4 y 6 puntos. Esto manifiesta que el Grupo 2, en general, alcanzó buen nivel de aprendizaje y manipulación de las

	Q_1	Q_2	Q_3
Grupo 1 (Sucesiones)	6	7.5	8.5
Grupo 2 ($\varepsilon - \delta$)	6	6.5	8

Cuadro 7.9: Primer, segundo y tercer cuartil

	Coef Asimetría Stand	Coef Curtosis Stand
Muestra 1	-0.045	-0.973
Muestra 2	-0.265	-0.673

Cuadro 7.10: Coeficientes de asimetría y Curtosis

	D	Valor p
Muestra 1	0.179083	0.235689
Muestra 2	0.152342	0.606516

Cuadro 7.11: Resultados del test de Kolmogorov-Smirnov

propiedades y corolarios de las nociones estudiadas.

Este análisis exploratorio, efectuado a sendas muestras de la segunda evaluación realizada a los alumnos de primer año de la carrera Profesorado en Matemática de la ciudad de Concordia, nos reveló que en general, no hubo entre los estudiantes de los dos grupos, diferencias notables en cuanto al grado de comprensión y manejo de las propiedades de las nociones de límite funcional real, cuando estas propiedades fueron enseñadas mediante el enfoque discreto en el grupo "Sucesiones", y con la metodología clásica en el grupo "$\varepsilon - \delta$".

Posteriormente, estudiamos el grado de asimetría de cada una de las muestras, y aplicamos a cada una de ellas un test de normalidad para investigar si estas muestras procedían o no de poblaciones normales. Esto, después nos permitió decidir, junto con otras características de la muestra, el tipo de test de hipótesis que correspondía aplicar para el estudio de la Hipótesis II.

En efecto, observamos media, mediana y moda. Podemos decir que no existen diferencias significativas entre ellas, dentro de cada muestra. Analizamos el coeficiente de variación que son, en ambos casos, menores que 0,5, lo cual nos dice que la media de cada grupo representa muy bien a la distribución de valores de la que proviene. Nos interesamos particularmente por los coeficientes de asimetría y curtosis estandarizados, que pueden utilizarse para determinar si la muestra procede de una distribución normal. Los valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a $+2$ indican alejamiento significativo de normalidad. Para este caso que estamos estudiando, los estadísticos se presentan en el cuadro 7.10.

En este caso, el valor del coeficiente de asimetría estandarizado para cada una de las muestras está dentro del rango esperado para los datos de una distribución normal. Lo mismo sucede con el valor del coeficiente de curtosis estandarizado. La impresión que tuvimos luego de este análisis, es que las muestras provienen de poblaciones aproximadamente simétricas, y que no existe razón inmediata para cuestionar la hipótesis de normalidad. Luego, realizamos para cada muestra el contraste Chi-cuadrado y el test de Kolmogorov-Smirnov para verificar si cada una de las muestras provenía de una distribución normal. Estos contrastes se realizaron con el software Statgraphics version 5.1, y los resultados obtenidos se presentan en el cuadro 7.11.

Luego concluimos, con un nivel de confianza de al menos un 95 %, que la muestra 1

	n	$\overline{x}$	S^2
Muestra 1	16	7.250	2.600
Muestra 2	14	6.643	2.709

Cuadro 7.12: Datos muestrales

(Sucesiones) proviene efectivamente de una población que se distribuye en forma normal. Análogamente ocurrió con la muestra 2 ($\varepsilon - \delta$); es decir esta última muestra proviene de una población de datos que, según el test anterior, se distribuyen normalmente con un nivel de confianza de al menos un 95 %.

A continuación estudiamos la Hipótesis II ya planteada. Teniendo en cuenta que, con un nivel de confiabilidad de al menos un 95 %, las poblaciones de las que proceden sendas muestras son normales, las variancias poblacionales son desconocidas y los tamaños de muestras son pequeños y, suponiendo además que las varianzas poblacionales son iguales, aplicamos entonces el procedimiento de prueba que compara las dos medias poblacionales denominado "test t para la diferencia entre dos medias poblacionales", el cual compara las medias de las dos distribuciones de probabilidad de los datos poblacionales.

Primero, probamos la suposición sobre la igualdad de las variancias σ_1^2 y σ_2^2 correspondientes a las poblaciones 1 y 2 respectivamente y posteriormente realizamos el test para comparar las medias poblacionales.

Para ello debemos probar la hipótesis

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

(las poblaciones tienen igual varianza) contra la alternativa

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

(las poblaciones tienen varianzas distintas).

De los datos muestrales que se presentan en el cuadro 7.12

S_1^2 y S_2^2 son las variancias muestrales obtenidas de las dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 tomadas de las poblaciones 1 y 2 respectivamente.

Si las dos poblaciones se distribuyen normalmente y la hipótesis nula fuese supuestamente verdadera, entonces el estadístico de prueba sería

$$F = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} = \frac{S_1^2}{S_1^2}$$

el cual tiene una distribución F con (n_1-1) y (n_2-1) grados de libertad para el numerador y el denominador respectivamente. Consideramos un 5 % de nivel de significación de la prueba. El software utilizado arrojó los resultados que se presentan en el cuadro 7.13.

F	Valor p
0.959838	0.929834

Cuadro 7.13: Valores arrojados por Statgraphics

Luego, a partir de estos resultados, concluimos que no hay razones suficientes para suponer que las varianzas de ambas poblaciones son distintas.

Seguidamente procedimos con la prueba de hipótesis formal para comparar las dos medias de las distribuciones poblacionales.

Deseamos probar la hipótesis que afirma que las distribuciones de probabilidad de las dos poblaciones en estudio tienen el mismo valor medio, contra la alternativa que asegura que estos valores medios son distintos, con un nivel de significación de la prueba del 5 %. Supusimos, por las pruebas realizadas anteriormente, que las dos poblaciones están normalmente distribuidas con igual varianza.

Planteamos la hipótesis nula H_0, frente a la alternativa H_1 de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{o} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

(El grado de asimilación y manipulación, que logran los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática, de las propiedades y corolarios del concepto de límite funcional real cuando estos se enseñan mediante sucesiones de números reales, es igual al grado de aprendizaje de dichas propiedades cuando se realiza la transposición de ellas con el enfoque clásico).

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{o} \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

(Con el enfoque discreto en la enseñanza de las propiedades y corolarios de la noción de límite funcional, los alumnos de primer año de la carrera Profesorado de Matemática de la ciudad de Concordia, logran un grado de aprendizaje diferente al grado que ellos alcanzan cuando internalizan estos resultados con el enfoque continuo).

Los valores obtenidos a partir de las dos muestras se presentaron en el cuadro 7.12. El estadístico de contraste, bajo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, sigue una distribución t de Student con $(n_1 + n_2 - 2)$ grados de libertad:

$$T = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t_{(n_1+n_2-2)}$$

El nivel de significación que utilizamos en esta prueba fue del 5 %. Concretamente, el estadístico de la prueba correspondiente a estas muestras tiene una distribución t de Student con $(16 + 14 - 2) = 28$ grados de libertad. Los puntos críticos sobre el eje T, entrando a la tabla con área 0,025 y 28 grados de libertad, son $T_1 = 2{,}048$ y $T_2 = -2{,}048$. Y sus transformados, sobre el eje $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$, son:

$$T_i\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + 0 = c_i \quad i = 1, 2$$

t	Valor p
1.01904	0.316911

Cuadro 7.14: Valores arrojados por Statgraphics

Reemplazando los valores correspondientes, se obtuvo que $c_1 = 1{,}22037$ y $c_2 = -1{,}22037$.

En consecuencia, la región crítica está formada por los valores de $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ mayores que 1,22037 o menores que $-1{,}22037$. Dado que $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)_{obs} = 7{,}250 - 6{,}643 = 0{,}607$ puntos, no es posible rechazar la hipótesis nula. Esto es, con un nivel de significación de 0,05, no tenemos evidencia fuerte que permita concluir que el grado de aprendizaje de las propiedades y corolarios de las nociones de límite por medio de sucesiones de números reales, es diferente al grado de asimilación de dichas propiedades cuando éstas son enseñadas por medio del enfoque clásico $\varepsilon - \delta$. Luego, concluimos que, con un nivel de significación del 5 % los estudiantes de primer año de la carrera Profesorado de Matemática de la ciudad de Concordia, logran un grado de aprendizaje y manejo de las propiedades y corolarios de las nociones del límite funcional real de variable real por medio de sucesiones reales, que es igual al grado de asimilación que estos estudiantes alcanzan de dichas propiedades cuando la transposición didáctica de ellas se efectuó por medio del enfoque clásico. Este resultado, obtenido a partir de la realización de la prueba t de hipótesis para medir la diferencia entre las medias poblacionales, nos permitió evaluar, desde el punto de vista cuantitativo, el grado de cumplimiento de la Hipótesis II propuesta al comienzo de esta experiencia.

Simultáneamente al análisis antes expuesto, estudiamos las dos muestras mediante el uso de la herramienta informática, con lo que corroboramos los resultados antes obtenidos.

Presentamos, en primer lugar, el intervalo de confianza del cociente de las varianzas σ_1^2 y σ_2^2, con un nivel de confiabilidad del 95 %.

$$\text{Cociente de Varianzas } (\sigma_1^2/\sigma_2^2)\text{: } [0{,}3144; 2{,}8074]$$

Dado que este intervalo incluye al valor uno, la hipótesis de varianzas iguales, hecha para la prueba t, quedó justificada.

En segundo lugar presentamos el intervalo de confianza para la diferencia entre las medias bajo la hipótesis, recién probada, de varianzas iguales, con un nivel de confiabilidad del 95 %.

$$\text{Diferencia entre Medias } (\mu_1 - \mu_2)\text{: } [-0{,}6136; 1{,}8279]$$

Finalmente exhibimos los resultados de la prueba de hipótesis para la diferencia entre medias, con un nivel de significación de la prueba del 5 %, cuyos valores obtenidos pueden observarse en el cuadro 7.14.

Puesto que la prueba de hipótesis y el intervalo de confianza para la diferencia entre medias utilizaron la misma distribución y el mismo error estándar, resultaron equivalentes en el sentido de que permitieron obtener como resultado las mismas conclusiones. En consecuencia, la hipótesis nula de $\mu_1 = \mu_2$ (o $\mu_1 - \mu_2 = 0$) se probó determinando que el intervalo de confianza incluye al cero. En efecto, el procedimiento de prueba de hipótesis indicó que no fue posible rechazar la hipótesis que decía:

"El grado de asimilación y manipulación de las propiedades y corolarios de las nociones del límite funcional real de una variable real cuando éstas son presentadas didácticamente mediante sucesiones de números reales, es igual al nivel de aprendizaje que logran los alumnos cuando dichas propiedades son transpuestas didácticamente por medio del enfoque continuo $\varepsilon - \delta$".

Esta conclusión estaba ratificada por el intervalo de confianza para la diferencia entre medias con varianzas iguales, presentado anteriormente, ya que teníamos una confianza del 95 % que el intervalo de $-0{,}61$ a $1{,}83$ realmente contenía el valor verdadero de $\mu_1 - \mu_2$. En este caso observamos que el cero pertenece a dicho intervalo, con un 95 % de confiabilidad, lo que prueba el resultado del test de hipótesis.

Capítulo 8

Conclusiones

Los resultados obtenidos a partir del análisis y procesamiento estadístico de las evaluaciones de cada grupo, y del seguimiento a los estudiantes durante el transcurso de la experiencia, nos permitieron obtener las conclusiones que se presentan a continuación.

Es evidente que para desarrollar el tema *límite funcional real* con el enfoque discreto, fue necesario que los estudiantes asimilaran previamente las definiciones y las propiedades fundamentales de sucesiones numéricas. En caso contrario no hubiese sido posible lograr el aprendizaje y la manipulación de las nociones de límite bajo ese enfoque, tanto de la definición como de sus propiedades y corolarios.

No podemos decir que un enfoque metodológico fue mejor que otro. Pero, en un punto fundamental que fue el trabajo con la definición del límite funcional, hubo diferencias. Los dos grupos lograron comprender el significado de lo que representa la existencia del límite funcional real de una variable real. Pero llegado el momento de probar un límite mediante la definición, el grupo $\varepsilon - \delta$ tuvo, en general, inconvenientes en el razonamiento lógico formal que permitía hallar δ en función del ε dado.

Se pudo observar, durante el desarrollo de las clases y también en la primera evaluación, que los estudiantes del grupo $\varepsilon - \delta$ razonaban incorrectamente cuando usaban la implicación lógica. Esto ocurrió fundamentalmente en el cálculo del valor $\delta > 0$ que, en general, dependía de ε fijado. También se pudo notar, que este grupo de alumnos no llegó a asimilar el hecho que existieran varias condiciones o restricciones que se debían cumplir en forma simultánea, las cuales permitían encontrar el valor δ que servía para la demostración posterior, es decir un valor de δ que fuese suficiente para la prueba del límite propuesto. En consecuencia podemos decir que la tarea que supone fijar un $\varepsilon > 0$ y hallar un $\delta > 0$, en general función de ese ε, para que después se pueda, a partir de la desigualdad $0 < |x - c| < \delta$ llegar a probar que $|f(x) - l| < \varepsilon$, aún después de finalizado el primer cuatrimestre, no se habría logrado en su totalidad.

En el caso del grupo *Sucesiones* no hubo tal inconveniente, porque para probar límites por la definición, en ejercicios sencillos, se utilizaron en forma frecuente el límite de la función idéntica y de la función constante, además de las propiedades de las sucesiones de números reales. Como dijimos al comienzo, sin la asimilación y manipulación de las definiciones y propiedades referentes a sucesiones de números reales, hubiese sido realmente imposible desarrollar las nociones del límite funcional con ese enfoque. En general, la enseñanza de las nociones de límite funcional real de una variable real con el enfoque discreto, no presentó grandes inconvenientes. Las dificultades mayores se encontraron en la transposición didáctica de sucesiones de números reales, al comienzo de la experiencia. El mayor esfuerzo se realizó en ese momento específicamente cuando se manejaban en forma simultánea dos o más límites de sucesiones numéricas. Concretamente, cuando teníamos una sucesión que era una operación aritmética entre otras dos. Allí debíamos encontrar los valores enteros positivos para los cuales, la definición del límite de cada una de las sucesiones intervinientes se verificaba. Y a partir de ellos, probar finalmente el comportamiento de la sucesión original. Esta dificultad se presentó también en el desarrollo de las propiedades y corolarios mediante el enfoque continuo, precisamente cuando tuvimos que trabajar con varios límites funcionales al mismo tiempo, y debíamos encontrar el dominio de la variable independiente donde todas las condiciones se verificaban a la vez.

El resultado de la segunda evaluación manifestó que, en general, los estudiantes de los dos grupos, no tuvieron dificultad en la manipulación de los enunciados de las propiedades y corolarios de las nociones internalizadas, para validar razonamientos y calcular límites, siempre que estos existan.

Por otro lado, en cuanto a la prueba de la no existencia de límite finito, debemos decir que el enfoque discreto resultó ser directo, porque es suficiente probar que dos sucesiones de valores funcionales no tienen el mismo límite para igual comportamiento de la variable independiente ($x_n \to c$) para asegurar que el límite funcional real no existe. En cambio para probar la no existencia de límite finito por medio del enfoque clásico, debemos demostrar que existe un $\varepsilon > 0$ para el cual, cualquiera sea el $\delta > 0$ que se tome, existe al menos un "x"que pertenece al dominio de la función que verifica $0 < |x - c| < \delta$ y para las cuales $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Como ejemplo de lo dicho anteriormente, presentamos en las notas teóricas de sendos enfoques, la prueba de la no existencia de límite de la función $|x|/x$ para cuando $x \to 0$.

Debemos señalar que, en los ejercicios de mayor complejidad presentados a cada grupo al finalizar el tema, en los que los alumnos debieron mostrar proposiciones si éstas eran verdaderas y presentar contraejemplos si ellas eran falsas, pudimos observar que las dificultades para decidir la verdad o falsedad de una proposición fueron independientes del enfoque con que se realizó la transposición didáctica del tema. La intervención del docente como orientador y guía del razonamiento de los alumnos permitió que estos puedan probar algunas proposiciones y hallar contraejemplos de otras. A través de estos planteamientos se pretende desarrollar en los alumnos capacidades como: inducir, conjeturar, experimentar, analizar, rectificar los propios errores, sintetizar, demostrar, siempre bajo la tutela del profesor.

Para finalizar, decimos que el objetivo de esta experiencia se ha logrado porque hemos podido evaluar el grado de asimilación del concepto del límite de una función real de variable real presentado mediante un enfoque discreto frente a otro continuo. La asimilación de las nociones mediante el enfoque discreto fue rápida. Los alumnos lograron manipular las propiedades de sucesiones númericas, y en consecuencia se sintieron a gusto con el tema tanto en las pruebas de límite por definición como en el cálculo de ellos por medio de sus propiedades y corolarios, pudiendo desarrollar inclusive diferentes resultados de límites infinitos. Por otro lado, la asimilación de las nociones enseñadas mediante el enfoque clásico fue lenta, los estudiantes aún cerca de la finalización del dictado de la materia, sentían que no podían manejar con soltura la definición cuando se trataba de probar límites por medio de ella, precisamente cuando debían hallar un δ que fuera apropiado para la demostración posterior. Debido a que el tiempo empleado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la definición $\varepsilon - \delta$ de límite finito fue más prolongado, dejamos a cargo de los estudiantes del grupo correspondiente, la lectura e internalización de las propiedades de límites infinitos, a partir de la bibliografía recomendada y bajo la dirección de la profesora titular de la asignatura.

En cuanto al manejo de resultados teóricos, es decir la manipulación de enunciados referidos a las propiedades y corolarios de las nociones estudiadas, en general, no hubo diferencias significativas entre los grupos. Por el contrario los dos manifestaron, a través de la resolución de los ejercicios propuestos y resueltos durante la clase y la evaluación, haber logrado la internalización de los contenidos. En consecuencia, con todo lo dicho anteriormente, podemos afirmar que se han cumplido plenamente las dos hipótesis formuladas antes de la realización de esta prueba metodológico didáctica.

Para finalizar, concluimos esta experiencia con el siguiente resultado:

Mediante el enfoque discreto en la enseñanza de las nociones del límite funcional real de una variable real, los estudiantes de primer año de 2005 *de la carrera Profesorado de Matemática de la ciudad de Concordia, logran un grado de asimilación y aprendizaje de esas nociones que es superior al que ellos alcanzan cuando internalizan estos contenidos a partir del enfoque clásico. En efecto, el razonamiento riguroso y formal que estos estudiantes llevan adelante tiene menos dificultades y obstáculos cognitivos cuando las nociones son transpuestas didácticamente con la metodología discreta.*

A partir de ahora seguiremos estudiando nuevas alternativas pedagógicas para la enseñanza y el aprendizaje de tan arduo y profundo concepto, a los efectos de poner al alcance de los estudiantes, que por primera vez tienen contacto con el cálculo, enfoques metodológicos formales y rigurosos y al mismo tiempo con un nivel asequible para la internalización de las nociones, abriendo así la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de este tema.

Capítulo 9

Anexo

9.1. Primera Evaluación

En esta evaluación pretendemos medir sólo el grado de asimilación y manipulación de la definición de límite funcional real de una variable real, donde la misma ha sido enseñada por medio de dos propuestas pedagógicas diferentes.Para ello los estudiantes deben probar los siguientes límites funcionales reales mediante la definición que cada alumno ha estudiado.

1. $\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7$

2. $\lim_{x \to 4} (-x^2 + 5) = -11$

9.2. Segunda Evaluación

En esta evaluación pretendemos medir el grado de asimilación y manipulación de las propiedades y corolarios de la definición de límite funcional real de una variable real, donde las mismas fueron abordadas desde dos enfoques metodológicos distintos. Para tal fin, los estudiantes deben resolver los ejercicios propuestos a continuación.

1. Si me piden que calcule $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3}$, respondo que el límite finito no existe, o dá infinito, puesto que $\lim_{x \to 3} (x - 3) = 0$, y menciono el teorema sobre el límite de un cociente donde el denominador tiende a cero como justificación, comprobar que el límite es en realidad 7 y diga donde me he equivocado.
2. Calcular y justificar aplicando propiedades
   - $\lim_{x \to 0} |x^2 - 4|$
   - $\lim_{x \to 5} \frac{2-x^2}{4x}$
   - $\lim_{x \to 4} \frac{3x}{4-x}$

Bibliografía

[1] C. H. Jr. Edwards, The Historical Development of the Calculus, Springer Vela, 1999.

[2] K. Ito, Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Second Edition, MIT Press, 1998.

[3] J. Mason and D. Pimm, Generic examples: seeing the general in the particular, Educational Studies in Mathematics, 2000, Vol 15, 277-289.

[4] M. Pinto, and D. O. Tall, Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning, Twenty third International Conference for the Phsychology of Mathematic Education, Haifa, Israel, 1999, Vol 2, 41-48.

[5] E. Dubinsky, Reflective Abstraction in Advance Mathematical thinking, Dordrecht, 1999, Vol 95-123.

[6] E. Gray, M. Pinto, D. Pitta and D. Tall, Knowledge Construction and Diverging thinking in Elementary and Advanced Mathematics, Princeton University Press, 1999.

[7] J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf and D. Vidakovic, Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema, Journal of Mathematical Behavior, 2002, Vol 15, 167-192.

[8] O. Faure and R. Macias, Un nuevo enfoque de la noción de límite, Revista de Educación Matemática, UMA, FaMAF, 2004, Vol 13, nro 3.

[9] B. Cornu, Limits, Kluwer Academic Publisher, 1991, Vol 1, pag 153-166.

[10] S. Salas and E. Hille, Calculus, Editorial Reverté, Tercera Edición, 1999.

[11] M. Guzmán and B. Rubio, Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático. Estrategias del análisis matemático, Madrid, Pirámide, 1999-1993, Vol 2.

[12] S. Vázquez, Modesto, Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de textos del bachillerato y curso de orientación universitaria (COU), Universidad de Salamanca, 1940-1995.

Bibliografía Complementaria:

[13] F. Alonso and otros, Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90, Simposio de Valencia, 1987.

[14] W. Blum,M. Niss and Huntley, Modelling, Applications and Applied Problems Solving. Teaching mathematics in a real context, Ellis Horwood, Chichester, UK, 1988.

[15] W. Blum, M. Niss and Huntley, Applied matemáticas problem solving, modelling, applications, and links to other subject-State, trends and issues in mathematics instruction, Educational Studies in Mathematics, 1991, Vol 22, 37-68.

[16] J. P. Davis and R. Hersh, Experiencia Matemática, MEC-Laber, Madrid-Barcelona, 1988.

[17] M. de Guzmán, Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática, Aspectos didácticos de matemáticas I, Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, Vol 31-46.

[18] M. de Guzmán, Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática, Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación, 1989, Vol 19-26.

[19] P. Nesher and J. Kilpatrick, Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, ICMI Study Series, Cambridge University Press, 1990.

[20] L. A. Santaló, La educación matemática hoy, Teide, Barcelona, 1989.

[21] D. M. Bressoud, A radial approach to real analysis, Mathematical Association of America, 2003.

[22] B. P. Demidóvich, 5000 Problemas de Análisis Matemático, Paraninfo, Madrid, 1980.

[23] Larson, Hostetler and Edwards, Cálculo y Geometría Analítica, Sexta Edición, Mc Graw Hill, México, 2001.

[24] L. Leithold, El cálculo con Geometría Analítica, Marla, México, 1990.

[25] M. de Guzmán and B. Rubio, Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático. Estrategias del pensamiento matemático, Pirámide, Madrid, 1995.

[26] M. de Guzmán, Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos, Pirámide, Madrid, 1995.

[27] G. Thomas and Finney Ross, Cálculo con geometría analítica, Addison-Wesley Iberamericana, 1990, Vol 1.

[28] M. Spivak, Calculus. Cálculo Infinitesimal. Segunda Edición., Reverté, Barcelona, 2003.

[29] D. Montgomery and G. Runger, Probabilidad y Estadística, Mc Graw Hill, México 2000.

[30] M. H. DeGroot, Probabilidad y Estadística, Addison-Wesley Iberoamericana, Primera Edición en Español, 1990.

[31] M. S. Triola, Estadística, Pearson, Addison-Wesley, Novena Edición, México, 2004.