ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 04

DERIVADA

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS.

Tangentes y normales

Uno de los problemas más antiguo de la Geometría y por tanto de la Matemática fue el problema de encontrar rectas tangentes y normales a una curva dada. Este problema tiene un sinfín de aplicaciones prácticas:

1. Calcular el ángulo entre dos curvas, planteado por Descartes
2. Construir telescopios, necesidad de Galileo
3. Encontrar máximos y mínimos, problema de Fermat
4. Velocidad y aceleración del movimientos de cuerpos, investigaciones de Galileo y Newton
5. Astronomía, movimiento de los cuerpos celestes , cosmología de Kepler y Newton
6. Seguramente de mucha importancia para artilleros de aquellas épocas y de estas.
7. Física, química, economía, sociología y dentro de muy poco, derecho.

Apolonio de Pergamo (c. 262-190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra *Sobre las secciones cónicas*. Fue él quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que se conocen por esos nombres.

Se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variante de la luna. Tema que perduró hasta Copérnico.

Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre **"el Gran Geómetra"**.

Resuelve los problemas de construir una circunferencia tangente a tres elementos cualesquiera elegidos entre un punto, una recta y una circunferencia (este problema se conoce como el problema de Apolonio);

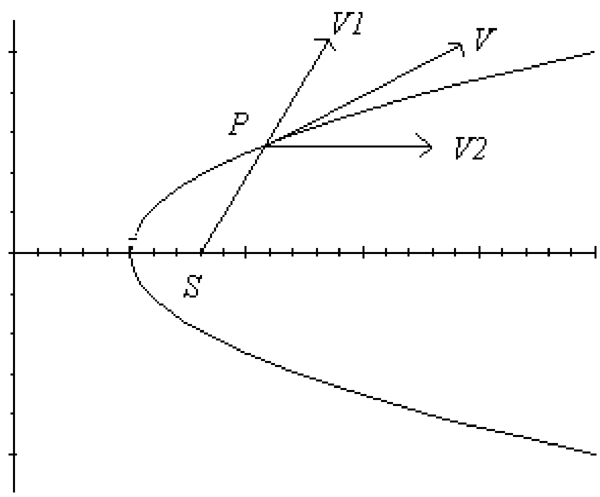
Los métodos que utiliza Apolonio en las Cónicas (uso de rectas como sistemas de referencia) son muy parecidos a los utilizados por Descartes en su Geometría y se considera una anticipación de la Geometría analítica actual.

Hasta la época de Fermat es poco lo que se avanzó después de Apolonio debiendo notarse que gran parte de sus obras fueron recuperadas cuando, de la traducción al árabe, fueron pasadas al latín por ese entonces lenguaje de la ciencia.

Trazar tangentes y normales a circunferencias y cónicas en general en forma gráfica fue resuelto exitosamente, mientras que para curvas cualesquiera el tema es mucho más complicado. Mucho más si se lo quiere hacer analíticamente en lugar de hacerlo con regla y compás.

El aporte de ROBERVAL

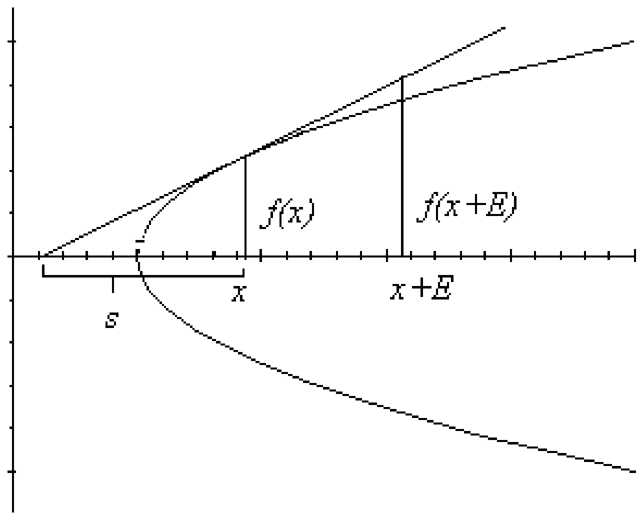
La idea primaria de Roberval es la de movimiento instantáneo. Considera una curva como generada por un punto en movimiento. Si en cada punto de la curva los vectores que generan el movimiento pueden ser determinados, entonces la tangente es simplemente la suma vectorial de esos vectores. Lo logra para parábolas, elipses y tal vez cicloides pero no puede avanzar sobre otras curvas. Queda a un paso de lo que actualmente se conoce como ecuaciones paramétricas de una curva, pero no lo da.



El aporte de FERMAT

El método de Fermat fue desarrollado durante 1630 y, aunque no es riguroso, es tan exacto como el utilizado posteriormente por Newton y Leibniz, **sin utilizar el concepto de límite**. Si embargo, observando en detalle su método se puede decir que Fermat entendía con precisión el método de diferenciación en uso.

Con una misteriosa *E*, Fermat desarrolla un método para hallar tangentes a curvas planas.



Para eso considera el punto [x,f(x)] y traza por él su tangente. Para determinar la pendiente de esa recta considera la denominada (actualmente) subtangente s y el punto x+E y **suponiendo que estando próximo a x** puede considerar, por semejanza de triángulos

$$\frac{s}{s+E} = \frac{f(x)}{f(x+E)}$$

Despejando s se tiene

$$s = \frac{f(x)}{[f(x+E) - f(x)]/E}$$

Luego hace E = 0   Por ejemplo para la ecuación $y = f(x) = x^3$ se tiene

$$s = \frac{f(x)}{[f(x+E)-f(x)]/E} = \frac{x^3}{[(x+E)^3 - x^3]/E} = \frac{x^3}{(3x^2+3xE+E^2)}$$

Haciendo E = 0

$$s = \frac{x^3}{3x^2} = \frac{x}{3}$$

Volviendo a la ecuación original

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} = \frac{f(x)}{s} = \frac{x^3}{\frac{x}{3}} = 3x^2$$

Con este método fue capaz de desarrollar expresiones para polinomios de grado n

El aporte de Isaac BARROW (1630 – 1677)

Teólogo y matemático, desarrolló un método para determinar tangentes con un enfoque que se aproximaba a los métodos del cálculo.

Fue el primero en descubrir que los procesos e derivación e integración podían considerarse como operaciones inversas entre sí.

Después de ordenarse de ministro anglicano, en 1660, se inició como profesor de griego en la Universidad e Cambridge; posteriormente fue profesor de geometría en el Gresham College de Londres. También, en 1660, realizó una magnífica traducción de Los elementos de Euclides.

En Cambridge se dedicó a preparar tres series de conferencias sobre óptica (1669), geometría (1670) y matemáticas (1683). En sus *Lectiones Geometricae* aparecen elementos semejantes a los del cálculo, que fueron del conocimiento de Leibniz y Newton. Este último fue su alumno, y se afirma que la influencia de Barrow fue decisiva en la formación de Newton.

Barrow renunció a su cargo en el Trinity College, en favor de Newton, y se dedicó al estudio de la Divinidad. Por último, en 1675 fue nombrado vicecanciller de la Universidad de Cambridge

Desarrolló un ingenioso método para hallar tangentes para algunas funciones implícitas. Por ejemplo

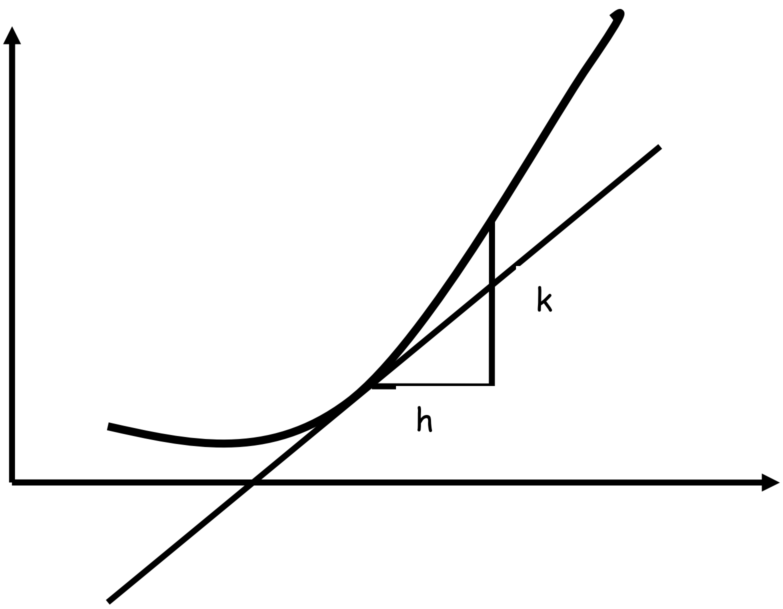
$$f(x, y) = xy - p = 0$$

$$f(x+h, y+k) = (x+h)(y+k) - p$$

$$(xy - p) + xk + yh + hk \approx xk + yh = 0$$

$$\frac{k}{h} = -\frac{y}{x}$$

Donde desprecia el producto hk por ser infinitamente más chico que xh e yk



Los dos métodos descritos se hace uso de "*cantidades infinitesimales* ", pero ¿qué son esas cantidades infinitesimales?

Recuérdese que en el tema límites fueron definidos los infinitésimos, pero en la época de este relato no se los conocía.

Los Monstruos: NEWTON Y LEIBNIZ

Isaac Newton (1642-1727) nació el 25 de Diciembre de 1642 según el calendario Juliano, todavía usado por entonces en Inglaterra, o el 4 de Enero de 1643 con respecto a nuestro calendario Gregoriano. Fue profesor de matemáticas en Cambridge y luego jefe de la casa de la moneda en Londres. Sus principales ideas fueron desarrolladas en 1664-1666 cuando estaba recluido en su casa natal de la aldea de Woolsthorpe, ya que el Trinity College de Cambridge, donde Newton era estudiante, estuvo cerrado por la epidemia de peste. Allí desarrolló sus ideas de la gravitación universal, de la teoría de los colores y sobre la serie del binomio y el cálculo de fluxiones.

De naturaleza tímida era reacio a publicar sus resultados, para así evitar las posibles críticas y controversias de sus contemporáneos. En Octubre de 1666 escribió un tratado sobre fluxiones y en 1669 *De analysi*, un tratado sobre series infinitas que circuló en forma de manuscrito entre los miembros de la Royal Society. Hay otro tratado sobre fluxiones y series infinitas de 1671 y otro sobre la cuadratura de curvas de 1693. Sin embargo estos fueron publicados hasta bien tarde y algunos sólo lo fueron después de su muerte. *De analysi* fue publicado en 1711 y el tratado sobre cuadratura de curvas, *De Quadratura Curvarum* de 1693 apareció como un apéndice de su *Opticks* en 1704. Su obra más famosa, donde expone su teoría de la gravitación universal, los *Principia,* fue publicada en 1686, pero sus argumentos son muy geométricos y sólo dan una idea de sus métodos del cálculo infinitesimal.

De entre el trabajo matemático de Newton, profundo y poderoso, se pueden distinguir algunos temas centrales. Estos son los desarrollos en serie de potencias, en especial el desarrollo del binomio, algoritmos para hallar raíces de ecuaciones y de inversión de series, relación inversa entre diferenciación e integración y el concepto de fluentes y fluxiones como variables que cambian en el tiempo. Newton estuvo muy interesado también en óptica, dinámica, alquimia, cronología de la historia y en la interpretación de las sagradas escrituras. Se dice que escribió más sobre alquimia que sobre física y matemática.

Su libro PHILOSOPIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA, publicado en 1686 es quizá el libro de mayor influencia en el desarrollo de la ciencia moderna. Newton plantea en el mismo una cosmología (Parte de la astronomía que trata de las leyes generales, del origen y de la evolución del universo, Real Academia Española) aun vigente.

Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716) era hijo del vicepresidente de la facultad de filosofía de la universidad de Leipzig. De joven, estudió filosofía, derecho y lenguas clásicas. Su principal interés estuvo centrado en desarrollar una especie de lenguaje simbólico para representar los conceptos fundamentales del pensamiento humano y las maneras de combinar estos símbolos para llegar a conceptos más elaborados. Esta idea filosófica, que tiene relación con la combinatoria, fue ya algo en parte elaborada por franciscano mallorquín Ramón Llull (1235-1316) en su *Arte Luliano*.

Poco después de acabar sus estudios, Leibniz empezó en 1672 una misión diplomática en Paris donde permanecería unos cuatro años hasta 1676. Allí conoció a numerosos filósofos y miembros de la alta sociedad, en particular al holandés C. Huygens (1629-1695), entonces miembro de la recién creada Académie Royale des Sciences. Como curiosidad Huygens le planteó a Leibniz que hallara la suma de los inversos de los números triangulares. Mediante sumas y diferencias Leibniz fue capaz de hallar la suma de esta serie y entonces creció su interés en estudiar matemáticas, cuya formación hasta entonces había sido muy escasa. Huygens le recomendó que leyera la renovada edición en latín de van Schooten de la *Géometrie* de Descartes y los trabajos de Pascal. La entrada matemática de Leibniz fue entonces impresionante, ya que le llevó al descubrimiento del cálculo en 1675 y su elaboración y publicación en dos cortos artículos del *Acta Eruditorum* después en 1684 y 1686, el primero sobre cálculo diferencial y el segundo sobre cálculo integral.

El trabajo de Leibniz se conoce principalmente por los numerosos artículos que publicó en *Acta* y por sus cartas personales y manuscritos que se conservan en Hannover. Entre estos documentos están los manuscritos fechados el 25, 26 y 29 de Octubre y el 1 y 11 de Noviembre de 1675 donde Leibniz estudia la cuadratura de curvas y desarrolla su cálculo diferencial e integral.

Uno de los ingredientes fundamentales del cálculo de Leibniz son las reglas para la manipulación de los símbolos "$\int$" y "d" de la integral y la diferencial. Esto refleja sus ideas filosóficas de buscar un lenguaje simbólico y operacional para representar los conceptos e ideas del pensamiento de tal manera que los razonamientos y argumentos se puedan escribir por símbolos y fórmulas. En matemáticas su cálculo es en parte esto, un algoritmo para escribir los métodos geométricos de cuadraturas y tangentes por medio de símbolos y fórmulas. Las otras dos ideas fundamentales del cálculo de Leibniz son la relación entre la sumas de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos y el llamado triángulo característico.

Leibniz pasó la mayor parte del resto de su vida en Alemania, como consejero del duque de Hannover. Aparte de la invención y del desarrollo de su cálculo y en la solución de problemas geométricos y de ecuaciones diferenciales, Leibniz tiene otros trabajos en de ecuaciones y determinantes y escribió y contribuyó enormemente en prácticamente todos los campos del conocimiento humano, religión, política, historia, física, mecánica, tecnología, lógica, geología, lingüística e historia natural.

Aunque oscuros y difíciles de leer, los dos artículos de *Acta* de Leibniz de 1684 y 1686 fueron leídos por los hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Jakob Bernoulli era profesor de matemáticas en Basilea y su hermano Johann, unos trece años más joven, le sucedió después en 1705. Ambos entendieron notablemente el simbolismo y los conceptos de Leibniz y publicaron varios artículos en *Acta* a partir de 1690. Después iniciaron una intensa y productiva correspondencia con Leibniz, resolviendo en unos pocos años numerosos problemas en los que el nuevo cálculo demostró toda su fuerza, tales como el la isócrona, la catenaria, la tractriz, la isócrona paracéntrica o la braquistocrona.

La pelea entre ambos por la paternidad del cálculo es célebre. Leibniz publicó su *Nova Methodus* antes que Newton pero este había desarrollado con anterioridad su cálculo.

Una comisión dictaminó que la paternidad le corresponde a Newton. ¡¡¡¡Esa comisión estaba formada por ingleses…y el bueno de Sir Isacc estaba vivo cuando dio su dictamen!!!!

Nada de esto quita méritos a ninguno de ellos. Son grandes entre los grandes.

El Cálculo de NEWTON

Newton considera que las cantidades matemáticas están descritas por un movimiento continuo:

Las curvas son descritas y de esta forma generadas, no por una disposición de partes, sino por el continuo movimiento de puntos.

Newton en *De Methodis serierum et fluxionum* define los dos principales problemas del cálculo:

Problema 1

Dada la relación entre las cantidades fluentes (variables), encontrar la relación de las fluxiones (derivadas),

Problema 2

Cuando una ecuación para las fluxiones (derivadas) de cantidades es dada, determinar la relación de las cantidades.

En *De quadratura curvarum* (1704) describe un método directo para calcular las fluxiones: ejemplo x^n

Cuando la función x^n fluyendo se convierta en x+h, la función x^n se convierte en $(x+h)^n$, esto es por el método de series infinitas

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hhx^{n-2} + \ldots$$

Y el incremento de y

$$(x+h)^n - x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hhx^{n-2} + ..$$

es uno a otro como 1 a

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2} + \ldots$$

Ahora dejemos que estos incrementos h se desvanezcan y su última razón será como 1 a nx^{n-1}.

Si bien el resultado es correcto, este método parece ser ideado para el consumo particular de Newton.

El método de Fluxiones.

Newton da luego otra versión de su cálculo en *"Methodus Fluxiorum et Serierum Infinitorum"* que fue escrito en 1671 y publicado en 1736. Wallis, con permiso de Newton, incluyó el método de fluxiones en la páginas 390-396 de su Algebra.

Para esto, Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades que aparecen (variable) x es un *"fluente"* y su velocidad, designada por $\dot{x}$ esto es una x con un puntito encima, es una *"fluxión"*. La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad de tiempo es o_x, momento del fluente. El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones y recíprocamente. Si y=f(x) en un pequeño intervalo o de tiempo x se incrementa a $x+o_x$, y se incrementa a $y+o_y$

Al ser

$$y + o_y = f(x + o_x)$$

$$o_y = f(x + o_x) - f(x)$$

$$\dot{y} = \frac{f(x + o_x) - f(x)}{o}$$

es decir que la velocidad $\dot{y}$ queda planteada como un cociente. Luego Newton hace o = 0 y completa el cálculo.

Obsérvese un caso concreto. Si es $y=x^3$

$$\dot{y} = \frac{(x + o_x)^3 - x^3}{o} = \frac{x^3 + 3x^2 o_x + 3x(o_x)^2 + (o_x)^3 - x^3}{o}$$

Simplifica y luego elimina los términos que contienen o ya que "se le supone infinitamente pequeño", quedando

$$\dot{y} = 3x^2$$

Newton es consciente de las dificultades de rigor que tienen estos conceptos y posteriormente refina su interpretación en "De Quadratura Curvarum", escrito en 1676 y publicado en 1704. Aquí habla de "últimas proporciones ("ultimate ratios"). Dice:

"Por última proporción de cantidades evanescentes debemos entender el cociente de estas cantidades, no antes de que desvanezcan, ni después, pero tal como van desvaneciendo."

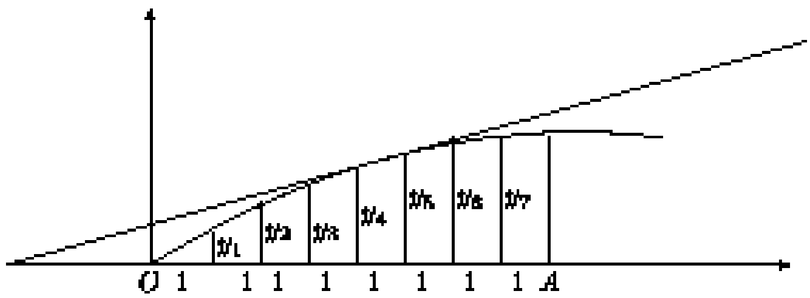
Intuitivamente, esto viene a ser el actual concepto de derivada interpretada como límite, con una imaginación muy, pero muy poderosa.

El cálculo de LEIBNIZ

El segundo descubridor del Cálculo diferencial fue Leibniz. La idea original de Leibniz era considerar las curvas como una unión de infinidad de segmentos indivisibles de longitud infinitesimal de forma que la prolongación de estos segmentos daban las rectas tangentes a la curva en los distintos puntos. Leibniz afirmaba

Una figura curvilínea debe ser considerada lo mismo que un polígono con un infinito número de lados.

Leibniz no tardó en aplicar a la geometría sus observaciones de que las sumas de sucesiones y sus diferencias consecutivas son procesos inversos el uno del otro. Consideremos una curva como la de la figura donde aparece una sucesión de ordenadas equidistantes $y_1, y_2, y_3, ?, y_n$



Si se supone que la distancia entre estas ordenadas es 1, entonces su suma $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$ es una aproximación de la cuadratura de la curva, mientras que la diferencia entre dos sucesivas y_i's da aproximadamente la pendiente de su tangente. Además, cuanto más pequeña sea la unidad 1 elegida, mejor será la aproximación. Si la unidad se pudiera elegir *infinitamente pequeña*, entonces las aproximaciones serían exactas, la cuadratura sería igual a la suma de ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de ordenadas. De esta forma y por su analogía con las sucesiones numéricas, Leibniz observa que la determinación de cuadraturas y el cálculo de tangentes son operaciones inversas la una de la otra.

Leibniz considera una curva como una poligonal de infinitos lados donde dy es la diferencia infinitesimal de dos ordenadas consecutivas, dx la diferencia de dos abscisas consecutivas e $\int ydx$ representa la *suma* de los pequeños rectángulos infinitesimales ydx.

De esta forma el teorema fundamental del cálculo aparece como obvio. Esto es, para hallar el área debajo de una curva con ordenadas y, se debe hallar una curva de ordenadas z de tal manera que dz/dx=y, en cuyo caso es también $\int ydx=z$.

En sus primeros manuscritos utiliza la abreviatura *omn* para las sumas, como abreviatura de *Omnia* que en latín significa suma pero después cambia su notación hasta la que **actualmente** se utiliza

La idea de su cálculo es que las fórmulas y relaciones geométricas se realicen de manera casi automática por medio de las reglas del cálculo de diferencias

Así plantea el uso de

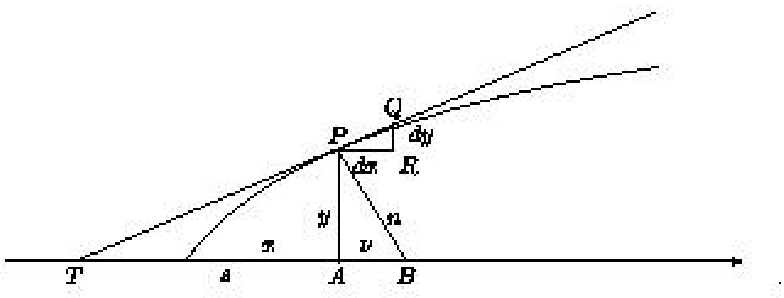
$$d(x \pm y) = dx \pm dy$$

$$d(xy) = ydx + xdy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

En sus aplicaciones geométricas, dado un punto P=(x,y) sobre una curva, tal como se observa de la figura



aparecen las llamadas *subtangente* s=TA, *tangente* t=TP, *normal* n=PB y *subnormal* n = AB. Todas estas variables tienen entidad propia y están relacionadas unas con otras. Por ejemplo se tiene por la semejanza

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx}$$

Donde el triángulo PQR es el denominado ***Triángulo Característico***

Todo este cálculo y en especial su notación resultó ser muy manejable y de gran utilidad, lo que contribuyó decisivamente a su éxito. Notación y concepto son virtualmente inseparables. Por ejemplo la regla de la cadena para z=f(y) e y=g(x) que se escribe como primero la composición h(x)=f(g(x) y luego

$$f'(z) = f'(y)g'(z)$$

en su notación diferencial es simplemente

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Aunque desde el punto de vista lógico le falta rigor a esta fórmula simbólica, ya que cancela dy como si fueran números reales, no sólo halla correctamente al resultado sino que sugiere además la manera de demostrarla, reemplazando las diferenciales dx, dy, dz por incrementos finitos Δx, Δy, Δz y pasando luego al límite.

Leibniz tardó unos años en presentar estas ideas en público ya que era una formulación intuitiva, pero que tenía el problema de trabajar con cantidades infinitamente pequeñas y esto no estaba rigurosamente definido ni era muy aceptable en matemáticas. Su primera publicación fue un corto artículo titulado "***Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*"**, (Un nuevo método para máximos y mínimos y tangentes, no impedido por cantidades racionales o irracionales un singular nuevo tipo de cálculo para ellas), que apareció en 1684 en *Acta eruditorum*.

En este trabajo original, después de introducir su cálculo, Leibniz da tres ejemplos de las aplicaciones, el primero prueba el principio ya conocido por Descartes y Fermat de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de refracción, el segundo es un problema geométrico. Luego, dice Leibniz:

> *Y esto es sólo el comienzo de una mucho más sublime Geometría, de problemas incluso mucho más difíciles y de los más bonitos de matemáticas aplicadas, los cuales sin nuestro cálculo diferencial o algo similar nadie podría atacar con tanta facilidad*

Para resolver los inconvenientes de los infinitesimales se necesitaron más de 200 años. ¡Se necesitaba el concepto de límite!

Este hombre, Agustín Luis **CAUCHY**

Y este libro


RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1823.

Dejaron dicho casi todo lo que hoy en día constituye un curso de Análisis Matemático.

DERIVADA. ASPECTOS OPERATIVOS

Nota: después de la introducción histórica, consignada al sólo efecto que, cada vez que se brinda un nuevo concepto se entienda que este no ha surgido de la nada, que muchos hombres de talento y aun de genio han tenido que esforzarse durante siglos para llegar al punto en que ahora está el desarrollo del pensamiento matemático y que el profesor no inventa nada cuando comparte con alumnos definiciones y propiedades sino que simplemente está ayudando a "pararse sobre los hombros de quienes los precedieron para que puedan ver mas lejos" (Newton dixit), se agrega una parte operativa donde, con la estructura de manual (por definición incompleto y confuso. ¿alguien leyó en manual de operación de un teléfono celular por casualidad? ¿Si? Entonces sabe de qué se está hablando) se podrá encontrar la forma de operar para encontrar derivadas.

Estos aspectos históricos irán decreciendo en extensión, serán inexistentes cuando no hagan falta y nunca se incluirán preguntas sobre ellos en las evaluaciones. ¡Este es un curso de Análisis Matemático no un curso de historia de la matemática!

Seguramente en algún momento de la clase, después de algún dibujo aclaratorio, se escuchará decir:

"Definición: se llama derivada de una función en un punto al límite, si existe, del cociente incremental

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero y se lo notará

$$f'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}=\frac{df(x_0)}{dx}=y_0'$$

Luego, completando el tema se escribirá, por ejemplo

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Y se insistirá "ese límite, si existe se llama derivada de una función en un punto". (Obviamente es $h = x - x_0$)

Se deben recalcar varias cosas, a saber.

1° Si NO EXISTE el límite del cociente incremental, la función no es derivable EN ESE PUNTO.

2° La derivada, como todo límite que se precie de tal, es un número real <u>y sólo es eso</u>: UN NUMERO REAL. De ahora en más será PECADO CAPITAL decir "La derivada es la tangente" Si se dice eso, significa que se ha confundido el concepto de derivada en un punto con la INTERPRETACION GEOMETRICA de ese número real llamado derivada. **Este párrafo debería ser leído, por lo menos, diez veces.**

3° Como toda función con límite es igual a este más un infinitésimo, se puede escribir

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\varphi(x)$$

de donde

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\varphi(x)\Delta x$$

como $\varphi(x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ resulta

$$\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

que se interpreta como que el incremento de la función tiende a cero cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero. Eso, simplemente es CONTINUIDAD. De donde **"Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.** La expresión en negrita debería ser leída, por lo menos, diez veces.

4° La inversa no es cierta. **Una función continua en un punto no necesariamente es derivable en ese punto.** Tómese, por ejemplo la función valor absoluto $|x|$ en $x_0 = 0$ y se tendrá un buen ejemplo de lo dicho. La expresión en negrita debería ser leída, por lo menos, diez veces.

5° La interpretación geométrica de la derivada en un punto –un número real- es la de la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a la curva en el punto con el semieje positivo de las "x". En otras palabras, es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto considerado.

6° Una barbaridad cuyo culpable debe ser Buenaventura Cavallieri es decir que dos puntos próximos $[x_0, f(x_0)]$ y $[x_0 + h, f(x_0 +h)]$ en la curva determinan una secante y que cuando $h \to 0$ el segundo punto se corre sobre la curva hasta que, al quedar junto al primero, entre los dos determinan la tangente a la curva. El tema es conocido como la *teoría del poroto deslizante*. Seguramente quienes creen y repiten este disparate no saben que los números reales NO SON NUMERABLES y que siempre "entre dos porotos caben otros infinitos porotos" de forma tal que no hay sucesivo de x_0 real. De ahora en más decir esto o algo parecido merecerá de inmediato y sin apelación posible, tarjeta roja. **Este párrafo debería ser leído, por lo menos, diez veces.**

CALCULO DE DERIVADAS

Luego de la definición y debidamente metabolizadas las cuestiones anteriores, corresponde calcular derivadas. La pregunta pertinente es ¿cómo se hace eso? La respuesta en inmediata: calculando límites indeterminados de la forma 0/0.

Ejemplo 1. Sea y = f(x) = c (constante). La derivada, si existe es

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0$$

Primer resultado: la derivada de una constante es nula.

Ejemplo 2. Sea y = f(x) = x. La derivada si existe es:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Segundo resultado: la derivada de la función identidad es 1.

Luego se derivarán por definición funciones elementales sen(x), cos(x), ln(x), e^x, etc., etc., etc. Derivadas que, por el uso, serán recordadas para siempre.

Se demuestran las siguientes expresiones:

1°	$y=kf(x)$	$y'=kf'(x)$
2°	$y=u(x)\pm v(x)$	$y'=u'(x)\pm v'(x)$
3°	$y=u(x)v(x)$	$y'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
4°	$y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$y'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
5°	$y=f[g(x)]$	$y'=f'[g(x)]g'(x)$
	$y=f\{g[h(x)]\}$	$y'=f'\{g[h(x)]\}g'[h(x)]h'(x)$
	………………………	………………………………………………

Se agregan a esta lista las siguientes derivadas:

Derivada de funciones implícitas.

Si la relación funcional entre la variable dependiente y la independiente está dada por una expresión del tipo F(x,y) = 0, en realidad F[x,y(x)] = 0 se puede calcular

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)y'(x)=0\Rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)};F'_y(x,y)\neq 0$$

Ejemplo

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}, y \neq 0$$

Derivada logarítmica

Dada la función y = f(x) se denomina derivada logarítmica a la derivada de la función ln(y) = ln[f(x)]. Derivando resulta

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

que en muchos casos facilita el cálculo de derivadas.

Ejemplo. Derivar $y = u(x)^{v(x)}$ Tomando logaritmos en ambos miembros resulta

$$\ln(y) = v(x)\ln[u(x)]$$

derivando queda

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln[u(x)] + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)$$

de donde

$$y' = u(x)^{v(x)}\left\{v'(x)\ln[u(x)] + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right\}$$

Todo ese trabajo se resume en tablas de derivación donde se consigna la FUNCIÓN DERIVADA en lugar de la derivada en un punto.

¿Qué es la FUNCIÓN DERIVADA?

Si el cálculo del límite que define la derivada se efectúa en un punto genérico x en lugar de hacerlo en uno específico x_0, el resultado es la FUNCION DERIVADA que en cada punto donde está definida da el valor numérico de la derivada en ese punto. Se debe ser cuidadoso en la consideración de los intervalos en que esa función está definida.

Derivada de funciones dadas paramétricamente

Si la relación funcional entre las variables dependiente (y) e independiente (x) está dada en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

la derivada de y con respecto a x está dada por

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplo.

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = asen(t) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos(t)}{-asen(t)} = -ctg(t)$$

Derivada de la función inversa

Dada la función y = f(x) en ocasiones es necesario obtener la derivada de la denominada función inversa $x = f^{-1}(y)$. Si $y'_x \neq 0$ es

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Ejemplo: derivar y = arcsen(x) (arco cuyo seno vale x). La función inversa es x = sen(y), entonces

$$\frac{dx}{dy} = \cos(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Con toda la batería de derivadas calculadas y con las expresiones demostradas se construyen TABLA DE DERIVADAS (en los casos donde aparecen u, v, w deben ser consideradas funciones de x)

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$ (siendo c una constante)
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \cdots$
4. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$
6. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{d}{dx}(w) + uw\frac{d}{dx}(v) + vw\frac{d}{dx}(u)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{d}{dx}(u)$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}\frac{d}{dx}(u)$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$
10. $\frac{d}{dx}\left(x^m\right) = mx^{m-1}$
11. $\frac{d}{dx}\left(u^m\right) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$

12. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \dfrac{du}{dx}$

13. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

14. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \operatorname{tg} u \dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}$

19. $\dfrac{d}{dx}(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{1}{1+u^2} \dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d}{dx}(arc \cot u) = -\dfrac{1}{1+u^2} \dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}(arc \sec u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d}{dx}(arc \csc u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\log_a u) = \dfrac{1}{u} \log_a e \dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \dfrac{du}{dx}$

26. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \dfrac{du}{dx}$

27. $\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \dfrac{du}{dx}$

28. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tgh} u) = \operatorname{sech}^2 u \dfrac{du}{dx}$

29. $\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \dfrac{du}{dx}$

30. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \dfrac{du}{dx}$

31. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \dfrac{du}{dx}$

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

Esta es una práctica “conceptual”. En ella se pretende que se asimile y metabolice en forma definitiva el concepto de derivada en un punto; función derivada cuando ella exista; interpretación geométrica de la derivada; interpretación física de la derivada; etc.

Por ese motivo se deja para GEP05 una gran (enorme) ejercitación sobre el tema, habiéndose preferido en esta oportunidad una serie de ejercicios que se supone deben despejar todas las dudas emergentes del tema en estudio.

01 Para las siguientes funciones calcular Δx y Δy siendo:

01 $y = x^2 - 5x + 6$ desde x = 1 hasta x = 1.1
desde x = 3 hasta x = 2

02 y = sen (x) desde x = 0 hasta x = 1
desde x = 0 hasta x = 0.1
desde x = 0 hasta x = 0.01
desde x = 0 hasta x = 0.001

03 y = $|x|$ desde x = 1 hasta x = 1.2
desde x = -1 hasta x = -1.2

desde $x = 1$ hasta $x = -1$

04 $y = x^{1/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = h$

05 $y = \ln x$ desde $x = 1$ hasta $1 + h$

02 Para los ejercicios anteriores calcular los cocientes $\Delta y/\Delta x$ y analizar los resultados

03 Hallar la pendiente de la secante a la parábola $y = 2x - x^2$ si las abscisas de los puntos de intersección son

01 $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

02 $x_1 = 1$ $x_2 = .9$

03 $x_1 = 1$ $x_2 = 1 + h$

Representar gráficamente y calcular el límite cuando $h \to 0$ en el caso 03

04 La ley de movimiento de un punto es $e = 2t^2 + 3t + 5$ donde el espacio e se da en centímetros y el tiempo t en segundos. ¿Cuál es la velocidad media del punto entre $t = 1$ y $t = 5$ segundos?, ¿Cuál es la velocidad en $t = 3$ segundos?

05 Un cuerpo calentado e introducido en un medio más frío, se enfría. ¿Qué debe entenderse por velocidad media de enfriamiento y velocidad de enfriamiento en un momento dado?

06 ¿Qué debe entenderse por velocidad de reacción de una substancia en una reacción química?

07 B es una barra heterogénea de 1 metro de longitud. ¿Qué se debe entender por densidad lineal media en [0.25m, 0.75m] y por densidad lineal en $x = 0.5$?

08 Derivar las siguientes funciones en los puntos indicados

01 $y = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 0$

02 $y=\sqrt[5]{x-1};x_0=1$

03 $y=\left|\cos(x)\right|;x=\dfrac{2k+1}{2}\pi;(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...)$

09 Hallar $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ siendo $y = |x|$ ¿Existe $f'(0)$?

10 Responder verdadero (V) o falso (F)

01 Toda función continua en un punto es derivable en ese punto

02 Toda función derivable en un punto es continua en ese punto

03 Toda función continua tiene función derivada

04 La función derivada, evaluada en $x = x_0$ da el valor de la derivada en $x = x_0$

05 La ecuación de la recta tangente a una curva representativa de una función derivable en el punto x_0 es:

01 $y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$

02 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

06 La recta tangente a una curva en un punto corta a la curva.

11 Sea f(x) una función derivable en $x = x_0$. Hallar la expresión que permite calcular la longitud de los siguientes segmentos

01 Subtangente

02 Subnormal

03 Tangente

04 Normal

12 Hallar el ángulo entre las curvas $y = x^2$ e $y = x^{1/2}$ en el punto (1,1)

ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 05

DERIVADA

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS.

En esta práctica no habrá referencias históricas. Con lo visto en GEP01, GEP02, GEP03 y GEP04 se estima están marcados los principales hitos que marcaron el desarrollo del análisis matemático. Esto no quiere decir, de ninguna manera, que la disciplina análisis matemático esté congelada. Muy por el contrario es uno de los campos activos de investigación matemática donde cada vez más sofisticados modelos ayudan a las ciencias físicas y a la ingeniería a comprender un poco mejor los complejos sistemas con los que operan. No están ajenas a está matematización las ciencias biológicas, sociales y otras donde el análisis matemático, paulatinamente se va transformando en lenguaje apto para entender los modelos con que utilizan.

Una anécdota servirá para explicar el objetivo de GEP05. El autor, cuando chico aprendió a andar en bicicleta y en patines. En esa época no tuvo conciencia de los esfuerzos necesarios para alcanzar cierta habilidad sobre los mismos.

De grande llegó a sus manos un arco artesanal de caza mayor, con su respectivo juego de flechas. Nadie le dijo absolutamente nada sobre el cómo utilizarlo (desde ya jamás pasó por su cabeza utilizarlo en una cacería de jabalíes, por ejemplo, como le dijera quien se lo dió). Intrigado, intentó lanzar una flecha contra un árbol. La flecha cayó a sus pies y la cara interna del antebrazo izquierdo, quedó raspada.

En el segundo y tercer intento ocurrió lo mismo y la raspadura fue cada vez más profunda. Evidentemente algo no estaba bien.

Descubrió que había que colocar la flecha entre el mayor y el índice de la mano derecha con las dos falanges haciendo gancho para tensar la cuerda del arco empuñado en la mano izquierda, en lugar de tomarla con el pulgar y el índice y tratar de tensar así la cuerda.

Tres veces fracasó y el antebrazo izquierdo se raspó sobre raspado. A la cuarta vez la flecha voló unos cinco metros hecho que le motivó una gran satisfacción. Luego, insistiendo y con alguna ampolla en índice y mayor las veces que la flecha volaba era mayor que las veces que caía a sus pies.

Insistiendo, en todos los tiros volaba pero, jamás llegaba al árbol. Hasta que un glorioso día, sin pensarlo, llegó y débilmente se clavó en la corteza del pobre árbol tomado como blanco.

Después de semejante éxito, de diez tiros clavaba cuatro, insistiendo clavaba seis, insistiendo nueve hasta que, de diez tiros, diez se clavaban en el acribillado árbol.

Pero, siempre hay uno, no se clavaban lo suficiente. A los tiros le faltaba fuerza. ¿Y como se logra eso? Fácil, insistiendo, logrando un índice y un mayor encallecidos, fuerza en el brazo izquierdo para tener firme el arco y más fuerza en el derecho para tensar la cuerda.

Insistiendo, llegó un momento en que fue necesaria una pinza para extraer la flecha del árbol.

Pero algo faltaba. En esa etapa se podía decir que sabía tirar flechas con arco pero, claro, faltaba tener puntería y poner la flecha donde uno quiere. ¿Cómo se logra eso? Fácil, colocando un blanco e insistiendo una vez más.

En ese punto se descubre que para ser bueno o muy bueno en algo hay que esforzarse mucho pero que para ser estrella en firmamento de estrellas hay que dedicar la vida al tema.

El arco ahora es decorativo, las flechas volaron tan lejos que hubo que reemplazarlas para que el efecto decorativo fuese completo, y se sabe que al tomarlo nuevamente muy rápidamente se alcanzará la categoría de bueno o muy bueno.

Exactamente eso pasará con las derivadas. Las primeras se caerán a sus pies y alguien deberá levantarlas y ponérselas en la mano nuevamente. Seguirá fracasando hasta que, en algún momento, insistiendo, salga volando una derivada complicada. Después, insistiendo más todavía, se podrá derivar cualquier cosa -derivable, naturalmente- aún aquellas cosas que requieran ir de cabeza a la definición de derivada, calculando el respectivo límite. No hay otra forma que disparar flechas, flechas, flechas, flechas, para ser arquero, perdón, un buen conocedor de los métodos de derivación.

Manos a la obra, arqueros de Análisis Matemático.

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

01 Siendo, por definición de derivada en un punto

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y

$$f'(x\ ) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x\ + h) - f(x\ )}{h}$$

la función derivada, calcular la derivada de las siguientes funciones en x_0 o, si ello es posible, en un punto genérico.

01 $y = x^2; \quad x_0 = 1 \quad y \quad x_0 = x$

02 $y = \sqrt{x} \quad x_0 = 2 \quad y \quad x_0 = x$

¿qué ocurre cuando x = 0 ?

03 $y = sen(x) \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4} \quad x_0 = x$

04 $y = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 0^+ \quad y \quad x_0 = 0^-$

05 $y = \begin{cases} x + 2 & \forall x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

03 Derivar

01 $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

02 $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0.5x^4$

03 $y=ax^2+bx+c$

04 $y=\frac{\pi}{x}+\ln 2$

05 $y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

04 Derivar

01 $y=(5x-1)(x^2-4)x^3-5x^4$

02 $y=\left[(3x-2)(2x+3)-7x^3\right]^2$

03 $y=3x^2\left[(x-1)^2+x(x^2-1)\right]$

04 $y=4x^3\left[3x^2(2x-1)+5(x-2)^2\right]$

05 $y=(1-5x^2)\left[(2x-3)^3-(2x-1)^2\right]$

05 Derivar

01 $y=\frac{(1-x^2)(x^2+2x+2)}{x^2-4}$

02 $y=\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{(x^2-2)(x^2+1)}$

03 $y=\frac{(1-x)(1-2x)+x(1-3x^2)}{1-x^3}$

04 $p=\frac{t^3-3t^2+6t-6}{t(t+1)-(t^2-4)}$

05 $p=\frac{(t^3-1)(t^2-2)}{1+2t^2}$

06 Derivar

01 $$y=\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

02 $$y=\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

03 $$y=\sqrt{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

04 $$y=\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$$

05 $$y=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$$

06 Derivar

01 $$y=\frac{sen(2x)+\cos(2x)}{sen(2x)-\cos(2x)}$$

02 $$y=\frac{sen(1+x^2)-sen(1-x^2)}{\cos(1+x^2)+\cos(1-x^2)}$$

03 $$y=\sqrt[3]{\cos^3\left(\frac{1}{x}\right)+\sec(x^2)}$$

04 $$y=\left[\cos(3-x)+tg^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^4$$

05 $$y=\left[sen(-2x)-\sec\sqrt{x}\right]^2$$

07 Calcular aplicando la regla de derivación de funciones inversas, la derivada de las siguientes funciones

01 $$y=e^x$$

02 $y = a^x$

03 $y = arcsen(x)$

04 $y = \arccos(x)$

05 $y = arctg(x)$

08 Derivar

01 $y = \sqrt{x} arctg \sqrt{1-x}$

02 $y = \frac{1}{x}\sqrt{\arccos ec \frac{1}{x}}$

03 $y = \sqrt{x arc \sec(-x)}$

04 $y = \sqrt{\frac{\arccos(1-x)}{x^2+1}}$

05 $y = \frac{1}{(1-x)^3} arc \sec \sqrt{-x}$

09 Derivar

01 $y = \ln\left[\frac{x-a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]$

02 $y = \ln\left(ax + \sqrt{a+x}\right)$

03 $y = \ln\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$

04 $y = \ln\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$

05 $y = \log\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

10 Derivar

01 $$y = x^3 \log_2\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)$$

02 $$y = \frac{1}{x^2}\log_3\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)$$

03 $$y = e^{3x}\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

04 $$y = \left(e^{\sqrt{x}} - 1\right)\left(e^{\sqrt{x}} + 1\right)$$

05 $$y = \frac{a^{\sqrt{x}} + b^{\sqrt{x}}}{c^{\sqrt{x}} + d^{\sqrt{x}}}$$

11 Derivar

01 $$y = \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)e^{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

02 $$y = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$$

03 $$y = a^{x^n}$$

04 $$y = \left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

05 $$y = a^{\frac{x+1}{x-1}}$$

12 Derivar

01 $$y = \left[sh\left(x^2\right) - cth\left(\sqrt{x}\right)\right]^2$$

02 $$y = \frac{sh\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + ch\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{sh\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - ch\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

03 $$y = \left[th\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \sec h\left(x^2\right)\right]^3$$

04 $y=\sqrt{ch\left(\frac{1}{x}\right)+\cos ech\left(-\frac{1}{x}\right)}$

05 $y=cth\left(\sqrt{x-1}\right)-\cos ech\left(\sqrt{x-1}\right)$

13 Derivar

01 $y=-xarcth\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

02 $y=\sqrt{x}arcch\sqrt{x}$

03 $y=\frac{arcsh(x)+arccth(x)}{arcsh(x9-arccth(x)}$

04 $y=ctg\left(\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

05 $y=\sqrt{1+\ln\sec(x)}$

06 $y=tg\left(\ln^2 x\right)-tg^2(\ln x)$

07 $y=\frac{x-tg[\ln(x)]}{x+\ln[tg(x)]}$

08 $y=\frac{\ln\sqrt{\cos(x)}-1}{\sqrt{\ln[\cos(x)]+1}}$

09 $y=\frac{\ln[tg(x)]-tg[\ln(x)]}{\ln[\sec(x)]+\sec[\ln(x)]}$

10 $y=\ln\left[arcctg\sqrt{x}-arcsen(x^2)\right]$

14 Derivar

01 $y=x^x$

02 $y=x^{sen(x)}$

03 $y = [sen(x)]^x = sen^x(x)$

04 $y = [sen(x)]^{\cos(x)}$

05 $y = \sqrt[x]{x}$

06 $y = \sqrt[x]{\ln(x)}$

07 $y = x^{\sqrt{x}}$

08 $y = [tg(x)]^{arcsen(x)}$

09 $y = [\cos(x)]^{\ln(x)}$

10 $y = \sqrt[\ln(x)]{x}$

15 Hallar $\frac{dy}{dx}$ y/o $\frac{dx}{dy}$ de las siguientes funciones definidas en forma implícita. Verificar que $y'_x = 1/x'_y$

01 $x^2 + y^2 = r^2$

02 $x^3 + y^3 = a(x + y)$

03 $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

04 $x^2 + xy - y^2 = a^2$

05 $e^x sen(y) + e^y sen(x) = 1$

16 Calcular y' en las siguientes funciones definidas paramétricamente

01 $\begin{cases} x = a + r\cos(t) \\ y = b + rsen(t) \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = m + a\sec(t) \\ y = p - btg(t) \end{cases}$

03 $\begin{cases} x = a[t - sen(t)] \\ y = a[1 - \cos(t)] \end{cases}$

04 $\begin{cases} x = \ln(t) - 2 \\ y = [\ln^2(t) - 12]^2 - 64\ln\left(\dfrac{1000}{t}\right) \end{cases}$

05 $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = \ln\left(\dfrac{t^3}{e^2}\right) - \ln^3(t) \end{cases}$

Derivadas Sucesivas

17 Hallar la expresión general de la derivada enésima de las siguientes funciones

01 $y = x^m$

02 $y = (x-1)^m$

03 $y = (1-x)^m$

m racional y positivo.

04 $y = sen(x)$

05 $y = \cos(x)$

06 $y = sh(x)$

07 $y = ch(x)$

08 $y = \ln(x)$

09 $y = \ln(1+x)$

10 $y = \ln(1-x)$

18 Verificar

01
$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$
si
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

02
$s'' + 2s' + 2s = 0$
si
$s = e^{-t}\left[a\cos(2t) + bsen(2t)\right]$

03
$y'' - k^2 y = \cos(kx)$
si
$y = 2k^2 ch(kx) - \frac{1}{2k^2}\cos(kx)$

04
$\sum_{n=1}^{n=2k} y^{(n)} = 0$
si
$y = e^{-x}$

05
$\sum_{n=1}^{n=4k} y^{(n)} = 0$
si
$y = sen(x)$

19 Calcular la derivada tercera de las siguientes funciones aplicando la regla de Leibniz.

01 $y = e^{-x} sh(x)$

02 $y = sen(x) ch(x)$

03 $y = sen(2x)\cos(3x)$

04 $y = x^5 \ln(x)$

05 $y = sen(x)\ln(x)$

20 Ídem anterior, orden de derivada que se indica en cada caso.

01 $y = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$ 5^a

02 $y = e^{\sqrt{x}}$ 4^a

03 $y = \ln[\ln(x)]$ 3^a

04 $y = x^6 \ln(x)$ 4^a

05 $y = (x^4 - x^3)\ln(x)$ 4^a

ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 06

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

En esta práctica se hará uso intensivo del concepto de derivada de una función para resolver una cantidad de problemas que hacen al correcto uso del Análisis Matemático en otras disciplinas.

Recta tangente y recta normal a una curva

Sea y = f(x) una función derivable en $P_0(x_0,y_0)$ y C la curva representativa de la misma en un gráfico cartesiano. La recta tangente a la curva C en P_0 es la recta de ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

y la recta normal es

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Si la función está dada en forma paramétrica las ecuaciones son:

$$C = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t = t_0$$

recta tangente

$$[y - y(t_0)] = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}[x - x(t_0)]$$

recta normal

$$[y - y(t_0)] = -\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}[x - x(t_0)]$$

Si la función está dada por la relación en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$ en $P_0(\rho_0,\theta_0)$ se calcula la pendiente de la tangente en base a las ecuaciones de transformación

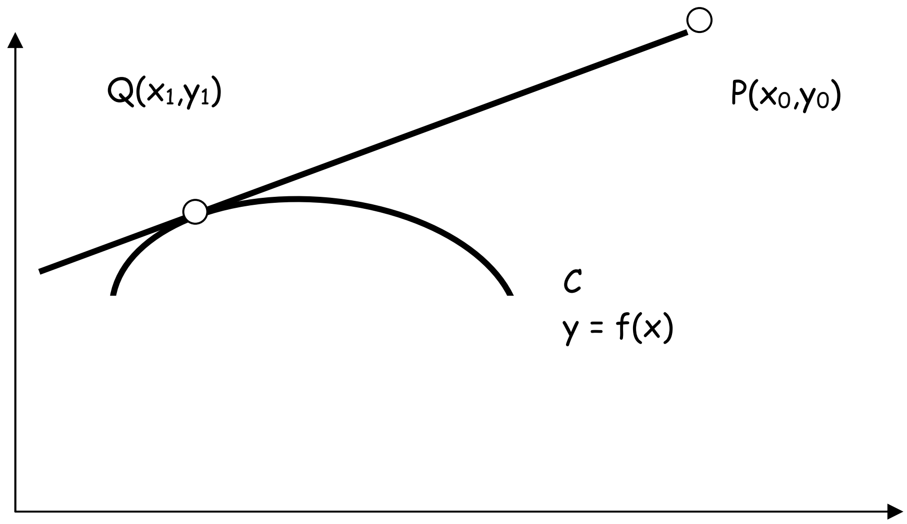
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho sen(\theta) \end{cases}$$

y, como ρ depende de θ, se puede considerar a θ como parámetro, resultando

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = \frac{\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_0}{\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_0} = \frac{\rho\cos(\theta) + \frac{d\rho}{d\theta}sen(\theta)}{-\rho sen(\theta) + \frac{d\rho}{d\theta}\cos(\theta)}$$

Recta tangente desde un punto

Dada una curva *C* de ecuación y = f(x) y un punto que NO pertenece a *C*, trazar desde ese punto tangentes a la curva *C* requiere resolver un sistema de ecuaciones, generalmente no lineal, formado de la siguiente manera.

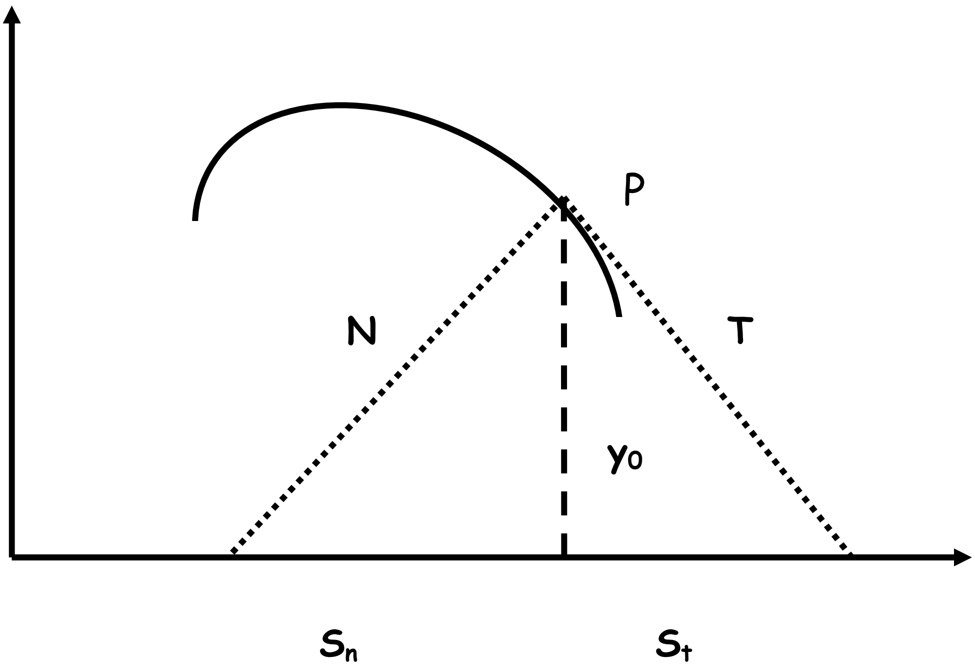


$$\begin{cases} y_1 - y_0 = f'(x_1)(x_1 - x_0) \\ y_1 = f(x_1) \end{cases}$$

en las incógnitas x_1 e y_1

Segmentos Tangente, Subtangente, Normal y Subnormal.

Analizando la figura resulta:



$$S_t = \frac{y_0}{y_0'}$$

$$T = \frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + y_0'^2}$$

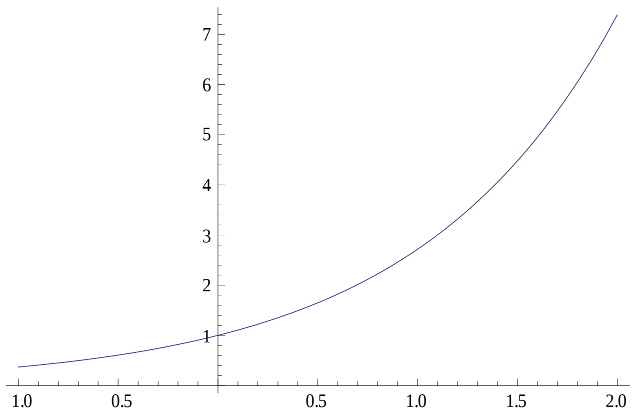
$$Sn = y_0 y_0'$$

$$N = y_0\sqrt{1 + y_0'^2}$$

Funciones monótonas crecientes y decrecientes. Puntos estacionarios.

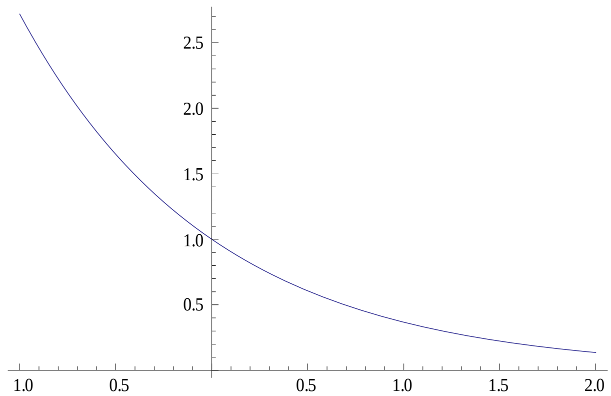
Una función y = f(x) se dice **monótona creciente** en un punto si dado un h > 0 se verifica que f(x + h) > f(x). Es decir, se trata de una función que, en ese punto, al crecer la variable independiente, crece la variable dependiente.

En términos del gráfico correspondiente, la curva "sube" a medida que se avanza por el eje "x".



Si, en cambio se verifica que f(x+h) < f(x) la función se dice **monótona decreciente**

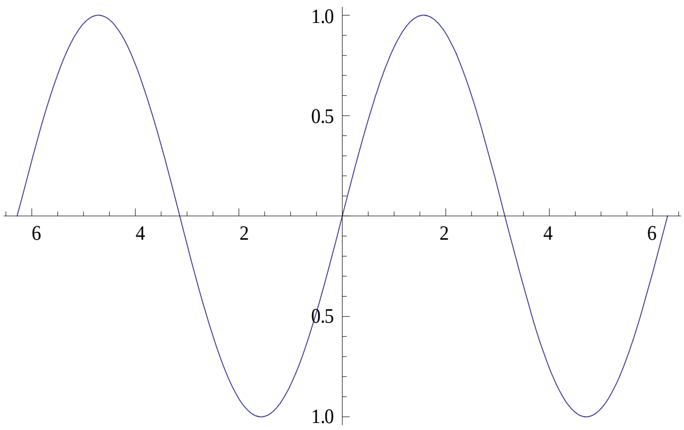
En términos del gráfico correspondiente, la curva "baja" a medida que se avanza por el eje "x".



Los dos ejemplos anteriores corresponden a funciones estrictamente crecientes o decrecientes en todo su intervalo de definición (la recta real R).

No todas las funciones se comportan de esa forma. Hay intervalos donde crecen (son crecientes) otros donde decrecen (son decrecientes) y hay puntos en los que no crecen ni decrecen. Esos puntos se denominan **puntos estacionarios.**

Por ejemplo, la función y = sen (x) tiene infinitos intervalos donde crece, infinitos intervalos donde decrece e infinitos puntos estacionarios.



La pregunta pertinente en este momento es la siguiente: ¿tiene algo que ver con esto la derivada primera de la función? La respuesta es un rotundo ¡SI!

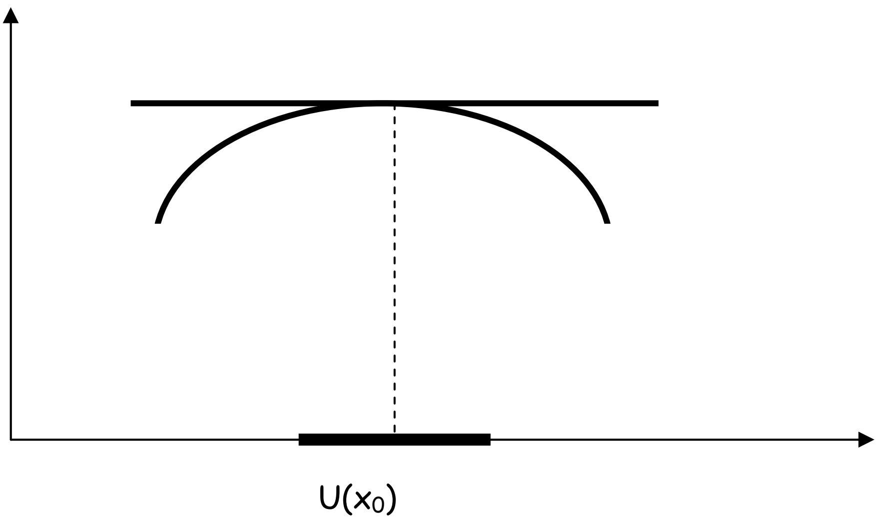
En efecto, siendo por definición

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

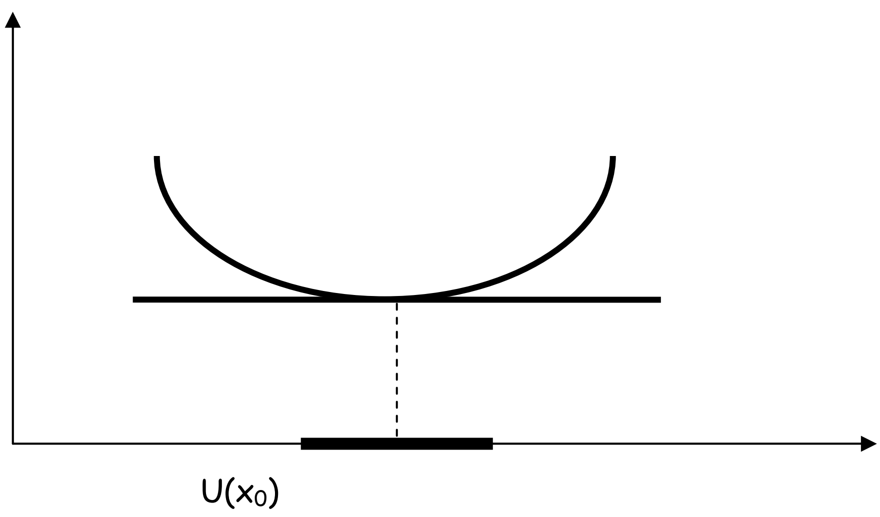
si la función es **monótona creciente** en el entorno de un punto, el numerador será positivo y también será positiva la derivada primera en ese entorno, mientras que, si la función es **monótona decreciente** en el entorno, el numerador será negativo y también lo será la derivada primera. En los puntos en que la función no crece ni decrece la derivada no puede ser positiva ni negativa, en consecuencia, la única opción es valer cero. Este es el valor de la derivada en los **puntos estacionarios**.

Máximos y Mínimos (relativos y absolutos)

Dada una función y = f(x) y un punto x_0 de su dominio se dice que x_0 corresponde a un máximo relativo de f(x) si se verifica que, para un entorno de x_0 es $f(x) < f(x_0)$.



Dada una función y = f(x) y un punto x_0 de su dominio se dice que x_0 corresponde a un mínimo relativo de f(x) si se verifica que, para un entorno de x_0 es $f(x) > f(x_0)$.



Corresponde enfatizar sobre estas definiciones. Un punto corresponde a un ***máximo relativo cuando todos los valores que lo rodean son menores que él y corresponde a un mínimo relativo cuando todos los valores que lo rodean son mayores que él.***

Piénsese en una cola. Un individuo es el más alto de una parte de la cola porque está rodeado de individuos más petisos, y es el más petiso si está rodeado por individuos más altos. Obsérvese que ambas son propiedades locales: hacen referencia a un individuo (un punto, con todo respeto) y los que lo rodean y no se dice nada de toda la cola. (de toda la función)

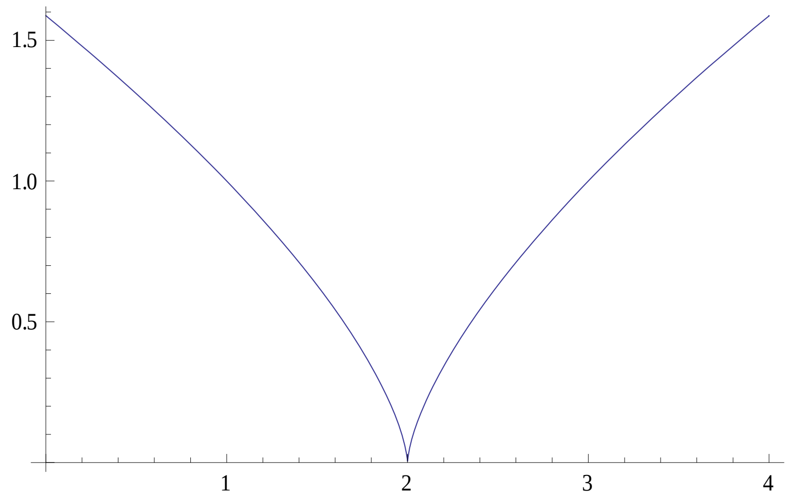
El más grande de los máximos relativos o el mayor valor de la función es el **máximo absoluto** (el más alto de los altos) y el más chico de los mínimos relativos es el **mínimo absoluto** (el más petiso de los petisos).

¿Por qué este énfasis?. Muy sencillo **SI LA FUNCIÓN ES DERIVABLE**, máximos y mínimos relativos ocurren cuando la derivada primera es nula, dado que, en ellos, la función no puede ser ni creciente ni decreciente.

De allí viene o puede venir uno de esos disparates que a menudo pueden oírse. Suena así *"una función tiene un máximo (o un mínimo) donde la derivada primera se anula"*. Generalmente cuando se escucha el disparate se dice y pregunta "la función valor absoluto tiene un mínimo relativo (y absoluto) en el origen y allí esa función no es derivable, entonces ¿cómo tiene un mínimo?" En varios casos esto ha sido motivo de fuertes tartamudeos e incoherencias varias tratando de explicar lo inexplicable.

No debe confundirse la definición de máximo (mínimo) relativo con la anulación de la derivada primera en esos puntos para las FUNCIONES DERIVABLES. Las funciones NO derivables también pueden tener máximos y mínimos relativos y absolutos.

Además, el máximo o mínimo absoluto puede darse en el extremo del intervalo donde la función está definida y en ese punto sólo hay o puede haber derivada lateral (derecha en el extremo izquierdo e izquierda en el extremo derecho) no necesariamente nula. Puede darse también en algún punto intermedio, cuspidal, por ejemplo.



Ahora bien ¿cómo se puede decir si un punto estacionario de una **función derivable** es un máximo o un mínimo?

Para eso hay que estudiar la concavidad o la convexidad de la curva representativa de la función.

Concavidad y Convexidad

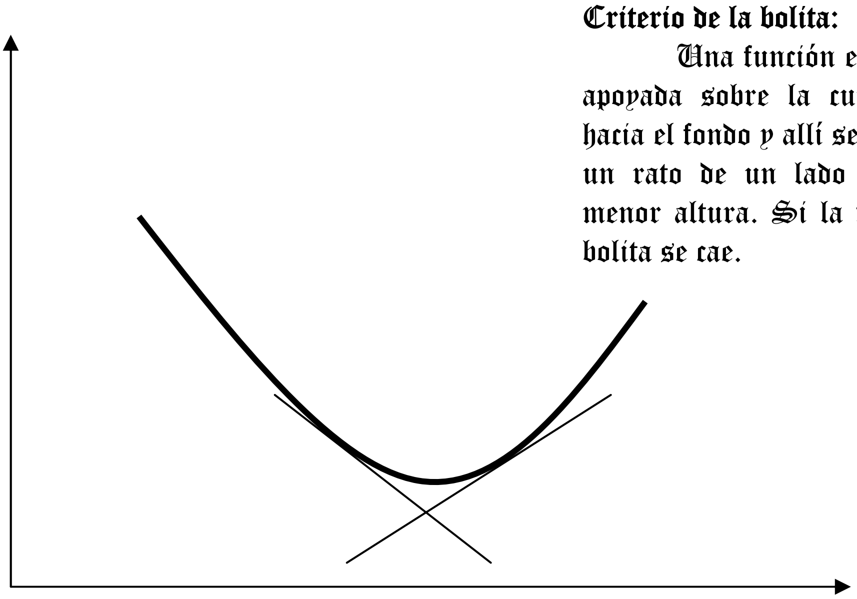
Una función y = f(x) es **cóncava** si su representación gráfica (coordenadas cartesianas ortogonales) se encuentra sobre sus tangentes.

Una función y = f(x) es **convexa** si su representación gráfica se encuentra bajo sus tangentes.

Se analiza a continuación la concavidad.

Criterio de la bolita:

Una función es cóncava si una bolita apoyada sobre la curva, rueda libremente hacia el fondo y allí se queda luego de oscilar un rato de un lado para otro cada vez a menor altura. Si la función es convexa, la bolita se cae.



La gráfica corresponde a una función cóncava. (está sobre sus tangentes). Para estarlo debe ser decreciente hasta el punto estacionario y luego debe ser creciente. Es decir, su derivada primera pasa de negativa a positiva, siendo nula precisamente en el punto estacionario, mínimo relativo en este caso.

Si la función derivada primera es derivable, la derivada segunda, por definición, es

$$y'' = f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

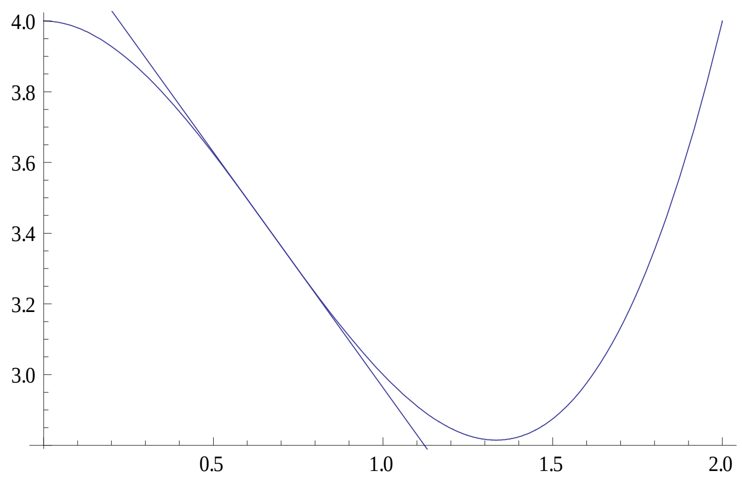
si el límite existe. Si existe corresponde a la derivada de la función derivada que pasa de negativa a positiva, creciendo. En consecuencia su derivada (la derivada segunda) es positiva. Es decir, una función derivable tiene un mínimo relativo en un punto de su dominio si en el mismo la derivada primera vale cero y la derivada segunda es mayor que cero.

Por un razonamiento similar se llega a que en un punto hay un máximo relativo si en él se anula la derivada primera y la derivada segunda es menor que cero.

La tabla siguiente resume el tema de máximos y mínimos relativos.

FUNCIÓN DERIVABLE	DERIVADA PRIMERA	DERIVADA SEGUNDA
Mínimo relativo	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$
Máximo relativo	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$

Si la derivada segunda es nula, el punto es un **punto de inflexión,** punto donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa. (si la derivada tercera es distinta de cero en ese punto)



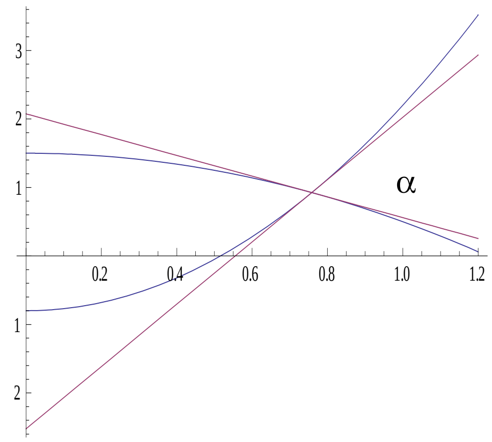
Si la derivadas primera, segunda, tercera, etc. se anulan en x_0 el análisis de máximos, mínimos o puntos de inflexión requiere sean utilizados desarrollos en serie de potencias, tema que será motivo de una de las últimas GEP.

Angulo entre curvas

El ángulo de dos curvas C_1 y C_2 al cortarse es el mismo que el ángulo que forman sus respectivas tangentes en el punto de intersección. Este ángulo es igual a la diferencia de los ángulos que forman las respectivas tangentes con el eje positivo de las abscisas.

$$\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$$

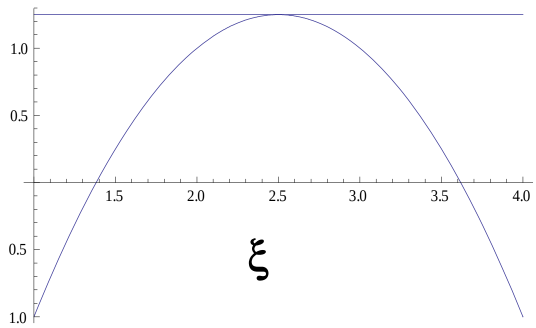
Si C_1 es la gráfica de f(x) y C_2 la de g(x) y xc la abscisa del punto de intersección de las curvas, se tiene



$$tg(\alpha) = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg(\varphi_1) - tg(\varphi_2)}{1 + tg(\varphi_1)tg(\varphi_2)} = \frac{f'(xc) - g'(xc)}{1 + f'(xc)g'(xc)}$$

Teorema de Rolle

Sea f(x) una función continua el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b) y se cumple que f(a) = f(b). Entonces existe por lo menos un punto ξ en el intervalo (a,b) donde f'(ξ) = 0



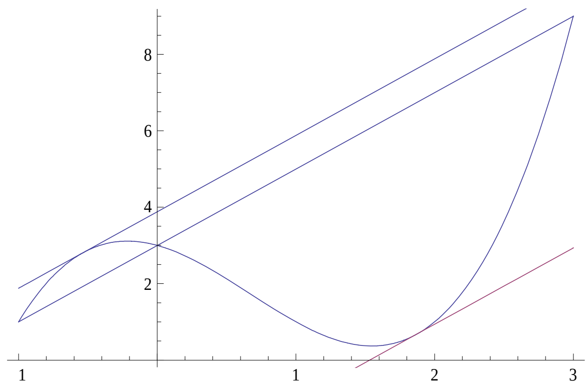
Teorema del Valor Medio o de Lagrange

Sea f(x) una función continua el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces su incremento es igual al incremento de la variable independiente por la función derivada evaluada en por lo menos un punto interior al intervalo (a,b)

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$$

o, alternativamente

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Este teorema es de gran utilidad en cálculo numérico y es extensamente aplicado en demostraciones de convergencia de procesos iterativos.

En general suele ser bastante dificultoso determinar el o los puntos intermedios en los que el teorema se cumple pero, si se trata de acotar la variación de la función basta con tomar el mayor valor posible de la derivada en el intervalo.

Teorema de Cauchy

Si dos funciones f(x) y g(x) son continuas en [a,b] y son derivables en (a,b) con derivadas que no se anulan simultáneamente, con g(b) ≠ g(a) entonces

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad a<\xi<b$$

Regla de L'Hopital

Sea calcular el límite indeterminado de la forma 0/0

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad f(a)=0 \qquad g(a)=0$$

por ser cero f(a) y g(a) puede escribirse

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

aplicando el teorema de Cauchy resulta

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si la indeterminación persiste, puede hacerse

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

hasta que la indeterminación desaparezca.

Otras indeterminaciones, como $\propto/\propto$; $0.\propto$; etc. Deben transformarse a la forma 0/0 para que sea aplicable la regla de L'Hopital

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

Pendiente de curvas

01 Determinar la pendiente de las siguientes curvas en sus intersecciones con los ejes coordenados

01 $y = \ln \dfrac{x^2 - 4x + 7}{4}$

02 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

03 $x = \ln \dfrac{y^2 - by + 17}{9}$

04 $y = e^{x^2 - 2x} - e^{-2}$

05 $(x+1)^{\frac{2}{3}} + (y+1)^{\frac{2}{3}} = 4$

02 Ídem

01 $\begin{cases} x = a[t - \pi - sen(t)] \\ y = -a\cos(t) \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = t^2 - a \\ y = t^2 - 2\sqrt{a} \quad t \end{cases}$

03 $\begin{cases} x = a\left[\sqrt{3} + 3tg(t)\right] \\ y = b\left[\sqrt{3} - 2\sec(t)\right] \end{cases}$

04 $\begin{cases} x = a\left[2 + \sec(t)\right] \\ y = b\left[\sqrt{3} - tg(t)\right] \end{cases}$

05 $\begin{cases} x = a\left[\sqrt{2} + 4sen^3(2t)\right] \\ y = b\left[\sqrt{3} - \dfrac{8}{3}\cos^3(2t)\right] \end{cases}$

03 Determinar la pendiente de las siguientes curvas en un punto genérico

01 $\rho = a\sqrt{\sec(2\theta)}$

02 $\rho = a\cos^4\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$

03 $\rho = \dfrac{a}{sen(\theta) + 1}$

04 $\rho = a^2 sen^5\left(\dfrac{\theta}{5}\right)$

05 $\rho = \dfrac{a}{1 - sen(\theta)}$

04 Hallar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a las siguientes curvas en los puntos indicados.

01 $y = 3x^2 - 2x + 5$ $P(-2,21)$

02 $y = 9 - 2x - x^3$ $P(1,6)$

03 $y = x^4 - x^3 + x - 8$ $P(1,-7)$

04 $\cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right) + sen\left(\dfrac{\pi y}{x}\right) = 0$ $P(-1,2)$

05 $sen(\pi xy) - \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$ $P(2,2)$

05 Hallar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a las siguientes curvas en los puntos indicados.

01 $\begin{cases} x = 4 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} sen(t) \\ y = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) \end{cases}$ $P(3.5,2.5)$

02 $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = ch(t) \end{cases}$ $P(0,1)$

03 $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{3}\sec(t) \\ y = 5 - \sqrt{3} tg(t) \end{cases}$ $P(0,6)$

04 $\begin{cases} x = e^{1-t^2} \\ y = e^{1+t^2} \end{cases}$ $P(e,e)$

05 $\begin{cases} x = \ln(1 + e^{-t}) \\ y = \ln(1 + e^{t}) \end{cases}$ $P(\ln 2, \ln 2)$

06 Hallar las ecuaciones de las tangentes que se pueden trazar por P(3,5) a las curvas:

01 $y = 3x^2 - 2x - 10$

02 $y = \dfrac{x+1}{x-7}$

03 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

04 $$y=-\frac{x^2+1}{x}$$

05 $$y=\frac{x^2+1}{x-2}$$

07 Hallar las tangentes horizontales y verticales a las siguientes curvas y sus puntos de contacto.

01 $$y=e^{-x}\cos(x)$$

02 $$y=e^{x}sen(x)$$

03 $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

04 $$\sqrt{x-a}+\sqrt{y-b}=\sqrt{c}$$

05 $$\frac{(x-a)^2}{m^2}+\frac{(y-b)^2}{n^2}=1$$

08 Hallar las tangentes horizontales y verticales a las siguientes curvas y sus puntos de contacto.

01 $$\begin{cases} x=a^2\cos(2t) \\ y=b^2sen(2t) \end{cases}$$

02 $$\begin{cases} x=a[2\cos(t)-\cos(2t)] \\ y=a[2sen(t)-sen(2t)] \end{cases}$$

03 $$\begin{cases} x=a+msen(t) \\ y=b-m\cos(t) \end{cases}$$

04 $$\begin{cases} x=a-b\cos(2t) \\ y=b-asen(2t) \end{cases}$$

05 $$\begin{cases} x=a[\cos(3t)-3\cos(t)] \\ y=a[sen(3t)-3sen(t)] \end{cases}$$

09 Hallar las tangentes horizontales y verticales a las siguientes curvas y sus puntos de contacto.

01 $\rho = 2\cos(\theta) - 3sen(\theta)$

02 $\rho = 5sen(\theta) - 3\cos(\theta)$

03 $\rho^2 = a^2 sen(2\theta)$

04 $\rho = asen(2\theta)$

05 $\rho = a\cos(2\theta)$

10 Hallar los puntos en que las siguientes funciones no tienen definida una tangente. Bosquejarlas.

01 $y = \operatorname{sgn}(x)$

02 $y = |x+2|$

03 $y^3 = sen^2(x)$

04 $y^5 = \cos^2(x)$

05 $\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = asen^3(t) \end{cases}$

11 Hallar la longitud de los segmentos tangente, subtangente, normal y subnormal en los puntos indicados

01 $y = sen(x)$ $P(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

02 $y = \ln(x)$ $P(e,1)$

03 $\begin{cases} x = asen(t) \\ y = a\cos(t) \end{cases}$ $P\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$

04 $\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = asen^3(t) \end{cases}$ $P\left(-\frac{a}{8}, \frac{3a\sqrt{3}}{8}\right)$

05 $\begin{cases} x = ash(t) \\ y = bch(t) \end{cases}$ $P\left(-\frac{3}{4}a, \frac{5}{4}b\right)$

12 Determinar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son crecientes y decrecientes y hallar sus puntos estacionarios.

01 $y = 3(x+4)(x-2)(x-8)$

02 $y = 2(1-x)(3-x)(5-x)$

03 $y = sen(3x)$

04 $y = \cos(4x)$

05 $y = 2(x+3)(x+2)(x-4)$

13 Determinar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son crecientes y decrecientes y hallar sus puntos estacionarios

01 $\begin{cases} x = \sqrt{t-4} \\ y = ch(t) \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = t - ath\left(\frac{t}{a}\right) \\ y = a\sec h\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases}$ Tractriz de Huygens

03 $\begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \cos(t) \end{cases}$

04 $\begin{cases} x = a[t - sen(t)] \\ y = a[1 + \cos(t)] \end{cases}$

05 $\begin{cases} x = a[t + sen(t)] \\ y = a[1 - \cos(t)] \end{cases}$

14 Determinar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son cóncavas o convexas, determinar sus puntos de inflexión y representarlas.

01 $y = e^{-x^2}$

02 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

03 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$

04 $y = \dfrac{x^3}{1-x}$

05 $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

15 Determinar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son cóncavas o convexas, determinar sus puntos de inflexión y representarlas.

01 $\begin{cases} x = tg(t) \\ y = sen(2t) - 1 \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = tg(t) \\ y = sen^2(t) \end{cases}$

03 $\begin{cases} x = tg(t) \\ y = tg(t)[1 - \cos(2t)] \end{cases}$

04 $\begin{cases} x = ctg(t) \\ y = \cos(2t) - 1 \end{cases}$

05 $\begin{cases} x = ctg(t) \\ y = ctg(t)[1 - sen(2t)] \end{cases}$

16 Determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y representarlas teniendo en cuenta tales datos.

01 $y = -x^3 + 4x - 1$

02 $y = 2x^4 - x^2 - 4$

03 $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$

04 $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

05 $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$

06 $y = \dfrac{x}{\ln(x)}$

07 $y = x\ln(x)$

08 $y = xe^{-x}$

09 $y = x - 2sen(x)$

10 $y = 3x + 2\sqrt{3}\cos(x)$

11 $y = e^{-x}\cos(x)$

12 $y = e^{x}sen(x)$

13 $y = 3sen(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}sen(2x)$

14 $y = 5sen(x) + \dfrac{3}{\sqrt{2}}sen(2x)$

15 $y = 9sen(x) - 5\sqrt{2}sen(2x)$

17 Determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y representarlas teniendo en cuenta tales datos.

01 $\begin{cases} x = tg(4t) \\ y = \cos^2(4t) \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = tg(3t) \\ y = sen(6t) \end{cases}$

03 $\begin{cases} x = ctg(2t) \\ y = \cos(4t) \end{cases}$

04 $\begin{cases} x = 4t - sen(2t) \\ y = 2 - \cos(2t) \end{cases}$

05 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}t + \cos(2t) \\ y = \sqrt{2} - sen(2t) \end{cases}$

18 Determinar el valor del argumento que hace máximo y mínimo el radio vector en las siguientes funciones y representarlas.

01 $\rho = 5 + 3sen\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

02 $\rho = 6 - 4\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

03 $\rho = 4 - 9\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

04 $\rho^2 + 2\rho[3\cos(\theta) - 2sen(\theta)] + 12 = 0$

05 $\rho^2 + 2\rho[3sen(\theta) - 5\cos(\theta)] + 18 = 0$

19 Hallar el ángulo que forman en cada una de sus intersecciones las gráficas cartesianas de los siguientes pares de funciones. Representar.

01 $\begin{cases} y = sen(x) \\ y = \cos(x) \end{cases}$

02 $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x = 1 - y^2 \end{cases}$

03 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ \dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{10} = 1 \end{cases}$

04 $\begin{cases} y = e^{-ax} \\ y = e^{-ax^2} \end{cases}$

05 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = \dfrac{a}{x^2} \end{cases}$

20 Hallar el ángulo que forman en cada una de sus intersecciones los gráficos polares de los siguientes pares de funciones y representarlas.

01 $\begin{cases} \rho = a\cos(\theta) \\ \rho = a[1 - \cos(\theta)] \end{cases}$

02 $\begin{cases} \rho = sen(\theta) \\ \rho = \cos(2\theta) \end{cases}$

03 $\begin{cases} \rho = a\sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \rho = a\cos ec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$

21 Verificar los siguientes límites aplicando la regla de L'Hopital

01 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(x) - arctg(x)}{\arccos(x) - arcctg(x)} = -1$

02 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(\sqrt{x} + 1)} = 4$

03 $$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \frac{1}{a}$$

APLICACIONES FÍSICAS DE LA DERIVADA

☆ 22 Sabiendo que la ecuación de un movimiento oscilatorio es

$$s = a\cos(\omega t + \alpha) \qquad a = 8cm \qquad \omega = \frac{\pi}{3}\frac{1}{seg} \qquad \alpha = \frac{3\pi}{8}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del móvil. Representar espacio, velocidad y aceleración en función del tiempo y representar el espacio de fases o gráfico paramétrico espacio velocidad. Analizar.

☆ 23 Sabiendo que la ecuación de un movimiento oscilatorio es

$$s = ae^{-.06t}\cos(\omega t + \alpha) \qquad a = 8cm \qquad \omega = \frac{\pi}{3}\frac{1}{seg} \qquad \alpha = \frac{3\pi}{8}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del móvil. Representar espacio, velocidad y aceleración en función del tiempo y representar el espacio de fases o gráfico paramétrico espacio velocidad. Analizar.

☆ 24 Sabiendo que la ecuación de un movimiento oscilatorio es

$$s = ae^{t}\cos(\omega t + \alpha) \qquad a = 8cm \qquad \omega = \frac{\pi}{3}\frac{1}{seg} \qquad \alpha = \frac{3\pi}{8}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del móvil. Representar espacio, velocidad y aceleración en función del tiempo y representar el espacio de fases o grafica paramétrica espacio velocidad. Analizar.

☆ 25 Analizar y dar conclusiones relativas a los movimientos representados en los tres problemas precedentes.

☆ PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MÍNIMOS

26 Dividir un número positivo a en dos sumandos de tal forma que su producto sea lo mayor posible

27 Torcer un trozo de alambre de longitud l, de manera que forme un rectángulo de área máxima.

28 Hay que hacer una superficie rectangular cercada por tres lados con alambre rombo y lindante por el cuarto con una larga pared de ladrillos. ¿Qué forma será más conveniente dar a la superficie para que su área sea máxima si se dispone de l metros lineales de alambre rombo.

29 ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

30 Inscribir en una superficie esférica de radio R un cilindro de volumen máximo.

31 Una hoja de hojalata de ancho a debe ser curvada longitudinalmente en forma de canalón cilíndrico abierto. ¿Qué ángulo central φ debe tomarse para que el canalón tenga la mayor capacidad posible?

32 En un plano coordenado se da un punto $M(x_0,y_0)$ situado en el primer cuadrante. Hacer pasar por ese punto una recta de tal manera que el triángulo formado entre ella y los semiejes positivos tenga la menor área posible.

33 Un corredor tiene que ir desde el punto A que se encuentra en una de las orillas de un río. Al punto B que se halla en la otra orilla. Sabiendo que la velocidad del movimiento por la orilla es k veces mayor que la del movimiento en el agua, determinar bajo qué ángulo deberá atravesar el río para llegar al punto B en el menor tiempo posible. El río tiene un ancho h y, por la orilla A y B están a la distancia d

34 Determinar el ángulo central del sector circular de papel de radio r = 15 cm que se debe emplear para construir un vaso cónico del mayor volumen posible.

35 Un cartel mural tiene sus bordes superior e inferior a las alturas a y b respectivamente, sobre los ojos de una persona. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse ésta (la persona) para que el ángulo visual determinado por el ojo y los bordes sea máximo, si a = 5 m y b = 2 m?

☆ **ENFATICA RECOMENDACIÓN DE ANALIZAR, PLANTEAR, RESOLVER E INTERPRETAR**