ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 07

DIFERENCIALES

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

Corresponde señalar que la notación que se utiliza en esta parte de la asignatura es la misma que en su momento propusiera Leibniz en su afán de filósofo de fundar sobre bases sólidas el ahora llamado Análisis Matemático.

La sola permanencia en el tiempo de esta notación da una idea clara del éxito, universalmente utilizada por las ciencias experimentales y la ingeniería en el planteo de sus modelos matemáticos.

Por eso y por la agilidad y agudeza mental que crea el estudio sistemático y profundo del análisis matemático, lo transforman en el lenguaje por excelencia de la ingeniería. Además contribuye en gran medida a la formación de la independencia intelectual necesaria y fundamental para el ejercicio de la profesión.

Dicho esto como homenaje a Leibniz y sin por ello desmerecer un ápice a Newton se entra a continuación en tema.

La diferencial

Sea y = f(x) una función derivable en un punto x_0 de su dominio.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Como toda función con límite es igual a este (el límite) más un infinitésimo, se puede escribir

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x \qquad \varepsilon \to 0, \Delta x \to 0$$

La expresión anterior es equivalente a decir que el incremento de una función derivable en un punto está compuesto de dos términos. Uno, el primero es lineal en el incremento Δx y el otro es un producto de dos infinitésimos, es decir, es un infinitésimo de orden superior al primero.

La parte del **incremento** de la función que es **lineal en el incremento** de la variable independiente se llama **diferencial de la función** y se lo nota dy.

Entonces, por definición

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

Si y = x se tiene, por ser y' = 1

$$dx = \Delta x = h = x - x_0$$

Lo que, a su vez permite escribir

$$dy = f'(x_0)dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

la derivada como un cociente de diferenciales.

Antes de pasar a la interpretación geométrica de la diferencial recién definida corresponde hacer dos salvedades.

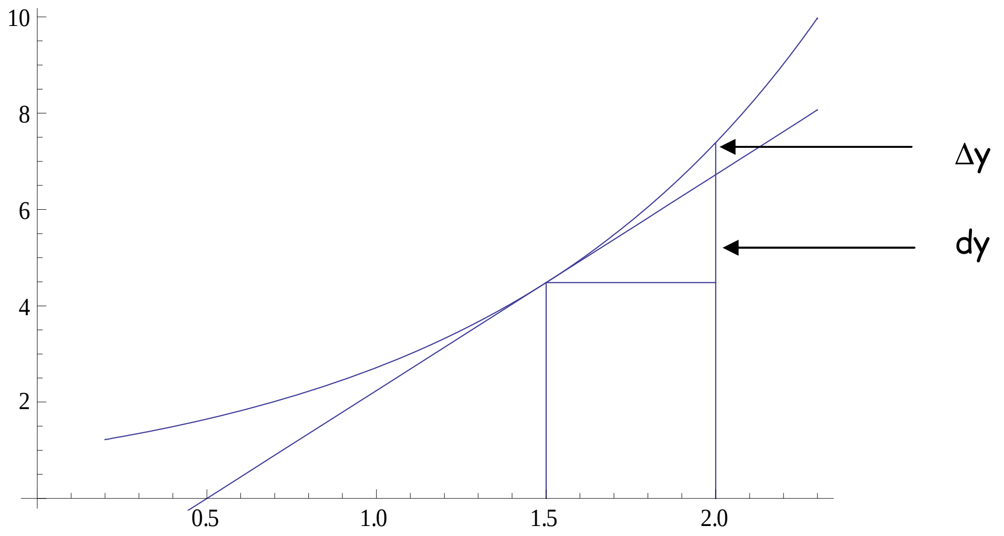
Primera: la diferencial es de género femenino. Debe decirse y naturalmente, escribirse, LA diferencial y **NO** EL diferencial.

Segunda: tal vez por arrastre de aquellas cosas como los incrementos evanescentes que llegan a valer casi cero pero no cero o aquellos otros disparates de los ceros pequeños que ocuparon algún lugar antes de estar rigurosamente fundamentado el análisis matemático; algunos trasnochados supervivientes piensan que dx es más chiquito que $\Delta x = x - x_0$. O que Δx es un poquito más grande que dx. En esos casos es pertinente preguntar ¿Cuánto más chiquito es dx que Δx? o, alternativamente ¿Cuánto más grande es Δx que dx?.

Se han observado experimentalmente varios tartamudeos, carraspeos y extraños movimientos de índice y pulgar tratando de explicar el supuesto "tamaño" de uno u otro. Siempre la supuesta diferencia ha sido vencida y, definitivamente ha triunfado invicta la igualdad

$$dx = \Delta x = h = x - x_0$$

Hecha las salvedades anteriores se pasa a la interpretación geométrica de la diferencial.



$dx = \Delta x = x - x_0$

La diferencial es el incremento de la tangente a la curva representativa de $y = f(x)$ en $x = x_0$ cuando x pasa de x_0 a x. Cuando eso ocurre la función tiene una variación Δy que, en el caso de la figura es mayor que dy, en otros casos puede ser menor y, en el caso de funciones lineales, por ejemplo, son coincidentes $dy = \Delta y$

La parte "casi" triangular (un lado es curvo) comprendida entre la recta tangente y la curva representativa de $y = f(x)$ representa el infinitésimo de orden superior no tomado en cuenta al definir la diferencial. Obsérvese cuan rápidamente se hace cero.

Propiedades de la diferencial

La diferencial es infinitésimo equivalente al incremento. En efecto, siendo

$$dy = y'dx$$

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x = y'dx + \varepsilon dx = dy + \varepsilon dx$$

y el cociente

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{\Delta y}{y'\Delta x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

lo que completa la prueba e indica que, en el entorno del punto considerado puede ponerse dy $\cong \Delta$y. De esta última se deduce que

$$f(x+h) - f(x) = \Delta y \cong dy = f'(x)h$$

$$f(x+h) \cong f(x) + f'(x)h$$

muy útil en cálculos aproximados y para el cálculo de errores.

La diferencial es invariante. En efecto, supóngase que y = f(u) y que a su vez u = u(x). Entonces dy = f'(u) du, pero du = u'(x)dx. Reemplazando queda dy = f'(u)u'(x)dx que es lo mismo que hallar dy cuando y = f[u(x)]

Reglas de diferenciación. U y v denotan funciones de x. C es una constante

$$\begin{aligned}
&dc = 0 \\
&d(cu) = cdu \\
&d(u \pm v) = du \pm dv \\
&d(uv) = udv + vdu \\
&d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \\
&df(u) = f'(u)du
\end{aligned}$$

Obviamente similares a las reglas de derivación.

Diferenciales de orden superior

Sea Δx = dx = x-x_0 constante. Entonces

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dxdx = y''dx^2$$

de donde

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

que se lee derivada segunda de y con respecto a x dos veces. Generalizando

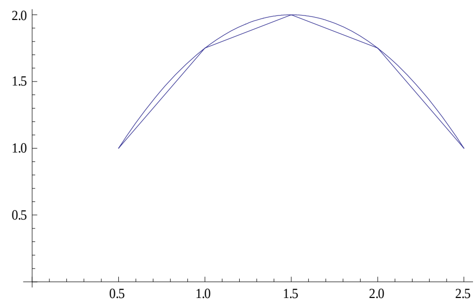
$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

que se lee derivada enésima de y con respecto a x n veces.

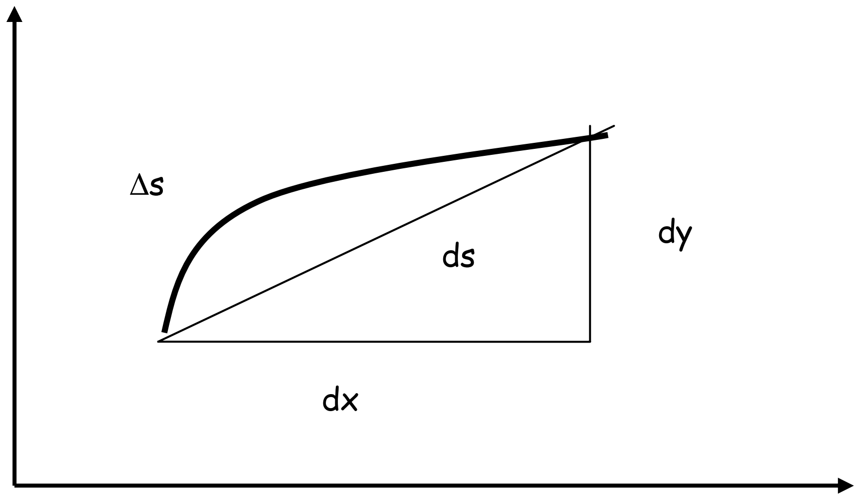
Rectificación de curvas

Sea una curva continua con derivada continua en un intervalo [a,b]. Una forma de aproximar la longitud de esa curva consiste en inscribir (o circunscribir) a la curva una poligonal cuyos lados rectos sean fácilmente medibles. Si luego se hace cada vez más "fina" la poligonal, es decir, si cada vez se considera un mayor número de lados, la aproximación, en principio, mejorará. Llámese $P_{k-1}P_k$ a cada uno de los lados de la poligonal. La curva es rectificable si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k$$



Si existe, el límite se denomina Longitud de la Curva. La sumatoria esta formada por "elementos de arco" cuya longitud se puede estimar de la siguiente manera.



Por el teorema de Pitágoras es

$$\Delta s \cong ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + f'(\xi)^2 dx^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Si la curva está dada por sus ecuaciones paramétricas, el elemento de arco es

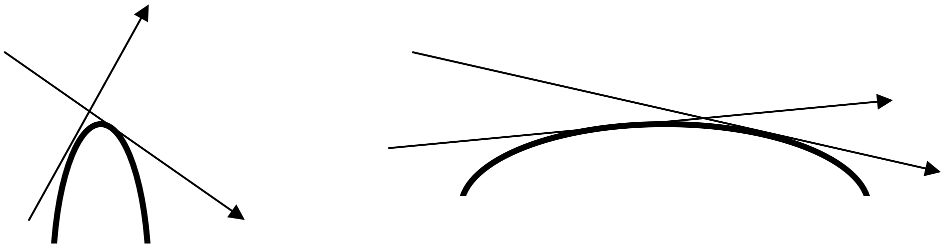
$$C\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Y, si está dada por su ecuación en coordenadas polares, $\rho = \rho(\theta)$ recordando las ecuaciones de transformación a coordenadas cartesianas ortogonales, resulta (verificar)

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$$

Curvatura

¿Cuál es una diferencia notable entre estas dos curvas?



En la primera, al recorrer un tramo de curva Δs las tangentes sufren una gran variación mientras que en la segunda la variación de las tangentes no es pronunciada o no tan pronunciada como en la primera.

A simple vista puede decirse que la primera está "más curvada" y que la segunda es "menos curvada"

Se precisa el concepto definiendo curvatura. Se define como curvatura de una curva en un punto a

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

donde $\Delta\varphi$ es el ángulo que forman las tangentes trazadas por los extremos del elemento de arco Δs.

Como $f'(x) = \mathrm{tg}\,\varphi$ es $\varphi = \mathrm{arctg}\, f'(x)$, entonces

$$d\varphi = \frac{f''(x)dx}{1 + f'(x)^2}$$

Y como $ds \cong \Delta s = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ resulta

$$\kappa = \frac{\frac{f''(x)dx}{1+f'(x)^2}}{\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx} = \frac{f''(x)}{\sqrt{\left(1+f'(x)^2\right)^3}} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$$

La inversa de la curvatura es el radio de curvatura.

$$r = \frac{1}{\kappa}$$

En coordenadas paramétricas la curvatura es

$$C\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \kappa = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^3}}$$

y, en coordenadas polares

$$\rho = \rho(\theta) \qquad \kappa = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\sqrt{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^3}}$$

Circulo osculador

Sea C una curva representativa de la función y =f(x) y un punto P(x, y) de la misma. Se busca una circunferencia que pase por P y que además tenga en común con la función f(x) sus derivadas primera y segunda en P. Como la curvatura κ de C depende de y' y de y'' y siendo estas iguales para la circunferencia que se busca, resulta que la misma tiene en P la misma curvatura que C. Esta circunferencia se llama osculadora (del latín *osculum,* beso).

Su ecuación será de la forma

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Derivando dos veces se tiene

$$(x-\alpha)+(y-\beta)y' = 0$$

$$1+y'^2+(y-\beta)y'' = 0$$

de la segunda

$$y-\beta = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

reemplazando y operando se llega a

$$x-\alpha = \frac{\left(1+y'^2\right)y'}{y''}$$

Queda finalmente

$$\frac{\left(1+y'^2\right)^2 y'^2}{y''^2}+\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}=\frac{\left(1+y'^2\right)^3}{y''^2}$$

que coincide con el radio de curvatura antes calculado.

Evoluta. Evolvente.

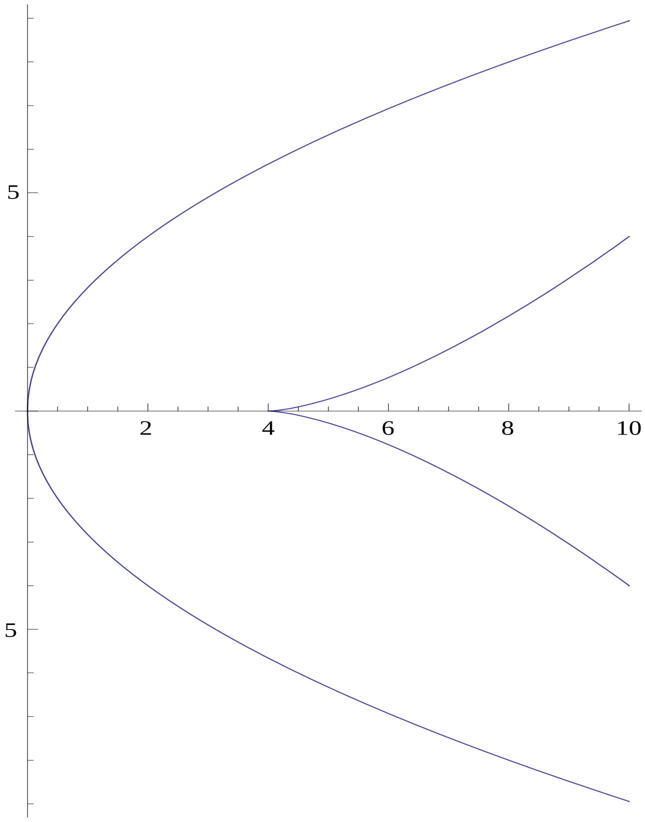
Se denomina evoluta de una curva C al lugar geométrico (*locus*) de sus centros de curvatura.

Despejando α y β de las expresiones anteriores resultan las ecuaciones paramétricas de la evoluta

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(x) = x - \dfrac{\left(1+y'(x)^2\right)y'(x)}{y''(x)} \\ \beta = \beta(x) = y(x) + \dfrac{1+y'(x)^2}{y''(x)} \end{cases}$$

donde se ha explicitado adrede el parámetro x. La curva C es una evolvente de la evoluta.

A continuación, como ejemplo se grafican la curva $y^2 = 8x$ y su evoluta


5
2
4
6
8
10
5

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

01 Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = 3x^2 - x$

02 Calcular Δy y dy para la función $y = 3x^2 - x$ en $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$

03 ¿En cuánto aumentará aproximadamente el lado de un cuadrado si su área aumenta de 9 m^2 a 9.1 m^2?

04 ¿Tiene diferencial la función $|x|$ en $x = 0$?

05 Dar una interpretación geométrica del incremento y la diferencial de las expresiones que permiten calcular el área de un círculo y el volumen de un cubo.

06 ¿En cuánto aumenta, aproximadamente, el volumen de una esfera, si su radio de 15 cm se alarga 2mm?

07 Hallar los valores aproximados de las funciones

01 $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \qquad x = 1.03$

02 $y = \sqrt{1+x} \qquad x = 0.2$

03 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} \qquad x = 0.1$

04 $f(x) = e^{1-x^2} \qquad x = 1.5$

05 $u = \sqrt[4]{17}$

08 Sabiendo que x e y son dos números almacenados en la memoria de una computadora con errores relativos ε_x y ε_y respectivamente, estimar el error relativo con que resultan las operaciones.

01 Adición

02 Sustracción

03 Multiplicación

04 División

09 Hallar la diferencial que en cada caso se indica

01 $y = \sqrt{1 - x^2}$ d^2y

02 $y = \arccos(x)$ d^2y

03 $y = x^2 e^{-x}$ d^3y

04 $y = \dfrac{x^4}{2 - x}$ d^4y

05 $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ d^2y

11 Hallar la curvatura de las siguientes curvas en los puntos indicados.

01 $y = x^4 - x^2$ *en sus extremos*

02 $y = sen(x)$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ $x = \pi$

03 $y = ch(x)$ *cualquiera*

04 $3x + 2y - 4 = 0$ *cualquiera*

05 $y = e^x$ $(0,1)$

10 Hallar la curvatura y el radio de curvatura de las siguientes curvas en los puntos indicados.

01 $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2sen(t) \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = 2(t + sen(t)) \\ y = 2(1 + \cos(t)) \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{4}$ $t = \dfrac{\pi}{2}$

03 $\begin{cases} x = a\cos(nt) \\ y = bsen(2nt) \end{cases}$ *genérico*

04 $\rho = a(1-\cos(\theta))$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

05 $\rho = \frac{a}{\theta}$ $\theta = 1(radián)$

12 Determinar la ecuación del círculo osculador a cada una de las siguientes curvas. Representar las curvas y los círculos hallados.

01 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ $P(2,-3)$

02 $y = sen(\pi x)$ $P(-\frac{1}{4},-\sqrt{2})$

03 $y = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ $P(1,-1)$

04 $\begin{cases} x = x(t) = a\cos^3(t) \\ y = y(t) = bsen^3(t) \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$

05 $\begin{cases} x = x(t) = t - ath\left(\frac{t}{a}\right) \\ y = y(t) = a\sec h\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases}$ $t_0 = a$

13 Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de las siguientes curvas. Representar en un mismo gráfico cada curva y su evoluta.

01 $y = 3x^2 - 2x - 4$

02 $y = \ln[\cos(x)]$

03 $y = ch(x)$

04 $$\begin{cases} x = x(t) = a\left[t - sen(t)\right] \\ y = y(t) = a\left[1 - \cos(t)\right] \end{cases}$$

05 $$\begin{cases} x = x(t) = a\left[4\cos(t) - \cos(4t)\right] \\ y = y(t) = a\left[4sen(t) - sen(4t)\right] \end{cases}$$

ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 08

INTEGRAL DEFINIDA

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

Para todo terrateniente o agricultor egipcio debía ser una cuestión fundamental determinar el área de sus terrenos luego de la crecida anual del Nilo, fuente de todos los nutrientes necesarios para que sus cosechas fueran exitosas. El Faraón, en razón a los impuestos con los que mantenía el reino, también quería saberlo.

Para todo mercader fenicio debía ser un serio problema determinar el volumen de aceite o miel o vino que recibía en ánforas transportadas por naves griegas, porque de ello dependía el precio que debía pagar por ellas y, para los griegos también lo era porque de ello dependía en precio que debían pedir por su contenido.

Para cualquier conquistador de aquellas épocas debía ser motivo de preocupación poder decirle a sus súbditos la cantidad de terreno conquistado para el reino, justificando así su costosa expedición guerrera.

Para cualquier carabela que se adentraba en la mar océano debía ser un tema de vida o muerte saber la cantidad de agua potable que trasportaban los barriles ubicados en sus bodegas.

Estos y otros muchos problemas prácticos fueron resueltos en forma aproximada. Constituyen el antecedente remoto de lo que hoy se conoce como cálculo integral.

A continuación se transcribe un trabajo de **MACARENA ANSOLA FERNÁNDEZ-ENRÍQUEZ,** Licenciada en Matemáticas, electrónicamente publicado y que, a juicio del autor, resume bastante bien el tema. Se agregan comentarios de cosecha propia sobre el texto original, resaltándolos en cursiva.

En su origen, lo que hoy se conoce como cálculo integral surge a partir del problema geométrico del cálculo de áreas de superficies planas, *y volúmenes* y este problema nos remonta a la antigüedad.

La geometría griega se interesó pronto por las áreas de figuras en el plano y los volúmenes de cuerpos geométricos. También tempranamente descubrieron que el tratamiento de las figuras de contornos curvilíneos no era sencillo de abordar.

Fue **Arquímedes** (272-212 a.C.) el que, al intentar determinar el área de un segmento parabólico, plantea lo que se conoce como método de exhaución, y que consiste en aproximar sucesivamente por exceso y por defecto la figura a medir, si bien atribuye a **Eudoxo** (s. IV a. C.) la demostración de que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen del cilindro de igual base y altura. En posteriores trabajos calcula los volúmenes de los segmentos obtenidos al cortar elipsoides, paraboloides o hiperboloides de revolución, además de estudios sobre la esfera y el cilindro. Pero lo fundamental de su estudio no son los resultados puntuales que logró, sino el hecho de que sugiriera un camino que conduce a una definición del concepto de área y de integral que germinará unos 1800 años después.

¡Atención a lo que sigue: desde, podría decirse 250 A.C. hasta 1600 d.C.! ***Cuesta mucho, muchísimo alcanzar ideas originales.***

Kepler (1571-1630), interesado en las cónicas para su aplicación en la astronomía, plantea el cálculo del área de una órbita considerándola formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol, en lo que resulta una especie de cálculo integral rudimentario. Obtiene así algunos resultados que en su día ya logró Arquímedes, aunque, perdidos en el tiempo, no habían logrado llegar a la época de Kepler. En 1612, de resultas de un año de vino excepcionalmente bueno, se cuenta que Kepler se preocupó del estudio de volúmenes, motivado por la inexactitud de las cuentas de los vinateros al medir el vino que cabía en sus toneles. Recupera así los métodos arquimedianos y los aplica también a otros sólidos de revolución no considerados por el matemático griego.

El que se debe haber preocupado fue el Príncipe reinante que debió ver la posibilidad de perder impuestos sobre el vino a vender por mala medida de su volumen y le debe haber dicho al bueno de Kepler "si con esta cosecha pierdo plata, olvidaos señor, de vuestros trabajos astronómicos"

Kepler entendió rápidamente este diplomático lenguaje y escribió el trabajo " Nova stereometria doliolum vinatorum (1615)" *donde cubica toneles.*

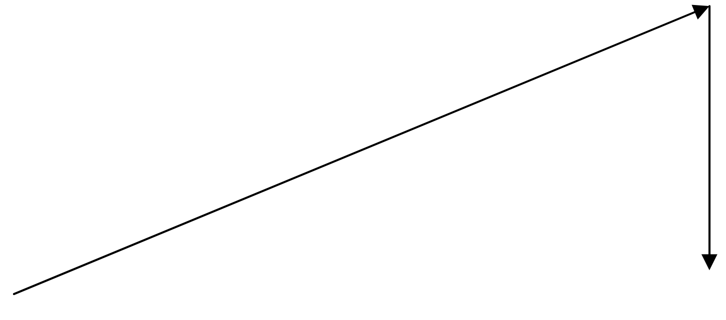
En 1589, Kepler viajó para seguir estudios de sacerdote en la gran Universidad de Tübingen, y este paso fue para él una liberación. Confrontado a las corrientes intelectuales más vitales de su tiempo, su genio fue inmediatamente reconocido por sus profesores, uno de los cuales introdujo al joven estudiante en los peligrosos misterios de la hipótesis de Copérnico. Peligrosos misterios porque para la iglesia la tierra era el centro del universo y decir que no era así, que el sol era el centro del universo era sencillamente, una herejía y para eso estaba la inquisición.

Sin embargo se animó a descartar las orbitas circulares, únicas posibles según los maestros Aristotélicos y postuló orbitas elípticas. Fue un enorme salto para la ciencia.

Por eso, Kepler junto a Galileo y a Newton pueden ser considerados los iniciadores de la ciencia moderna. ***Lo que no es poco.***

También **Galileo** se interesará por una cónica, en este caso la parábola, al estudiar la trayectoria de un proyectil y en él hallamos la integral que expresa el espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado (el de un cuerpo que cae, por ejemplo).

Antes de Galileo, imperaban los paradigmas científicos de Aristóteles para quien la composición de movimientos no existía. Los tiros, según su concepción física, constaban de una fase activa, recta y de una fase pasiva, también recta. Con esa concepción, para los doctos académicos de aquel entonces, la trayectoria de un proyectil era algo así:



Galileo echaba por tierra esas teorías y por lo tanto, los doctos se defendían echando leña al fuego de la supuestas herejías de Galileo.

Por supuesto, junto a Galileo, los artilleros de su Serenísima Majestad sabían perfectamente que los proyectiles (una bola de hierro) no le aplastaban la cabeza a nadie, sino que describían una trayectoria que no conocían teóricamente pero que les permitía apuntar como corresponde sus rudimentarios cañones.

En 1635, un religioso italiano, **Bonaventura Cavalieri** publica *Geometria indivisibilibus continuorum*. Allí **Bonaventura Cavalieri** (alumno de Galileo) se acerca intuitivamente a lo que hoy entendemos como integral, considerando que una superficie su puede suponer formada por segmentos rectilíneos o indivisibles y, de modo análogo, que un volumen se compone de secciones indivisibles o volúmenes quasi-atómicos.

Este buen hombre es el que armó una de las confusiones más grandes en el desarrollo del pensamiento matemático. Sus indivisibles se metieron y perduraron en mentes preparadas y fueron necesarios varios siglos para desterrarlas, pero aún suelen manifestarse esporádicamente bajo la excusa de que semejantes hechicerías "hacen más comprensible la materia". Son, intelectualmente hablando, anteriores a don Bonaventura aunque estén actuando ahora.

Otro gran matemático del siglo XVII, **Pierre de Fermat**, se interesará también por estos temas que hoy llamaríamos de análisis infinitesimal, entre ellos el área encerrada entre una curva y una recta. Sin embargo, aunque sus investigaciones fueron bastante más rigurosas que las de Cavalieri y otros, y estudió ampliamente las curvas de tipo $y = kx$, no se percató de la relación inversa entre integración y derivación. De hecho, contrariamente a la exposición habitual que hoy suele utilizarse, el cálculo integral se anticipó al cálculo diferencial para algunas funciones, entre ellas la función logarítmica.

Isaac Barrow (1630-1677) sí alcanzó a reconocer el carácter inverso de estos procesos y su sucesor en la cátedra, **Isaac Newton** (1642-1727), continuando su línea de trabajo, muestra el primer ejemplo histórico del cálculo de un área mediante el proceso inverso a la diferenciación. Por su parte, **Leibniz** (1646-1716) logrará pasar a la Historia, entre otros méritos, por su afán de sistematización y el desarrollo de una notación eficiente. A él debemos el símbolo $\int$ y, y más tarde $\int ydx$, surgido al estilizar la *S* inicial de suma.

Será **Cauchy** (1789-1857) el que retome el sentido geométrico de la integral y, separándola del cálculo diferencial, la define como un límite de sumas.

¡Cuando no, Cauchy! Obviamente Napoleón sabía lo que hacía cuando lo pone a dar clases en el Politécnico. Dicen que allí, en sus clases, Cauchy ¡hacía matemática original!

A partir de ahí, **Riemann** (1826-1866), **Stieltjes** (1856-1933) y **Lebesgue** (1875-1941), entre otros, serán ejes fundamentales para la noción de integral que tenemos en la matemática actual

La integral, junto con la derivada, se constituyó en una herramienta enormemente poderosa para expresar y calcular diversos conceptos importantes de la Física y de otras disciplinas: espacio, trabajo, caudal, probabilidades... El área y el volumen fueron los primeros de toda una serie que incluye casos tan anómalos como funciones con infinitos puntos de discontinuidad, funciones continuas sin derivada para cada punto del dominio, o la extensión de la definición de integral a intervalos no compactos e incluso infinitos.

En el curso será suficiente tratar únicamente la integral de Riemann. Quien se interese especialmente por el análisis matemático podrá ver las otras por su cuenta.

Largo camino desde la antigua Grecia. No estaría mal tenerlo presente la próxima vez que se encuentre la expresión, hoy ya clásica,

$$\int_a^b f(x)dx$$

La integral de Riemann

Recordatorio:

Supremo: mínima cota superior (la más chica de las grandes). Si es accesible se llama máximo
Ínfimo: máxima cota inferior (la más grande de las chicas). Si es accesible se llama mínimo.

Partición de un intervalo

Una **partición P del intervalo cerrado [a, b]** es un conjunto finito de puntos P = { $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$} tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <, ... ,< x_{n-1} < x_n = b$$

La diferencia máxima entre cualesquiera dos puntos consecutivos de la partición, se llama **norma de la partición**, y se denota por $\delta = || P||$, es decir:

$$\delta = || P || = \max \{x_k - x_{k-1} , k = 1 ... n\}$$

Un **refinamiento de la partición P** es otra partición P' que contiene todos los puntos de P y además otros puntos adicionales, también ordenados en orden de magnitud.

Suma de Riemann superior e inferior.

Sea P = { $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$} una partición del intervalo cerrado [a, b] y f(x) una función acotada definida en ese intervalo. Entonces:

La **suma superior de f(x) respecto de la partición P** se define así:

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

donde c_k es el supremo de f(x) en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

La **suma inferior de f(x) respecto de la partición P** se define así:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} d_k (x_k - x_{k-1})$$

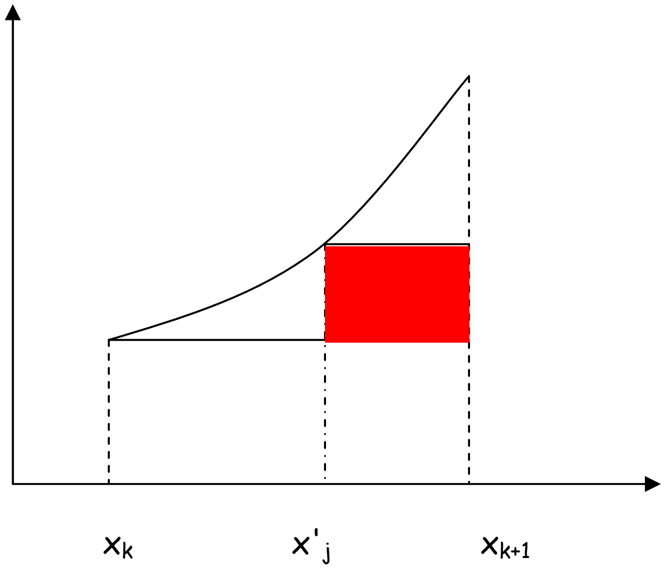
donde d_k es el ínfimo de f(x) en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Variación de las sumas de Riemann

Si P = { $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$} es una partición del intervalo cerrado [a, b] y f(x) una función acotada definida en ese intervalo, entonces la suma inferior aumenta a medida que se van tomando refinamientos de la partición P, porque cada rectángulo se divide en otros de altura igual o superior, y la suma aumenta. Es decir:

$$s(f, P) < s(f, P')$$

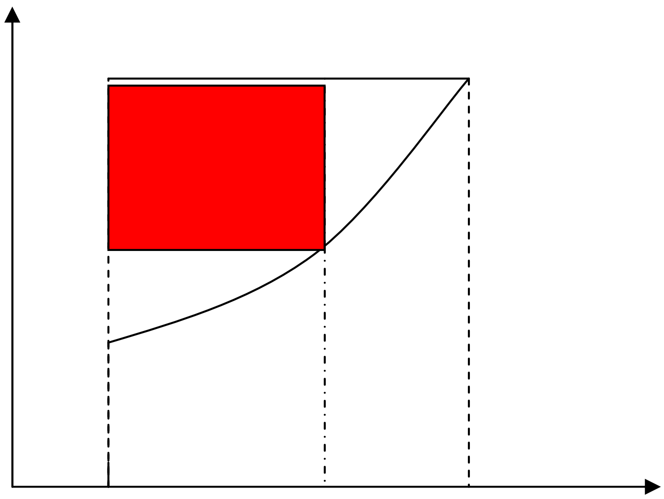
Gráficamente, se puede ver en color el área que aumenta:



La suma superior disminuye a medida que se van tomando refinamientos de la partición P, porque cada rectángulo se divide en otros de altura igual o inferior, y la suma siempre disminuye. Es decir:

$$S(f, P') < S(f, P)$$

Gráficamente, se puede ver en color el valor que disminuye.



En definitiva, a medida que se afina la partición P las sumas inferiores crecen y las sumas superiores decrecen. Por supuesto, toda suma inferior es menor que cualquier suma superior.

$$s(f,P) \leq s(f,P') \leq \ldots \leq s(f,P^{(n)}) \leq S(f,P) \leq S(f,P') \leq \ldots \leq S(f,P^{(n)})$$

Integral de Riemann superior e inferior.

Llegados a este punto, se define como integral superior de Riemann a

$$I^* = \inf\{S(f,P), \delta \to 0\}$$

y, como integral inferior de Riemann a

$$I_* = \sup\{s(f,P), \delta \to 0\}$$

Funciones Riemann-Integrables

Si se cumple que $I^* = I_* = I$ la función f(x) es integrable según Riemann y se escribe

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Hay que destacar que las sumas superior e inferior dependen de la partición particular escogida, mientras que las integrales superior e inferior son independientes de las particiones elegidas. Sin embargo, esta definición es difícil para ser aplicada de forma práctica, pues es necesario conocer el ínfimo y el supremo sobre cualquier partición.

Caracterización de las funciones Riemann-Integrables

Se supone que **f(x)** es una función acotada definida en el intervalo cerrado [a, b]. Entonces **f(x) es integrable Riemann** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe al menos una partición P tal que

$$| S(f, P) - I(f, P) | < \varepsilon$$

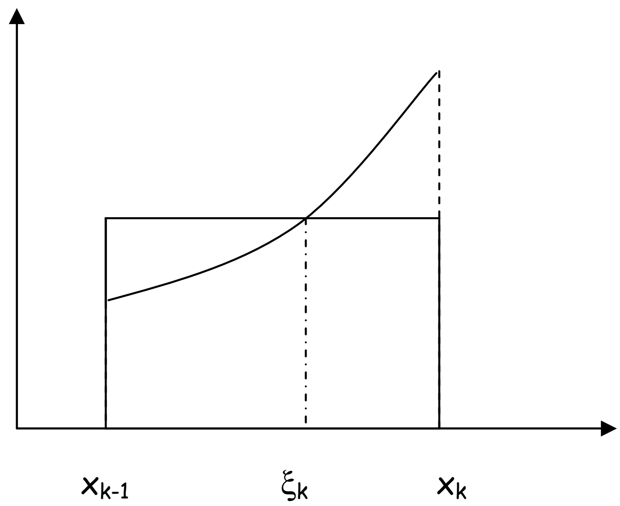
donde S(f, P) es la suma superior de f respecto de la partición P, e I(f, P) es la suma inferior de f respecto de la partición P. Huele a límite, parece un límite cuando $\delta \to 0$; tiene un $\varepsilon > 0$ como los límites, entonces, ¡es un límite!

Sumas de Riemann

Si P = { x_0, x_1, x_2, ..., x_n} es una partición del intervalo cerrado [a, b] y **f(x)** es una función definida en ese intervalo, entonces la **Suma de Riemann de f(x) respecto de la partición P** se define como:

$$R(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

donde ξ_k es un número arbitrario en el intervalo [x_k, x_{k-1}].



la suma de Riemann se corresponde geométricamente con la suma de las áreas de los rectángulos con base $x_k - x_{k-1}$ y altura f(ξ_k).

Tipos de aproximación de la integral

Surge la duda de qué punto ξ_k tomar dentro de cada subintervalo de la partición para evaluar la función en ese punto. En este sentido hay varias posibilidades para elegir el punto ξ_k en el subintervalo [x_{k-1}, x_k], y las más utilizadas son éstas:

Punto izquierdo: se toma como valor ξ_k el límite inferior del subintervalo, es decir, x_{k-1}.

Punto derecho: se toma como valor ξ_k el límite superior del subintervalo, es decir, x_k.

Punto medio: se toma como valor ξ_k el punto medio entre los límites del subintervalo, es decir, $(x_{k-1} + x_k) / 2$.

Punto aleatorio: se toma como valor ξ_k un punto elegido aleatoriamente entre todos los puntos del subintervalo.

Punto ínfimo: se toma como valor ξ_k aquel punto del subintervalo tal que $f(\xi_k)$ es el ínfimo en ese subintervalo.

Punto supremo: se toma como valor ξ_k aquel punto del subintervalo tal que $f(\xi_k)$ es el supremo en ese subintervalo.

Los dos últimos tipos de aproximación no son útiles en la práctica, pues para aplicarlos sería necesario calcular el ínfimo o el supremo de $f(\xi_k)$ teniendo que recorrer todo el subintervalo. Esto no es necesario; ¿Por qué?

Porque si una función es Riemann-Integrable, se puede aproximar la integral por sumas de Riemann R(f,P) tomando ξ_k en forma arbitraria.

Si la función es Riemann-Integrable, cualquier suma de Riemann R(f, P) tiende al valor de la integral, porque para cualquier punto ξ_k se tiene que $d_k < f(\xi_k) < c_k$ (siendo d_k el ínfimo y c_k el supremo en ese subintervalo), luego $I(f,P) < R(f,P) < S(f,P)$.

Funciones Riemann-Integrables

- Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.
- Toda función continua y acotada en un intervalo cerrado y acotado, excepto en una cantidad numerable de puntos, es Riemann-Integrable.
- Recíprocamente, si una función acotada definida en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable, entonces es continua en ese intervalo excepto como mucho en una cantidad numerable de puntos.
- Toda función monótona y acotada en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.

Advertencia

Resulta oportuno en este nivel de desarrollo del tema hacer una advertencia. No cabe ninguna duda que, si la función f(x) es integrable (R) en el intervalo [a,b] el número resultante al integrar mide el área comprendida bajo la curva, las verticales por a y por b y el eje de las abscisas.

Esa es una interpretación geométrica correcta, pero de allí a decir, como suele hacerse, que "la integral es el área" hay un abismo tan grande como el que había cuando se decía "la derivada es la tangente".

La integral definida no "es" el área. Es un número trabajosamente definido cuyas interpretaciones geométricas y físicas son múltiples y valiosas. Además si "fuese" el área por qué se la aplica, por ejemplo, para calcular un volumen de revolución. Que se sepa una "máquina" concebida para medir áreas ¿cómo mide volúmenes?

Cuidado con lo que se dice porque lo que se dice a menudo puede tomarse como cierto, por repetición y corromper conceptos matemáticamente muy claros.

La integral definida es solamente un número. Sus interpretaciones son otra cosa.

Propiedades de la integral de Riemann

1° Propiedad aditiva del intervalo.

Si c es tal que a < c < b, es decir un punto intermedio del intervalo [a,b] se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2° Por definición

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3° Si se escribe

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

4°	Linealidad

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Si c = -1, funciones opuestas tienen integrales opuestas.

5°	Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x) + \int_a^b f_2(x)dx$$

6°	Generalizando 4° y 5° se escribe

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{k=n} c_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \int_a^b f_k(x)dx$$

Siendo necesario que la sumatoria esté extendida a un número finito de términos.

7°	Si $f(x) \leq g(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Siendo $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, resulta

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Y de esta última

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema del valor medio

Sea f una función integrable definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b], entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

donde m es el mínimo absoluto de f(x) en [a,b] y M es el máximo absoluto en el mismo intervalo.

También puede escribirse

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

donde μ es el valor medio

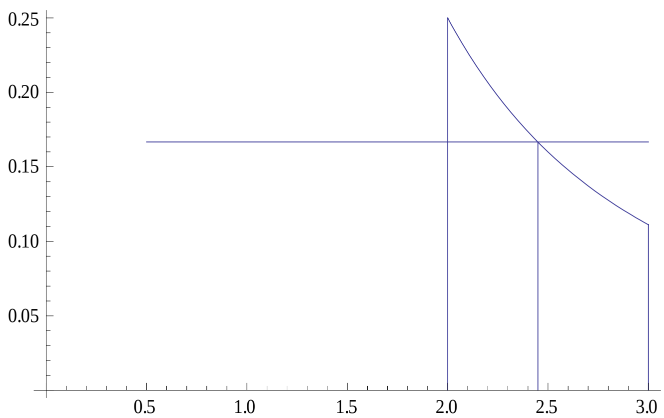
$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

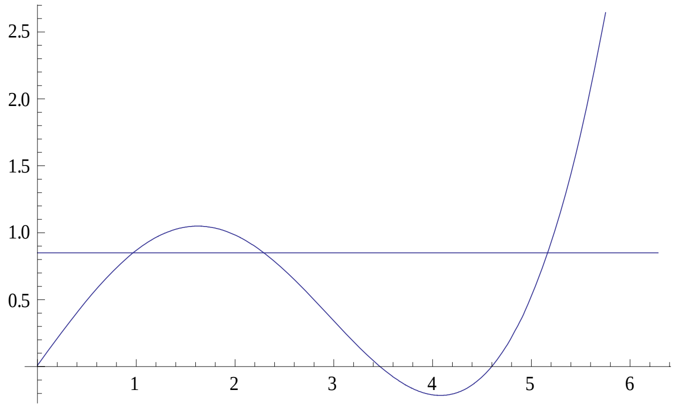
de la función en el intervalo considerado.

Si la función es **continua** en [a,b] será

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

donde ξ es la abscisa donde la horizontal por μ corta a la curva representativa de f(x). Obsérvese que esa horizontal puede cortar en más de un punto a la curva representativa de f(x).





Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f(x) una función integrable (R) definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b], se define una nueva función

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$$

es decir, una función del límite superior de la integral (R).

A continuación se investiga si la función F(x) es derivable. Para ello se calcula su incremento

$$\Delta F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi - \int_a^x f(\xi)d\xi = \int_a^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi + \int_x^a f(\xi)d\xi = \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi$$

pero, por el teorema del valor medio, puede escribirse, si f(x) es **continua** en [a,b]

$$\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi = f(x+\theta\Delta x)\Delta x \qquad 0 < \theta < 1$$

y el cociente incremental

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x+\theta\Delta x)$$

pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ resulta

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

y, de esta última, el resultado de capital importancia

$$F'(x) = f(x)$$

merced al cual puede afirmarse que la integración (R) es el proceso inverso a la derivación.

Además siendo F(x) derivable, es continua en [a, b].

La función F(x) se denomina primitiva de la función f(x).

Regla de Barrow

Sea f(x) una función integrable (R) definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b] y sea F(x) una primitiva de f(x) en [a, b], es decir una funció que cumple F' (x) = f (x) para todo x perteneciente al intervalo [a, b].

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En efecto, siendo F'(x) = f(x), resulta que

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C$$

haciendo x = a resulta

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = -F(a)$$

de donde

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este simple resultado relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral.

Integrales inmediatas (indefinidas)

Siendo la integración operación inversa a la derivación pueden construirse tablas de integrales inmediatas, como la siguiente. Obsérvese que, derivando las funciones (!) colocadas a la derecha del signo igual, se obtiene la función a integrar.

$$\int d\text{✂} = \text{✂} + C$$

$$\int k d\text{👓} = K\text{👓} + C$$

$$\int \text{☺} d\text{☺} = \text{☺}^2/2 + C$$

$$\int \text{☎}^n d\text{☎} = \text{☎}^{n+1}/(n+1) + C$$

$$\int (1/\text{🕮}) d\text{🕮} = \ln|\text{🕮}| + C$$

$$\int \mathrm{sen}(\text{🔔}) d\text{🔔} = -\cos(\text{🔔}) + C$$

$$\int \cos(\text{☠}) d\text{☠} = \mathrm{sen}(\text{☠}) + C$$

$$\int 1/(2\text{🕯}^{1/2}) d\text{🕯} = \text{🕯}^{1/2} + C$$

$$\int a^{\text{⌛}} d\text{⌛} = a^{\text{⌛}}/\ln(a) + C$$

$$\int e^{\text{✈}} d\text{✈} = e^{\text{✈}} + C$$

$$\int \sec^2(\text{♌}) d\text{♌} = \mathrm{tg}(\text{♌}) + C$$

$$\int 1/(1+\text{👍}^2) d\text{👍} = \mathrm{arctg}(\text{👍}) + C$$

$$\int \text{♣} d\text{♥} = \text{♣}\text{♥} - \int \text{♥} d\text{♣}$$

Tal como están las integrales de la tabla anterior, constituyen las denominadas integrales indefinidas. Resolverlas en casos generales es tema de estudio posterior. El esfuerzo estará centrado en aplicar ingenio, perseverancia, inteligencia, constancia, astucia, y muchas, muchas horas de silla para lograr las integrales que se planteen.

Integrales impropias

La definición de integral definida según Riemann se basa dos elementos. Por un lado un intervalo cerrado [a,b] y, por otro una función acotada (las más de las veces, continua)f(x) en el mismo.

Cabe una generalización de la integral así definida.

Primera

La primera se presenta cuando el intervalo de integración es de la forma [a, ∝] o [-∝, b] o [-∝, ∝] es decir cuando uno o ambos límites tienden a infinito.

Se define

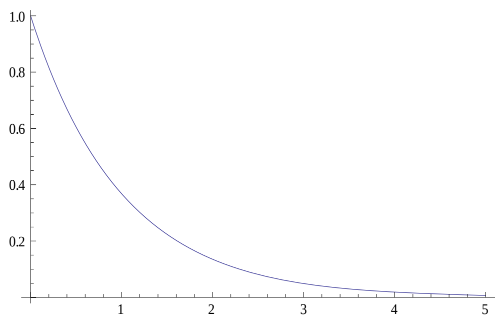
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_a^{\beta} f(x)dx$$

si el límite existe. En ese caso la integral se dice convergente, en caso contrario se la denomina divergente.

Por ejemplo

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\beta} = \lim_{\beta\to 0}\left[-e^{-\beta}-\left(-e^{0}\right)\right] = 1$$

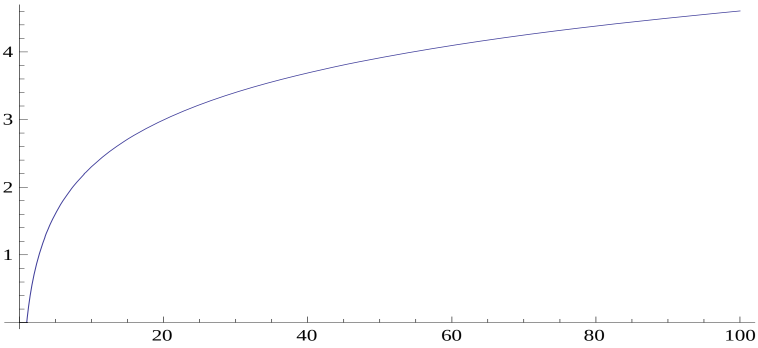
es una integral impropia convergente.



En cambio

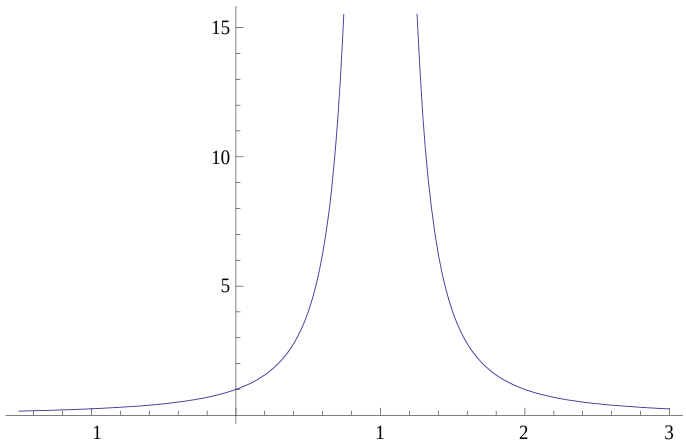
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{\beta\to\infty}\left|\ln(x)\right|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty}\ln(\beta)$$

no lo es pues el límite es infinito.



Segunda

La segunda se presenta cuando el integrando f(x), en el intervalo [a,b] tiene una singularidad.



Sea c el punto interior al intervalo [a,b] donde ocurre la singularidad. Por una de las propiedades de la integral de Riemann puede ponerse

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

pero, como c es el punto singular, se define

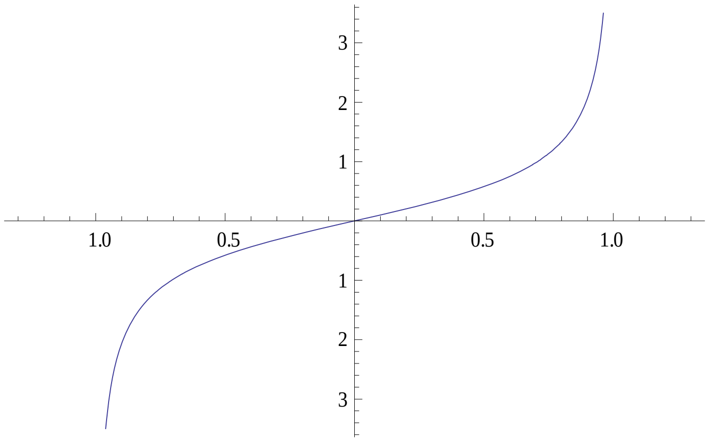
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'' \to 0} \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)dx$$

si los límites existen.

Por ejemplo

$$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

es convergente (debe serlo por ser una función impar)



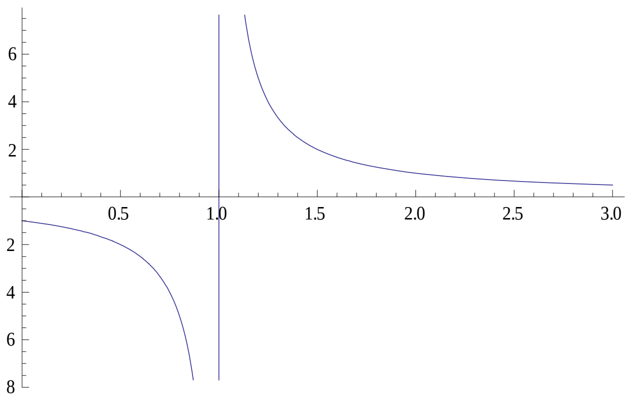
Si se toman ε' y ε'' iguales, en el caso de ser convergente se obtiene el llamado Valor Principal de Cauchy. Se lo nota

$$VP\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Por ejemplo

$$VP\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^3 \frac{d(x-1)}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(x-1)}{x-1} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{3}\frac{d(x-1)}{x-1} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-1|\Big\|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-1|\Big\|_{1+\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\ln\varepsilon - \ln 1) + (\ln 2 - \ln\varepsilon\right] = \ln 2$$



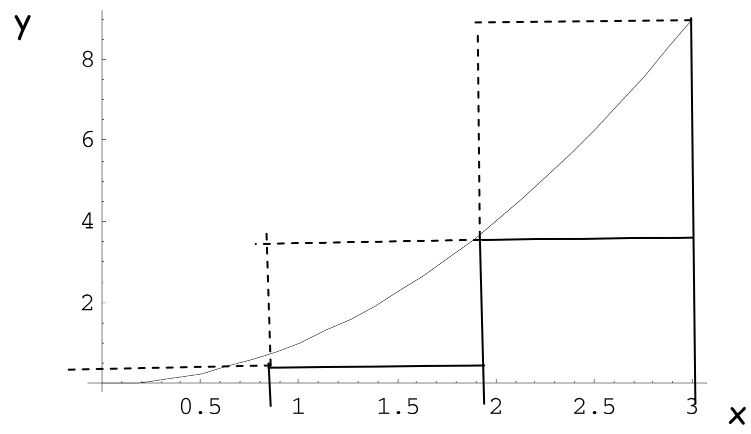
Aproximación numérica de la integral de Riemann

Los métodos de integración aproximada son necesarios porque:

- No existe primitiva F(x) de la función f(x)
- Existe primitiva F(x) de f(x) pero su obtención es extremadamente laboriosa o exige artificios demasiado sofisticados.
- La primitiva F(x) de f(x) es de muy laboriosa evaluación.
- La función f(x) está dada por una tabla de valores.
- La función f(x) está dada por un gráfico en el cual se pueden medir ordenadas.
- La función f(x) es un tren de señales detectadas electrónicamente a espacios de tiempo constantes.

Métodos elementales O(h)

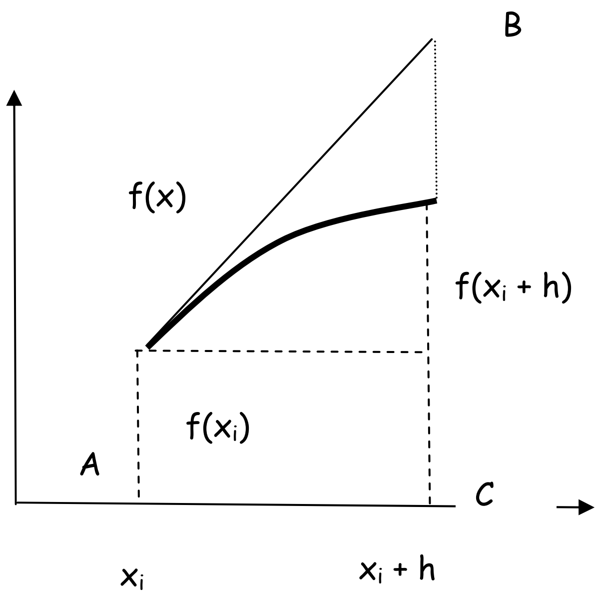
Estos son, tal vez, los métodos más rudimentarios para estimar el valor de I dado que la función a integrar se aproxima mediante una función "escalera" inscripta o circunscripta.



En el gráfico anterior se presenta en línea llena la "escalera" inscripta y en línea de trazos la circunscripta.

Se considera ahora la aproximación de la función dada mediante una función escalera, de paso h constante, inscripta.

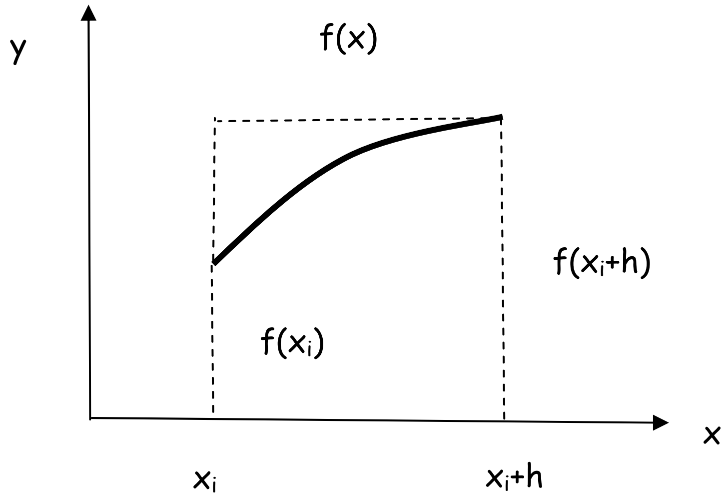
Aislando un elemento resultante de la división en escalones, resulta:



Se aproxima la integral de la siguiente forma:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta)d\zeta \approx f(x_i)h$$

Algo similar ocurre aproximando la función a integrar por la "escalera" externa



En este caso la aproximación está dada por

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta)d\zeta \approx f(x_i+h)h$$

En ambos casos la aproximación extendida al intervalo [a,b] es, respectivamente

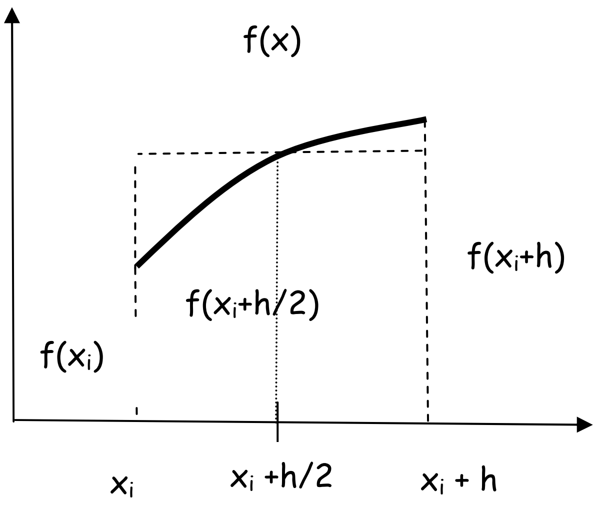
$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i+h)$$

Hay que elegir n o, lo que es lo mismo, el paso constante h y tener presente que, el error es infinitésimo de orden h.

Método del punto medio $O(h^2)$

Se analiza a continuación la aproximación resultante al considerar como puntos de evaluación de la función f(x), los puntos medios de cada uno de los subintervalos en que queda dividido el intervalo [a,b] para la aplicación del procedimiento de cálculo.



En este caso, la aproximación es la siguiente:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta)d\zeta \approx f(x_i+\frac{h}{2})h$$

y la aproximación a la integral es:

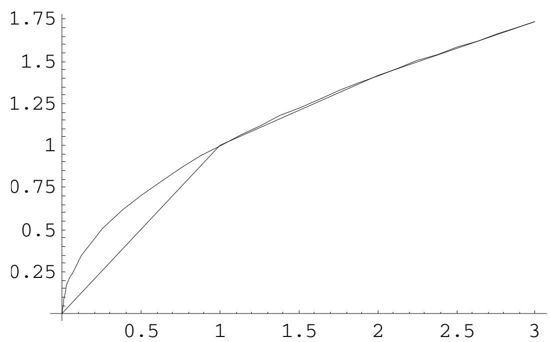
$$\int_a^b f(x)dx \cong h\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i + \frac{h}{2})$$

A costa de una mayor trabajo de cálculo, este método tiene como error un infinitésimo de orden h^2 , lo que indica que es más preciso que los dos anteriores.

Método de los trapecios O(h^2)

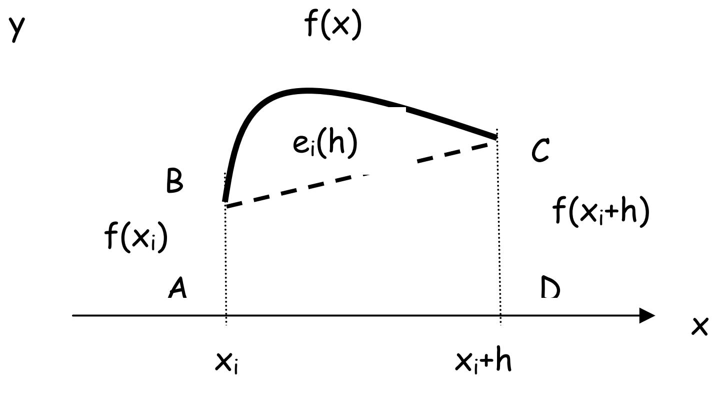
En este método la función a integrar se aproxima mediante una poligonal inscripta de n lados. Naturalmente a mayor número de lados, mejor será la aproximación entre la función dada y la poligonal inscripta. El paso constante h en que se divide el intervalo [a,b] depende de n dado que, como hasta ahora h = (b-a)/n constante

El siguiente gráfico ilustra lo dicho



En el mismo se observa con claridad que en el subintervalo [0,1] la aproximación es grosera, mientras que en los restantes la misma aparenta ser buena o aún muy buena. Definitivamente la curvatura de la función tiene mucho que ver con el grado de aproximación logrado para un dado n.

Aislando una banda de ancho h puede efectuarse la siguiente aproximación,



$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(\zeta)d\zeta \approx \frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_i+h)\right]$$

por ser el segundo término el área del trapecio ABCD, área que según la interpretación geométrica de la integral definida, aproxima a la integral que figura en el primer miembro de la expresión anterior.

Debe observarse también que, salvo las ordenadas inicial y final, $f(x_0)$ y $f(x_n)$ todas las demás ordenadas se consideran dos veces en el cálculo. Ello es así porque la ordenada derecha de cualquier subintervalo (salvo el último) se toma después como ordenada izquierda del subintervalo siguiente. La ordenada $f(x_0)$ se toma como ordenada izquierda una sola vez, la primera.

Por ese motivo es usual escribir, como fórmula de cálculo cuando se utiliza el método de los trapecios, la siguiente expresión.

$$I = \int_a^b f(\zeta)d\zeta \approx \frac{h}{2}\left(E + 2P + 2I\right)$$

donde E representa la sumatoria de las ordenadas extremas, P la sumatoria de las ordenadas de índice par e I la sumatoria de las ordenadas de índice impar. El error es $O(h^2)$

Método de Simpson $O(h^4)$

En el método de Simpson se aproxima la función a integrar mediante una parábola de segundo grado del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde es necesario determinar los coeficientes a, b y c. Para ello naturalmente hace falta resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que se establece mediante tres puntos consecutivos de la función.

$$\begin{cases} y_0 = a{x_0}^2 + bx_0 + c \\ y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c \\ y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

teniendo en cuenta que x_k - x_{k-1} = h es constante el sistema puede resolverse y luego, con la ecuación de la parábola determinada por esos tres puntos consecutivos, se calcula

$$\int_{x_0}^{x_2}(ax^2+bx+c)dx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Tomando este resultado y considerando parábolas de segundo grado comprendiendo cada una de ellas fajas de amplitud 2h para tener tres puntos consecutivos, se llega a la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left(E+4I+2P\right)$$

El error es

$$e(h)=-\frac{1}{90}\left(b-a\right)f^{iv}(\theta)h^4$$

es decir un infinitésimo O(h^4). El número de subintervalos debe ser par.

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

01 Sea f(x) una función definida en el intervalo [a,b]. Adoptar una partición P del intervalo y calcular s(f,P) y S(f,P). Afinar la partición y calcular nuevamente s(f,P’) y S(f,P’). Verificar que las primeras crecen (o se mantienen constantes) y las segundas decrecen (o se mantienen constantes). Estimar, si es posible el valor de la integral definida de f(x) en [a,b]

01	f(x) = sgn(x)	[1,2]
02	f(x) = sgn(x)	[-1,1]
03	f(x) = x	[0,2]
04	f(x) = x^2	[-1,1]
05	f(x) = x^3	[-1,1]

02 Verificar las siguientes integrales

01 $$\int_2^3 \frac{2u}{1+u^2}\,du = \ln(2)$$

02 $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx = \sqrt{3}-1$$

03 $$\int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx = 1$$

04 $$\int_0^1 \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{4}$$

05 $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi = \frac{\pi}{2}$$

06 $$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 4-2\ln(3)$$

07 $$\int_1^2 \sec^2\left(\frac{\pi}{3}u\right)du = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

08 $$\int_0^{2\pi} sen(x)dx = 0$$ interpretar

09 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}$$

10 $$\int_1^2 \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\log\left(\frac{9}{2}\right)$$

03 Calcular el valor medio de las integrales del punto anterior. Representar y hallar el o los valores ξ donde se cumple el TVM

04 Verificar

01 $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

02 $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \frac{1}{2}$

03 $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$

04 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$

05 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx \to \infty$

05 Calcular

01 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1-x)^3}dx$

02 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}dx$

03 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

06 Verificar

01 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} \to \infty$

02 $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x-5} \to -\infty$

03 $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

07 Calcular el Valor Principal de

01 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{3x-2}$

02 $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{6x+5}$

03 $\int_{2}^{4} \frac{dx}{2x-5}$

08 Calcular en forma aproximada las siguientes integrales definidas utilizando el método de los trapecios y el método de Simpson. Verificar.

01 $\int_0^2 x^4 dx$

02 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx$

03 $\int_0^1 x^x dx$

ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 09

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

La totalidad de esta práctica se basa en el siguiente resultado

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

es decir se basa en encontrar funciones F(x) que, derivadas, reproduzcan las funciones a integrar f(x). Nada más y nada menos.

No hay otra forma de entender y aprender este tema que hacer integrales indefinidas. Muchas, muchísimas integrales indefinidas hasta que los procedimientos aplicables a tal fin estén debidamente entendidos y consolidados.

Es oportuno decir que integrar es mucho más complicado que derivar. Para derivar basta con seguir una serie de reglas aplicándolas sistemáticamente, mientras que para integrar es necesario elegir el procedimiento, la sustitución adecuada o la triquiñuela que abrevia el camino al resultado. Esta elección puede no ser la mejor para la integral a resolver y, en ocasiones llevar por un camino donde las complicaciones se incrementan sin alcanzar éxito. Para empeorar las cosas, hay funciones f(x) que NO tienen primitiva F(x), es decir, existen funciones que NO son derivada de otra función. En estos casos, por supuesto, es inútil operar. Lo grave es que, de entrada no se sabe si esto es así, lo que puede llevar a frustrantes e inútiles esfuerzos.

Sin embargo, como en todo, una importante ejercitación sobre integrales indefinidas permite desarrollar un "olfato" especial que permite elegir con bastante acierto el procedimiento a seguir en cada caso.

Para eso, sólo hay una manera: transpirar mucho haciendo integrales. Después, sólo después, comandos y botones alivian la tarea.

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

Integración por sustitución

El cálculo de integrales indefinidas por sustitución consiste básicamente en dar una serie de pasos, cambiando variables, que permiten llevar la integral propuesta a una forma conocida cuya integral sea inmediata como las representadas iconicamente en GEP08

Por ejemplo, la integral

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx$$

se puede resolver haciendo la sustitución $u=\sqrt{x}$, entonces diferenciando resulta $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ de donde $2udu=dx$ y la integral queda de la forma

$$\int \frac{2u}{1-u}\,du$$

Dividiendo 2u por –u + 1 resulta

$$\int \frac{2u}{1-u}=-2\int du+2\int \frac{1}{1-u}du=-2u-2\int \frac{d(1-u)}{1-u}=-2u-2\ln\left|1-u\right|$$

recordando la sustitución elegida, resulta finalmente

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx=-2\sqrt{x}-2\ln\left|1-\sqrt{x}\right|+C$$

Como otro ejemplo se propone

$$\int (3x+2)^5\,dx$$

Haciendo $z=(3x+2)$ resulta $dz=3dx \Rightarrow dx=\frac{dz}{3}$ entonces se escribe

$$\int (3x+2)^5\,dx=\frac{1}{3}\int z^5dz=\frac{1}{3}*\frac{1}{6}z^6+C=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C$$

01 Resolver por sustitución las siguientes integrales

01 $\int \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx$ 02 $\int \left(1-x^{\frac{2}{5}}\right)^4 dx$

03 $\int \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx$ 04 $\int \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}} dx$

05 $\int \frac{4x-5x^2}{5x^3-6x^2+1} dx$ 06 $\int \frac{3x^3+2}{3x^4+8x} dx$

07 $\int \frac{4x-7x^3}{7x^4-8x^2-2} dx$ 08 $\int \left[ctg(3z)\cos ec(3z)\right]^2 dz$

09 $\int sen^2(y)sen(2y)dy$ 10 $\int tg(s)\ln\left[\sec^6(s)\right]ds$

11 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}-3}{\sqrt{x}} dx$ 12 $\int x^2 e^{-x^3} dx$

13 $\int \left(e^{nx}\right)^2 dx$ 14 $\int \frac{a^{mx^{-3}}}{x^4} dx$

15 $\int \frac{a^x e^x}{b^x} dx$ 16 $\int \sqrt{\frac{e^{arcsen(t)}}{1-t^2}} dt$

17 $\int \frac{4^{1+\ln(w^4)}}{w} dw$ 18 $\int \sqrt{\frac{e^{arcch(v)}}{v^2-1}} dv$

19 $\int e^{\frac{1}{sen(t)}} \sqrt{\frac{1}{sen(t)^4}-\frac{1}{sen(t)^2}} dt$ 20 $\int \frac{1}{y} 3^{1-\ln(y^3)} dy$

02 Sabiendo que

$$d\left[arctg(u)\right]=\frac{1}{1+u^2}du \qquad d\left[arcth(u)\right]=\frac{1}{1-u^2}du$$

Ejemplo: calcular

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

El primer paso es factorear el trinomio denominador, haciendo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right]$$

haciendo la sustitución $z = x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}$ y llamando $k^2 = \frac{c}{a} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}$ resulta

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$$

que es inmediata.

Calcular las siguientes integrales llevándolas a alguna de las formas anteriores.

01	$\int \frac{dx}{9 + 25x^2}$	02	$\int \frac{dx}{4x^2 + 49}$
03	$\int \frac{dx}{16 + 9x^2}$	04	$\int \frac{dx}{9 - 16x^2}$
05	$\int \frac{dx}{64 - 25x^2}$	06	$\int \frac{dx}{5 - 3x^2}$
07	$\int \frac{dx}{7x^2 - 4}$	08	$\int \frac{dx}{5x^2 + 7}$
09	$\int \frac{dx}{8x - x^2 - 7}$	10	$\int \frac{dx}{3x - 2 - x^2}$
11	$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 17}$	12	$\int \frac{dx}{2x - x^2 - 5}$
13	$\int \frac{dx}{5x^2 + 5x + 1}$	14	$\int \frac{dx}{7x^2 - 8x - 10}$

15 $\int \frac{dx}{4\cos^2(x) - 9sen^2(x)}$ 16 $\int \frac{dx}{4ch^2(x) + 9sh^2(x)}$

17 $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^{-2x}}$ 18 $\int \frac{(x+3)}{3x^2 - 6x + 8} dx$

19 $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} dx$ 20 $\int \frac{(2x+5)}{2x^2 + 2x + 1} dx$

03 Sabiendo que

$$darcsen(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$d\,\arccos(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$darcsh(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du$$

$$darcch(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du$$

Resolver las siguientes integrales:

01 $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}$ 02 $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 49x^2}}$

03 $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 16x^2}}$ 04 $\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2 + 25}}$

05 $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 25}}$ 06 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 49}}$

07 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ 08 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

09 $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ 10 $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

11 $\int \frac{(2x-1)}{\sqrt{4x^2+4x+2}}dx$ 12 $\int \frac{(x+2)}{\sqrt{3x-5x^2+2}}dx$

04 Enunciar la regla para calcular integrales del tipo

$$\int sen^m(x)\cos^{2n+1}(x)dx \qquad \int sen^{2n+1}(x)\cos^m(x)dx \qquad n\in N$$

y aplicarla en las siguientes integrales

01 $\int \cos^3(x)dx$ 02 $\int sen^5(x)dx$

03 $\int \cos^7(x)dx$ 04 $\int sen^7(x)\cos^2(x)dx$

05 $\int \cos^5(x)sen^4(x)dx$ 06 $\int sen^3(x)\cos^6(x)dx$

07 $\int \cos^5(u)sen^{\frac{3}{2}}(u)du$ 08 $\int \cos^{-\frac{2}{5}}(x)sen^5(x)dx$

09 $\int \frac{sen^3(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}dx$ 10 $\int \frac{\cos^3(3x)}{1+\cos(6x)}dx$

11 $\int [1-\cos(2y)]^{\frac{5}{3}}\cos^3(y)dy$ 12 $\int \frac{sen^5(2x)}{1+\cos(4x)}dx$

Shhhh... no haga ruido. El duende de las integrales, Integrolito, dice que si

$$dsen(x)=\cos(x)dx$$

$$d\cos(x)=-sen(x)dx$$

entonces como uno de los dos factores tiene potencia impar, se puede armar la diferencial del otro y el que prestó uno para armarla queda con potencia par y entonces de sen^2(x)+cos^2(x) = 1 se despeja y todo queda en una sola función trigonométrica. Exemplo:

$$\int \cos^3(x)dx = \int \cos^2(x)\cos(x)dx = \int \cos^2(x)dsen(x) = \int \left[1 - sen^2(x)\right]dsen(x) =$$

$$= sen(x) - \frac{1}{3}sen^3(x) + C$$

Derivando se tiene

$$\cos(x) - sen^2(x)\cos(x) = \cos(x)\left[1 - sen^2(x)\right] = \cos(x)\cos^2(x) = \cos^3(x)$$

como debe ser

05 Enunciar la regla para calcular integrales del tipo

$$\int sen^{2m}(x)\cos^{2n}(x)dx \qquad m,n \in N$$

y aplicarla al calculo de las siguientes integrales

01 $\int \cos^6(x)dx$ 02 $\int sen^8(x)dx$

03 $\int sen^2(x)\cos^4(x)dx$ 04 $\int sen^6(x)\cos^2(x)dx$

05 $\int sen^4(3x+2)dx$ 06 $\int sen^4(2t)\cos^4(2t)dt$

07 $\int sen^2(5x+1)\cos^2(5x+1)dx$ 08 $\int \cos^4(3x)dx$

09 $\int \cos^4(2x-1)dx$ 10 $\int sen^4(x)\cos^2(x)dx$

Shhhh.... Integrolito dice que, para este tipo de integrales lo que conviene hacer es el cambio de variables z = tg(x) con lo que resulta, por ser x = arctg(z)

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$sen^{2m}(x) = \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^{2m} = \frac{z^{2m}}{\left(1+z^2\right)^m}$$

$$\cos^{2n}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^{2n} = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^n}$$

y la integral se transforma

$$\int sen^{2m}(x)\cos^{2n}(x)dx = \int \frac{z^{2m}}{\left(1+z^2\right)^{m+n+1}}\,dz$$

que se integra como función racional.

En otros casos, el olfato debe permitir "bajar" el grado de los exponentes mediante relaciones trigonométricas adecuadas.

Por ejemplo

$$\int sen^4(x)dx = \int \frac{z^4}{\left(1+z^2\right)^3}\,dz$$

es una expresión racional que "huele feo". Según el consejo de Integrolito parece que conviene hacer.

$$\int sen^4(x)dx = \int \left[sen^2(x)\right]^2 dx = \int \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int \left[1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int dx - 2\int \cos(2x)dx + \int \cos^2(2x)dx\right\} =$$

$$\int$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - 2\frac{1}{2}\int \cos\ (2x)d(2x) + \frac{1}{2}\int \left[1+\cos(4x)\right]dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x + sen(2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}*\frac{1}{4}\int \cos(4x)d(4x)\right\} = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sen(2x) - \frac{1}{32}sen(4x) + C$$

06 Calcular las siguientes integrales IMPORTANTES

01 $\int sen^2(x)dx$ 02 $\int \cos^2(x)dx$

03 $\int sh^2(x)dx$ 04 $\int ch^2(x)dx$

05 $\int \frac{dx}{sen(x)}$ 06 $\int \frac{dx}{\cos(x)}$

07 Calcular las siguientes integrales

01 $\int sen(mx)sen(nx)dx \qquad m,n \in N \qquad m \neq n$

02 $\int \cos(mx)\cos(nx)dx \qquad m,n \in N \qquad m \neq n$

03 $\int sen(mx)\cos(nx)dx \qquad m,n \in N \qquad m \neq n$

08 Calcular las siguientes integrales de la forma $\int \sqrt{a^2 - u^2}du$ con la sustitución $u = asen(t)$

01 $\int \frac{y^2}{\sqrt{(9-y^2)^3}}dy$ 02 $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

03 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{4-x^2}}$ 04 $\int \frac{z^2}{\sqrt{4-z^2}}dz$

05 $\int \frac{\sqrt{100-p^2}}{p}dp$ 06 $\int m^3\sqrt{9-m^2}dm$

09 Calcular las siguientes integrales de la forma $\int \sqrt{a^2 + u^2}du$ con la sustitución $u = atg(t)$

01 $\int \frac{s^2}{\sqrt{(s^2+6)^3}}ds$ 02 $\int \frac{dy}{y\sqrt{4+y^2}}$

03 $\int \frac{dw}{w^3\sqrt{1+w^2}}$ 04 $\int \sqrt{x^2-4x+13}dx$

05 $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$ 06 $\int \frac{\sqrt{z^2+9}}{z^2}dz$

07 $\int \frac{dq}{q^3\sqrt{1+q^2}}$ 08 $\int \sqrt{x^2-6x^2+13}dx$

10 Calcular las siguientes integrales de la forma $\int \sqrt{u^2-a^2}du$ con la sustitución $u = a\sec(t)$

01 $\int \frac{z^2}{\sqrt{z^2-6}}dz$ 02 $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-7}}$

03 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$ 04 $\int \frac{\sqrt{y^2-9}}{y}dy$

05 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ 06 $\int \sqrt{s^2+8s+6}ds$

11 Calcular las siguientes integrales mediante descomposición en fracciones simples.

Para las integrales del tipo $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$ donde $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de grado m y n respectivamente y, además, $m < n$ puede utilizarse el denominado método de descomposición en fracciones simples.

Se supone que el polinomio $Q_n(x)$ tiene solamente raíces simples α_k , k = 1,n, no coincidentes con las raíces de $P_m(x)$. En esas condiciones puede ser factoreado de la siguiente forma

$$Q_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)$$

entonces el cociente de polinomios puede ser escrito

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha_1)}+\frac{A_2}{(x-\alpha_2)}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha_k)}+\ldots\frac{A_n}{(x-\alpha_n)}$$

siendo necesario calcular los números A_1, A_2, …, A_k, …,A_n

Efectuando la suma, se tiene

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)+A_2(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)+}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)}$$

$$\frac{A_K(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)+\ldots+A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_{n-1})}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)..}$$

Como debe darse una identidad de numeradores, se escribe

$$P_m(x)\equiv A_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)+A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_n)+$$

$$A_k(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n)+\ldots+A_n(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)\ldots(x-\alpha_{n-1})$$

Haciendo sucesivamente x = α_1, α_2, α_3,…,α_n se tiene

$$A_1=\frac{P_m(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_k)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$A_2=\frac{P_m(\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_k)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$A_3=\frac{P_m(\alpha_3)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(\alpha_3-\alpha_k)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

....

$$A_k=\frac{P_m(\alpha_k)}{(\alpha_k-\alpha_2)(\alpha_k-\alpha_3)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)}$$

....

$$A_n=\frac{P_m(\alpha_n)}{(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\ldots(\alpha_n-\alpha_k)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

Shhhh….. Integrolito “sopla” otra forma para calcular los coeficientes A_k. Es esta

$$A_k=\frac{P_m(\alpha_k)}{Q_n'(\alpha_K)}\qquad\qquad k=1,n$$

Quien esté interesado en ver los casos correspondientes a raíces múltiples y/o complejas puede consultar algún texto de Análisis Matemático I.

01 $\int \frac{5-x}{x^2-5x+6}dx$ 02 $\int \frac{x-6}{x^2-7x+12}dx$

03 $\int \frac{6x-8}{x^2-x-6}dx$ 04 $\int \frac{10-2x}{x^2-4x+3}dx$

05 $\int \frac{2x+8}{x^2+5x+4}dx$ 06 $\int \frac{5x+14}{x^2+5x+4}dx$

07 $\int \frac{10-7s}{s^3-3s^2+2s}ds$ 08 $\int \frac{9t-6}{t^3+t^2-2t}dt$

09 $\int \frac{24-10w}{w^3-5w^2+6w}dw$ 10 $\int \frac{2s+36}{s^3+s^2-6s}ds$

11 $\int \frac{4-5z}{z^3-z^2-2z}dz$ 12 $\int \frac{18-11z}{z^3-z^2-6z}dz$

12 Integrar por partes

01 $\int x sen(x)dx$ 02 $\int x\cos(x)dx$

03 $\int x sh(x)dx$ 04 $\int x ch(x)dx$

05 $\int xe^x dx$ 06 $\int arcsen(x)dx$

07 $\int \arccos(x)dx$ 08 $\int arctg(x)dx$

09 $\int arcctg(x)dx$ 10 $\int arc\sec(x)dx$

11 $\int arcc\sec(x)dx$ 12 $\int arcsh(x)dx$

13 $\int arcch(x)dx$ 14 $\int arcth(x)dx$

15 $\int \ln(x)dx$ 16 $\int x\ln(x)dx$

17 $\int \ln(ax)dx$

18 $\int x^2\cos(x)dx$

19 $\int x^2 sen(2x)dx$

20 $\int x^{11}e^{x^4}dx$

21 $\int arcsen\left(\frac{1}{x}\right)dx$

22 $\int \arccos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

23 $\int xarcsen(x)dx$

24 $\int x\arccos(x)dx$

25 $\int \frac{4x^3\ln(x^4+2)}{(x^4+1)^2}dx$

26 $\int sen[\ln(x)]dx$

27 $\int e^x sen(x)dx$

28 $\int \sec^3(x)dx$

29 $\int xarctg(x)dx$

30 $\int \frac{arctg(x)}{x^3}dx$

Shhhhhhhhh….. Integrolito dice que integrar por partes es muy fácil. Viene de d(u v) = u dv + v du entonces

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv \qquad \Rightarrow \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

Para aplicarlo se elige "u" y "dv", se calcula "du", se integra "dv" para tener "v" y se aplica la fórmula. ¡Si se elige mal, la integral empeora!

A veces hay que dar unas cuantas vueltas para hallar la integral pedida. Por ejemplo

$$\int e^x sen(x)dx$$

Se hace $u = sen(x) \Rightarrow du = \cos(x)dx \qquad dv = e^x \Rightarrow v = e^x$ entonces

$$\int e^x sen(x)dx = e^x sen(x) - \int e^x\cos(x)dx$$

Parece que no se avanzó nada. ¡Ufff…! hay que integrar por partes de nuevo, haciendo $\dot{u} = \cos(x) \Rightarrow d\dot{u} = -sen(x)dx \qquad d\dot{v} = e^x dx \Rightarrow \dot{v} = e^x$ y sale

$$\int e^{x} sen(x)dx = e^{x} sen(x) - \left[e^{x}\cos(x) + \int e^{x} sen(x)dx \right]$$

De esta última resulta

$$2\int e^{x} sen(x)dx = e^{x} sen(x) - e^{x}\cos(x) \Rightarrow \int e^{x} sen(x)dx = \frac{1}{2} e^{x}\left[sen(x) - \cos(x) \right] + C$$

¡ATENCIÓN!

Integrolito dice: si usted ha calculado todas, todas, ABSOLUTAMENTE TODAS las integrales que componen GEP09 y las ha verificado por derivación, usted ha hecho una breve introducción a lo que podría llamarse ***"Brevísimo paseo guiado por rudimentos elementales de técnicas de integración básica"***.

Considerando que nadie puede decir que "sabe" integrar, entendiendo por "sabe" que ninguna integral se resiste, que se conocen todas las trampas, triquiñuelas, sustituciones retorcidas o perversas y atajos que se requieren para eso, usted ha dado un paso importante: **ya no les teme** y sabe (ahora si, sabe) que si se lo propone, con esfuerzo, estudio, tenacidad y constancia usted será capaz de resolver cualquier integral. Lo que no es poco.

Usted está a un paso muy corto de integrar por medio de tablas -y las hay muy, muy buenas- o de hacerlo en una PC con los comandos adecuados pero con una muy clara idea de lo que hay atrás de cada una de ellas.

Si hubiese empezado por la tabla de integrales y/o por los comandos usted probablemente sería un buen técnico al que le han dicho como se opera ante una determinada clase de problemas pero le faltaría esa única, indispensable e irremplazable chispa que diferencia a un ingeniero de un técnico y le permite al ingeniero ir siempre un paso más allá, con imaginación y creatividad.

Ahora me voy porque tengo que ir a espiar a Ferrante que ya está haciendo GEP10. Hasta GEP10.

ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 10

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

Definitivamente no es posible en un trabajo de este tipo señalar todas las aplicaciones que tiene en geometría, en física y en otras disciplinas técnicas (y no tan técnicas) el concepto de integral definida.

Sólo se tratarán aplicaciones clásicas, se podría decir, evidentes, de la integral definida. Un poco de imaginación, otro poco de búsqueda, mucha lectura, permitirán apreciar un poco mejor la utilidad de este concepto. Se recomienda enfaticamente hacerlo.

No se hará referencia alguna a procedimientos utilizados para calcular las integrales que figuran como ejemplo. Se considera que, luego del estudio y la ejercitación de GEP09 es innecesario hacerlo.

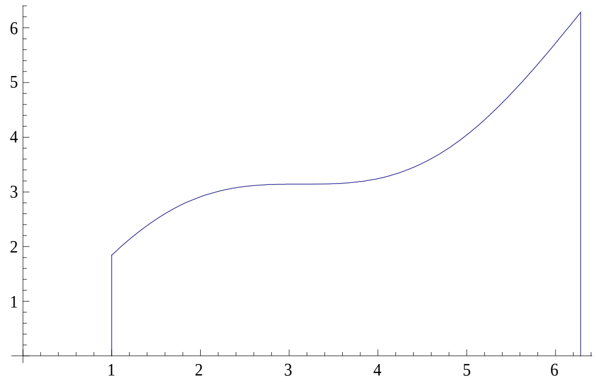
Área en coordenadas cartesianas

La aplicación más evidente, que surge de su propia definición, es interpretar la integral definida como un área.

En efecto, siendo por definición

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_k f(\zeta_k)(x_{k+1} - x_k) = \lim_{\delta \to 0} \sum_k f(\zeta_k)\Delta x_k$$

si se interpreta a la ordenada $f(\zeta_k)$ como una longitud y a Δx_k como otra longitud, es evidente que el producto de estos dos factores mide el área elemental del rectángulo de altura $f(\zeta_k)$ y base Δx_k. La sumatoria de todos esos rectángulos "elementales" es, en principio, una aproximación a la integral definida. Cuando se hace tender a cero la norma δ de la partición y se calcula la integral definida, el número que se obtiene mide el área de la superficie comprendida entre la curva representativa de f(x), las verticales por a y por b y el eje de las abscisas, en unidades de longitud al cuadrado.



Cabe señalar que, si las ordenadas son negativas, el área resulta negativa. Y, si existen sectores de área positiva y sectores de área negativa, el resultado puede llegar a ser nulo, lo que no significa de ninguna manera que entre las curvas y el eje x no haya una superficie perfectamente definida.

Por ejemplo, la integral

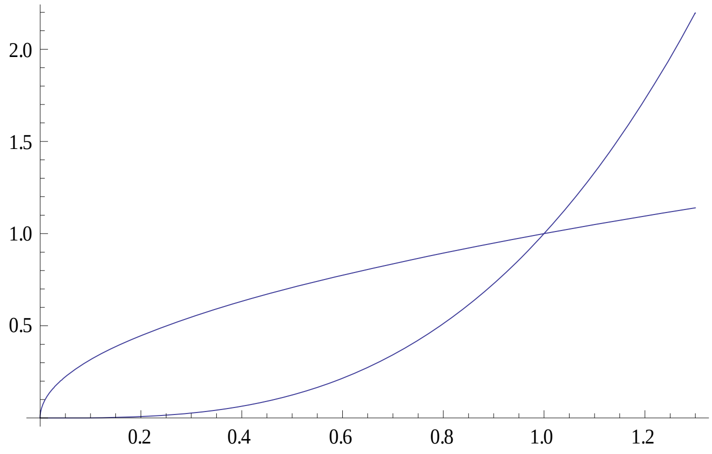
$$\int_0^{2\pi} sen(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - [-\cos(0)] = 0$$

hecho que llevó a una despistado matemático cuyo nombre se ha perdido en los laberintos de la burocracia, que quería construir una plantilla de celuloide con la forma de la función senoidal, a discutir agriamente con Mustafá Kemal Baja, dueño de tienda y librería que pretendía cobrarle el celuloide mientras que el despistado matemático alegaba que él compraba cero celuloide y que, en consecuencia, nada debía pagarle. La discusión terminó cuando el bueno de Mustafá dijo "O baga blantilla celuloide o sale tienda ya"

Otro tema que puede presentarse es determinar el área comprendida o encerrada entre dos curvas. En este caso primero hay que determinar las coordenadas de los puntos donde las dos curvas se cortan, visualizar el problema por medio de un gráfico y luego calcular

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

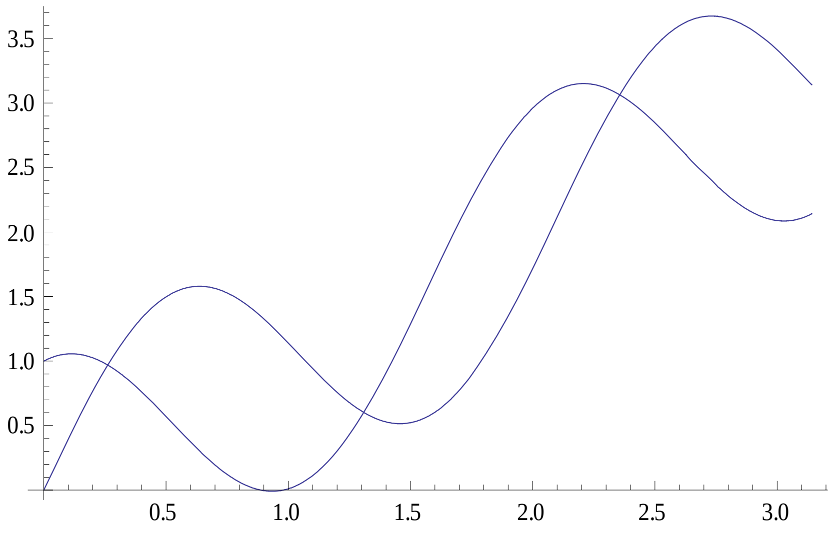
donde f(x) es la función "de arriba", g(x) es la función "de abajo" y a y b son las abscisas de los puntos donde se cortan las curvas. Por ejemplo



el gráfico anterior representa las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$ que evidentemente se cortan en los puntos (0,0) y (1,1), en consecuencia la función "de arriba" es la raíz cuadrada mientras que la "de abajo" es la parábola cúbica. Entonces, el área entre ambas es

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^3\right] dx = \frac{5}{12}\left[L^2\right]$$

Las cosas pueden no ser siempre tan sencillas. La curva "de arriba" puede pasar a ser la "de abajo" y la "de abajo" puede pasar a ser la "de arriba". Si siempre a la "de arriba" se le resta la "de abajo" resultarán sectores con área de medida positiva y otros de medida negativa, pudiendo haber compensaciones.



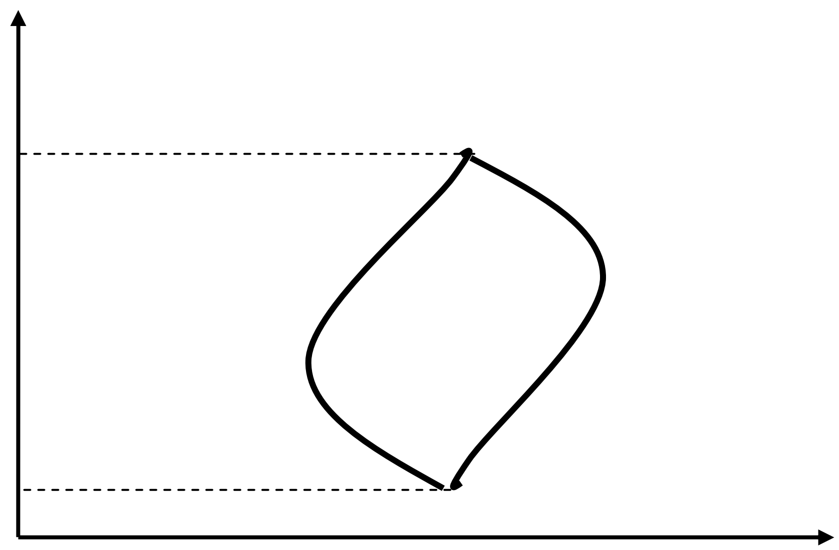
El grafico anterior representa las curvas $y = x + sen(3x)$ y $y = x + \cos(3x)$ donde claramente se aprecia a la primera por arriba de la segunda en el intervalo [0.261799, 1,309] y por debajo de ella en el intervalo [1.309, 2.35619].

Con sutileza se puede decir que el "área entre" las curvas en el intervalo [0.261799, 2.35619] puede aceptar compensaciones entre áreas positivas y negativas, mientras que, si se pide el "área encerrada" por las curvas dadas, ninguna compensación es aceptable.

Si se aceptan compensaciones la integral que mide el **área entre** las curvas da 4.24506 10^{-11} [L^2] (en la práctica, 0, cero) mientras que el **área encerrada** entre las curvas da 1.88562 [L^2].

En ocasiones resulta práctico calcular la integral

$$A = \int_c^d \left[f(y) - g(y) \right] dy$$



A todas luces resulta más sencillo integrar con respecto a la variable y que hacerlo con respecto a x, salvo que ahora habrá que hablar de funciones que "están a la derecha" y funciones que "están a la izquierda"

Ecuaciones paramétricas

Si la ecuación de la/s curva/s está dada en forma paramétrica,

$$C = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

la integral que mide el área se transforma de la siguiente manera

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt$$

Por ejemplo, siendo las ecuaciones paramétricas del círculo de radio r

$$C = \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = rsen(t) \end{cases}$$

el área de un cuarto de círculo será

$$\frac{A}{4} = \int rsen(t)\left[-rsen(t)\right]dt = -r^2\left[\frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -r^2\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{sen\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right] = -\frac{r^2\pi}{4}$$

de donde, finalmente

$$A = -r^2\pi$$

Este resultado es **sorprendente**. No hay ordenadas negativas puesto que se trata de un cuarto de círculo en el primer cuadrante, no hay compensaciones de ninguna clase y el área ¡resulta **¡negativa!**

Algo falla en alguna parte. O, lo más probable, no falla y ocurre algo que corresponde aclarar. En efecto, cuando se calculan integrales definidas de la forma

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad F'(x) = f(x)$$

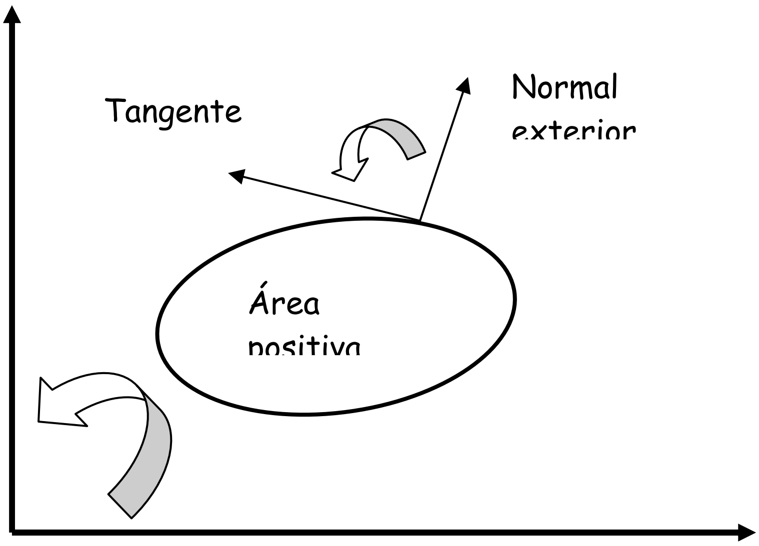
no es de ninguna forma evidente un sentido para el recorrido de la curva representativa de la función, puesto que el cálculo finaliza con una sustracción cuyo resultado, la resta, es el área buscada.

Cuando se trabaja con las ecuaciones paramétricas de la curva, de alguna manera se la recorre en el sentido del parámetro t creciente o decreciente. Suele denominarse a esto "sentido de los arcos crecientes" o "sentido de los arcos decrecientes" respectivamente.

Además y relacionado con lo anterior, las áreas limitadas por curvas cerradas, pueden ser recorridas en uno de los dos sentidos antes mencionados. A uno de ellos se le asigna signo positivo y, al otro, signo negativo.

Se acepta **por convención** que, si el giro de la normal exterior hacia la tangente (orientada) es coincidente con el giro del eje "x" hacia el eje "y" el área encerrada por la curva cerrada es positiva. En caso contrario, es negativa.

El gráfico siguiente representa gráficamente lo expresado en el párrafo anterior.

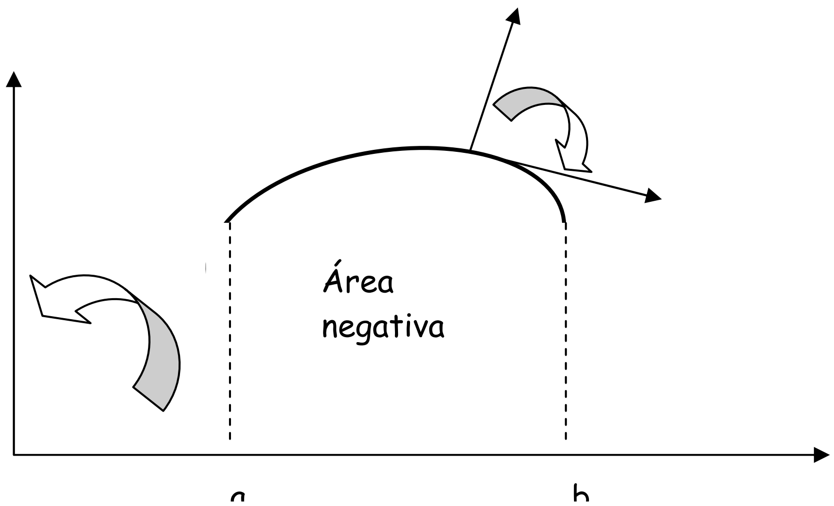


Integrolito, el duende de las integrales, incorregible como siempre, sopla por lo bajo lo siguiente "No hagas caso de eso que dijo. Es muy complicado. Acordate de esto SI CAMINÁS POR LA LÍNEA Y EL AREA TE QUEDA A LA IZQUIERDA, ES POSITIVA, SI TE QUEDA A LA DERECHA, ES NEGATIVA".

Con esta convención, la integral común

$$\int_a^b f(x)dx$$

es negativa dado que la considerar valores crecientes de x (arcos crecientes) ocurre lo siguiente:



Esa es la explicación del resultado anterior. El área de un círculo, por supuesto, es π r^2 [L^2]. La integral de la que se partió al comenzar el tema debió llevar signo menos que, con el obtenido por cálculo, da el signo positivo que corresponde.

Este problema de signos no ocurre cuando se calculan integrales de la forma (Verificarlo gráficamente)

$$\int_c^d g(y)dy$$

Puede entonces escribirse

$$A = -\int_C ydx = \int_C xdy$$

de la que resulta

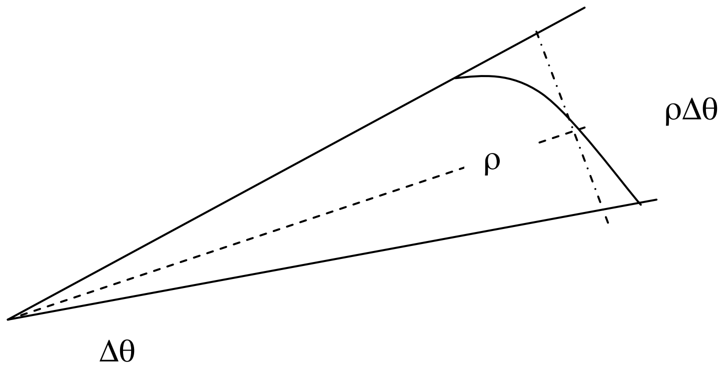
$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

Area en coordenadas polares

Se trata de determinar el área encerrada por una curva cuya ecuación esté dada en coordenadas polares

$$\rho = \rho(\theta)$$

Para ello, la siguiente figura de análisis permite escribir



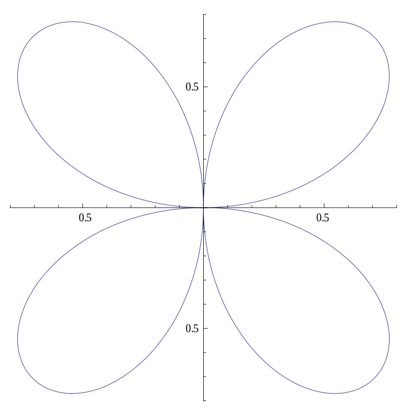
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

esto porque se considera el área del triángulo elemental de altura ρ y base ρΔθ.

Por ejemplo, nuevamente el cuarto de círculo. La ecuación polar es ρ= r. Entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{r^2\pi}{4}$$

Como un nuevo ejemplo se calcula el área encerrada por la curva ρ= sen(2θ) cuya gráfica es la siguiente:



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen^2(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen(4\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi$$

Nuevamente Integrolito, el duende, dice "tengan cuidado con estas integrales porque, si el coeficiente que afecta a θ en la ecuación es impar, al dar un giro de 0 a 2 π se pasa **dos veces** sobre la curva y la integral da el doble de lo que debe dar. Para estas hay que usar media vuelta 0 a π"

Otras formas de calcular areas

Las vistas hasta este momento no son las únicas formas de calcular aréas planas. Por supuesto que si los procedimentos analíticos fallan está siempre a mano el recurso de aplicar algún método numérico, como el de los trapecios, el de Simpson, las fórmulas de Newton Cotes, la integración numérica de Gauss, etc.

Esto no agota el repertorio de posibles métodos para estimar el valor de un área plana. Se pueden usar los siguientes:

1° Dibujar la o las curvas que definen el área a calcular en papel milimetrado (todavía existe) y, luego y con mucha paciencia, contar los cuadraditos de 1 mm^2 existentes en el grafico, aproximando " a ojo" los valores correspondientes a los cuadraditos no totalmente incluidos en el grafico de interés.

2° Con una tijera, una balanza y un buen gráfico de la función a integrar hecho en papel de calidad garantizada. ¿Cómo se procede?. Muy fácil, se dibuja muy bien la función a integrar, luego con la tijera se la recorta con suma prolijidad. Con la balanza, mejor si es de esas que usan los químicos, de mucha precisión, se pesa el recorte hecho. Si el papel en la que fué dibujada la función es un papel de x gr/m^2 y el recorte pesa y gr es muy fácil saber a cuantos m^2 corresponde. Una regla de tres simple lo permite rápidamente. Se debe ser cuidadoso con las escalas, nada más.

3° Usar un planímetro. Instrumentos que, en algunos casos parecen un corta vidrios, salvo que en lugar de un diamante tienen una ruedita o, mejor todavía, parecen una rueda cortapasta. Para calcular el área se hace rodar la ruedita sobre el contorno del gráfico representativo de la función -si

cabe, verticales por a y b e intervalo ab inclusive- y una escala graduada permite leer el valor del área. De nuevo, se debe ser cuidadoso con las escalas. También hay planímetros digitales. Ver
web.usal.es/~javisan/hidro/Complementos/Medir_Areas.pdf

Longitud de un arco de curva

En GEP07 DIFERENCIALES se estudió el elemento de arco. Allí se obtuvo lo siguiente:

Para coordenadas cartesianas. Ecuación y = f(x)

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Para coordenadas cartesianas, ecuaciones paramétricas

$$C\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Para coordenadas polares, $\rho = \rho(\theta)$

$$ds = \sqrt{\rho(\theta) + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

Integrando estos elementos de arco se obtienen las longitudes buscadas.

Cartesianas

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

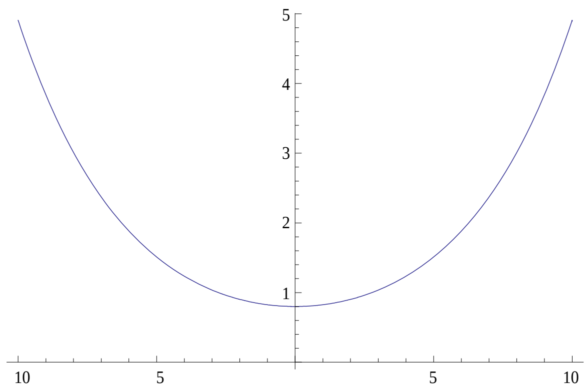
Cartesianas, ecuaciones paramétricas

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Polares

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta) + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

Ejemplo: Calcular la longitud de un cable pesado que cuelga entre dos puntos situados a igual altura a 20 metros de distancia uno de otro. La ecuación es la de una catenaria (cadena pesada sustentada en dos puntos) que corresponde a un coseno hiperbólico. En este caso y = 0.8 Ch(0.25 x) cuando el origen se encuentra en la mitad de la distancia que separa los puntos de suspensión.



La longitud del cable es

$$s = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + 0.8^2\, sh(0.25x)^2}\, dx = \int_{-10}^{10} \sqrt{0.8^2\, ch(0.25x)^2}\, dx = 0.8\int_{-10}^{10} ch(0.25x)dx = 22.4027m$$

Este resultado indica que la “panza” del cable requiere 2.4027 m más de longitud de cable para cubrir los 20 metros de separación entre soportes.

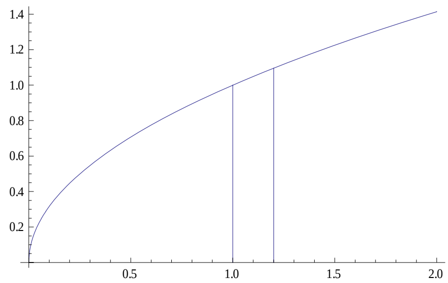
No siempre las integrales que permiten calcular longitudes pueden resolverse por métodos analíticos. En esos casos, la aplicación de métodos numéricos cubre con holgura necesidades prácticas.

Volumen de un sólido de revolución

Se considera una curva representativa de la función f(x) en el intervalo [a,b] en el que ella está definida, entonces, una aproximación al volumen del sólido que se obtiene al hacer rotar la curva alrededor del eje de abscisas es:

$$V \approx \sum \Delta v_i$$

$$\Delta v_i = \pi f(\zeta_i)^2 \Delta x_i$$



donde Δv_i es el volumen elemental obtenido haciendo rotar el sector marcado en el gráfico alrededor del eje x

El volumen resulta (hay un límite de por medio, expresarlo)

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Como ejemplo se calcula el volumen de una semiesfera haciendo girar alrededor del eje de abscisas una semicircunferencia $x^2 + y^2 \leq r^2$

$$V = \pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{2}{3}\pi r^3 \left[L^3\right]$$

Área de un sólido de revolución

Al hacer girar alrededor de un eje coordenado, por ejemplo el de abscisas, una curva representativa de la función f(x), se genera un sólido de revolución cuyo volumen se calculó en el punto anterior. Asimismo, dicha curva al girar genera una superficie cuya área se calcula ahora.

Para ello y con referencia al mismo gráfico anterior se puede estimar el área de la superficie de revolución mediante

$$A \approx \sum \Delta A_i$$

$$\Delta A_i = 2\pi y \Delta s$$

donde Δs es el elemento de arco e y es el radio con el cual gira ese elemento de arco.

Un límite (plantearlo) permite escribir las siguientes integrales para el cálculo del área de una superficie de revolución

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$A = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta) sen(\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

para coordenadas cartesianas, cartesianas paramétricas y polares respectivamente.

Como ejemplo se calcula el área de la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje x de la semicircunferencia con centro en el origen y radio r.

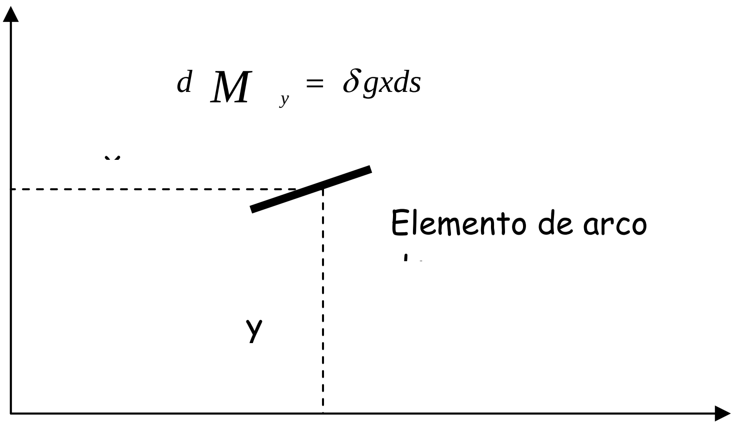
$$A = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi r^2 \left[L^2\right]$$

Momentos de líneas

Se considera un elemento de arco ds cuya masa se supone constante, siendo δ la densidad lineal entonces las diferenciales de momentos de primer orden con respecto a ejes coordenados son, siendo g la aceleración de la gravedad

$$dM_x = \delta g y ds$$

$$dM_y = \delta g x ds$$



Integrando se obtiene

$$M_x = \delta g \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \left[\frac{M}{L}\frac{L}{T^2}LL \right]$$

$$M_y = \delta g \int_c^d x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \left[\frac{M}{L}\frac{L}{T^2}LL \right]$$

Las diferenciales correspondientes a momentos de orden superior son

$$d\,M_x^{(n)} = \delta g y^n ds$$
$$d\,M_y^{(n)} = \delta g x^n ds$$

donde el caso n=2 es particularmente útil en las aplicaciones. Se denomina Momento de Inercia.

Integrando resulta

$$M_x^{(n)} = \delta g \int_a^b f(x)^n \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$M_y^{(n)} = \delta g \int_a^b x^n \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Baricentro de un arco de curva

Sabiendo que los momentos de primer orden o momentos estáticos con respecto a un par de ejes coordenados situados en el baricentro son nulos, puede calcularse.

$$M_x^1 = \delta g \int_a^b [f(x) - y_G]\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 0$$

$$M_y^1 = \delta g \int (x - x_G)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 0$$

despejando resulta

$$y_G = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}\left[\frac{L^2}{L}\right]$$

$$x_G = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}\left[\frac{L^2}{L}\right]$$

Como ejemplo se calcula el baricentro del arco de circunferencia situado en el primer cuadrante.

Las ecuaciones paramétricas se toman

$$C\begin{cases} x = rsen(t) \\ y = r\cos(t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

entonces es

$$y_G = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(t)\sqrt{[-rsen(t)]^2+[r\cos(t)]^2}\,dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-rsen(t)]^2+[r\cos(t)]^2}\,dt} = \frac{r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt}{r\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt} = \frac{r^2 sen(t)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{r\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}[L]$$

por simetría resulta

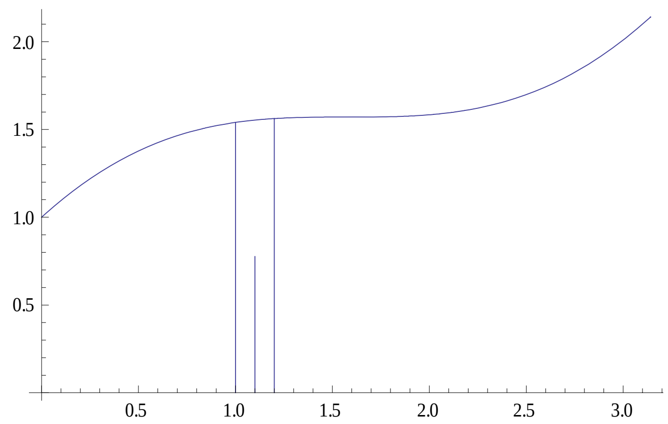
$$x_G = \frac{2r}{\pi}[L]$$

Momentos de una superficie

Dada una función f(x) definida en [a,b], se subdivide el intervalo de de definición en n partes de amplitud Δx y, suponiendo la densidad δ superficial $[M/L^2]$ constante y toda la masa concentrada en el centro de gravedad de la faja elemental se pueden escribir las siguientes diferenciales.

$$d\,M_x^1 = \delta g\frac{f(\zeta)}{2}f(\zeta)\Delta x$$

$$d\,M_y^1 = \delta g x f(\zeta)\Delta x$$



Resulta, integrando

$$M_x^1 = \frac{\delta g}{2} \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

$$M_y^1 = \delta g \int_a^b x f(x) dx$$

Como ejemplo se calculan los momentos estáticos o de primer orden de un cuarto de círculo de radio r. Se toma como ecuación del círculo

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad 0 \le x \le r$$

Resulta

$$M_x = \frac{\delta g}{2} \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{\delta g r^3}{3} \left[\frac{ML^2}{T^2} \right]$$

$$M_y = \delta g \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{\delta g r^3}{3} \left[\frac{ML^2}{T^2} \right]$$

La simetría es obvia. Las unidades pueden parecer extrañas. Sin embargo, si se piensa que masa por aceleración es fuerza, es fácil ver que la unidad de masa M está multiplicada por una aceleración con unidades de longitud L sobre unidades de tiempo T al cuadrado, quedando otra unidad de longitud libre y esto es, sencillamente, fuerza por distancia o sea **¡momento!**

Centro de gravedad de un superficie plana

Considerando los momentos de primer orden con respecto a un par de ejes baricéntricos, debe resultar:

$$M^{1}_{x_g} = \frac{\delta g}{2}\int_a^b [f(x) - y_G] f(x)dx = 0$$

$$M^{1}_{x_G} = \delta g \int_a^b (x - x_g) f(x)dx = 0$$

de donde

$$y_G = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{\int_a^b f(x)dx}\left[\frac{L^3}{L^2}\right]$$

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\left[\frac{L^3}{L^2}\right]$$

Tomando nuevamente como ejemplo el cuarto de círculo cuyos momentos de primer orden han sido calculados y cuya área es $\frac{1}{4}\ \pi r^2$ resultan como coordenadas del centro de gravedad

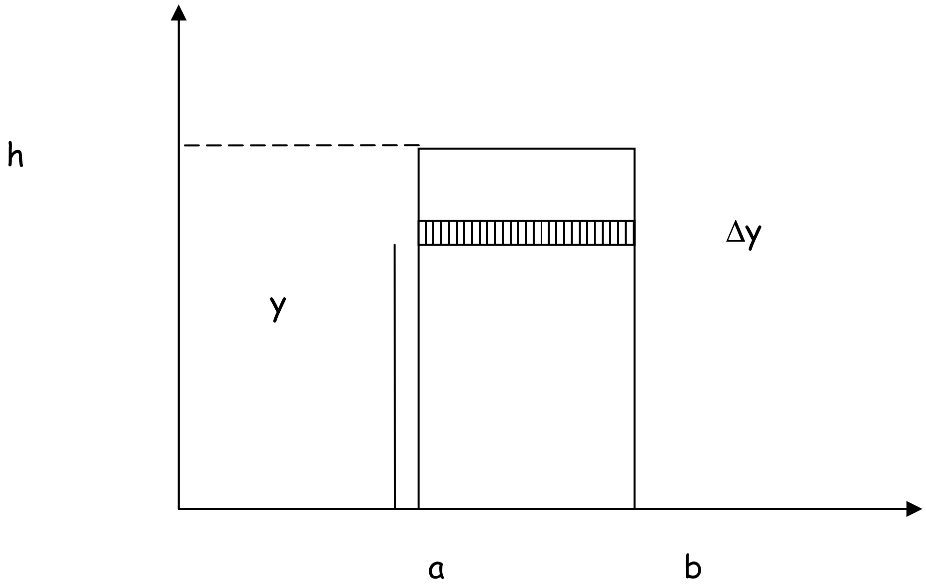
$$x_G = y_G = \frac{4r}{3\pi}[L]$$

Momentos de Inercia

Particularmente útiles en las aplicaciones son los momentos de segundo orden o momentos de inercia, usualmente denominados J.

Con los recursos analíticos que brinda esta asignatura sólo es posible el cálculo de algunos momentos de inercia siendo necesario para generalizar el tema operar con integrales dobles, tema del segundo curso de análisis. Sin embargo, y en tren de fijar conceptos se expresa que la forma de obtener un momento de inercia es la misma que fuera utilizada para los momentos estáticos, con la diferencia que las distancias de los elementos de análisis a los ejes se toman al cuadrado (momentos de segundo orden)

Se divide la superficie en partes elementales y se postulan las diferenciales de momento de inercia. Luego, integrando, se obtienen los correspondientes momentos.



$$\Delta J_x = \delta g y^2 \Delta y$$

$$J_x = \delta g \int_0^h y^2 dy$$

Centro de gravedad de un sólido de revolución

Si el sólido de obtiene haciendo girar la curva f(x) alrededor del eje x, la única coordenada a calcular es x_G puesto que por razones de simetría la ordenada y la cota (z) deben ser nulas. Anulando momentos de primero orden con respecto al plano baricéntrico por x_G se obtiene

$$x_G = \frac{\pi \int_a^b x\left[f(x)\right]^2 dx}{\pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$$

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

01 Representar el recinto limitado por los ejes coordenados y cada una de las siguientes curvas y calcular su área

01 $y = 8 - x^3$ 02 $y = x^3 - 27$

03 $y = \dfrac{x-3}{x-4}$ 04 $y = \dfrac{x+2}{x+5}$

05 $y = \ln(x) + 5$ 06 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

07 $y = 10^{1-x} - 1$ 08 $y = e^x$

09 $y = e^{-x}$ 10 $y = th(x) - 1$

02 Representar las siguientes curvas y determinar el área del recinto limitado por ellas.

01 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 20$ 02 $5(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 20$

$-\frac{1}{4}(\pi - 4)$ 03 $\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{1+x}{1-x}$ 04 $4y^2 = x^2(4-x)$

05 $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 06 $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$

07 $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 4x - y - 11 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ 08 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + 10 = 0 \\ 10x - y - 26 = 0 \end{cases}$

09 $\begin{cases} 2x^2 - 3y = x - 1 \\ y^2 - 2y = x - 3 \end{cases}$ 10 $\begin{cases} y = sen(x) \\ \\ y = \cos(x) \end{cases} \quad |x| \le \pi$

11 $\begin{cases} y = sen(x) \\ y = tg(x) \\ y = ctg(x) \end{cases}$ $|x| \leq \pi$

12 $\begin{cases} y = sh(x) \\ y = ch(x) \\ x = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x^2 y = x^4 - x^2 + 1 \\ x^2 y = x^4 - x^2 + 8 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

14 $\begin{cases} y = th(x) \\ y = cth(x) \\ x = 1 \end{cases}$

03 Calcular el área del recinto limitado por las curvas

01 $\begin{cases} x = a[3\cos(t) - \cos(3t)] \\ Y = a[3sen(t) - sen(3t)] \end{cases}$

02 $\begin{cases} x = a[3\cos(t) + \cos(3t)] \\ y = a[3sen(t) - sen(3t)] \end{cases}$

03 $\begin{cases} \begin{cases} x = a\sec(t) \\ y = atg(t) \end{cases} \\ x = 2a \end{cases}$

04 $\begin{cases} \begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = asen^3(t) \end{cases} \\ x + y = a \end{cases}$

04 Determinar el área del recinto limitado por las siguientes curvas

01 $\begin{cases} \rho = sen(\theta) \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

02 $\begin{cases} \rho = \sec^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

03 $\begin{cases} \rho = 1 - \cos ec(2\theta) \\ \rho = \cos(\theta) \end{cases}$

04 $\begin{cases} \rho = 1 - \sec(2\theta) \\ \rho = sen(\theta) \end{cases}$

05 Calcular la longitud del arco de curva

01 $y = x^{\frac{3}{2}}$ $0 \leq x \leq 5$

02 $y^2 = x$ $0 \leq x \leq 2$

03 $x^2 = 2y \quad 1 \le x \le 3$ 04 $x^2 + y^2 = r^2$

06 Ídem

01 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 4$ 02 $\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t sen(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

03 $\begin{cases} x = a[\cos(t) + tsen(t)] \\ y = a[sen(t) - t\cos(t)] \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

07 Ídem

01 $\rho = e^{2\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ 02 $\rho = a[1 + \cos(\theta)] \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

03 $\rho = ae^{\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ 04 $\rho = a\cos^4\left(\frac{\theta}{4}\right) \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

08 Determinar el volumen de los sólidos engendrados por la rotación alrededor del eje de abscisas de los recintos limitados por las siguientes curvas

01 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ 02 $8x^2 + 5y^2 = 40$

03 $\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = asen^3(t) \end{cases}$ 04 $\begin{cases} x = a[t - sen(t)] \\ y = a[1 - \cos(t)] \end{cases}$

09 Ídem con rotación alrededor del eje de ordenadas.

10 Determinar el área de la superficie engendrada por el arco de catenaria

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

comprendida en [-a,a] al girar:

01 alrededor eje abscisas 02 alrededor eje ordenadas

11 Hallar las coordenadas del baricentro de

01 Un cuarto de circunferencia

02 Un cuarto de círculo

03 Un cuarto de elipse

04 Del área encerrada en el primer cuadrante por $y = 4 - x^2$

05 Del área encerrada por las curvas

01 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ 02 $\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = asen^3(t) \end{cases}$

03 $\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 = -8y \end{cases}$ 04 $y = 2sen(3x) \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

12 Hallar las coordenadas del baricentro del sólido de revolución engendrado por rotación de la curva

01 $y = 4 - x^2$ x

02 $y = 4 - x^2$ y

13 Calcular el momento segundo orden (momento de inercia) de un rectángulo de base b y altura h con respecto a un eje baricéntrico paralelo a la base.