ANALISIS MATEMATICO I
Ciclo Lectivo 2009

Guía de Estudio y Práctica 12

APROXIMACION DE FUNCIONES

Ing. Jorge J. L. Ferrante

I CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS

Aproximar, dice la Real Academia Española en su Diccionario de la Lengua, significa **"Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado"**

Ese es, exactamente, el tema de esta Guía. Obtener resultados tan cercanos al exacto como sea necesario con el propósito de trabajar con funciones sencillas en lugar de hacerlo con funciones complicadas. Pero, ¿qúe clasificación es esta? ¿Acaso se trata de nuevas categorías de funciones? ¿Cuáles son las sencillas? ¿Cuáles son las complicadas?

Algunos ejemplos permitirán entender el concepto.

La función y = sen(x) no es complicada para nadie. Sin embargo, la función y = x es más sencilla que la función seno. De hecho, para calcular algún valor de la primera, lo primero que se piensa es en la necesidad de consultar una tabla de valores de la función seno, problema absolutamente inexistente para la segunda, ya que, dado $x = x_0$ de inmediato es $y_0 = x_0$. ¿Y? Simple, si se recuerda que la función seno y la función arco son infinitésimos equivalentes en un entorno del origen de coordenadas, en ese entorno se podrá tomar $\text{sen}(x) \cong x$ porque la aproximación es tan cercana al valor exacto como algún problema de ingeniería lo requiere.

Esto no es para nada trivial. En física se estudia el péndulo. El modelo matemático del mismo es una ecuación diferencial de segundo orden donde aparece un $\text{sen}(\theta)$ donde θ es el ángulo que forma la vertical con el desplazamiento lateral del hilo que sostiene la "lenteja" que forma el péndulo. Esa ecuación diferencial no tiene solución analítica (como ocurre con la mayor parte de las ecuaciones diferenciales que se presentan en la práctica). Sin embargo, los colegas de física dicen "para ángulos θ pequeños - ¿les gusta 6°30" o 7°?, más no - la función $\text{sen}(\theta)$ puede ser reemplazada por θ y entonces si, la ecuación diferencial tiene solución analítica, es una ecuación lineal de segundo orden cuya solución exacta es de fácil obtención.

Un paseo por el laboratorio de física, con péndulo, cronómetro, guardapolvo y demás enseres de un experimentador, permitirá ver las diferencias entre un péndulo apartado 5º de la vertical y soltado para que oscile y otro experimento apartándolo 60º de la vertical y librado a oscilar y, sobre todo permitirá ver y medir lo que significa "aproximar"

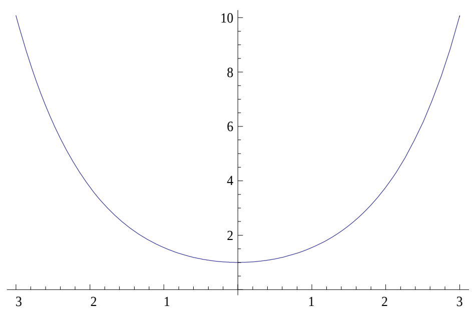
Un cable pesado, o mejor, una cadena, sujetada por sus extremos a una misma altura y a distancia d, hace "panza". Esa panza, cuando el problema se estudia matemáticamente corresponde a un coseno hiperbólico, función cuya forma es llamada "catenaria" precisamente por ese motivo.

La catenaria, una vez dibujada, huele a parábola, razón por la cual el coseno hiperbólico parece posible sea aproximado por una parábola. Pero ¿qué parábola? ¿de qué grado? ¿con qué error? . Estas y otras preguntas serán contestadas en el desarrollo de esta GEP. Pero se adelanta, el coseno hiperbólico puede ser aproximado, con error cada vez menor, por las siguientes parábolas:

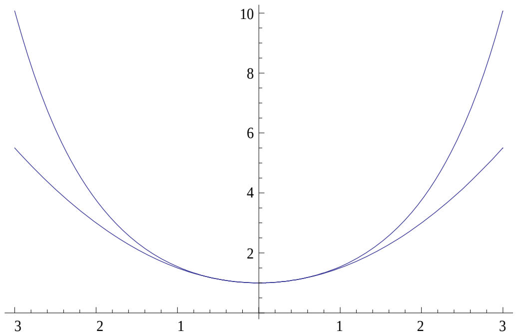
$$ch(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$
$$ch(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
$$ch(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}$$
....

Los siguientes gráficos dan prueba de ello.

La catenaria

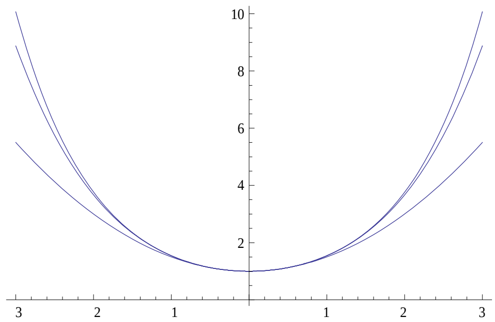


La catenaria superpuesta a la primera parábola



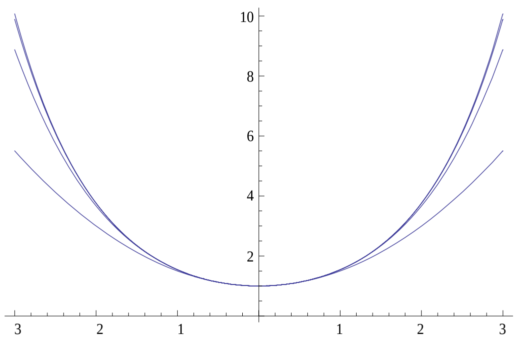
En un entorno del origen, la aproximación parece buena, luego empeora en forma creciente.

La catenaria y las dos primeras parábolas de aproximación



La aproximación mejora significativamente.

Aproximación con las tres parábolas



La tercera sólo se aprecia por el tono más fuerte de la catenaria. Para muchas aplicaciones, esto es más que suficiente y puede ser reemplazada por el polinomio de sexto grado con economía operativa.

Encontrar este tipo de aproximaciones y estimar su error es motivo de todo lo que sigue.

Sucesión de funciones

Una sucesión de funciones es una aplicación del conjunto N (o, a veces, N_0) en un conjunto U de funciones, de tal forma que, a cada número natural n le corresponde una y sólo una función denominada $u_n(x)$.

$$\{u_n(x)\} = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_k(x), ...\}$$

Por ejemplo, la sucesión

$$\{x^n\} = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, ..., x^k, ...\}$$

Esta sucesión de funciones se transforma en sucesiones numéricas (GEP11) cuando se le asignan valores numéricos a x. Esas sucesiones pueden ser convergentes o divergentes.

Por ejemplo, la sucesión anterior en x = 1/2; en x = 1 y en x = 2 se transforma en las sucesiones numéricas:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\right\}$$

$$\{1^n\} = \{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,...\}$$

$$\{2^n\} = \{2,4,8,16,32,64,128,...\}$$

La primera es convergente a 0, la segunda es convergente a 1 y la tercera es divergente.

El conjunto de valores de x que hacen que las sucesiones numéricas resultantes sean convergentes, se denomina campo de convergencia de la sucesión de funciones.

Además, para todo x tomado en el campo de convergencia, la sucesión numérica resultante converge a un valor real. Queda así establecida una aplicación donde a cada x del campo de convergencia le corresponde un valor numérico, es decir queda establecida una función.

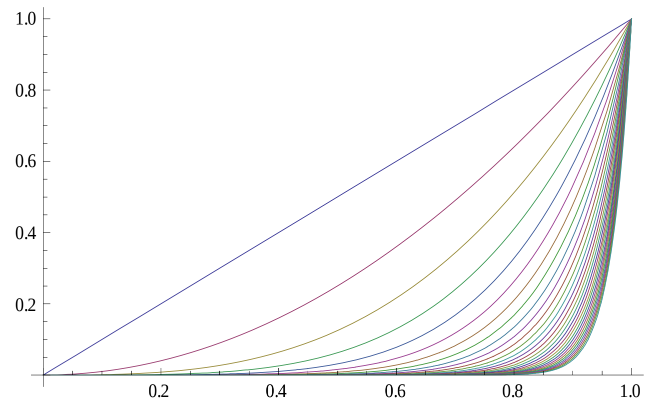
Se escribe

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

y debería estar claro que **una sucesión de funciones, cuando converge, converge a una función.**

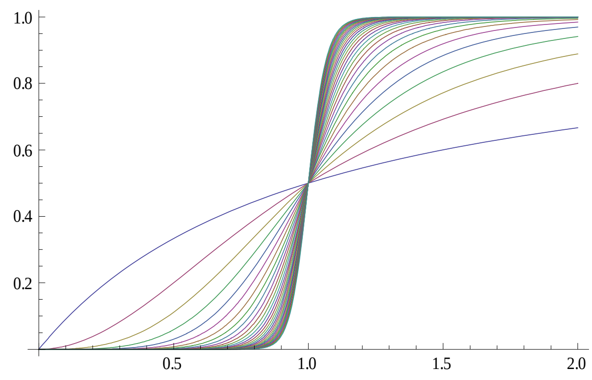
Por ejemplo, la sucesión $\{x^n\}$ converge en el intervalo [0,1] a la función

$$\{x^n\} \to u(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



La sucesión $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^n}\right\}$ converge en el intervalo [0, ∞) a la función

$$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\} \to u(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & \forall x \in (1,\infty) \end{cases}$$



Se observa que las sucesiones están formadas por funciones continuas pero que la función a la que convergen, en ciertos puntos, no son continuas.

Obsérvese que la influencia del intervalo en la que se realiza el estudio tiene un peso decisivo en esa materia. En efecto, si en el primer ejemplo se toma el intervalo [0,1) la sucesión converge a la función continua f(x) = 0 {ATENCIÓN ¡la diferencia está en un paréntesis y en un corchete!}.

En el segundo ejemplo la convergencia es hacia la función continua f(x) = 0 en el intervalo [0,1) y hacia la función continua f(x) = 1 en el intervalo (1, ∞) {De nuevo, asunto de [y/o de)}

Este tipo de problemas requieren definir muy ajustadamente el significado del término "converge".

Convergencia puntual

La sucesión de funciones $\{u_n(x)\}$ converge puntualmente a la función $u(x)$ si

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \qquad tomando \qquad n > N = N(\varepsilon, x)$$

Es decir, si la diferencia en valor absoluto entre el término genérico de la sucesión de funciones y la función límite se puede hacer tan pequeña como se quiera (ε) con tal de tomar el índice n mayor que un valor N que depende de ε y del punto x en el que se estudia la convergencia.

Por ejemplo, la sucesión de funciones $\{x^n\}$ en [0,1] converge a la función u(x) = 0 pero

$$|u_n(x) - u(x)| = |x^n - 0| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \qquad \Rightarrow x^n < \varepsilon \qquad \Rightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)} = N(\varepsilon, x)$$

Esto indica claramente que, cuanto más cerca se esté de 1, mayor será el valor del índice a partir del cual el término genérico satisfaga la desigualdad planteada.

En cambio, si el estudio se realiza en el intervalo [0,1) basta con tomar

$$n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(1-\upsilon)} = N(\varepsilon), \qquad 0 < \upsilon < 1$$

para que, desde un **único** valor de n en adelante, e independientemente del punto considerado, simultáneamente en todos los puntos se satisfaga la desigualdad. Esto lleva, de manera natural al concepto de

Convergencia Uniforme

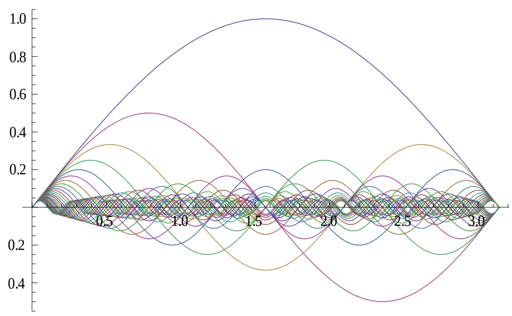
La sucesión de funciones $\{u_n(x)\}$ converge uniformemente a la función $u(x)$ si

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \qquad tomando \qquad n > N = N(\varepsilon)$$

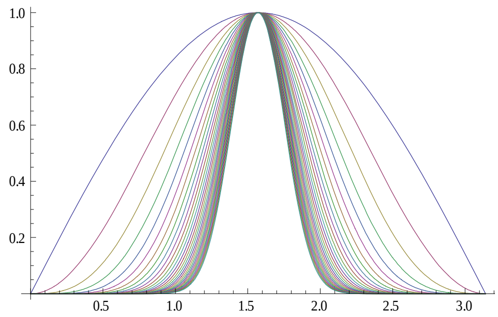
Es decir, si la diferencia en valor absoluto entre el término genérico de la sucesión de funciones y la función límite se puede hacer tan pequeña como se quiera (ε) con tal de tomar el índice n mayor que un valor N que depende solamente de ε **y no de x**. Y esto ocurre simultáneamente para todos los puntos del intervalo.

Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{sen(nx)}{n}\right\}$ converge uniformemente a la función $f(x) \equiv 0$ en [0, π] como puede apreciarse en el gráfico siguiente.

$$\left\{\frac{sen(nx)}{n}\right\} \underset{U}{\rightarrow} 0$$



En cambio, la sucesión $\{sen^n(x)\}$ no converge uniformemente en ese intervalo, pero si lo hace en los intervalos [0, π/2); (π/2, π] y, en ellos converge a la función $f(x) \equiv 0$. También en este caso, una representación gráfica ayuda a entender ese comportamiento.



Según el criterio de Cauchy, la convergencia es uniforme cuando

$$\left|u_n(x) - u_m(x)\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \qquad n, m > N_0 = N(\varepsilon)$$

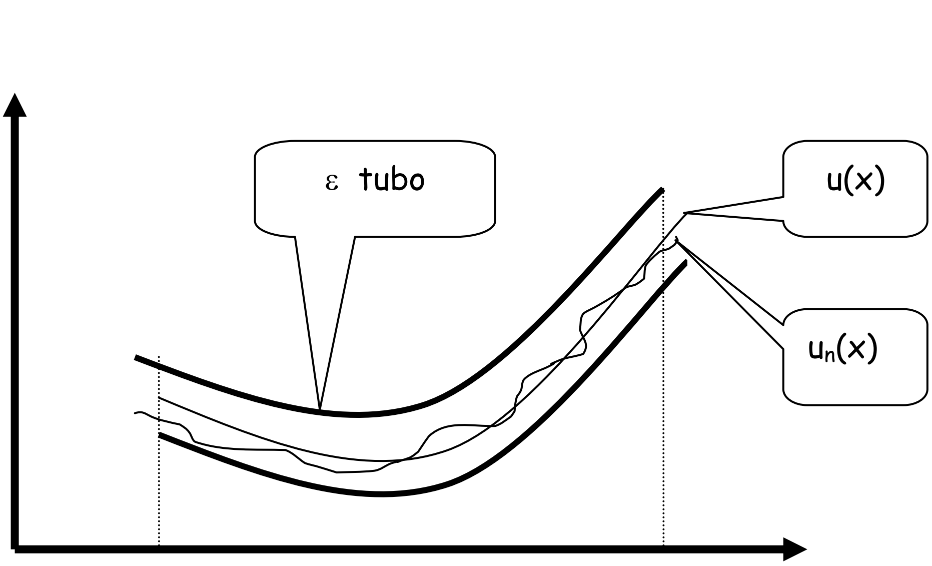
es decir, cuando la diferencia, en valor absoluto entre dos términos de la sucesión de funciones puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomarlos más allá de un valor de su índice que solo dependa de ε y no de x.

Según el criterio del supremo, la convergencia es uniforme cuando

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup \left[\left| u_n(x) - u(x) \right| \right] \right\} = 0$$

es decir, si la más pequeña de las cotas superiores de la diferencia entre el término genérico de la sucesión y la función a la que esta converge tiende a cero.

Desde el punto de vista geométrico, la convergencia uniforme significa que, desde un cierto valor de n en adelante, cada uno de los términos de la sucesión de funciones se mantiene dentro de un ε-tubo construido con la función límite u(x) como guía o "eje".



Esta característica puede ser utilizada para analizar el tipo de convergencia de una sucesión de funciones. Por ejemplo, la sucesión ya tratada $\left\{sen^n(x)\right\}$ converge a la función

$$\left\{sen^n(x)\right\} \to u(x) = \begin{cases} 0 & [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Si en intervalo [0, π] se traza una horizontal con ordenada 0 < ε < 1, el valor de la función correspondiente a x = π/2 (1) queda fuera del ε tubo construido con eje coincidente con el eje x . La convergencia no es uniforme en ese intervalo.

La convergencia uniforme permite demostrar que si las funciones $u_n(x)$ son continuas en el intervalo en el que se hace el estudio y además

$$\left\{u_n(x)\right\} \underset{U}{\to} u(x)$$

entonces $u(x)$ es una función continua.

Serie de funciones

Dada una sucesión de funciones $\left\{u_n(x)\right\}$ se forma a partir de ella una nueva sucesión de funciones, definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&S_1(x) = u_1(x) \\
&S_2(x) = u_1(x) + u_2(x) \\
&S_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} u_k(x)
\end{aligned}$$

La sucesión de funciones $\left\{S_n(x)\right\}$ se denomina serie de funciones.

Si la sucesión $\{S_n(x)\}$ es convergente puntualmente se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

Si la sucesión $\{S_n(x)\}$es uniformemente convergente la serie de funciones es uniformemente convergente a la función f(x). Entonces

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

Cuando n > N(ε) simultáneamente para todo x en el intervalo en que se hace el estudio. En otros términos, la convergencia es uniforme si

$$\sup_{a\le x\le b} |f(x) - S_n(x)| = \sup_{a\le x\le b} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0 \qquad si \qquad n \to \infty$$

Test de convergencia uniforme

Una serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ es una **serie dominante** de una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ si $|u_k(x)| \le m_k, \forall k, \forall x \in [a,b]$.

Criterio M de Weierstrass

Si para una serie de funciones definida en [a,b] existe una serie dominante convergente, la serie de funciones converge uniformemente en el intervalo dado.

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen(kx)}{k^2}$ converge uniformemente en todo el eje real porque está dominada por la serie numérica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Serie de potencias

Las funciones más "sencillas", sin duda, son las funciones potenciales del tipo $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$. Una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

se denomina **serie de potencias**. El número real a_n es el coeficiente n-esimo y el punto x_0 es el centro del desarrollo. Por comodidad, dado que un cambio de variable lo permite, casi siempre se trabaja con $x_0 = 0$ con lo cual las series de potencias tienen este aspecto.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k + \dots$$

En cierto sentido, parecen un polinomio de infinitos términos, pero hay que ser muy cuidadoso con este tipo de generalización porque unos cuantos problemas delicados deben ser aclarados antes de afirmarlo.

Se enuncian algunos de ellos:

¿Convergen las series de potencias?

¿A qué convergen?

¿Cual es el campo de convergencia de las series de potencias?

¿Qué tipo de convergencia tienen, puntual o uniforme?

¿Se pueden derivar como se puede derivar un polinomio?

¿Se pueden integrar como se puede integrar un polinomio?

Se trata a continuación de ir respondiendo estos -y tal vez otros interrogantes- relacionados con las series de potencias.

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en el intervalo I=(-1,1) dado que, por simple división resulta

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

Cualquier valor de $x \in I$, la serie **representa** a la función, es decir, su suma coincide con el valor de la función en ese punto.

Para x = 0 esto es obvio, para x = 0,5 resulta

$$\frac{1}{0.5} = 1 + 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4 + 0.5^5 + ... = 2$$

por ser serie geométrica de primer término 1 y razón q = 0.5.

En los extremos del intervalo el análisis debe ser más fino. En efecto, en x = -1 resulta

$$\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1+1-... = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0$$
$$\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1+1-... = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+... = 1$$

¿Qué resulta? Nuevas preguntas, como, por ejemplo ¿se puede aplicar la propiedad asociativa? En alguna época de la larga historia del estudio de las series, algunos cuyo nombre es mejor olvidar optaron por el promedio entre ambos "valores" y dictaminaron la convergencia a 1/2 ¡Asombroso!

En x = 1 resulta

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+...$$

de un lado, una expresión carente de sentido, del otro una serie divergente.

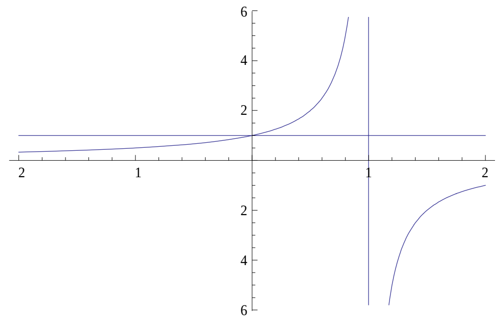
Fuera del intervalo, x = 2, por ejemplo, aparece un valor perfectamente definido para la función y una serie divergente. La serie no representa a la función.

$$\frac{1}{1-2} = -1$$

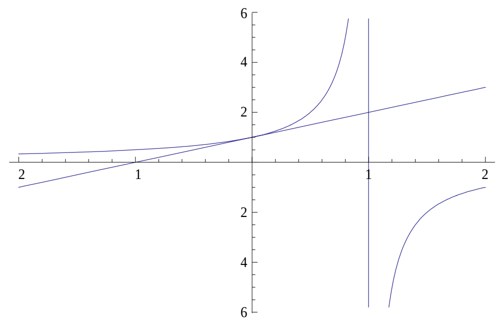
$$1+2+4+8+16+32+64+128+...$$

Los siguientes gráficos muestran cómo evoluciona la aproximación en I a medida que aumenta el grado del polinomio que se utiliza en lugar de la serie.

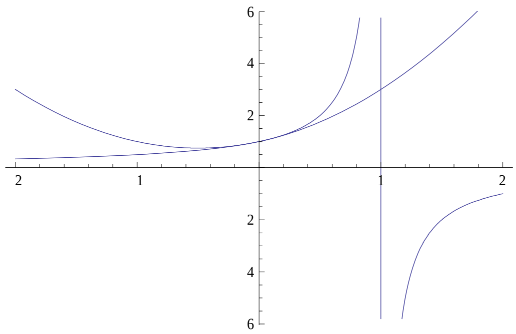
Polinomio de grado cero



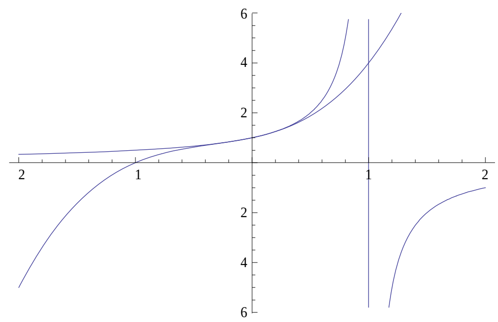
Polinomio de primer grado



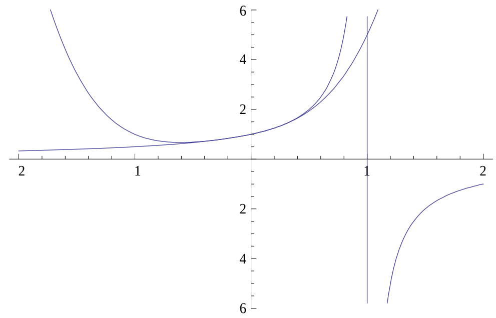
Polinomio de segundo grado



Polinomio de tercer grado



Polinomio de cuarto grado



Obsérvese cómo, en el entorno del origen la aproximación es cada vez mejor y que, a medida que se acercan los extremos del intervalo, la aproximación disminuye. Fuera del intervalo de convergencia, directamente no hay aproximación.

Otros ejemplos que serán oportunamente estudiados son la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergente en I= (-∞, ∞) y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ convergente en un solo punto, $x_0 = 0$

Algunas preguntas quedan contestadas: cuando convergen, las series de potencias convergen a una función, la convergencia se da **en un intervalo, en todo el eje real o en punto.**

Si convergen, la convergencia es uniforme

Por lo siguiente: sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ una serie de potencias convergente. Si se toma r ≥ 0 y es Cx-x_0C < r y la sucesión $a_n r^n$ está acotada, la serie es absolutamente convergente. En efecto

$$0 \leq \left| a_n (x - x_0)^n \right| = \left| a_n \right| r^n \left(\frac{(x - x_0)^n}{r^n} \right) \leq M \left(\frac{(x - x_0)^n}{r^n} \right)$$

donde M es la cota. La serie $M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x - x_0)^n}{r^n} \right)$ es geométrica con razón q < 1 que opera como dominante convergente. Por el criterio M de Weierstrass la serie de potencias converge uniformemente.

En base a esto, se denomina Radio de Convergencia a

$$R = \sup\left\{ |x - x_0| \,/ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = S \right\}$$

Si R > 0 el intervalo I = (x_0 - R, x_0 + R) se denomina Intervalo de Convergencia

Entonces, resumiendo.

Cuando convergen, las seres de potencias convergen a una función

Las series de potencias convergen en un punto, en un intervalo finito o en un intervalo infinito

En el intervalo de convergencia, la convergencia es uniforme

Cálculo del radio de convergencia

Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias puede utilizarse la fórmula de Cauchy - Hadamard. (¡Cauchy, si nuevamente Cauchy!).

Para cada x X I = (x_0 - R, x_0 + R) la serie de potencias es una serie numérica convergente. Por serlo, debe ser

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} < 1 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|(x - x_0)| < 1$$

llamando $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ resulta que la serie es convergente en

$$|(x - x_0)| < R$$

Si R = 0, la serie converge en un punto y su suma es a_0

Si R Y∞ la serie converge en todo el eje real

Si R es un número real cualquiera, la serie converge en (x_0 - R, x_0 + R)

Debe notarse especialmente que el radio de convergencia depende exclusivamente de los coeficiente numéricos de la serie y no de la variable de la misma.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!} + ...$ converge en todo el eje real. Por lo siguiente:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n!|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \sqrt[2n]{2\pi n}}{e} \to \infty$$

en consecuencia, la serie converge en todo el eje real (se ha utilizado la fórmula de Stirling para aproximar el factorial)

En cambio, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + 4!\, x^4 + ... + k!\, x^k + ...$ solo converge en $x_0 = 0$, por lo siguiente.

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n \sqrt[2n]{2\pi n}} = 0$$

Si, en lugar del criterio de Cauchy se aplica el criterio de D'Alembert para el análisis de convergencia, el radio de convergencia resulta

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Derivación e integración de series de potencias.

Se pueden demostrar dos propiedades fundamentales de las series de potencias dentro de su campo de convergencia.

Derivación

Las series de potencias pueden ser derivadas término a término.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

aplicando en forma reiterada se tiene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$$

Integración

Las series de potencias pueden ser integradas término a término

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n \, dx$$

Las respectivas demostraciones hacen uso de la convergencia uniforme dentro del campo de convergencia.

Esto es extremadamente útil para encontrar alungas series de potencias. Por ejemplo, por simple división se tiene que, para -1 < x < 1

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} - ...$$

Integrando término a término se tiene

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - ...$$

en el mismo intervalo anterior -1 < x < 1

Serie de Taylor

Se ha llegado, por fin, al punto donde se puede hacer la pregunta clave en este tema. Aquí va.

Dada una funcion infinitamente derivable en un intervalo ¿existe una serie de potencias que la represente?

Corresponde aclarar, **CON MAYÚSCULAS**, qué quiere decir que una serie **REPRESENTA A UNA FUNCIÓN.** La aclaración es pertinente porque en la mayoría de los casos en que se efectúa esa pregunta en un examen, la mayoría de las respuestas podrían formar parte de una antología del disparate.

UNA SERIE DE POTENCIAS REPRESENTA A UNA FUNCIÓN, SIMPLEMENTE, CUANDO, PARA CADA PUNTO DEL CAMPO DE CONVERGENCIA, LA SUMA DE LA SERIE ES IGUAL AL VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESE PUNTO.

Supóngase que esa serie existe. Entonces será

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+a_4(x-x_0)^4+\dots$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\dots$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}=2a_2+3*2a_3(x-x_0)+4*3a_4(x-x_0)^2+\dots$$

....

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}=k(k-1)\dots2*1a_k+(k+1)k\dots2*1a_{k+1}(x-x_0)+\dots$$

....

de estas igualdades se deduce que

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

De inmediato se tiende a pensar, con injustificado optimismo, que se puede escribir, sin más

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

pero el entusiasmo cae en picada cuando se considera, por ejemplo, la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

que tiene derivadas de todos los órdenes en el origen y ¡valen cero (0)! (verificarlo). Entonces, la fórmula

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

sólo se cumple en $x_0 = 0$ y no hay aproximación a la función.

¿Cuál es entonces, el problema?

El problema queda en evidencia cuando se escribe la serie de la siguiente manera

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Para que la serie de potencias represente a la función es necesario que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\rightarrow 0 \qquad n\rightarrow\infty$$

como ya ha sido dicho y, para demostrar eso es necesario hacer lo siguiente:

Suponer la existencia de una función q(x) tal que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{q(x)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

lo que equivale a decir que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

Se crea una nueva función de la siguiente manera

$$F(\xi) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-\xi)^n =$$
$$f(x) - f(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) - \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 - \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-\xi)^3 - \ldots - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-\xi)^{m+1}$$

pero esta función en $\xi = x_0$ y en $\xi = x$ vale 0. Por lo siguiente

$$F(x_0) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} = 0$$

por la definición hecha al principio y en $\xi = x$

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \frac{f'''(x)}{3!}(x-x)^3 - \ldots - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-x)^{m+1} = 0$$

Como la función es continua y vale 0 en los extremos del intervalo $[x_0,x]$ en por lo menos un punto intermedio se debe cumplir el teorema de Rolle F'(c) = 0. Derivando queda

$$F'(\xi) = -f'(\xi) - \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!} - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \frac{f''(\xi)}{2!}2(x-\xi) -$$
$$- \frac{f^{iv}(\xi)}{3!}(x-\xi)^3 + \frac{f'''(\xi)}{3!}3(x-\xi)^2 - \ldots - \frac{f^{m+1}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + \frac{f^{m}(\xi)m}{m!}(x-\xi)^{m-1} + \frac{q(x)(m+1)}{(m+1)!}(x-\xi)^m$$

Igualando a cero queda

$$-\frac{f^{m+1}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + \frac{q(x)(m+1)}{(m+1)!}(x-\xi)^m = 0$$

de donde, en un punto intermedio μ será

$$q(x) = f^{m+1}(\mu)$$

Finalmente

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{m+1}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

si la derivada de orden m+1 está acotada es inmediato que, para m Y∞ el segundo término del segundo miembro tiende a cero y entonces, ahora si

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

es el desarrollo en serie de potencias de la función f(x), desarrollo que se conoce como **Serie de Taylor** mientras que

$$\frac{f^{m+1}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

se conoce como **término complementario de Lagrange**.

Distintas formas de la Serie de Taylor

Se presentan a continuación distintas formas en que puede presentarse la Serie de Taylor

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

La segunda forma, de fundamental importancia en las aplicaciones, como se verá más adelante.

Haciendo $x = x_0 + h$ resulta

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}h^{m+1}=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+O(h^{n+1})$$

$O(h^{n+1})$ representa un infinitésimo de orden n+1

Esta forma resulta muy útil para analizar el comportamiento de la función en un entorno de x_0. De hecho, el análisis completo de máximos, mínimos y puntos de inflexión puede hacerse, con ventajas, con esta expresión. También es muy usada en cálculo numérico para establecer aproximaciones numéricas a las derivadas.

Una variante se presenta también en este caso cuando el término complementario de Lagrange se escribe en la forma de Cauchy

$$\frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} = \frac{f^{(m+1)}(x_0+\theta h)}{(m+1)!}h^{m+1} \qquad 0<\theta<1$$

Cuando se toma $x_0 = 0$, se tiene la llamada Serie de Mc Laurin

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+O(x^{k+1})$$

donde $O(x^{k+1})$ indica un infinitésimo de orden k+1

Por ejemplo, para calcular el desarrollo en serie de Mc Laurin de la función y = sen (x) se debe hacer

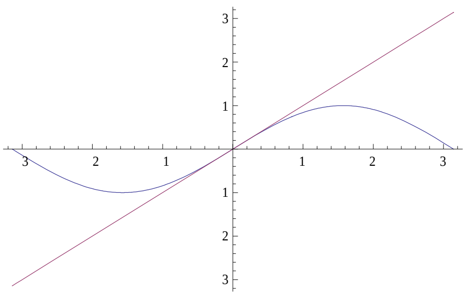
$$\begin{array}{ll}
f(x)=sen(x) & f(0)=0 \\
f'(x)=\cos(x) & f'(0)=1 \\
f''(x)=-sen(x) & f''(0)=0 \\
f'''(x)=-\cos(x) & f'''(0)=-1 \\
f''''(x)=sen(x) & f''''(0)=0 \\
f'''''(x)=\cos(x) & f'''''(0)=1 \\
\dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

Entonces es (el término de séptimo grado ha sido afortunadamente estimado)

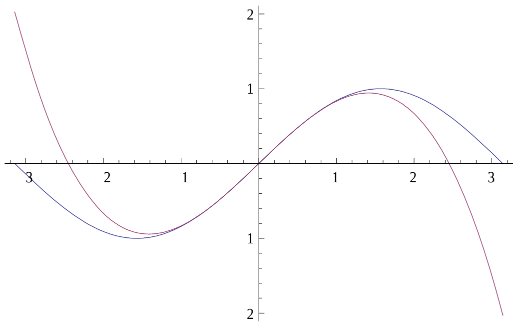
$$sen(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left.\dfrac{d^n sen(x)}{dx^n}\right|_{x=0}}{n!}x^n = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

A continuación se representan gráficamente distintas aproximaciones a la función considerada mediante su desarrollo en serie de Mc Laurin a efectos de que se aprecie definitivamente el sentido conceptual de aproximación.

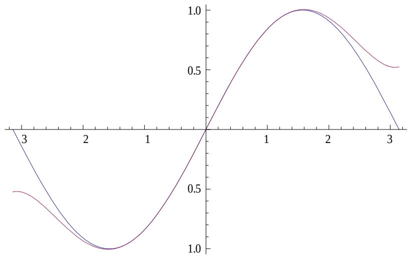
Aproximación de primer grado sen(x) $\cong$ x. Se observa la coincidencia de valores en el entorno del origen. Recordar que, en ese punto ambas funciones son infinitésimos equivalentes.



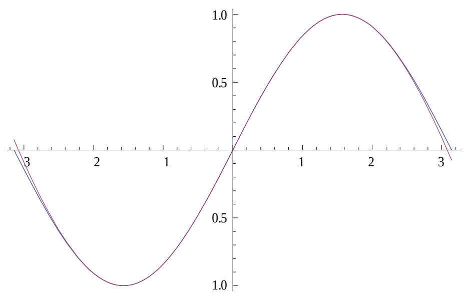
Aproximación de tercer grado sen(x)$\cong$ x - $x^3/3!$. Se aprecia como el polinomio se adapta a la forma de la función senoidal. Más allá de x = 1.2 las diferencias son notorias y crecientes.



Aproximación de quinto grado sen(x)$\cong$ x - $x^3/3!$ + $x^5/5!$. La adecuación del polinomio a la función senoidal es cada vez mejor, notándose ahora discrepancias desde x = 2 en adelante.



Aproximación mediante el polinomio de séptimo grado $sen(x) \cong x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$. Las discrepancias son apreciables en los entornos de π y $-\pi$, pero "pequeñas"



Con el mismo procedimiento se pueden encontrar los siguientes desarrollos en serie de Mc Laurin

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots |x| < 1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad x \in R$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad x \in R$$

$$\cos(x) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad x \in R$$

$$arcsen(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1*3*5*\ldots*(2n-1)}{2*4*6*\ldots*2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots |x| \leq 1$$

$$arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots |x| \leq 1$$ (ya hallada por integración)

Análisis del error

En las aplicaciones es necesario estimar el error que se comete cuando, en lugar de la serie representativa de la función, se utiliza la suma de sus primeros m términos - conocida en ocasiones como polinomio de Taylor- más un resto.

El error es, en estos casos, una estimación de la cota del término complementario de Lagrange o de Cauchy.

Por ejemplo, la serie de Mc Laurin para e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$

Siendo operativamente imposible trabajar con infinitos términos, se hace

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + T_5 = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\mu}}{5!} x^5 = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{5!} x^5$$

donde se ha escrito el término complementario según Lagrange y según Cauchy. Si se desea calcular el valor de e mediante el polinomio de cuarto grado escrito se toma x = 1 y resulta como cota del error

$$\left| \frac{e^{\mu}}{5!} 1^5 \right| < \frac{3}{120} = 0.025$$

Habiéndose estimado que, en todos los casos es e < 3

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{67}{24} = 2{,}7916666\ldots$$

con un decimal exacto.

Con un término más en la aproximación, la cota del error T_6 es 0.0041666... y, el valor aproximado es 2,7166666...

Operaciones con Series de Taylor y Mc Laurin.

Dadas dos funciones cuyas respectivas series de potencias se conocen, las siguientes proposiciones son válidas

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad f(kx)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n \qquad f(x^m)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$$

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$$

$$f(x)g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad c_k=\sum_{n+m=k} a_n b_m=\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

Sólo han sido expuestas las propiedades para desarrollos de Mc Laurin porque mediante un adecuado cambio de variables los desarrollos de Taylor pueden llevarse a esa forma.

Esas propiedades habilitan, por ejemplo a calcular el desarrollo en serie de potencias de la función y = $sen^2(x)$ elevando al cuadrado la serie

$$sen^2(x)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\right)^2=x^2-\frac{2}{3!}x^4+\left[\frac{2}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right]x^6-\ldots$$

Las operaciones a realizar son pesadas, el término general es de díficil expresión y, por último, corresponde señalar que el campo de convergencia no necesariamente coincide con el de la o las funciones originales.

II EJERCICIOS A RESOLVER, PREFERENTEMENTE EN CLASE.

01 Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

01 $$\frac{x}{1*2}-\frac{x^2}{2*2^2}+\frac{x^3}{3*2^3}-\frac{x^4}{4*2^4}+\ldots$$

02 $$1-x^2+\frac{1*3}{1*2}x^4-\frac{1*3*5}{1*2*3}x^6+\frac{1*3*5*7}{1*2*3*4}x^8-\ldots$$

03 $$\frac{x}{3}+\frac{2}{3^2}x^2+\frac{3}{3^3}x^3+\frac{4}{3^4}x^4+\frac{5}{3^5}x^5+\ldots$$

04 $$\frac{3}{4}x-\frac{6}{4^2}x^3+\frac{9}{4^3}x^5-\frac{12}{4^4}x^7+\ldots$$

05 $$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

06 $$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

07 $$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

08 $$1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1*3}{2*4}\frac{x^4}{2^4}+\frac{1*3*5}{2*4*6}\frac{x^6}{2^6}+\ldots$$

09 $$1+\frac{1!}{10}x+\frac{2!}{100}x^2+\frac{3!}{1000}x^3+\frac{4!}{10000}x^4+\ldots$$

10 $$1-\frac{1!}{5*10^5}x+\frac{2!}{6*10^6}x^2-\frac{3!}{7*10^7}x^3+\frac{4!}{8*10^8}x^4-\ldots$$

02 Idem

01 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n!}{3*5*...*(2n+1)}\right)^2 x^n$ 02 $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)x^n$

03 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\ln(n)}{n}}\left(sen\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ 04 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$

05 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sqrt{n}}x^n$ 06 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

07 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n4^n}x^n$ 08 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 4^n}x^n$

09 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}x^n$ 10 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$

03 Idem

01 $\frac{(x-1)}{1*2}-\frac{(x-1)^2}{2*3}+\frac{(x-1)^3}{3*4}-\frac{(x-1)^4}{4*5}+...$

02 $\frac{(x-2)}{3}+\frac{(x-2)^2}{2*3^2}+\frac{(x-2)^3}{3*3^3}+\frac{(x-2)^4}{4*3^4}+...$

03 $\frac{1}{2}(x+2)+\frac{3^2}{2^3}(x+2)^3+\frac{5^2}{2^5}(x+2)^5+\frac{7^2}{2^7}(x+2)^7+...$

04 $\frac{2*3}{9}(x+1)^2-\frac{4*5}{9^2}(x+1)^4+\frac{6*7}{9^3}(x+1)^6-...$

05 $\frac{4}{1*2}(x-3)+\frac{4^2}{2*3}(x-3)^3+\frac{4^3}{3*4}(x-3)^5+...$

04 Desarrollar en potencias de (x-2) las siguientes funciones

01 $3x^4-5x^3+2x+8$ 02 $4x^4+3x^3-2x^2-x$

03 $6x^4-3x^3-x^2+15$ 04 $-9x^5+4x^3-7x^2+9$

05 Desarrollar las funciones del ejercicio anterior en serie de Mc Laurin y explicar el resultado.

06 Desarrollar por la fórmula de Taylor, con cinco términos no nulos y término complementario de Lagrange, las siguientes funciones.

01 $f(x) = sen(x) \quad x = \frac{\pi}{3}$ 02 $f(x) = \cos(x) \quad x = \frac{\pi}{4}$

03 $f(x) = sh(x) \quad x = 1$ 04 $f(x) = ch(x) \quad x = -1$

05 $f(x) = \ln[sen(x)] \quad x = \frac{2\pi}{3}$ 06 $f(x) = \ln[\cos(x)] \quad x = -\frac{\pi}{6}$

07 Desarrollar por la fórmula de Mc Laurin, con tres términos no nulos y término complementario de Lagrange, las siguientes funciones.

01 $f(x) = \sec\sqrt{\pi^2 + x^2}$ 02 $f(x) = th(1 - x^3)$

03 $f(x) = ch\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 04 $f(x) = arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

08 Desarrollar en serie de Taylor, en un punto genérico x = a las siguientes funciones y determinar su campo de convergencia.

01 $f(x) = \sqrt{x}$ 02 $f(x) = \ln(x)$

03 $f(x) = \frac{1}{x}$ 04 $f(x) = sen(x)$

05 $f(x) = sh(x)$ 06 $f(x) = e^{-x}$

09 Desarrollar en serie de Mc Laurin las siguientes funciones

01 $y = e^{x}$ 02 $y = e^{-x}$ 03 $y = sen(x)$

04 $y = \cos(x)$ 05 $y = ch(x)$ 06 $y = sh(x)$

10 Desarrollar en serie de Mc Laurin las siguientes funciones y representar en un mismo gráfico las funciones y sus cuatro primeras aproximaciones según el desarrollo obtenido.

01 $y = sen(2x)$ 02 $y = sh\left(\frac{x}{3}\right)$ 03 $y = e^{-0.1x}$

04 $y = \cos(3x)$ 05 $y = ch\left(\frac{x}{2}\right)$ 06 $y = sen(x + \frac{\pi}{6})$

11 Desarrollar en serie de Mc Laurin la función f(x) = Ln(1+x), determinar su campo de convergencia y, en base a ella, hallar los desarrollos y campos de convergencia de

01 $y = \ln(1-x)$ 02 $y = \ln(1-x^2)$ 03 $y = \ln(1-3x)$

04 $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 05 $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 06 $y = \ln(1+2x)$

12 Efectuar los desarrollos de y = $(1+x)^m$ e y = $(1-x)^m$, determinar su radio de convergencia y, en base a ellos, desarrollar las funciones

01 $y = \sqrt{1+x^2}$ 02 $y = \sqrt{1-x^2}$

03 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 04 $y = \frac{1}{x^2-1}$

13 Tomando como base desarrollos conocidos, hallar los primeros términos del desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones

01 $y = sen^2(x)$ 02 $y = \cos^2(x)$

03 $y = sh^2(x)$ 04 $y = ch^2(x)$

05 $y = x\cos(x) - sen(x)$ 06 $y = e^x sen(x)$

07 $y = tg(x)$ 08 $y = cth(x)$

09 $y = \frac{\ln(1+x)}{1+sen(x)}$ 10 $y = th(x)$

14 Derivar los desarrollos de las siguientes funciones y verificar que los resultados obtenidos son los desarrollos de sus derivadas.

01	$y = sen(x)$	02	$y = \cos(x)$	03	$y = ch(x)$
04	$y = sh(x)$	05	$y = \ln(1+x)$	06	$y = \ln(1-x)$

15 Verificar los siguientes límites empleando series

01 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2) - sen^2(x)}{x^4} = \dfrac{1}{3}$

02 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(x) - x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

03 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - sen(x)} = 16$

04 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + sen(x) - 1}{e^{x} - sen(x) - 1} = 1$

05 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^{x} - \cos(x)} = 1$

16 Resolver empleando series, las siguientes ecuaciones trascendentes. Indicar si los resultados son exactos o aproximados.

01 $\cos(x) = 2 - ch(x)$

02 $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2sen(x)$

03 $arcsen(x) = arcsh(x)$

17 Empleando tres términos del desarrollo en serie de potencias que sea conveniente, calcular los siguientes números y acotar el error.

01	sen(14º)	02	cos(27º)
03	arctg(0.03)	04	$e^{-0.08}$