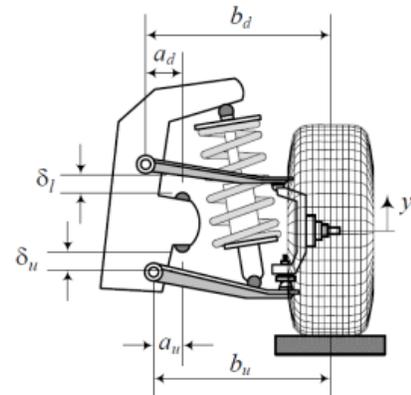


## COMPLEMENTO DIDÁCTICO CAPÍTULO 3. VIBRACIONES MECÁNICAS

### Introducción al sistema de suspensión de un vehículo



## MECANICA RACIONAL



*Liberto Ercoli - Virginia Azurmendi*

## **Descripción y análisis dinámico del sistema de suspensión**

### **Resumen**

El sistema de suspensión de un automóvil constituye un subsistema mecánico de vital importancia para su desempeño, siendo objeto de análisis en múltiples publicaciones especializadas en Ingeniería Automotriz, en las cuales se busca comprender su funcionamiento y obtener los datos necesarios para su diseño, de manera de lograr la mayor eficiencia del mismo y del vehículo. Para obtener esta información se plantean modelos físico-matemáticos que permiten estudiar la respuesta dinámica del automóvil ante las diversas excitaciones que puede sufrir. La modelización de la suspensión como un sistema vibrante es un elemento fundamental para deducir la dinámica vehicular; a pesar de que el planteo y resolución de estos modelos no permite predecir fielmente el comportamiento dinámico en campo, constituye una herramienta útil para entender los fenómenos asociados y realizar un pre dimensionamiento.

El objetivo del presente trabajo es aplicar la teoría y práctica sobre vibraciones vista en la asignatura Mecánica Racional para la explicación de los fenómenos asociados a la suspensión vehicular, relacionar conceptos y mostrar la utilidad e importancia de la misma. Con este fin, se presenta una recopilación de información extractada desde diferentes publicaciones, de manera de brindar bases para su comprensión, haciendo énfasis en su comportamiento dinámico como un sistema vibratorio de un grado de libertad y aportando lineamientos básicos sobre el cálculo del sistema.

**El presente documento constituye un complemento didáctico del libro de texto Mecánica Racional y tiene como objetivo relacionar la teoría y práctica de la asignatura con sistemas mecánicos de aplicación en la práctica de la ingeniería.**

## Índice

Introducción .....	5
Parte I	
1.1 Componentes de la suspensión .....	10
Componentes de soporte o vínculo .....	10
Miembros elásticos primarios .....	10
Miembros elásticos secundarios .....	11
Miembros amortiguadores .....	11
1.2 Geometría de la suspensión .....	11
1.2.1 Suspensión dependiente .....	12
1.2.2 Suspensión independiente .....	13
1.2.3 Suspensión semi-independiente .....	15
Parte II	
2.1 Respuesta humana a las vibraciones.....	17
2.2 Influencia de la suspensión en las oscilaciones de vehículos .....	19
2.3 Fuentes de excitación.....	19
2.3.1 Irregularidades de la calzada.....	19
2.3.2 Masas desbalanceadas.....	21
2.3.3 Excitación de la línea de marcha .....	21
2.3.4 Motor y transmisión.....	21
2.4 Vibraciones de un vehículo .....	22
2.4.1 Modelo de un grado de libertad .....	23
2.4.1.1 Predimensionamiento .....	24
2.4.1.2 Optimización de la suspensión .....	25
2.4.2 Modelo de dos grados de libertad .....	35
2.4.2.1 Frecuencias naturales .....	36
2.4.2.2 Respuesta en frecuencia .....	38

Departamento de Ingeniería Mecánica.
   
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014
   
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

2.4.2.3 Optimización RMS.....	41
2.4.3 Modelo de cuatro grados de libertad.....	44
2.4.3.1 Rolido .....	44
2.4.4 Modelo de siete grados de libertad .....	48
2.4.5 Equivalencia de parámetros .....	49
2.5 Cálculo de parámetros de suspensión.....	50
Conclusiones.....	54
Anexo I .....	51
Agradecimientos .....	61

## Introducción

El automóvil constituye un elemento fundamental para satisfacer la necesidad de movilidad de la sociedad actual. Desde su aparición hasta la actualidad ha sufrido una transformación notable, debido al desarrollo tecnológico y a la creciente demanda de eficiencia y seguridad por parte de los usuarios. A su vez, legislaciones nacionales e internacionales han surgido para sentar las bases de exigencias técnicas destinadas a reducir los problemas relacionados con el uso del automóvil. A estos factores se suma la competitividad de la industria, todo lo cual configura un conjunto de requerimientos exigidos para los vehículos actuales como lo son las prestaciones, la fiabilidad, el confort, el ruido, la seguridad, el consumo, etc.

Estos requisitos están íntimamente relacionados entre sí, por lo que alcanzar uno puede significar perder de vista otro. La tarea que deben afrontar los ingenieros y diseñadores es encontrar soluciones que permitan un cierto equilibrio entre estos factores.

En el marco del diseño y estudio del comportamiento del automóvil, no se debe perder de vista el sistema hombre-vehículo-medio y las interacciones entre ellos. El conductor percibe estímulos durante la conducción como vibraciones o aceleraciones y desaceleraciones que influyen su forma de control del vehículo. Éste último recibe las acciones de control del conductor como cambios de direcciones y frenado, siendo su respuesta función del comportamiento de sus sistemas y la interacción con el medio (calzada y efectos aerodinámicos).

De lo anteriormente descrito se desprende que el automóvil está sujeto a estímulos dinámicos de diferentes tipo y origen. Por ello, el estudio del movimiento y comportamiento dinámico del mismo constituye un factor fundamental para su diseño, y el objeto de un vasto análisis en un sinnúmero de artículos y libros especializados. Todos los sistemas que componen el automóvil son diseñados atendiendo a este factor de manera de garantizar un correcto desenvolvimiento; teniendo en cuenta la seguridad, estabilidad, maniobrabilidad y confort.

El estudio dinámico del automóvil envuelve diversos principios. Debido a que el comportamiento del mismo está definido por la respuesta a las fuerzas impuestas, dicho estudio se centra en la comprensión del origen de estos esfuerzos, es decir, cómo y por qué se producen. Este análisis se puede hacer de manera experimental o empírica, o analítica. La primera usualmente presenta errores producto de las extrapolaciones hechas entre experiencias pasadas y nuevas condiciones. Por ello, los ingenieros optan el método

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

analítico, el cual se basa en la descripción de un mecanismo apelando a las leyes físicas para establecer un modelo analítico, el cual queda representado por ecuaciones diferenciales y algebraicas en los casos más favorables. Es importante destacar que este método propone una aproximación a la realidad y que las hipótesis elegidas definirán su precisión y fallas. Por último, el advenimiento de la era digital posibilitó la resolución de modelos analíticos más complejos que los anteriores, mediante el uso de programas de cálculo y elementos finitos, permitiendo la integración de los diferentes sistemas que componen el vehículo y la obtención de soluciones más precisas.

Uno de los sistemas que componen el automóvil es la suspensión. Su estudio y diseño no escapa a lo mencionado. Se considera la relación entre hombre-vehículo-medio ya que este sistema constituye el vínculo más importante para estos elementos. Su papel en el confort, maniobrabilidad y estabilidad lo erigen como un factor de significativa importancia y, por ende, su diseño requiere un análisis exhaustivo. Las exigencias en materia de vibraciones, seguridad y comodidad involucran a la suspensión. A su vez, este sistema actúa transfiriendo estímulos dinámicos de la calzada al automóvil y participando en la generación de fuerzas durante el recorrido. Esto evidencia la necesidad de un análisis dinámico, para lo cual se modela de diferentes formas con el objetivo de estudiar distintos fenómenos y comportamientos.

En este marco, las vibraciones tienen un papel preponderante en cuanto a esfuerzos dinámicos que se producen en el andar de un automóvil, afectando el confort y estabilidad. La teoría del sistema de un grado de libertad presentada en la materia Mecánica Racional representa una herramienta útil para realizar un primer análisis, aunque luego se requiere mayor precisión, para lo cual se agregan nuevos elementos.

Este trabajo consiste en una recopilación de información sobre el sistema de suspensión extraído de diferentes publicaciones especializadas en diseño y dinámica del automóvil. La metodología se basa en rescatar conceptos básicos sobre esta temática y presentarlos de manera intuitiva. El objetivo es, por un lado brindar al lector conocimientos sobre un sistema que es de uso masivo, y por el otro relacionar la teoría básica de vibraciones con el estudio dinámico para mostrar una aplicación práctica.

El trabajo se estructura en dos partes. La primera contiene información general sobre el sistema de suspensión, características, funciones, componentes y arquitecturas. Esta temática puede ser objeto de análisis de un trabajo completo, por lo cual sólo se exhiben conceptos. En la segunda parte se presenta el estudio en materia de vibraciones que involucra la suspensión, incluyendo los modelos usados y las expresiones matemáticas que

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

se desprenden de estos, gráficos, influencia de los parámetros y referencias al libro Mecánica Racional. Siendo este el tema principal, se brindan mayores precisiones y se presentan métodos de optimización para la elección de los parámetros del sistema. La primera parte tiene como función introducir al lector en la temática de la suspensión y brindar conceptos importantes para facilitar la comprensión de la segunda.

Por último, con el objeto de ilustrar los mecanismos descritos en el trabajo, en el Anexo I se incluyen imágenes de sistemas reales de suspensión, utilizados en autos comerciales, de competición y vehículo de carga.

## **Parte I**

### **1. Descripción y arquitectura del sistema de suspensión**

El sistema de suspensión refiere a un mecanismo compuesto por una serie de componentes con funciones específicas, que sirve de vínculo entre los neumáticos y el vehículo. Esta aproximación a una definición puede ser contradictoria con lo plasmado en algunas publicaciones donde se consideran los neumáticos como parte de la suspensión. Sin embargo, esta suposición se suele realizar cuando se modela el automóvil para su estudio dinámico en el que las cubiertas juegan un importante papel. Estrictamente hablando, la suspensión no incluye los neumáticos.

Un aspecto distintivo de este sistema es permitir el movimiento relativo entre el cuerpo del automóvil y las cubiertas debido a la propiedad deformable o elástica. A ésta se suma el comportamiento amortiguador. Estas cualidades no son arbitrarias, sino que tienen su fundamento en los beneficios que otorgan. Además, es evidente que constituyen un sistema vibratorio (masa, resorte, amortiguador). De hecho, las vibraciones dominan la dinámica vertical del automóvil.

La suspensión no sólo sirve para la vinculación de las cubiertas y el vehículo, sino que también es responsable de brindar confort de marcha, maniobrabilidad y estabilidad. Estos requerimientos están íntimamente relacionados con la mencionada dinámica vertical, comportamiento definido casi exclusivamente por la suspensión. Respecto a la maniobrabilidad, se observa una relación entre la dinámica vertical y la lateral.

Las vibraciones que se pueden presentar en un vehículo repercuten directamente en el confort de marcha. Por ello, son objeto de estudio, tanto analítico como empírico. Además, se evalúa la respuesta humana ante este tipo de excitación con el fin de obtener el mejor desempeño. Existen normas internacionales de calidad que sirven de referencia en este campo. Tanto la elasticidad como la amortiguación tienen roles específicos en la tarea de optimizar la comodidad. Este aspecto se desarrolla con mayor profundidad en la siguiente parte del trabajo.

Otra función de la suspensión y una de las razones por las que este sistema es deformable es asegurar el continuo contacto de los neumáticos con la calzada. Esto se debe a que el automóvil constituye un sistema hiperestático donde existe la posibilidad de ausencia de contacto de algún neumático en un terreno no liso si fuese totalmente rígido. Esto sucede porque una irregularidad del suelo introduce una fuerza en el neumático, generando su

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

aceleración vertical. Sin una suspensión, toda la energía se transmitiría al chasis moviéndolo en la misma dirección vertical. En esta situación es que una cubierta podría perder contacto con la calzada.

Esta función es relevante ya que de nada sirve la potencia de un motor si no hay fricción entre la cubierta y la calzada a fin de movilizar el automóvil dado que es esta fuerza la que permite que el vehículo avance. Sería posible obtener esta función con una estructura flexible y vinculación rígida de los neumáticos, sin embargo no es una solución común, aunque vehículos de baja velocidad lo implementan en la actualidad. A su vez, la elasticidad permite a la suspensión distribuir los esfuerzos que se transmiten entre la calzada y el coche, y determinar el estado de equilibrio ante fuerzas estáticas y cuasi-estáticas. En relación al confort, la conjunción del movimiento relativo y la amortiguación permiten absorber y suavizar las irregularidades del terreno, una de las funciones principales de la suspensión, sino la más importante.

Teóricamente, los neumáticos podrían aislar el vehículo de los esfuerzos provenientes del terreno ya que poseen cierta elasticidad y amortiguación. Sin embargo, sus propiedades no son suficientes para lograr un adecuado confort. Por ello es que la suspensión es insustituible y determinante de las características de un automóvil.

El movimiento de las cubiertas debería ser cuasi perpendicular a la calzada, además de la rotación y el movimiento impuesto por el sistema de dirección. El desplazamiento vertical debe ser controlado por los vínculos de la suspensión para garantizar la correcta posición de los neumáticos respecto del terreno.

Pero la elasticidad exhibe un aspecto negativo relacionado especialmente con la maniobrabilidad o precisión de manejo para lo cual sería conveniente una suspensión lo más rígida posible. Además, mientras que para mejorar el confort se necesita una amortiguación suave y gran elasticidad; para asegurar el contacto cubierta-calzada se necesita mayor amortiguación y menor deformación. De aquí se desprende que los requerimientos exigidos a este sistema representan ciertos conflictos entre sí. Es la tarea de ingenieros y diseñadores encontrar un equilibrio para obtener el mejor desempeño.

En lo descrito anteriormente se menciona la elasticidad y la amortiguación. Es usual que al referirse a la suspensión, las personas piensen en resortes y amortiguadores, o en ballestas en su defecto. Sin embargo, existe una geometría o arquitectura que tiene un rol fundamental en la forma en que la suspensión actúa. Esta característica define ejes imaginarios que determinan los movimientos del vehículo, impactando directamente en la

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

maniobrabilidad y sistema de dirección, el balanceo y la susceptibilidad a este movimiento; sin tener gran relevancia en las vibraciones. En este trabajo se abordará la temática de la arquitectura de manera general ya que hay capítulos enteros de libros dedicados a este tema.

Es evidente que si la suspensión es un mecanismo, posee masa. De este hecho se desprenden dos definiciones importantes:

- Masa suspendida: aquella parte del vehículo que puede moverse respecto del terreno debido a la acción de la suspensión. Es decir, es la masa soportada por este sistema.
- Masa no suspendida: aquella parte que no cambia su posición. Es la masa que se encuentra entre el terreno y la masa suspendida.

Se puede decir que la suspensión es el enlace entre las masas. Algunos componentes de la suspensión contribuyen en parte a la masa suspendida y en parte a la no suspendida, dependiendo de su ubicación y movimiento.

## **1.1 Componentes de la suspensión**

El sistema de suspensión consta de una serie de componentes que, en su conjunto, permiten cumplir con los objetivos propuestos. Es una parte integral del chasis, comprometiendo todo los principales sistemas del automóvil. Estos componentes pueden agruparse en categorías.

### **Componentes de soporte o vínculo**

Son aquellas partes del sistema que vinculan los neumáticos con el chasis, determinando los grados de libertad de los primeros y su correcta posición respecto de la calzada. Gobiernan el movimiento relativo entre las partes mencionadas y transfieren las cargas producidas en las cubiertas al vehículo. Son componentes mecánicos que forman parte de la arquitectura, principalmente los brazos de control de las suspensiones independientes y los elementos de control cinético de la suspensión dependiente.

### **Miembros elásticos primarios**

En esta categoría se incluyen resortes (helicoidales o ballestas), barras anti rolido y resortes de detención. Estos componentes otorgan la característica elástica y almacenan la energía

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

producida por un terreno irregular. A su vez, determinan la posición del vehículo en función de cargas estáticas y cuasi estáticas y su posición relativa.

### **Miembros elásticos secundarios**

Consisten en cojinetes elásticos que se ubican en juntas articuladas. Esto otorga cierto comportamiento elástico a estas articulaciones.

En el principio eran vistas como una desventaja necesaria para evitar la lubricación de las articulaciones mediante el uso de juntas elastómeras. Posteriormente se vio que podían ser usadas para mejorar el diseño elasto-cinemático de la suspensión y el confort. Además, la deformación de estas juntas juega un importante rol en el control del vehículo.

### **Miembros amortiguadores**

Son, básicamente, los amortiguadores de la suspensión o comúnmente llamados absorbedores de choque (*'shock absorbers'* en lengua inglesa). No se debe perder de vista que tanto los miembros elásticos primarios como los secundarios también tienen la capacidad de disipar energía.

Estos componentes permiten disipar la energía almacenada en los miembros elásticos y vibrar de manera amortiguada al vehículo, evitando oscilaciones estacionarias o grandes amplitudes en resonancia.

## **1.2 Geometría de la suspensión**

Aunque todos los sistemas de suspensión poseen los componentes descritos (excepto aquellos que utilizan ballestas, donde puede no emplearse amortiguadores ya que éstas cumplen esa función también), sus geometrías pueden ser muy diferentes. La geometría refiere a la estructura del sistema y define los tipos de suspensión. Es posible diferenciar tres clases: independiente, dependiente o semi-independiente. A su vez, existen distintas geometrías dentro de estas familias.

Los cuatro neumáticos de un vehículo operan en dos sistemas independientes; aquellos conectados a través del eje delantero y los conectados por el eje trasero. Esta independencia permite utilizar diferentes sistemas al frente y detrás, práctica vista en la mayoría de los automóviles. Se observan preferencias a la hora de elegir la arquitectura de la suspensión dependiendo del eje del que se trate. Actualmente, la suspensión independiente es común en la parte delantera, mientras en la trasera puede variar según los requerimientos de diseño.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

La geometría de la suspensión gobierna en gran medida el comportamiento de un automóvil. La forma en que se disponen sus componentes afecta la distribución de peso y la ubicación del centro de gravedad, como así también el desempeño del sistema en sí. El estudio de la dinámica vinculada a esta cualidad permite diseñar estructuras orientadas a evitar redistribuciones de masas en maniobras, bajar el centro de gravedad para lograr mayor estabilidad, reducir el peso del propio sistema, modificar tendencias ajustando ciertos parámetros, entre algunas posibilidades. Algunas de éstas serán descriptas en la siguiente parte.

### 1.2.1 Suspensión dependiente

También llamada de eje rígido, es la forma más sencilla de vincular un par de neumáticos al vehículo. Simplemente se hace a través de un eje sólido, el cual debe unirse al chasis de manera de permitir el movimiento vertical y la rotación, como se observa en la Figura 1. Se debe restringir cualquier movimiento lateral y longitudinal del eje, así como la rotación alrededor del eje vertical del vehículo. Se denomina dependiente porque, al haber un vínculo rígido entre los neumáticos, el movimiento de uno afecta al otro. Existen muchas combinaciones de resortes y uniones que pueden proveer los requerimientos cinemáticos y dinámicos. El diseño más simple consiste en vincular el eje a la mitad de dos ballestas con sus extremos unidos al chasis y ubicadas longitudinalmente. Para mejorar el desempeño, se pueden adicionar vínculos que guíen cinemáticamente el eje y provean soporte dinámico para las fuerzas que se generan.

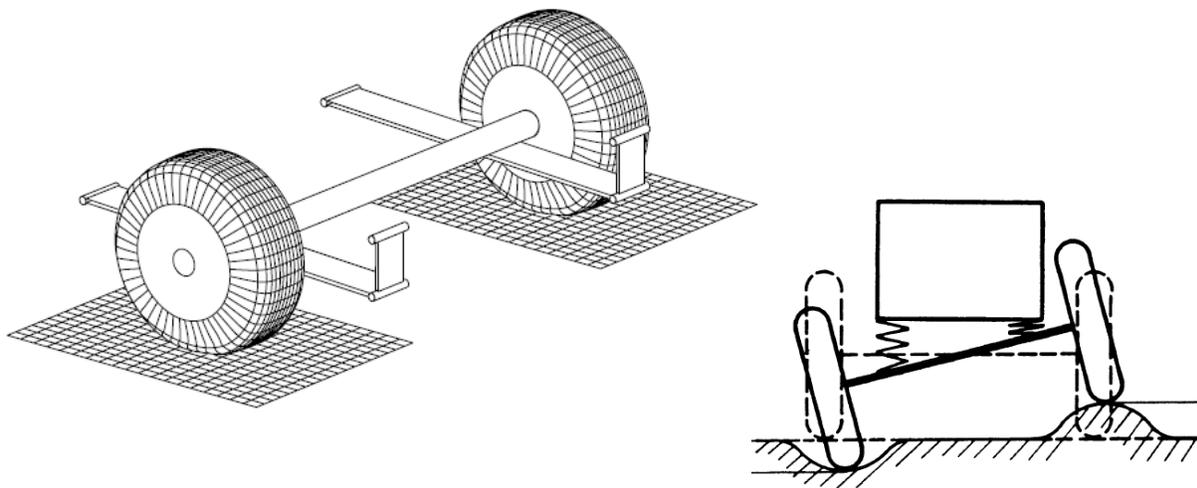


Figura 1. Esquema de suspensión dependiente

### 1.2.2 Suspensión independiente

Como su nombre lo indica, este sistema se caracteriza por el movimiento independiente de las cubiertas opuestas, tal como se observa en el esquema de la Figura 2. Las primeras geometrías de suspensión independiente utilizaban hojas elásticas ubicadas transversalmente, como una evolución de la suspensión dependiente con ballestas. Posteriormente, con el advenimiento de los muelles helicoidales, fueron abandonadas. Al igual que en el caso anterior, se desarrollaron diferentes arquitecturas de este sistema.

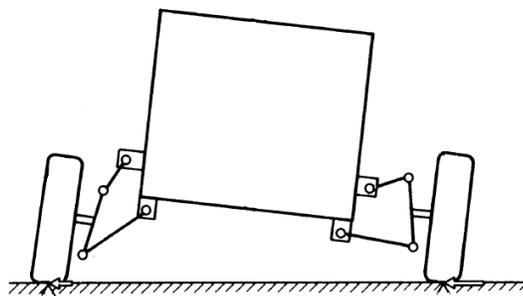


Figura 2. Esquema de suspensión independiente

Actualmente dos son masivamente usadas, siendo las más simples: la de brazo doble A o ‘double wishbone’ (en referencia a las piezas óseas de aves en forma de diapasón) y la McPherson.

La primera consta de dos anclajes transversales o brazos de control a cada lado del vehículo montados de manera de permitir su rotación respecto del chasis, como se muestra en la Figura 3. En el caso de la suspensión delantera, se conecta al sistema de dirección.

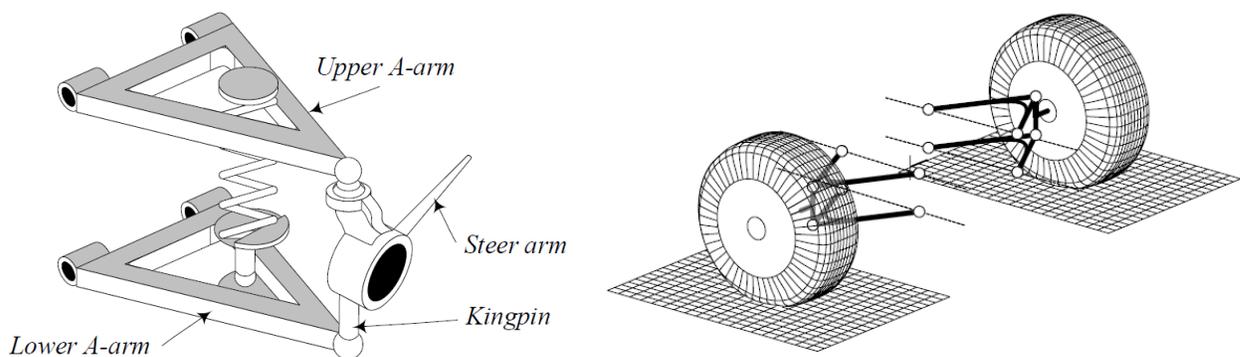


Figura 3. Suspensión tipo brazo doble A

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

La posición de los brazos de control uno respecto del otro determina la altura del eje de rolido y de cabeceo. Además, las diferentes longitudes de los brazos influyen en el ángulo de movimiento de los neumáticos en rebotes.

La segunda geometría se muestra en la Figura 4 y es una variación de la primera donde el brazo superior es reemplazado por un punto pivote en el neumático que coincide con el extremo de un amortiguador y un muelle helicoidal. Todas las fuerzas se concentran en este punto.

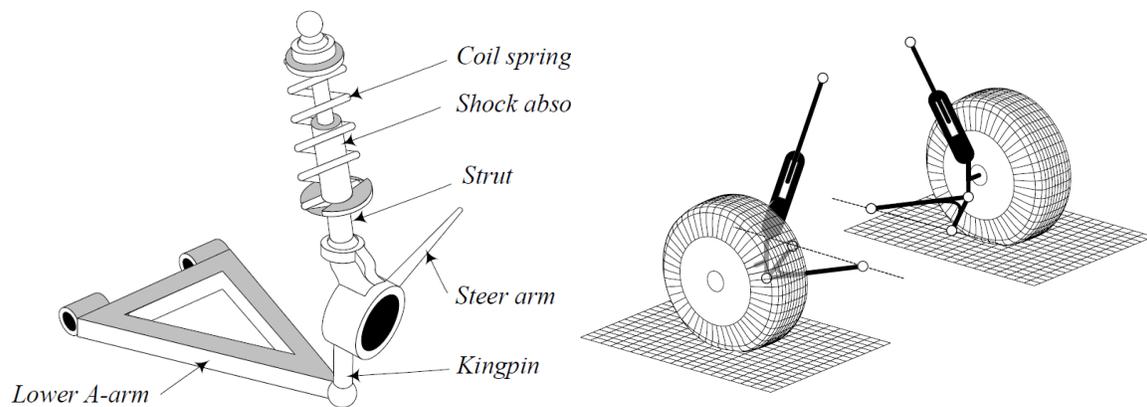


Figura 4. Suspensión tipo McPherson

Existen otras geometrías independientes como la de brazo de arrastre o la Multi-link. La primera, usada en el eje trasero, consiste en un brazo de control ubicado longitudinalmente al eje y montado a ambos lados del vehículo para rotar respecto del chasis, debiendo absorber fuerzas de diferente dirección y, por lo tanto, estar sujeto a esfuerzos de flexión y torsión. La geometría Multi-link se observa en la Figura 5 y consta generalmente de seis barras que ofician de acoples, siendo más compleja, menos confiable y más costosa que la double-wishbone, de la cual surge. Existen variantes de más de seis barras que buscan mejorar el desempeño cinemático.

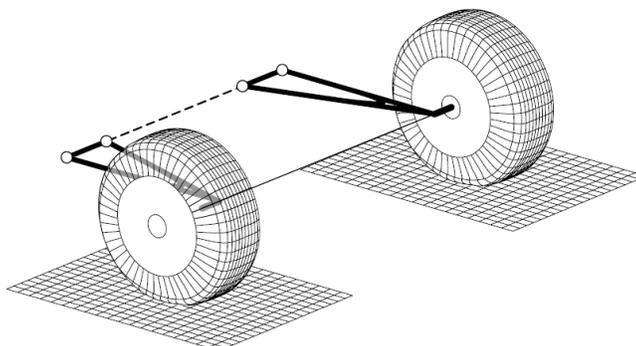


Figura 5. Geometría de brazo de arrastre

En autos de competición, especialmente en autos de fórmula, se utilizan las suspensiones independientes push-rod y pull-rod que se muestran en la Figura 6. En estos sistemas se conecta el neumático al conjunto muelle amortiguador y demás componentes de la suspensión mediante un único brazo, que está sometido a un esfuerzo de compresión en el primer caso y de tracción en el segundo. Estos desarrollos obedecen a necesidades aerodinámicas y de altura, permitiendo obtener centros de gravedad más bajos y utilizar elementos de suspensión esbeltos que favorecen la aerodinámica.

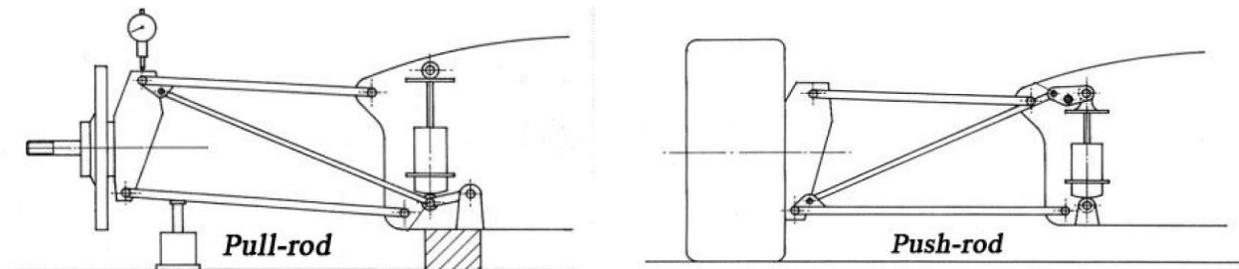


Figura 6. Suspensiones deportivas

### 1.2.3 Suspensión semi-independiente

Es utilizada actualmente en automóviles pequeños y medianos de tracción delantera. Consiste en dos brazos de arrastre unidos al chasis mediante cojinetes elásticos, asegurando la estabilidad mediante un elemento deformable en torsión ubicado transversalmente a los brazos. Este último absorbe todas las fuerzas verticales y laterales; y gracias a su ubicación fuera del eje de rotación del neumático, puede tener baja rigidez a la torsión y funcionar como barra anti-rolido. Es una evolución del sistema de brazo de arrastre, por lo tanto se emplea en ejes traseros.

## Parte II

### 2. Análisis vibratorio de la suspensión

---

Luego de haber explicado el sistema de suspensión, sus características, funciones, componentes y geometrías diversas, en esta sección se aborda su análisis vibratorio, el cual consiste básicamente en el estudio de la dinámica vertical del automóvil. Este aspecto está relacionado directamente con el confort de marcha debido a su relación con las vibraciones mecánicas y con la estabilidad, ya que movimientos en esta dirección pueden derivar en descargas de los neumáticos y pérdida de adherencia.

Las fuentes de excitación que deben considerarse a la hora de analizar las vibraciones en un vehículo son diversas. Pueden mencionarse las irregularidades del terreno, la acción de las masas giratorias (elementos de generación y transmisión de potencia como el motor y la caja de velocidades), desbalances de los neumáticos y su ensamblaje, y las cargas aerodinámicas. La más importante es, sin lugar a dudas, la debida a irregularidades de la calzada.

El propósito del estudio de las vibraciones es hallar soluciones para controlarlas, ya sea en frecuencia, amplitud, aceleraciones que se producen, etc., y la única forma de hacerlo es a través del sistema de suspensión y su optimización. Con su elasticidad y amortiguamiento, configura un sistema vibratorio que se puede analizar apelando a las ecuaciones de la mecánica clásica con el fin de encontrar la mejor combinación de parámetros y mejorar el comportamiento del vehículo.

En cuanto al confort, la percepción de los pasajeros es una cualidad subjetiva; cuanto mayor sea la susceptibilidad, más sensibilidad presentará ante los movimientos vibratorios. Por ello es un aspecto difícil de analizar. Sin embargo es de vital importancia debido a que el comportamiento vibratorio es uno de los criterios más importantes por el cual las personas juzgan la calidad constructiva de un vehículo.

Lo mencionado permite determinar los tres elementos a estudiar para comprender las vibraciones del automóvil:

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

- Las fuentes de excitación
- Los mecanismos de respuesta del vehículo
- La percepción humana y la tolerancia

Aunque el propósito de este texto es analizar la dinámica, es importante destacar el papel de la percepción de los pasajeros por el sencillo hecho que el diseño de la suspensión en cuanto a la dinámica vertical responde a los límites de tolerancia humana y busca obtener el mejor confort para los ocupantes.

## 2.1 Respuesta humana a las vibraciones

Establecer los límites de tolerancia humana a movimientos vibratorios es una tarea difícil debido al elevado grado de subjetividad producto de la diferencia en la sensibilidad de las personas. Sin embargo, se han realizado múltiples investigaciones para hallar valores de referencia. Los métodos empleados para la ejecución de las investigaciones abarcan desde conductores entrenados que prueban el vehículo y evalúan el confort de marcha, hasta pruebas de vibraciones donde se excita el automóvil con ondas sinusoidales de diferentes parámetros (frecuencia, amplitud, aceleración y sobre aceleración) para establecer las zonas de tolerancia, pasando por simuladores donde se ubica el vehículo sobre actuadores hidráulicos para simular las irregularidades del terreno, entre otros.

Más allá de estas pruebas empíricas, existen criterios sugeridos por entidades como la Society of Automotive Engineers, a los cuales se suma la guía para la definición de límites de tolerancia adoptada por ISO. El primer criterio mencionado aparece en el “Ride and Vibration Data Manual” de la entidad, publicado en 1965. En él se presenta una gráfica donde se expresan los límites recomendados de exposición en base al criterio de Janeway. Éste define amplitudes aceptables de vibración de acuerdo a las frecuencias de excitación, observándose una relación inversa entre ambas (al incrementarse la frecuencia disminuye la amplitud aceptable). Tres relaciones simples componen el criterio de Janeway en tres rangos de frecuencia específicos: para vibraciones entre 1 y 6 Hz, la sobre aceleración no debe superar  $12,6 \text{ m/s}^2$ , en el rango de 6 a 20 Hz la aceleración no debe exceder  $0,33 \text{ m/s}^2$ , y entre 20 y 60 Hz la velocidad no debe superar  $2,7 \text{ mm/s}$ . Esta información deriva de pruebas con excitaciones sinusoidales de frecuencia simple y dirección vertical. En el caso de haber excitaciones de diferentes frecuencias, probablemente aquella que por sí sola represente la mayor perturbación, gobernará la percepción de los pasajeros.

En Argentina rigen las siguientes normas IRAM, adaptadas de las ISO:

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

IRAM 4078-1 Guía para la exposición humana del cuerpo entero a vibraciones. Especificaciones generales.

IRAM 4078-2 Acústica. Guía para la evaluación de la exposición humana del cuerpo entero a vibraciones. Estimación de la exposición humana a vibraciones continuas e inducidas por choques en edificios (1Hz a 80 Hz).

IRAM 4078-3 Guía para la evaluación de la exposición humana a vibraciones del cuerpo entero. Evaluación de la exposición a vibraciones del cuerpo entero en la dirección del eje z en la gama de frecuencias de 0,1 Hz a 0,63 Hz.

IRAM 4097 Vibraciones mecánicas. Guía para la medición y evaluación de la exposición del ser humano a vibraciones transmitidas a través de las manos.

La organización internacional ISO presentó en 1974 su norma 2631, donde se exponen los límites de tolerancia a vibraciones del cuerpo humano en su conjunto, para un amplio rango de frecuencia de 1-80 Hz, aplicable tanto a vehículo de transporte como en la industria. Los límites adoptados son:

- Límite de exposición: valores por encima de los cuales existe riesgo para la salud. No debe sobrepasarse este límite salvo en casos excepcionales.
- Límite de capacidad reducida por fatiga: frontera a partir de la cual se evidencia un decrecimiento de la capacidad para la realización eficaz de un trabajo.
- Límite de confort reducido: En vehículo de pasajero está relacionado con la capacidad de ejercer actividades como lectura, escritura, etc.

Esta información se encuentra en gráficos en los que, por ejemplo, se exponen los límites de aceleración a los cuales se puede exponer una persona en función de la frecuencia de excitación de las vibraciones y del tiempo de exposición, diferenciando los movimientos verticales de los horizontales. Es importante esta discriminación debido a la diferencia en la sensibilidad ante las diferentes direcciones de oscilación. En el caso de movimientos verticales se observa una mínima tolerancia frente a frecuencias entre 4 y 8 Hz, lo cual se asocia a la frecuencia de resonancia de la cavidad abdominal. En el rango de 10-20 Hz también se evidencian disminuciones en la tolerancia por la resonancia de otros órganos, como la de la cabeza de 10 Hz. Sin embargo, en cuanto a los movimientos horizontales se observa una gran sensibilidad en el rango de 1 Hz, esto asociado a diferentes síntomas que presentan los ocupantes expuestos. La norma internacional ISO recomienda limitar la exposición a oscilaciones de 1 Hz o menos.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Existe un parámetro para evaluar la respuesta humana a vibraciones llamado potencia absorbida. Este producto de las fuerzas y las velocidades transmitidas al cuerpo sirve para cuantificar la energía vibratoria absorbida por el organismo y los niveles de tolerancia. Actualmente el límite está establecido en 6 W para el conductor.

## 2.2 Influencia de la suspensión en las oscilaciones de vehículos

Es importante destacar las diferentes naturalezas de las acciones que actúan sobre los vehículos y excitan los movimientos vibratorios. Estas acciones, que pueden ser directas o indirectas, están determinadas por la fuente de excitación y presentan distintas frecuencias. De esta manera se definen:

- Acciones directas: ejercidas sobre las masas suspendidas por elementos apoyados en ellas como el motor o el sistema de transmisión. Se caracterizan por ser periódicas y poder producir fenómenos de resonancia.
- Acciones indirectas: aquellas transmitidas a las masas suspendidas por las no suspendidas y de diversas naturalezas. Las ondulaciones del terreno son aleatorias mientras que los desbalances de las masas rotativas son periódicas. Por último, también pueden presentarse choques producto de irregularidades aisladas.

El estudio de estas acciones es fundamental para evitar fenómenos de resonancia. Sabiendo que los modos de baja frecuencia de la carrocería se sitúan cerca de 1 Hz, mientras que los modos medios del conjunto de las masas suspendidas y no suspendidas entre 10 y 20 Hz, el diseño de la suspensión debe considerar este aspecto para evitar que una posible resonancia genere incomodidad y pérdida de estabilidad.

## 2.3 Fuentes de excitación

Sería imposible diseñar y configurar este sistema sin el estudio de las fuentes de excitación o sollicitaciones a las que está sometido. Habiendo mencionado las mismas en el comienzo de esta parte, a continuación se explican brevemente sus características.

### 2.3.1 Irregularidades de la calzada

Generalmente, las excitaciones provenientes de la calzada se suelen modelar como funciones armónicas, funciones escalón o triangulares para analizar el comportamiento dinámico del conjunto de suspensión. También para estudiar la tolerancia humana a las oscilaciones. Sin embargo, es evidente que este tipo de irregularidades son aleatorias, sin ningún patrón reconocible. Si bien las simplificaciones son útiles para obtener datos y realizar primeras aproximaciones, no otorgan información acerca del comportamiento real

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

del automóvil. Por ello, este tipo de excitación debe ser modelada como una función aleatoria, para la cual un valor instantáneo no puede ser predicho de manera determinística. Aunque parece que una función de este tipo es difícil de estudiar, es posible hallar ciertas propiedades estáticas, como el valor principal o el valor cuadrático medio mediante un promedio, o la frecuencia contenida mediante un análisis aplicando la Transformada de Fourier. Esta última herramienta de la matemática aplicada, que forma parte de los contenidos de la asignatura Cálculo Avanzado, permite trabajar en el espectro de frecuencia y obtener, por ejemplo, la gráfica de amplitud de la excitación en función de la frecuencia, aspecto que caracteriza a las funciones aleatorias.

Para el análisis del perfil de la calzada se toman datos sobre una porción del camino y se someten estos datos a una Transformada de Fourier para descomponerlos en una serie de senos y cosenos con distintas amplitudes y fases. Luego se puede graficar la amplitud en función de la frecuencia. Se suele usar la frecuencia espacial que simplemente es la frecuencia temporal dividida por la velocidad. Cada camino tiene un perfil particular y presenta problemas propios, pero se observan propiedades comunes entre calzadas de la misma naturaleza. Así, tanto el pavimento como el ripio, por ejemplo, muestran perfiles característicos.

El análisis del perfil de la calzada se suele realizar aplicando métodos estadísticos. Esto, junto con la Transformada de Fourier, permite obtener la función de densidad espectral, aspecto fundamental a la hora de analizar el comportamiento de un vehículo sobre el camino. En estas funciones se observa en las abscisas la frecuencia espacial y en las ordenadas los valores cuadráticos de la amplitud. Esto se debe a que en vibraciones aleatorias dichos valores son de mayor importancia que los valores directos de amplitud ya que están asociados con la energía promedio. Además, dado que la Transformada de Fourier resulta en funciones complejas, se suele expresarlas multiplicadas por su conjugada, resultando en el cuadrado de las expresiones.

Las irregularidades del terreno constituyen una fuente de excitación del sistema de suspensión porque imprimen un movimiento vertical a los neumáticos. Mientras que la función de densidad espectral es útil para evaluar las características de la calzada, en el estudio de la dinámica del vehículo es importante la aceleración impuesta a los neumáticos por las mencionadas irregularidades. Para ello, a una determinada velocidad crucero, las elevaciones del perfil se transforman en desplazamientos verticales en función del tiempo. Luego, derivando una vez se obtiene la velocidad  $y$ , por segunda vez, la aceleración. Esta información se presenta de igual manera que el perfil de la calzada, es decir, mediante funciones de densidad espectral. Un dato destacable del estudio de la aceleración es el

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

incremento de la misma en frecuencias altas, contrastando con el desplazamiento vertical, que es el caso opuesto. El diseño de la suspensión busca atenuar las excitaciones de alta frecuencia que son nocivas ya que se generan fuerzas dañinas en todo los componentes.

Otra información importante se obtiene de analizar diferencias en las excitaciones impuestas a cada lado del vehículo, lo cual es algo que sucede en la realidad. Esta diferencia excita el vehículo en el modo de rolido. Es común normalizar dicha entrada respecto al desplazamiento vertical para obtener la función de densidad espectral. La interpretación de la información obtenida muestra que a bajas frecuencias espaciales el rolido es mucho menor respecto del desplazamiento vertical, tendencia que se revierte al aumentar la frecuencia.

### **2.3.2 Masas desbalanceadas**

Las masas fuera de balance o desbalanceadas provienen de los neumáticos, de la masa y del sistema de ensamblaje con el eje. Idealmente, estos no debieran introducir ningún tipo de excitación al vehículo, pero imperfecciones en su manufactura derivan en no uniformidades como masas desbalanceadas, variaciones dimensionales y de rigidez. Estas no uniformidades generan fuerzas que se transmiten a los ejes, introduciendo excitaciones cíclicas. Las fuerzas pueden ser verticales, longitudinales o laterales. En este caso son de interés las de carácter vertical.

Como se explica en el Apartado 3.6.3.3 del libro, un desbalanceo en la distribución de masas alrededor de un eje resulta en una fuerza que rota en el plano del neumático proporcional a la masa, la excentricidad y el cuadrado de la velocidad angular. Esta excitación es de tipo periódica, repitiéndose en cada revolución de la cubierta.

### **2.3.3 Excitación de la línea de marcha**

La línea de marcha refiere a todo el sistema que se encuentra entre el motor y las cubiertas tractoras. Este conjunto, encargado de transmitir la potencia, está sometido a revoluciones, por lo cual cualquier desbalance puede ser fuente de excitación, al igual que la desalineación de los neumáticos. El peor escenario es la coincidencia en la frecuencia de excitación de este sistema con la del conjunto mencionado en el punto anterior, lo cual deriva en la complementación de las fuerzas.

### **2.3.4 Motor y transmisión**

El motor se erige como una de las principales fuentes de vibración en un vehículo debido a la alta velocidad de revolución de los componentes que lo forman. A esto se debe sumar el sistema de transmisión. Sin embargo, la masa de estos dos elementos puede ser utilizada para absorber vibraciones.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

La comunión del motor y la transmisión configura un sistema que puede vibrar en seis direcciones, tres traslaciones y tres rotaciones, tal como se explica en el Apartado 2.2 del libro. El movimiento más importante es la rotación respecto del eje horizontal del motor, excitado por las variaciones de torque. En un motor montado longitudinalmente esta excitación puede contribuir al rolido del vehículo.

Cada tipo de motor posee excitaciones características. Así, motores de cuatro, seis y ocho cilindros, debido a sus diferentes configuraciones, presentan distintas excitaciones a tener en cuenta a la hora del diseño del automóvil y del sistema de suspensión.

## **2.4 Vibraciones de un vehículo**

Un vehículo constituye un sistema de múltiples grados de libertad. El comportamiento en vibración depende de las frecuencias naturales y los modos que presente, lo cual está determinado por las características del sistema de suspensión. Para estudiar este aspecto fundamental del automóvil se han desarrollado diferentes modelos que representan un vehículo con suspensión. Si bien constituyen simplificaciones, la información que proveen es muy valiosa en la etapa de diseño. Es importante la caracterización que se mencionó en el comienzo del trabajo, las masas suspendidas y las no suspendidas, ya que constituyen la base de los modelos. En bajas frecuencias de vibración, tanto unas como otras pueden considerarse como cuerpos rígidos, es decir, se mueven como una unidad.

Los modelos conducen a ecuaciones diferenciales de movimiento basadas en la segunda ley de Newton, las cuales deben ser resueltas para encontrar la información buscada. Para ello, se puede emplear el método clásico de resolución, aplicar la Transformada de Laplace o emplear Mecánica Lagrangiana. Cuantos más grados de libertad incluya el modelo, más complejas son las ecuaciones. El modelo más cercano a la realidad es aquel con seis grados de libertad, cuya resolución exige métodos computacionales. Sin embargo, es posible simplificar el análisis considerando alguno de los movimientos más importantes. Así, modelos de 1, 2 y 4 grados de libertad son empleados para alcanzar una mejor comprensión del funcionamiento del sistema de suspensión, como también los efectos de las masas suspendidas y semisuspendidas, el amortiguamiento y la rigidez de los resortes. Cabe destacar que estos modelos son de carácter lineal, aunque se observan no linealidades en el comportamiento real del sistema de suspensión y sus componentes.

Una forma de caracterizar el comportamiento dinámico de un vehículo es considerar la relación entre la entrada y la salida del sistema. La entrada puede ser alguna de las excitaciones mencionadas, o una combinación de ambas. Esta relación se denomina transmisibilidad, como se explica en el Apartado 3.6.4 del libro. La transmisibilidad en la

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

relación adimensional entre la amplitud de la respuesta y la de la excitación para sistemas en estado estacionario de vibraciones forzadas. La relación se puede establecer entre fuerzas, desplazamientos, velocidades, aceleraciones e incluso sobre aceleraciones.

#### 2.4.1 Modelo de un grado de libertad

Para estudiar el movimiento vertical de un automóvil es posible y sencillo aproximar con un modelo de un grado de libertad que, aunque cuantitativamente no es útil para dimensionar el sistema de suspensión, permite comprender los fenómenos que tienen lugar y establecer criterios para el diseño.

El sistema de un grado de libertad que muestra la Figura 7, similar al que se presenta en el Apartado 3.6.3.2 del libro, podría representar la suspensión independiente de un cuarto de vehículo y consta de una masa  $M$ , un elemento elástico de rigidez  $k$  y un elemento amortiguador de coeficiente  $C$ .

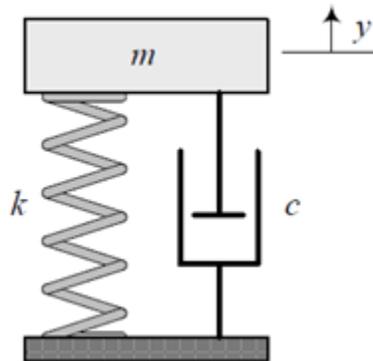


Figura 7. Modelo de un grado de libertad

En este caso no se diferencia la masa suspendida de la no suspendida, simplemente se consideran los elementos propios del sistema de suspensión y la masa de un cuarto de vehículo. Esto evidencia su limitada utilidad. En ocasiones este modelo se relaciona con 1/8 de vehículo.

La ecuación diferencial 3.29 del libro es la que modela el comportamiento del sistema

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k y = 0$$

Y su ecuación característica

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0$$

De donde:

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Del análisis de los tres casos posibles surgen los diferentes tipos de amortiguamiento. Sobre amortiguamiento cuando  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ ; amortiguamiento crítico si  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$  y subamortiguamiento cuando  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ . Es importante destacar el comportamiento del sistema en estos casos. En los dos primeros no hay oscilación, mientras que el último hay un movimiento vibratorio que se extingue en el tiempo, tal como se puede apreciar en las gráficas del apartado mencionado. Esto es relevante en el diseño de suspensión ya que marca una diferencia sustancial entre los vehículos de calle y los de competición. Más adelante se detalla este tema. De la igualdad del caso intermedio se desprende el valor de amortiguamiento crítico que es útil en el dimensionamiento y resulta:

$$c_{Cri} = 2\sqrt{k m}$$

De la expresión de  $\lambda_{1,2}$  también se desprende la frecuencia fundamental del sistema, cuando el amortiguamiento es nulo. En este caso se obtiene:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

La solución compleja indica que la función que resuelve la ecuación inicial es armónica de frecuencia  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . En el libro se presenta el análisis de un sistema de vibraciones libres en el apartado 3.6.3.1, donde se halla la expresión de frecuencia natural. Como se mencionó anteriormente, hallar estas frecuencias es un aspecto fundamental en el diseño de sistemas de suspensión. Mientras tanto, la frecuencia fundamental del sistema amortiguado resulta

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

#### 2.4.1.1 Predimensionamiento

Los valores presentados en el apartado anterior pueden usarse para predimensionar el sistema de suspensión, basándose en estudios de confort. Estos arrojan que la frecuencia natural de un rodado debe ser cercana a 1 Hz, mientras que el amortiguamiento debe tener un valor cercano a 0,25 del  $c_{cri}$ .

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Sabiendo que el amortiguamiento modifica poco el valor de la frecuencia natural y tomando una masa suspendida por rueda M:

$$f_n = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$$

Igualando  $f_n = 1 \text{ Hz}$  y despejando k:

$$k = 4\pi^2 m$$

En cuanto al amortiguamiento

$$c = 0,25 c_{cri} = 0,25 \cdot 2 \cdot \sqrt{k/m}$$

Con los valores de k y c obtenidos es posible hallar el valor de la frecuencia natural del sistema amortiguado en Hertz como:

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

Para dar un ejemplo, si se considera una masa de 4000 Kg, caso posible de un camión, los valores resultantes son:

$$k = 15.791,3 \text{ N/m}$$

$$c = 12.566,32 \frac{\text{N s}}{\text{m}}$$

$$\beta = 0,9682 \text{ Hz}$$

Es evidente la escasa diferencia entre la frecuencia real y la natural del sistema sin amortiguamiento. Con los valores encontrados se debe simular su comportamiento resolviendo la ecuación diferencial. La mejor forma de evaluar este aspecto es graficar los valores de desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo.

#### 2.4.1.2 Optimización de la suspensión

El modelo de un grado de libertad es útil para presentar los métodos de optimización del sistema de suspensión. Sin embargo, cabe destacar que en este caso se considera un sistema excitado en la base, como el presentado en el libro en el Apartado 3.6.4, ítem b). Utilizando el método de optimización basado en RMS, se obtiene un esquema para determinar los valores óptimos de rigidez y amortiguamiento.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Tomando el modelo de la fundación como fuente de vibración presentado en el libro, la ecuación diferencial que gobierna el sistema es:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = c \dot{y} + k y$$

Esta ecuación puede transformarse empleando una variable de desplazamiento relativo  $z = x - y$  obteniéndose la siguiente expresión:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = -M \ddot{y}$$

Este factor es importante en el desarrollo del esquema de optimización. Con el único fin de facilitar el manejo de las ecuaciones anteriores, estas pueden reescribirse como:

$$\ddot{x} + 2 \xi \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 2 \xi \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y$$

$$\ddot{z} + 2 \xi \omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y}$$

E introduciendo la frecuencia natural  $\omega_n$  y la razón de amortiguamiento  $\xi$ .

$$\xi = \frac{c}{c_{cri}} = \frac{c}{2 \sqrt{k m}}$$

#### 2.4.1.2.1 Respuesta en frecuencia

A partir de las ecuaciones anteriores y suponiendo excitaciones armónicas, se hallan las respuestas en frecuencia del modelo propuesto. Siguiendo la nomenclatura presente en algunas publicaciones, las más significativas son el desplazamiento relativo  $S_2$ , el desplazamiento absoluto  $G_0$  y la aceleración absoluta  $G_2$ . Las respuestas en frecuencia son conceptos análogos a la función de transmisibilidad, como la presentada en el libro de la cátedra en el apartado 3.6.4. De esta manera, las respuestas quedan definidas:

$$G_0 = \left| \frac{X}{Y} \right| = \frac{\sqrt{1 + (2 \xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \xi r)^2}}$$

$$S_2 = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \xi r)^2}}$$

$$G_2 = \left| \frac{\ddot{X}}{Y \omega_n^2} \right| = \frac{r^2 \sqrt{1 + (2 \xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \xi r)^2}}$$

donde  $r = \omega / \omega_n$ .

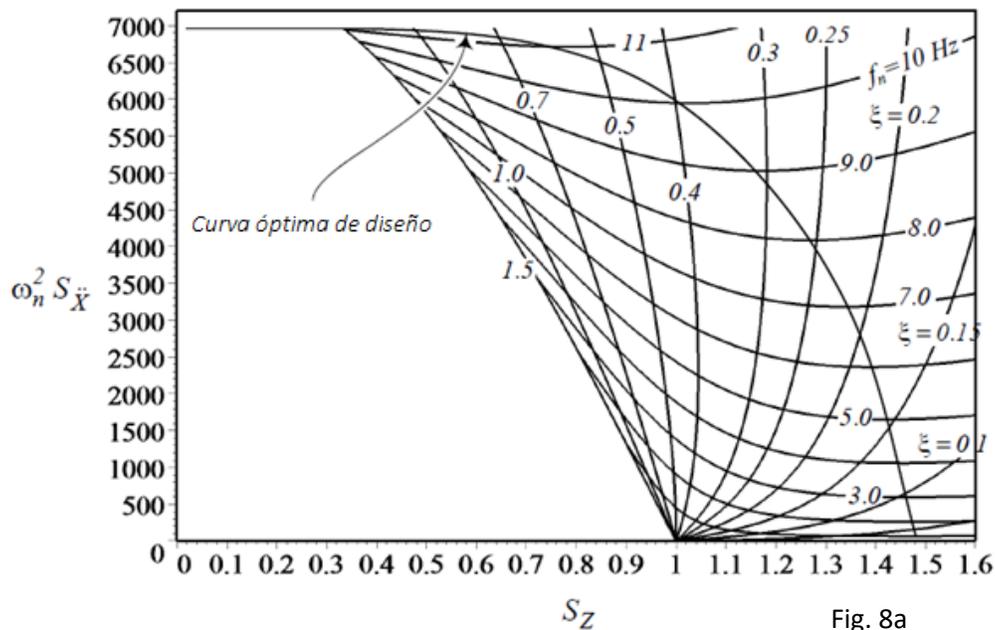
Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

La primera ecuación es idéntica a la ecuación 3.54 del libro citado, la cual se define como Transmisibilidad, o la relación entre la amplitud del movimiento del cuerpo y el de la base. Las otras se deducen de manera similar tomando el movimiento relativo en el segundo caso y la aceleración en el tercero.

#### 2.4.1.2.2 Optimización RMS

Mediante el empleo del valor cuadrático medio RMS (del inglés, root mean square) se construye una gráfica que posibilita hallar los parámetros óptimos del sistema de suspensión. En el eje horizontal se ubican el valor cuadrático medio del desplazamiento relativo,  $S_z = RMS(S_2)$ , y en el vertical el valor cuadrático medio de la aceleración absoluta,  $S_{\ddot{x}} = RMS(G_2)$ . Se observan dos conjuntos de curvas, uno correspondiente a valores constantes de  $f_n$  y el otro a valores constantes de  $\xi$ . Hay una curva llamada *curva de diseño óptimo*, que indica los valores óptimos para los parámetros de suspensión.

Muchos de los equipos montados en los vehículos tienen frecuencias naturales cercanas a los 10 Hz, mientras que las frecuencias fundamentales del vehículo son de alrededor de 1 Hz. La Figura 8a es útil para diseñar la suspensión de equipos excitados en la base y la amplificación 8b para diseñar la suspensión de vehículos.



Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

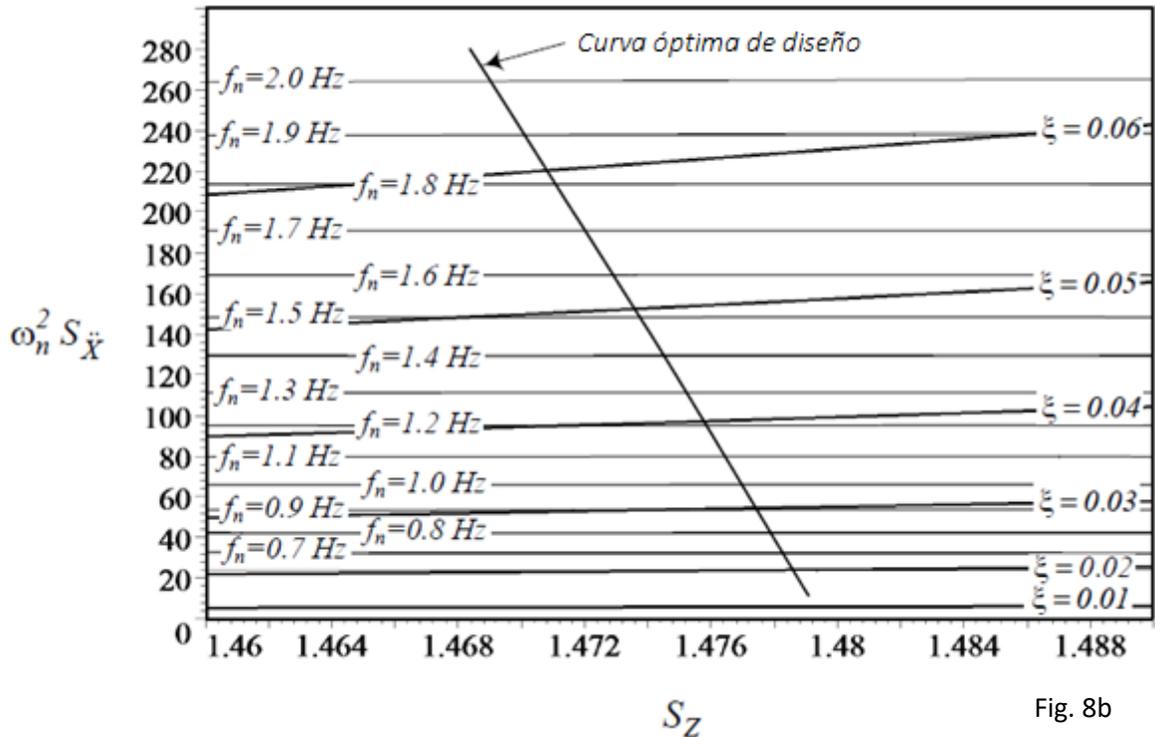


Figura 8. Gráficos para el cálculo de parámetros óptimos de equipos

La curva óptima es el resultado de una estrategia de optimización que consiste en minimizar  $S_{\ddot{x}}$  respecto de  $S_z$ . Esto significa que obtener la mínima aceleración absoluta respecto del desplazamiento relativo hace a una suspensión óptima. Matemáticamente se puede expresar dicha estrategia como

$$\frac{\partial S_{\ddot{x}}}{\partial S_z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 S_{\ddot{x}}}{\partial S_z^2} > 0$$

Para estimar los valores óptimos de  $k$  y  $c$  se estima el valor de  $S_z$  en el eje horizontal y se traza una línea recta vertical hasta intersectar la curva óptima. Esta intersección indica los valores óptimos de dichos parámetros.

Para calcular los valores RMS se define un rango de frecuencia de trabajo de 0 Hz hasta 20 Hz con el fin de incluir la mayoría de los vehículos. En general durante el diseño se trabaja

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

en unidades de frecuencia, mientras que en los cálculos analíticos se emplea frecuencia angular. De esta manera se obtiene

$$S_Z = \sqrt{\frac{1}{40 \pi} \int_0^{40 \pi} S_2^2 d\omega}$$

$$S_{\ddot{x}} = \sqrt{\frac{1}{40 \pi} \int_0^{40 \pi} G_2 d\omega}$$

Conociendo las expresiones de  $S_2$  y  $G_2$  es posible hallar los valores buscados. Los resultados demuestran que  $S_Z$  y  $S_{\ddot{x}}$  son funciones de sólo dos variables:  $\omega_n$  y  $\xi$ . Por lo tanto, cualquier par de estos parámetros define  $S_Z$  y  $S_{\ddot{x}}$  de manera unívoca. Esto permite definir  $\omega_n$  y  $\xi$  como funciones de las variables  $S_Z$  y  $S_{\ddot{x}}$ , pudiendo determinar los valores óptimos de los parámetros a partir de valores específicos de  $S_Z$  y  $S_{\ddot{x}}$ .

Considerando  $S_Z$  y  $S_{\ddot{x}}$  como funciones de  $\omega_n$  y  $\xi$  se grafican las curvas presentes en la Figura 8. Manteniendo  $f_n$  mientras varía  $\xi$  se puede minimizar  $S_{\ddot{x}}$  respecto de  $S_Z$ . Una forma de justificar el criterio de optimización mencionado es apelando a la gráfica  $\omega_n^2 S_{\ddot{x}}/S_Z$  respecto de  $f_n$  para distintos valores de  $\xi$ . Es claro que el aumento de  $\xi$  o  $f_n$  incrementa el valor de las ordenadas. Esto equivale a una suspensión más rígida, incrementando la aceleración o disminuyendo el desplazamiento relativo. Por el contrario, disminuir los valores de los parámetros consiste en suavizar el sistema. Es importante tener en cuenta que una suspensión ‘blanda’ requiere un diseño de suspensión que permita un desplazamiento relativo grande del neumático respecto del vehículo.

El cálculo del desplazamiento permitido en un sistema es muy simple y depende del tipo de suspensión. En muchos casos se emplean dispositivos de limitación, como límites de goma. Los amortiguadores pueden realizar esta función. En el caso de un sistema tipo brazo doble A, las Figuras 9 y 10 presentan los datos necesarios para este cálculo.

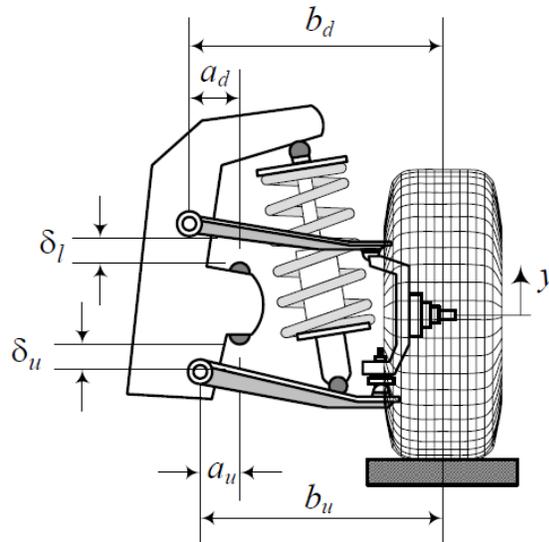


Figura 8. Parámetros geométricos de suspensión

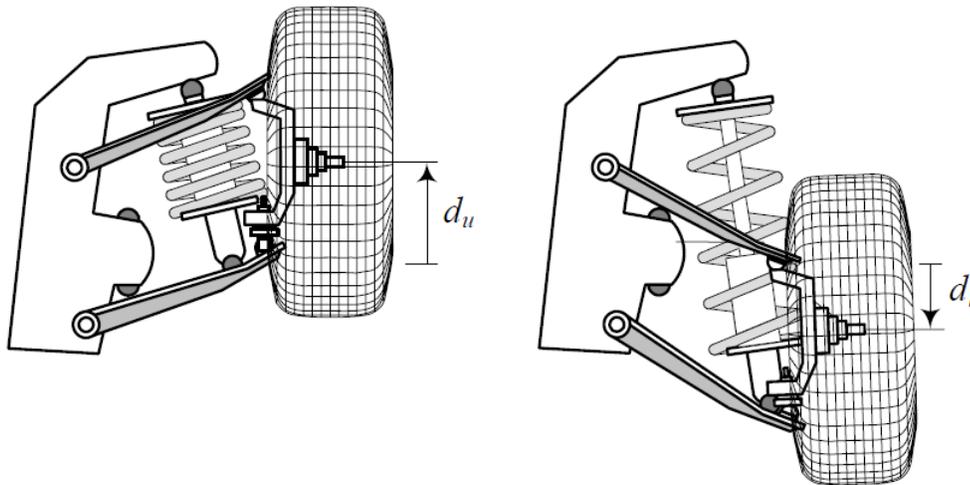


Figura 10. Recorrido de suspensión

Para presentar un ejemplo de diseño, se pueden considerar dos equipos A y B excitados en la base con una amplitud promedio de  $Y = 1$  cm. El equipo A tiene un recorrido de suspensión de 1,2 cm y el B de 0,8 cm. El equipo B posee una suspensión más rígida que A. Asumiendo  $S_Z$  como el cociente entre el recorrido de suspensión y la amplitud de excitación:

$$S_{Z_A} = 1,2$$

$$S_{Z_B} = 0,8$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

La curva óptima de la Figura 8 brinda los parámetros de suspensión para A y B:

$$f_{n_A} \approx 8,53 \text{ Hz}$$

$$\xi_A \approx 0,29$$

$$f_{n_B} \approx 10,8 \text{ Hz}$$

$$\xi_B \approx 0,56$$

Tomando una masa  $M = 300 \text{ Kg}$  los valores óptimos de  $k$  y  $c$ , son:

$$k_A = (2\pi f_{n_A})^2 m = 8,6175 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$c_A = 2 \xi_A \sqrt{k_A m} = 9325,7 \text{ Ns/m}$$

$$k_B = (2\pi f_{n_B})^2 m = 13,814 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$c_B = 2 \xi_B \sqrt{k_B m} = 22800 \text{ Ns/m}$$

Los valores de aceleración absoluta son

$$\omega_n^2 S_{\ddot{x}_A} \approx 4700 \text{ 1/s}^2$$

$$\omega_n^2 S_{\ddot{x}_B} \approx 6650 \text{ 1/s}^2$$

La aceleración del equipo A es sensiblemente menor que la de B. Por lo tanto, es posible afirmar que a mayor rigidez de suspensión mayor aceleración.

Los valores óptimos de  $k$  y  $c$  son teóricos. Luego depende de los elementos disponibles en el mercado cuan aproximado al comportamiento óptimo será el sistema de suspensión real.

Para ilustrar la diferencia entre un equipo con parámetros óptimos y otro que no tiene esta característica, se toman tres ejemplos. Uno fuera de la curva óptima y los otros dos coincidente con ella, como lo muestra la Figura 11. Luego se grafican las curvas de respuesta en función de frecuencia que se observan en la Figura 12.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

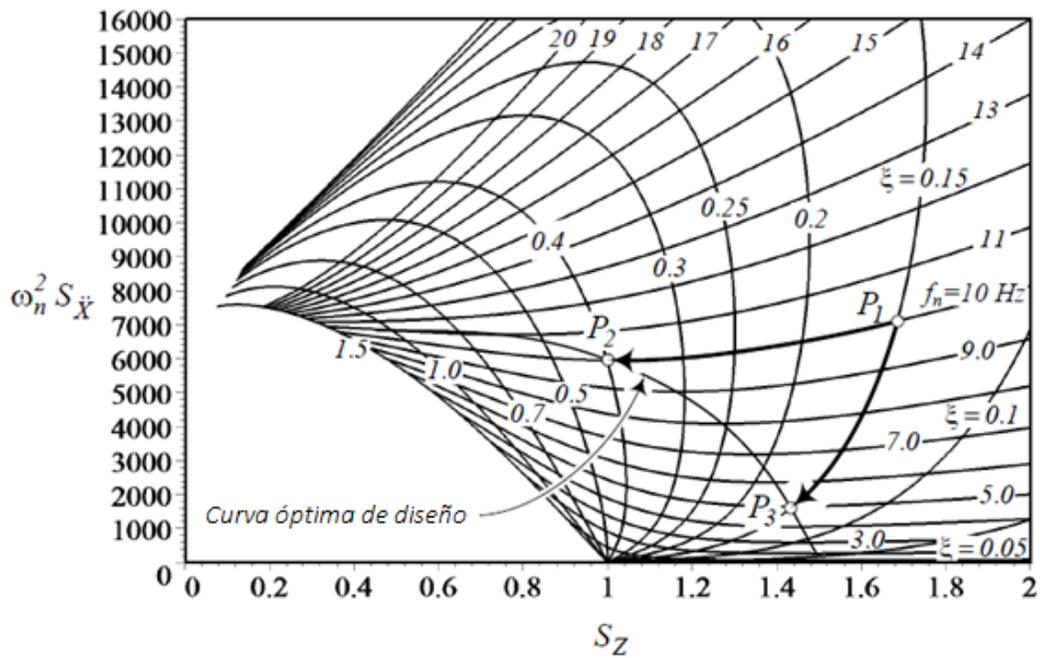
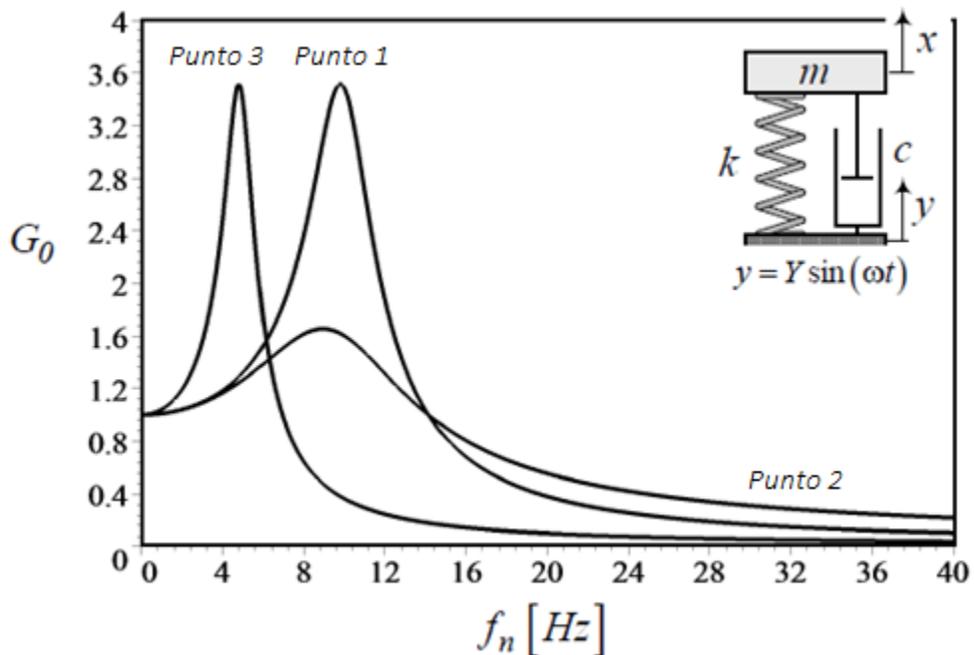


Figura 9. Ubicación de puntos considerados



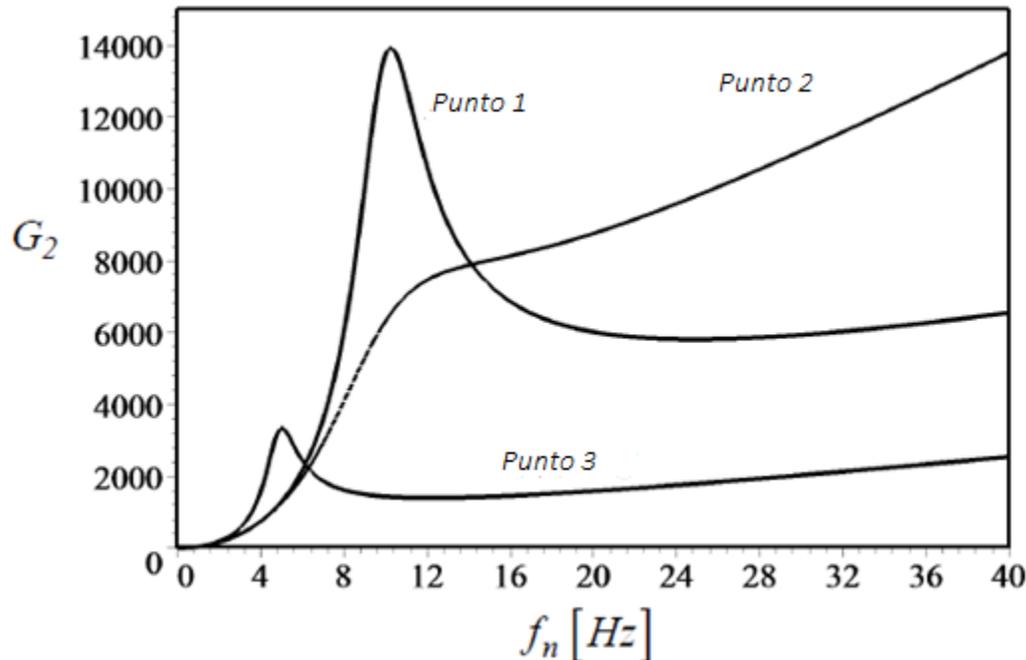


Figura 10. Gráficas de respuesta del modelo

En el caso de los desplazamientos, es visible que el equipo 2 presenta una amplitud mucho menor respecto de 1 y 3 en la zona de resonancia, resultado de un mayor amortiguamiento. Sin embargo, esto se revierte en zonas alejadas o de mayor frecuencia, comportamiento este que también se muestra en el libro Mecánica Racional, en la gráfica del apartado 3.6.4. Como se observa, es necesario un equilibrio en el diseño de la suspensión. Lo mismo ocurre en la comparación entre 2 y 3. En cuanto a desplazamiento, el equipo 2 se erige como el mejor, pero en aceleración lo es el 3. Es decisión de los ingenieros donde actuar para optimizar el sistema.

#### 2.4.1.2.3 Optimización de la respuesta temporal

Este método consiste en evaluar la respuesta transitoria del sistema frente a una determinada excitación. Es usual utilizar una excitación de tipo escalón simulando una irregularidad del terreno, como por ejemplo la siguiente:

$$y = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

El procedimiento consiste en resolver la ecuación de movimiento del sistema para la excitación dada y utilizar un criterio de optimización que suele ser análogo al presentado en el apartado anterior. En este caso consiste en reducir el valor máximo de aceleración  $a_P$  respecto del desplazamiento relativo  $z_P$ . Graficando este criterio, hay un valor  $\xi$  óptima para cualquier  $f_n$  que brinda el mejor comportamiento transitorio, como lo demuestra la Figura 13. En el caso de la excitación propuesta es  $\xi=0,4$ .

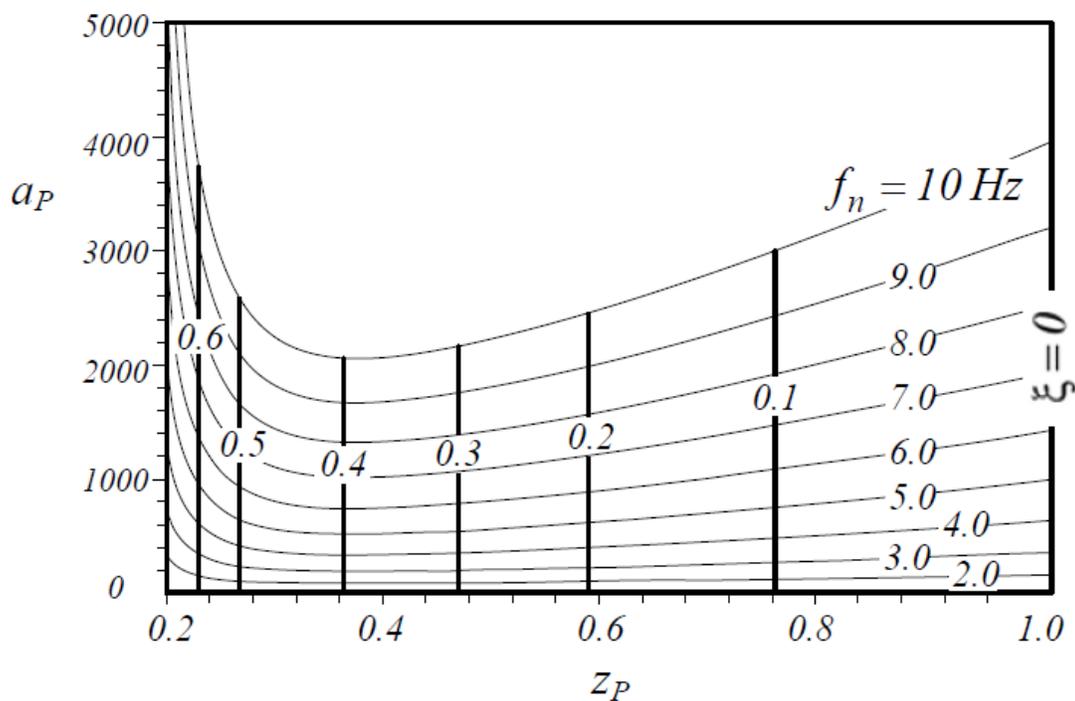


Figura 11. Gráfico para el cálculo de valores óptimos en respuesta temporal

### 2.4.2 Modelo de dos grados de libertad

Atendiendo a lo mencionado anteriormente, el modelo de un grado de libertad es útil en una etapa de predimensionamiento y para presentar los mecanismos de optimización, pero su comportamiento no se acerca a la realidad lo suficiente como para utilizarlo en el diseño definitivo. Uno de los modelos más extendidos y presente en todas las publicaciones sobre diseño automotor es el de dos grados de libertad que se muestra en la Figura 14, en el cual se diferencian las masas suspendidas y no suspendidas y se considera la propiedad elástica de los neumáticos.

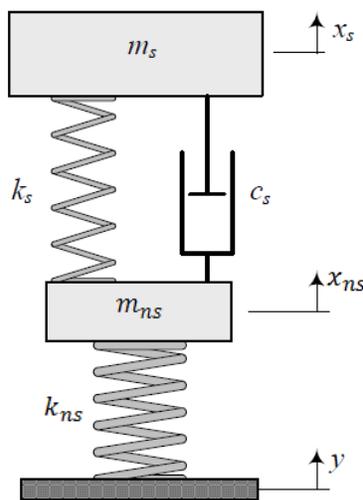


Figura 12. Modelo de dos grados de libertad

El modelo está formado por dos masas. La masa  $m_s$  refiere a la masa suspendida, equivalente a 1/4 de vehículo; mientras que  $m_{ns}$  es la masa no suspendida y representa un neumático. Un resorte de constante  $k$  y un amortiguador de coeficiente  $c_s$  soportan a  $m_s$ . La masa  $m_{ns}$  está conectada al terreno mediante un elemento elástico de constante  $k_{ns}$  que simula la rigidez del neumático. El movimiento vertical se describe mediante dos coordenadas  $x_s$  y  $x_{ns}$  respecto a las posiciones de equilibrio de la masa suspendida y no suspendida, respectivamente.

Al igual que en el modelo anterior, sólo se puede estudiar el desplazamiento vertical. Este modelo es llamado comúnmente “un cuarto de vehículo” por representar 1/4 del total de la masa del mismo. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando un amortiguamiento viscoso, se obtienen dos ecuaciones de movimiento correspondientes a los dos grados de libertad, siempre para una excitación de la base del sistema. Para la masa suspendida:

$$m_s \ddot{x}_s + c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_{ns}) + k_s (x_s - x_{ns}) = 0$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Y para la masa no suspendida:

$$m_{ns} \ddot{x}_{ns} + c_s (\dot{x}_{ns} - \dot{x}_s) + (k_{ns} + k_s)x_{ns} - k_s x_s = k_{ns} y$$

Es posible encontrar modelos donde se adiciona un coeficiente de amortiguamiento correspondiente al neumático. Esto no es frecuente debido a que este valor es muy pequeño comparado con  $c_s$ . De modo que ignorarlo no afecta en demasía y además simplifica el modelo. Por otro lado, se supone que el neumático está en permanente contacto con el terreno, lo cual es cierto a baja frecuencia pero puede no suceder a altas frecuencias. Un modelo de mayor complejidad puede desarrollarse para incluir esta posibilidad.

Es usual representar modelos de más de un grado de libertad de forma matricial. En este caso:

$$[m] \ddot{x} + [c] \dot{x} + [k] x = F$$

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_{ns} + k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{ns} y \end{bmatrix}$$

El análisis de este modelo es análogo al caso anterior. Se hallan las frecuencias naturales del sistema y se utilizan los mismos métodos de optimización. Evidentemente muestra un grado mayor de complejidad.

#### 2.4.2.1 Frecuencias naturales

Para hallar las frecuencias naturales del sistema se puede proceder abordando una solución sencilla que consiste en encontrar las frecuencias de las dos masas involucradas. Suponiendo que  $m_s \gg m_{ns}$  se puede despreciar la última, por lo que el modelo resulta en una masa sostenida por dos resortes en serie. La constante de rigidez equivalente es:

$$k_e = \frac{k_s \cdot k_{ns}}{k_s + k_{ns}}$$

La frecuencia natural de la masa suspendida resulta:

$$f_{ns} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e}{m_s}}$$

Después de realizar el predimensionamiento de la suspensión con el modelo de un grado de libertad, esta expresión permite calcular la frecuencia natural del vehículo, habiendo elegido el neumático con su respectiva rigidez. Como se mencionó, no se incluye el amortiguamiento por su escasa influencia.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

También se puede calcular la frecuencia natural de la masa no suspendida. En este caso se parte de la misma premisa que en el caso anterior, lo que lleva a suponer que la masa suspendida permanece casi inmóvil respecto de la otra. Así se obtiene un modelo con una masa suspendida entre dos resortes. La constante elástica viene dada por:

$$k_e = k_s + k_{ns}$$

Y la frecuencia natural buscada:

$$f_{n_{ns}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e}{m_{ns}}}$$

Para los valores considerados en el apartado de predimensionamiento y tomando un valor de  $k_{ns}$  del neumático de 1207000 N/m, los valores obtenidos son:

$$f_{n_s} = 0,9408 \text{ Hz}$$

$$f_{n_{ns}} = 9,944 \text{ Hz}$$

Otra forma de cálculo utiliza las ecuaciones de movimiento. Se ignora el amortiguamiento y se suponen dos soluciones:

$$x_s = X_s \cos \omega_n t$$

$$x_{ns} = X_{ns} \cos \omega_n t$$

Aquí  $\omega_n$  es la frecuencia circular natural del sistema no amortiguado y  $X_s$  y  $X_{ns}$  son las amplitudes de respuesta de las masas. Se ignora el amortiguamiento dada su poca influencia en el cálculo. Sustituyendo estas soluciones en las ecuaciones de movimiento se obtienen las siguientes ecuaciones de amplitud:

$$(-m_s \omega_n^2 + k_s)X_s - k_s X_{ns} = 0$$

$$-k_s X_s + (-m_{ns} \omega_n^2 + k_s + k_{ns})X_{ns} = 0$$

Cualquier valor de  $X_s$  y  $X_{ns}$  son solución del sistema si el siguiente determinante es cero, para evitar la solución trivial:

$$\begin{vmatrix} (-m_s \omega_n^2 + k_s) & -k_s \\ -k_s & (-m_{ns} \omega_n^2 + k_s + k_{ns}) \end{vmatrix} = 0$$

Expandiendo el determinante se llega a la ecuación característica del sistema:

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

$$\omega_n^4 (m_s + m_{ns}) + \omega_n(-m_s k_s - m_s k_{ns} - m_{ns} k_s) + k_s k_{ns} = 0$$

La solución de esta ecuación permite obtener las dos frecuencias naturales del sistema:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}$$

donde

$$A_1 = m_s + m_{ns}$$

$$B_1 = m_s k_s + m_s k_{ns} + m_{ns} k_s$$

$$C_1 = k_s k_{ns}$$

Los valores negativos de frecuencias no son considerados ya que no tienen significado físico. Dividiendo los valores anteriores por  $2\pi$  se obtienen las frecuencias naturales en Hertz. Estos son prácticamente idénticos a los que resultan del procedimiento anterior. Es importante destacar que la frecuencia de la masa no suspendida es un orden superior a de la masa suspendida, dato a tener en cuenta en el diseño. Mientras que la excitación de la masa no suspendida es la ondulación de la calzada (al pasar a través de una irregularidad la masa no suspendida vibra libremente en su frecuencia natural), la de la masa suspendida es la vibración de la anterior. La oscilación natural de la masa no suspendida no excitará en resonancia o cerca de ella a la masa suspendida. Sin embargo, si la excitación proveniente de la calzada excita la primera en frecuencias cercanas a 1 Hz, la resonancia de la segunda es posible. Por ende, y como es sabido, si la razón de frecuencia de excitación respecto de la natural es alta, la transmisibilidad es baja y la respuesta tiene una amplitud pequeña. Esto se evidencia en la gráfica del libro de la asignatura en el apartado 3.6.4. Como ya se mencionó, disminuir la transmisibilidad es optimizar la suspensión.

#### 2.4.2.2 Respuesta en frecuencia

Las respuestas en frecuencia se hallan de la misma manera que en el caso del modelo de un grado de libertad. Se supone una excitación armónica en la base del sistema y se encuentran las funciones que dan solución al modelo. Las respuestas se suponen armónicas donde:

$$x_s = X_s \sin(\omega t - \varphi_s)$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

$$x_{ns} = X_{ns} \sin(\omega t - \varphi_{ns})$$

$$z = x_s - x_{ns} = Z \sin(\omega t - \varphi_z)$$

Introduciendo los siguientes coeficientes adimensionales:

$$\varepsilon = \frac{m_s}{m_{ns}}$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$$

$$\omega_{ns} = \sqrt{\frac{k_{ns}}{m_{ns}}}$$

$$\alpha = \frac{\omega_s}{\omega_{ns}}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_s}$$

$$\xi = \frac{c_s}{2 m_s \omega_s}$$

se busca hallar las soluciones del modelo, de manera similar a la empleada en el caso de las frecuencias naturales, pero en este caso considerando en amortiguamiento. La diferencia es que no se buscan las frecuencias naturales sino las amplitudes, es decir,  $X_s$ ,  $X_{ns}$  y  $Z$  para construir las funciones de transmisibilidad.

Las respuestas en frecuencia buscadas son:

$$\mu = \left| \frac{X_s}{Y} \right|$$

$$\tau = \left| \frac{X_{ns}}{Y} \right|$$

$$\eta = \left| \frac{Z}{Y} \right|$$

Obteniéndose las siguientes funciones:

$$\mu^2 = \frac{4\xi^2 r^2 + 1}{Z_1^2 + Z_2^2}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

$$\tau^2 = \frac{4\xi^2 r^2 + 1 + r^2(r^2 - 2)}{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$\eta^2 = \frac{r^4}{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$Z_1 = [r^2(r^2\alpha^2 - 1) + (1 - (1 + \varepsilon)r^2\alpha^2)]$$

$$Z_2 = 2 \xi r (1 - (1 + \varepsilon)r^2\alpha^2)$$

Las aceleraciones absolutas de las masas suspendida y semisuspendida se definen de la siguiente manera:

$$u = \left| \frac{\ddot{X}_s}{Y \omega_{ns}^2} \right| = r^2 \alpha^2 \mu$$

$$v = \left| \frac{\ddot{X}_{ns}}{Y \omega_{ns}^2} \right| = r^2 \alpha^2 \tau$$

Es de gran utilidad graficar las curvas de las respuestas en frecuencia en función de  $r$ , para distintos valores de  $\xi$ . Las figuras obtenidas son análogas a la referenciada en el título anterior correspondiente al libro Mecánica Racional. Sin embargo, tal como muestra la Figura 15, se observan dos zonas donde las funciones toman sus máximos valores, relacionadas con las dos frecuencias del sistema. Un ejemplo se presenta a continuación.

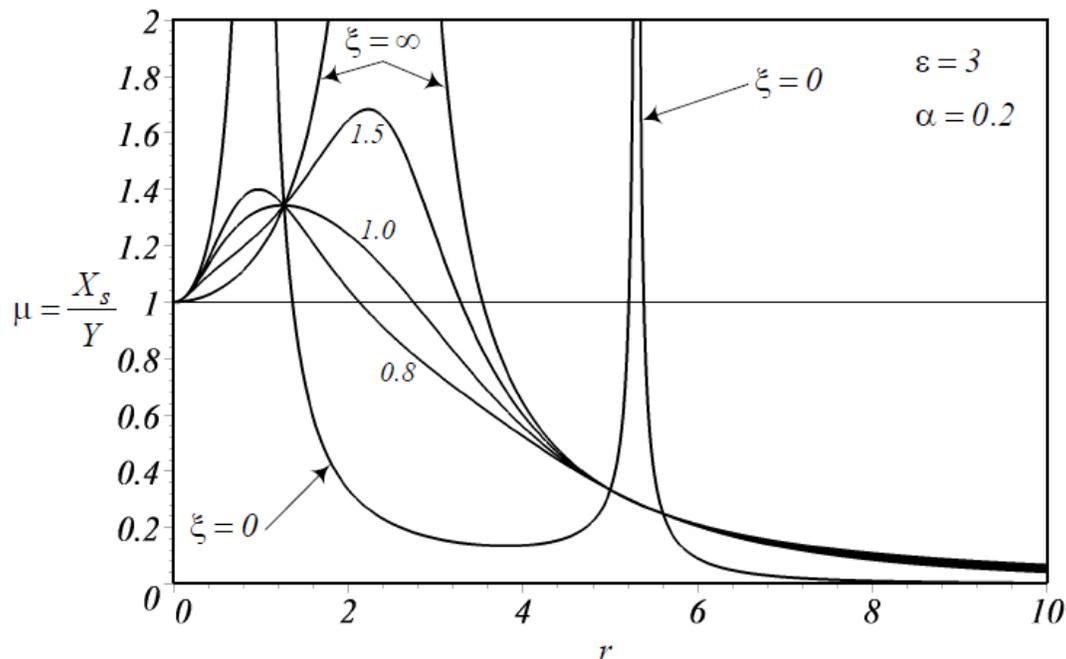


Figura 13. Ejemplo de la respuesta en frecuencia del desplazamiento de la masa suspendida

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Es evidente en la Figura 15 que en el caso de  $\xi = 0$ , la amplitud del movimiento tiende a infinito en coincidencia de las dos frecuencias naturales del sistema, es decir, en estado de resonancia. La primer resonancia aparece en  $\omega/\omega_s = 1$  y la segunda en  $\omega/\omega_{ns} = 1$ . Al aumentar el valor de  $\xi$  el comportamiento cambia. Con  $\xi = 0,8$  hay una reducción en la zona de resonancia, pero un aumento en frecuencias superiores. Por encima del amortiguamiento crítico la frecuencia en la que se produce en mayor valor de  $\mu$  varía. Esto demuestra que es necesario tener amortiguamiento para evitar oscilaciones de gran amplitud y perdurables; pero el valor debe ser cuidadosamente seleccionado para lograr el objetivo buscado. En general se utiliza  $\xi = 0,25$  ya que estudios de confort lo señalan como el óptimo, presentando además un equilibrio de reducción entre la zona de resonancia y no resonancia.

### 2.4.2.3 Optimización RMS

El método de optimización RMS es el mismo usado en el caso del modelo de un grado de libertad, con el mismo criterio. En este caso se construye una gráfica como la mostrada en la figura 16, donde las abscisas corresponden a los valores cuadráticos medios del movimiento relativo  $S_\eta = RMS(\eta)$  y las ordenadas a los valores de aceleración absoluta  $S_u = RMS(u)$ .

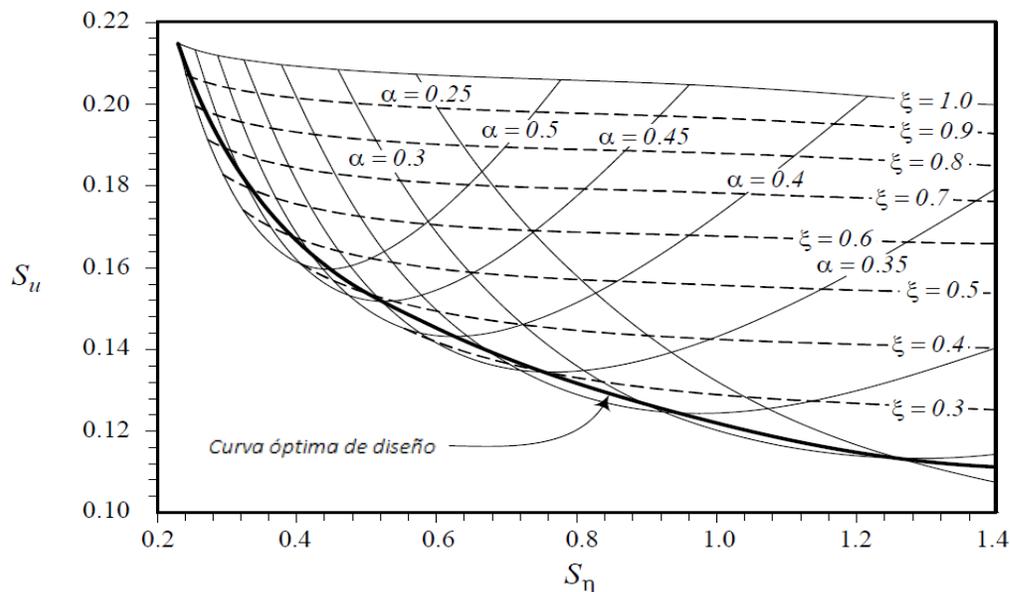


Figura 14. Gráfico para el cálculo de valores óptimos en el modelo de dos grados de libertad

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Dos conjuntos de curvas conforman la gráfica, uno obtenido manteniendo constante  $\xi$  y el otro  $\alpha$ . Hay una curva, llamada curva óptima de diseño, que indica los parámetros óptimos de suspensión. Esta se obtiene mediante un criterio de optimización que consiste en reducir  $S_u$  respecto de  $S_\eta$ . Matemáticamente se traduce en:

$$\frac{\partial S_u}{\partial S_\eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 S_u}{\partial S_\eta^2} > 0$$

Para usar la curva óptima y determinar los valores óptimos de  $k_s$  y  $c_s$  se estima el valor de  $S_\eta$  en el eje horizontal y se traza una recta hasta intersectar la curva óptima. El punto de intersección brinda los valores de  $\xi$  y  $\alpha$ . Luego:

$$k_s = \alpha^2 \frac{m_s}{m_{ns}} k_{ns}$$

$$c_s = 2\xi \sqrt{k_s m_s}$$

La forma de cálculo del valor cuadrático medio es igual a la presentada en el modelo de un grado de libertad. Cabe destacar que al resolver estas ecuaciones, los valores de  $S_u$  y  $S_\eta$  quedan en función de  $\xi$ ,  $\alpha$  y  $\varepsilon$ . Sin embargo, en la mayoría de los casos se fija el valor de  $\varepsilon$ . Manteniendo constante  $\alpha$  y variando  $\xi$  se puede minimizar  $S_u$  respecto de  $S_\eta$ .

Para dar un ejemplo práctico, se comparan tres sistemas, donde uno tiene valores fuera de la curva y los otros son óptimos. La Figura 17 muestra los puntos elegidos. La gráfica está construida con un valor constante de  $\varepsilon = 3$ .

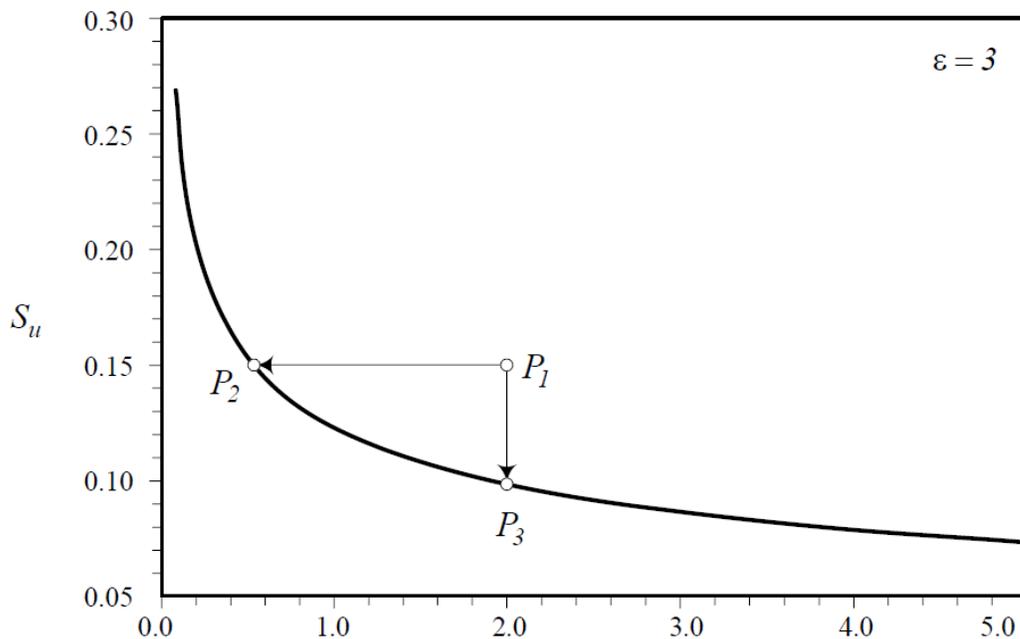


Figura 15. Ubicación de los puntos elegidos

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Las gráficas de la Figura 18 ilustran la diferencia en el comportamiento de los sistemas. Se observa que aquel no óptimo presenta un promedio de amplitud mayor a los otros dos, presentando un marcado aumento en la zona de la segunda frecuencia natural. El equipo 3 permite reducir la aceleración absoluta a costa de un mayor desplazamiento, mientras que el 2 es el caso opuesto. Este análisis es idéntico al hecho con el modelo anterior, presentando el mismo comportamiento. Y la conclusión es la misma: los ingenieros deben decidir donde penalizar para obtener el comportamiento óptimo.

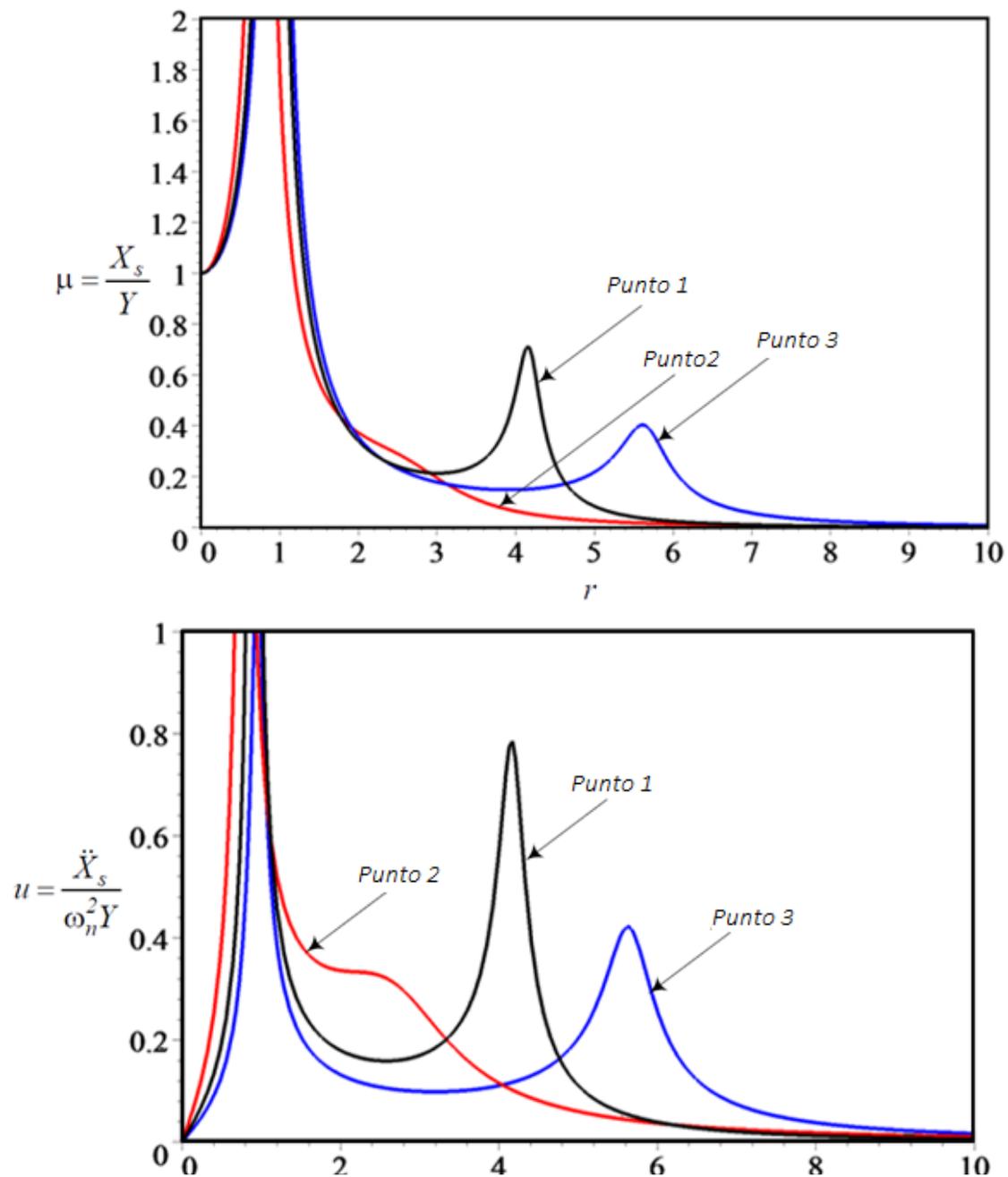


Figura 16. Gráficas del comportamiento del sistema para diferentes parámetros

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

### 2.4.3 Modelo de cuatro grados de libertad

El modelo de cuatro grados de libertad permite analizar la interacción transversal o longitudinal del vehículo, a diferencia de los anteriores. Por ende, es posible estudiar movimientos vibratorios de cabeceo y rolido. Un modelo de dos grados de libertad también permite llevar a cabo este análisis, sin embargo el de cuatro grados ofrece mayor precisión y ventajas. Este modelo se suele denominar un medio de automóvil. En este trabajo se desarrollará el modelo de rolido ya que el correspondiente al cabeceo no es de gran utilidad.

Esta cantidad de grados de libertad implica cierta complejidad en el análisis. La deducción de las ecuaciones de movimiento por ejemplo, aunque pueden deducirse a partir de las ecuaciones de Newton, es común emplear Lagrange. Y en la solución de las mismas se utiliza análisis modal.

#### 2.4.3.1 Rolido

Para estudiar el rolido se utiliza un modelo de medio automóvil cortado transversalmente. Así, se puede observar la interacción entre los neumáticos opuestos de un eje y el efecto de excitaciones diferentes en cada uno. La Figura 19 muestra una representación matemática del modelo que consiste en medio vehículo cortado transversalmente, con los parámetros necesarios para desarrollar las expresiones.

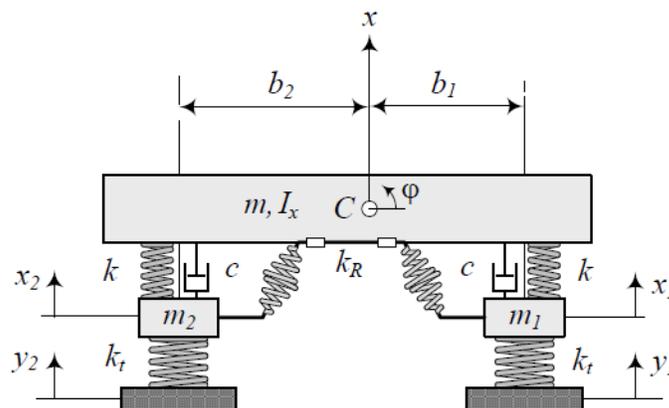


Figura 17. Modelo de rolido

Los valores mostrados son la rigidez de los resortes  $k$ , el amortiguamiento  $c$ , la rigidez de la barra estabilizadora  $k_R$ , la rigidez de los neumáticos  $k_t$ , la masa de los neumáticos  $m_1$  y  $m_2$ , la masa de mitad de vehículo o la proporción correspondiente según cada eje  $m$ , el centro de gravedad  $C$  de esta masa y las distancias  $b_1$  y  $b_2$ . Las excitaciones son  $y_1$  e  $y_2$ .

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Las ecuaciones de movimiento de este modelo son cuatro, cada una de las cuales se corresponde a uno de los grados de libertad presentes: movimiento vertical del vehículo  $x$ , movimiento vertical de cada neumático  $x_1$  y  $x_2$  y rolido o rotación respecto del eje longitudinal  $I_x$ . Las mismas se listan a continuación en el orden en el que se presentaron los grados de libertad:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) + c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) + k(x - x_1 + b_1\varphi) + k(x - x_2 - b_2\varphi) = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1 - c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) + k_t(x_1 - y_1) - k(x - x_1 + b_1\varphi) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) + k_t(x_2 - y_2) - k(x - x_2 - b_2\varphi) = 0$$

$$I_x\ddot{\varphi} + b_1c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) - b_2c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) + b_1k(x - x_1 + b_1\varphi) - b_2k(x - x_2 - b_2\varphi) + k_R\varphi = 0$$

Estas ecuaciones pueden ser diferentes para el eje delantero y trasero, fundamentalmente debido a distintos tipos de suspensión. Aquí se presenta una suspensión independiente, común en el eje delantero. En ocasiones, en el eje trasero se utiliza suspensión dependiente, sobre todo en vehículos de carga. Para este sistema las ecuaciones varían. Lo principal es el cambio de los grados de libertad que en este caso son el movimiento vertical y la rotación del vehículo, y el movimiento vertical y la rotación del eje. Es interesante destacar que al comparar el desempeño de ambas configuraciones, el sistema dependiente presenta ciertas mejoras en cuanto a rolido en la fase transitoria de vibración. Sin embargo, se tiende a usar sistemas independientes porque permiten reducir el peso de la masa no suspendida, aspecto que siempre redundará en mejor comportamiento.

La diferencia también se puede observar en los valores. Diferentes valores de parámetros y distribución de masa son los responsables. Es importante destacar el último término de la ecuación correspondiente al rolido:  $k_R\varphi$ . Este responde a la presencia de la barra antirolido o estabilizadora, elemento común en muchos sistemas de suspensión. Dicha expresión matemática es la forma más simple de representación.

Expresando de forma matricial el sistema presentado se obtiene:

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = F$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 2c & cb_1 - cb_2 & -c & -c \\ cb_1 - cb_2 & cb_1^2 + cb_2^2 & -cb_1 & cb_2 \\ -c & -cb_1 & c & 0 \\ -c & cb_2 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 2k & kb_1 - kb_2 & -k & -k \\ kb_1 - kb_2 & kb_1^2 + kb_2^2 + k_R & -kb_1 & kb_2 \\ -k & -kb_1 & k + k_t & 0 \\ -k & kb_2 & 0 & k + k_t \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 k_t \\ y_2 k_t \end{bmatrix}$$

#### 2.4.3.1.1 Frecuencias naturales

Como en el caso de los modelos anteriores, es útil encontrar las frecuencias naturales del modelo. Para ello se emplea el método presentado en la cátedra Cálculo Avanzado denominado separación de variables, con la diferencia que en este caso se aplica a un sistema discreto. Negando el amortiguamiento, se supone que las soluciones de las ecuaciones son productos de funciones espaciales y temporales. Se reemplazan estas soluciones en las ecuaciones de movimiento y se llega a un problema de autovalores. De estos autovalores surgen las frecuencias del sistema y, posteriormente, las formas modales.

Como ejemplo, se toma un vehículo con las siguientes características:

$$m = \frac{840}{2} kg \quad m_1 = 53kg \quad m_2 = 53kg \quad I_x = 820kg m^2$$

$$b_1 = 0,7m \quad b_2 = 0,75m$$

$$k = 10000 \frac{N}{m} \quad k_t = 20000 \frac{N}{m} \quad k_R = 25000 \frac{Nm}{rad}$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Partiendo de la ecuación del sistema libre:

$$[m]\ddot{x} + [k]x = 0$$

Se obtiene la ecuación característica del sistema:

$$\det[[k] - \omega^2[m]] = 6742 \cdot 10^8 \omega^8 - 8,1920 \cdot 10^{12} \omega^6 \\ + 1,9363 \cdot 10^{16} \omega^4 - 8,3728 \cdot 10^{18} \omega^2 + 3,2287 \cdot 10^{20}$$

Resolviendo la ecuación anterior se hallan las cuatro frecuencias naturales del sistema

$$\omega_1 \approx 1,04 \text{ Hz} \quad \omega_2 \approx 3,55 \text{ Hz} \quad \omega_3 \approx 10,02 \text{ Hz} \quad \omega_4 \approx 10,022 \text{ Hz}$$

La primera frecuencia corresponde a  $\varphi$ , la segunda a  $x$  y las restantes a  $x_1$  y  $x_2$ . Es decir que la primera resonancia ocurre a  $\omega_1 \approx 1,04$  Hz, donde la vibración en roldo es el efecto más observable. La segunda resonancia sucede a  $\omega_2 \approx 3,55$  Hz donde el movimiento del vehículo es más evidente. Y por último, la tercera resonancia tiene lugar a  $\omega \approx 10$  Hz que corresponde al movimiento de los neumáticos.

Es interesante resolver el sistema eliminando la barra antirolido, lo que significa el término  $k_R$ . El resultado es la modificación de la frecuencia natural de roldo, la cual para el ejemplo dado resulta  $\omega_1 \approx 0,556$  Hz. Esta disminución es negativa porque se desea que la frecuencia de roldo sea lo más próxima posible a la de movimiento del vehículo, de manera que se pueda trabajar sobre las dos al mismo tiempo. Un vehículo requiere una barra antirolido apropiada para aumentar el valor de frecuencia natural de roldo.

#### 2.4.3.1.2 Respuesta en curva

Este modelo es de gran utilidad para analizar la respuesta en curva de un vehículo dotado de suspensión, evidenciando la relación de la dinámica vertical y la lateral. Es esta condición, la excitación es un momento que afecta al grado de libertad de rotación. Al resolver el sistema resultante se pueden extraer información valiosa sobre el comportamiento. Por ejemplo, al graficar en ángulo de balanceo en función del tiempo se puede observar el valor máximo que toma y el tiempo en el que se extingue la oscilación. Más importante aún es el desplazamiento vertical del neumático y la pérdida de carga, factores que afectan el rendimiento. Esto es notable a altas velocidades. Por ello, en automóviles de competición es un análisis fundamental. En base a toda la información y objetivos impuestos, se pueden encontrar los valores óptimos de rigidez y amortiguamiento.

No se debe perder de vista que el momento aplicado resulta de la fuerza de fricción de los neumáticos con la calzada, multiplicado por la distancia del suelo al centro de gravedad del

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

vehículo. Cuanto mayor sea la distancia, mayor será el momento. Por ello los autos de competición buscan bajar en centro de gravedad. En autos comerciales también, sobre todo para mejorar el rendimiento y la seguridad en ruta.

#### 2.4.4 Modelo de siete grados de libertad

El modelo de siete grados de libertad que se muestra en la Figura 20 es la mejor representación de un vehículo ya que incluye todos los posibles movimientos.

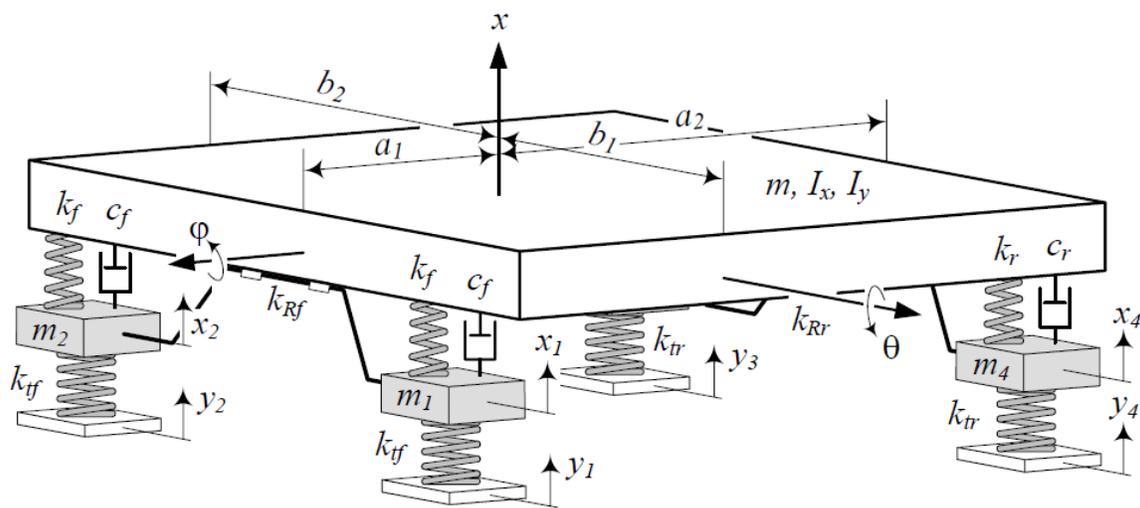


Figura 18. Modelo de siete grados de libertad

Donde  $m$  es la masa del vehículo,  $I_x$  el momento de inercia respecto del eje longitudinal e  $I_y$  del eje transversal; las masas numeradas representan los neumáticos;  $c_f$  el amortiguamiento en el eje delantero y  $c_r$  en el trasero; lo mismo sucede con  $k_f$  y  $k_r$ ;  $k_{tf}$  y  $k_{tr}$  son la rigidez de los neumáticos delanteros y traseros respectivamente; y  $k_{Rf}$  y  $k_{Rr}$  son la rigidez de la barra antirollido de ambos trenes.

Los grados de libertad son el movimiento vertical del vehículo  $x$ , el de cada neumático  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ , el rolido  $\varphi$  y el cabeceo  $\theta$ . A esto se suman las cuatro excitaciones independientes  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ,  $y_4$ . La mejor forma de hallar las siete ecuaciones del problema es aplicar mecánica de Lagrange. Su solución es compleja, pero brinda información muy valiosa a la hora de diseñar o modificar un sistema de suspensión. Las herramientas computacionales facilitan esta tarea, permitiendo introducir una variedad de excitaciones y mostrando el comportamiento del sistema. En este trabajo no se abordará su solución ya

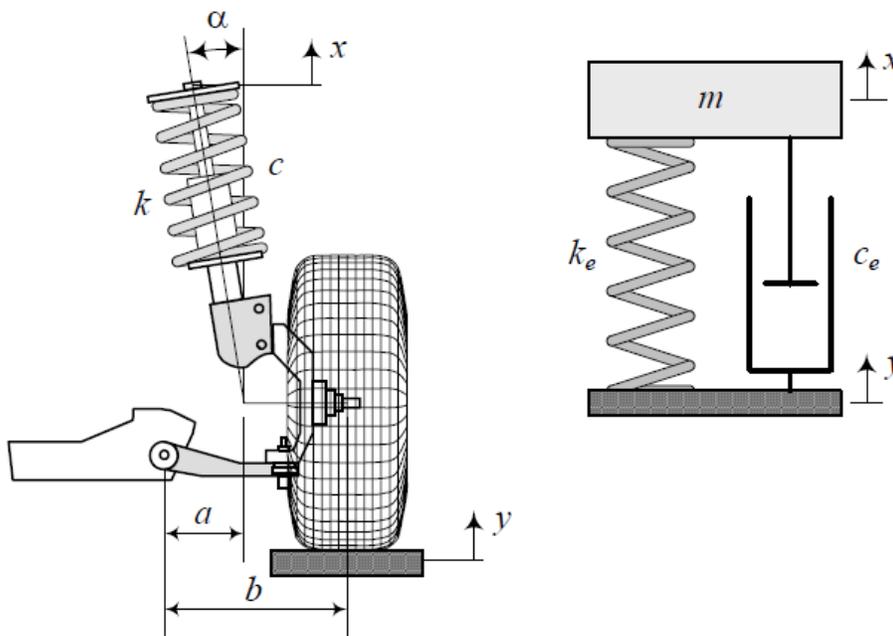
Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

que el objetivo es presentarlo como herramienta de cálculo usada en el diseño del sistema de suspensión.

### 2.4.5 Equivalencia de parámetros

En todos los modelos presentados anteriormente se muestran elementos ubicados sobre un mismo plano. Sin embargo, esto no es real. Los resortes y amortiguadores de la suspensión no están inmediatamente arriba del neumático, sino que se encuentran desplazados del plano. Por lo tanto, en los modelos se debe utilizar valores equivalentes que tengan en cuenta las características geométricas.

Hallar los valores equivalentes es sencillo. A modo de ejemplo, se presenta la siguiente suspensión tipo McPherson que se desea representar en un modelo matemático equivalente.



Al calcular los parámetros equivalentes para un modelo vibratorio 1/8, se utiliza una masa  $m$  igual a 1/4 de la masa del vehículo.

El resorte  $k$  y el amortiguador  $c$  forman un ángulo  $\alpha$  con la dirección de movimiento de la rueda. También son desplazados  $b - a$  partir de la centro de la rueda. Por lo tanto, el  $k_{eq}$  del resorte y  $c_{eq}$  del amortiguador son:

$$k_{eq} = k \left( \frac{a}{b} \cos \alpha \right)^2$$

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

$$c_{eq} = c \left( \frac{a}{b} \cos \alpha \right)^2$$

Asumiendo que se determinaron la rigidez y amortiguamiento óptimos como:

$$k_{eq} = 9869,6 \frac{N}{m}$$

$$c = 87.965 \frac{Ns}{m}$$

Con unos valores geométricos de  $a$ ,  $b$  y  $\alpha$  acordes a la realidad

$$a = 19 \text{ cm}$$

$$b = 32 \text{ cm}$$

$$\alpha = 27^\circ$$

el  $k$  y  $c$  para una suspensión McPherson son

$$k = 28489 \frac{N}{m}$$

$$c = 253,9 \frac{Ns}{m}$$

## 2.5 Cálculo de parámetros de suspensión

Lo presentado hasta aquí es utilizado para calcular los valores más convenientes de parámetros de la suspensión. Este es el último paso en el proceso de diseño del sistema, donde antes se deben diseñar todos los componentes mecánicos que configuran la geometría escogida.

Los modelos matemáticos brindan información que permite predecir, en cierta medida, el comportamiento de un vehículo, ya sea empleando excitaciones simples como funciones sinusoidales o escalón unitario, o funciones más complejas que reproducen el perfil de un camino. Analizar la solución de estos modelos y las gráficas resultantes de los diferentes parámetros (desplazamiento absoluto, desplazamiento relativo, aceleración) lleva a la elección de los valores óptimos de rigidez y amortiguamiento. El método de optimización mostrado es un claro ejemplo. Claramente no es el único existente y está basado en un desarrollo matemático, aunque sus resultados son acertados.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

Otro ejemplo de lo mencionado son algunos valores que en la dinámica vehicular son prácticamente constantes. En el apartado 2.4.1.1 se presupone una frecuencia natural del vehículo de 1 Hz. Esto no es caprichoso, sino que surge de analizar los modelos matemáticos. Partiendo del modelo de dos grados de libertad, se grafica la aceleración media que sufre el vehículo en un rango de frecuencias de excitación del terreno, para diferentes valores de frecuencia natural como ilustra la Figura 21.

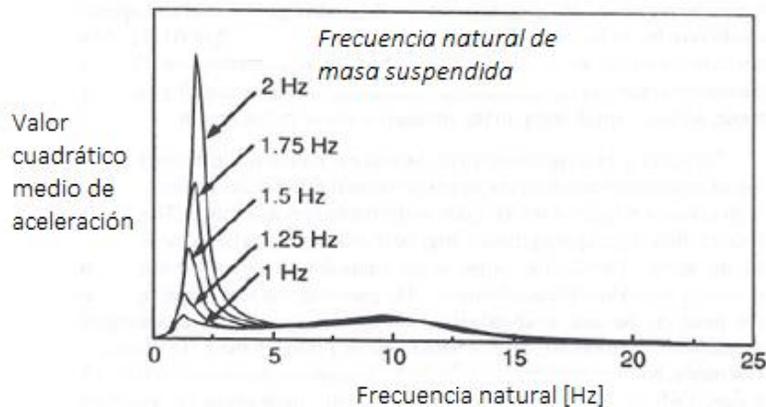


Figura 19. Influencia de la frecuencia natural de la masa suspendida

Cuando la frecuencia natural es de 1 Hz, la aceleración es mínima. Para disminuir esta frecuencia, se deben usar elementos elásticos de baja rigidez. Por ello, en autos comerciales es preferible una suspensión blanda. Cabe recordar que disminuir la aceleración se traduce en confort, y reduce los esfuerzos a los que están sometidos los elementos mecánicos. El valor de 1 Hz es ideal, en la realidad se recomiendan rangos de 0,5 a 1,5 Hz.

En cuanto al amortiguamiento, Figura 22, el rango que se encuentra en diferentes publicaciones va desde 0,25 a 0,4. Se emplea un análisis similar al anterior, en este caso analizando la ganancia de la respuesta o transmisibilidad del sistema en función de la frecuencia, para diferentes valores de amortiguamiento.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

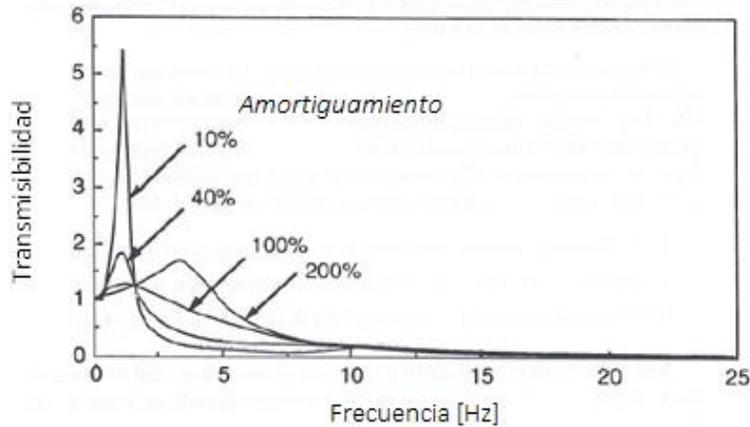


Figura 20. Influencia del amortiguamiento

Un  $\xi = 40\%$  o 0,4 brinda una reducción considerable en la zona de resonancia y un buen comportamiento fuera de ella. Valores altos reducen drásticamente en la zona de resonancia, pero penalizan en frecuencias más altas. Por ello, se recomienda un nivel de amortiguamiento dentro del rango propuesto.

De esta manera se pueden estudiar distintos parámetros y sus efectos sobre el comportamiento, haciendo foco en el desplazamiento, la aceleración, la velocidad, entre otros. Una suspensión equilibrada exige considerar todos estos aspectos, a lo cual se suma la información empírica sobre la tolerancia humana. Criterios de optimización facilitan el trabajo porque permiten centrar la atención en aspectos específicos, pero no se deben perder de vista aquellos no incluidos.

El caso de los autos de competición es diferente. No se busca confort, sino desempeño. Por ello, la frecuencia natural de la masa suspendida es mayor, llegando a superar los 5 Hz en autos de fórmula, lo cual significa mayor rigidez. Esto disminuye el recorrido de suspensión junto con la altura del vehículo al vibrar, por lo que se baja el centro de gravedad. Evidentemente, la aceleración es mucho mayor. Los pilotos están expuestos a estos efectos durante las competencias y suelen necesitar asistencia médica para recuperarse.

En el amortiguamiento sucede algo similar. El coeficiente de amortiguamiento suele ser de 0,65 o 0,7. Esto ofrece mejor control del vehículo ya que la oscilación se extingue en menos tiempo, a lo cual se suma una menor amplitud. En algunos casos se este valor puede ser de 1 o superior, pasando a sistemas críticos o sobre amortiguados.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

En los vehículos de competición es muy importante el criterio del piloto. Sin embargo, el análisis matemático es fundamental.

Departamento de Ingeniería Mecánica.

Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014

Promoción año 2016 - Alumnos: J. L. Alvarez, F. Castañón, M. Contreras, L. Raynal

## Conclusiones

En concordancia con el objetivo planteado en la Introducción, a lo largo del presente trabajo se desarrolló una descripción y análisis del sistema de suspensión de un vehículo, apelando a información recabada en diferentes publicaciones sobre el tema. A su vez, se utilizaron y establecieron relaciones con los contenidos brindados por la cátedra Mecánica Racional.

Después de realizar un extenso análisis de aproximación, surge evidente el carácter complejo del diseño de un sistema de suspensión. El mismo exige un amplia gama de conocimientos, no sólo circunscripto a vibraciones, sino relacionados con otras áreas como estabilidad o análisis de señales. Por ello, es necesario aplicar herramientas y conceptos adquiridos en otras materias de la carrera como Estabilidad I y II (para el cálculo de la rigidez de un fleje, por ejemplo) y Cálculo Avanzado, entre otras. Claramente lo visto en Mecánica Racional es esencial para comprender el funcionamiento del sistema. Se deduce entonces que un ingeniero debe poseer un amplio rango de conocimientos para desarrollar y analizar un conjunto mecánico de este nivel de complejidad. Por ello es importante que la carrera de ingeniería mecánica articule diferentes áreas de estudio, de manera de brindar herramientas útiles para el futuro profesional. La realización del trabajo permitió visualizar la interrelación de contenidos adquiridos en las asignaturas. Para los autores resulta destacable este aspecto y consideran que las mismas deben hacer énfasis en la integración de conocimientos.

Como ya se mencionó, los conocimientos adquiridos en la cátedra Mecánica Racional fueron centrales. Particularmente en este trabajo lo visto acerca de vibraciones mecánicas fue esencial. Conceptos tales como sistemas libres, frecuencia natural, tipos de amortiguamiento, sistemas forzados, resonancia e influencia de las variables en el comportamiento vibratorio fueron aplicados en el análisis. Durante la lectura de la información recopilada, haber estudiado estos conceptos fue de gran importancia para facilitar su comprensión. Sistemas sencillos como los de un grado de libertad pueden ser analizados e incluso desarrollados apelando solo a los conocimientos aprendidos durante el cursado. Sin embargo, y como se pudo observar en el desarrollo del informe, modelos más complejos son requeridos para mayor precisión. Estos exigen estudios más avanzados en ocasiones, pero poseer la base brindada es vital y ayuda en la comprensión de aquello que parece desconocido.

El sistema de suspensión, que a primera vista parece algo sencillo, es complejo y conlleva un trabajo de ingeniería basado en el estudio matemático y la optimización. Aquello que

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

comenzó como un mecanismo elástico simple de eje rígido y ballestas, fue evolucionando hasta los sistemas de hoy en día con aditamentos electrónicos que permiten variar la dureza de los amortiguadores o componentes elásticos en función de la excitación que el sistema recibe, adaptando los parámetros y modificando el comportamiento para mejorar la respuesta. Y esto fue posible gracias al trabajo de ingenieros. Aún restan desarrollos por hacer para continuar con la mejora de este sistema, donde los futuros profesionales tendrán un papel destacado.

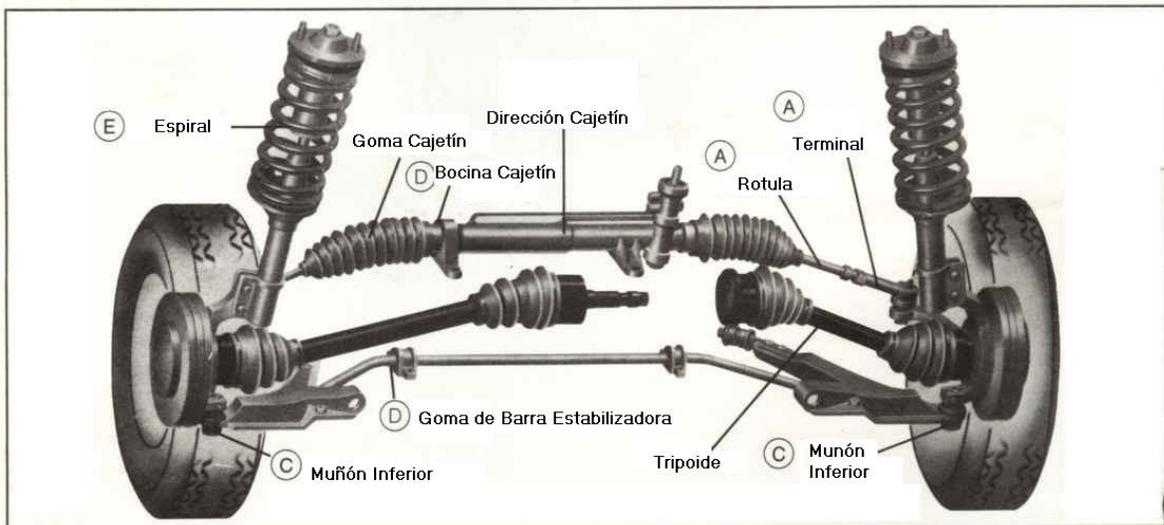
Lo descrito en el trabajo es sólo un resumen del extenso material disponible. Algunas publicaciones son sencillas y otras de mayor complejidad matemática. También hay libros dedicados a autos deportivos en los cuales se desarrolla con más énfasis el sistema de suspensión en este tipo de vehículos. Para aquellos interesados en profundizar el tema, sugerimos consultar al docente Ing. Claudio Gatti quien se especializa en la teoría y la práctica de la mecánica automotriz orientada a competición, contando con material sobre este tema en particular y sobre vehículos en general, brindando exposiciones y cursos sobre vehículos de competición .

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

## Anexo I

Con el objeto de ilustrar los mecanismos descriptos en el trabajo, en el presente Anexo se incluyen imágenes de sistemas reales de suspensión, utilizados en autos comerciales, de competición y vehículos de carga

En la Figura A1 se muestra un esquema del sistema McPherson independiente y la fotografía de uno real en un vehículo Mazda. Se observa su aplicación en el tren delantero, mientras que en el eje trasero se emplea un sistema semi-independiente.

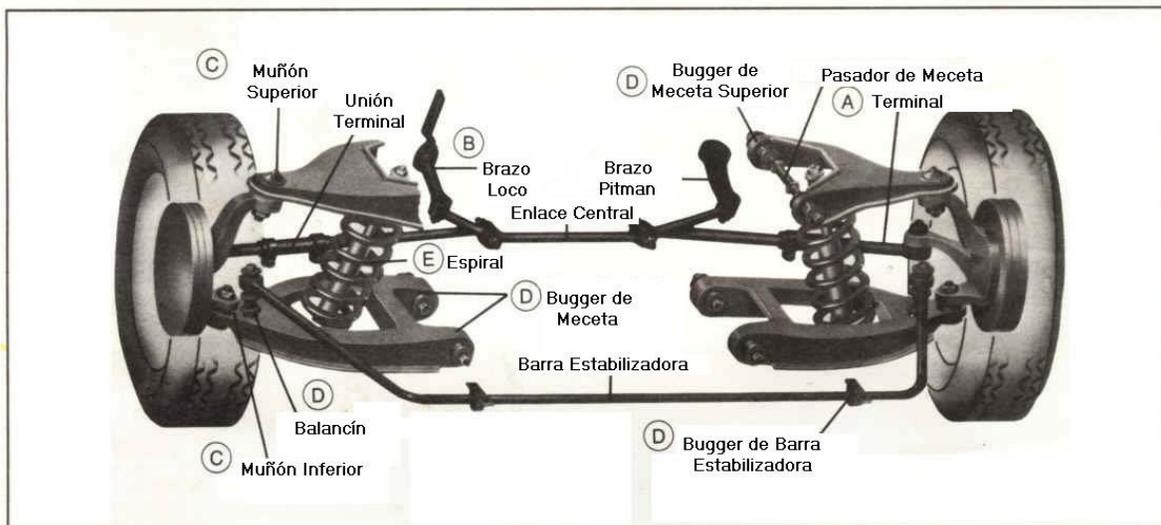


Departamento de Ingeniería Mecánica.  
 Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
 Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal



Figura A1. Esquema y fotografía de una suspensión tipo Mc Pherson independiente.

La Figura A2 muestra el sistema de brazo doble A y su aplicación en el tren delantero del Chevrolet Corvette de la década del 70.



Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

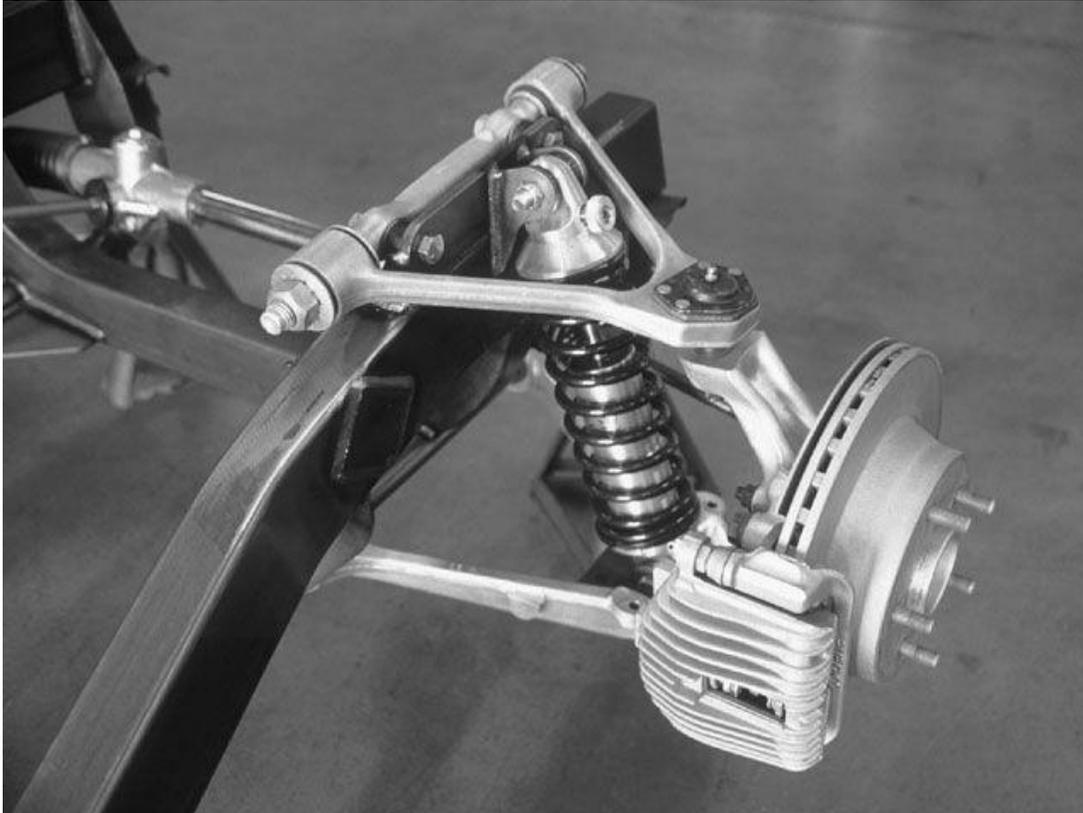


Figura A2. Esquema y fotografía del sistema de brazo doble A

Como se mencionó, en los autos deportivos se utilizan sistemas particulares. En los autos de fórmula se emplean diseños que permiten bajar el centro de gravedad del vehículo y reducir el peso. En la Figura A3 se muestran fotografías que ilustran el sistema push-rod, en el cual por la ubicación de los elementos elásticos y amortiguadores, actúan por empuje de los brazos cruzados que los une a la rueda.

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

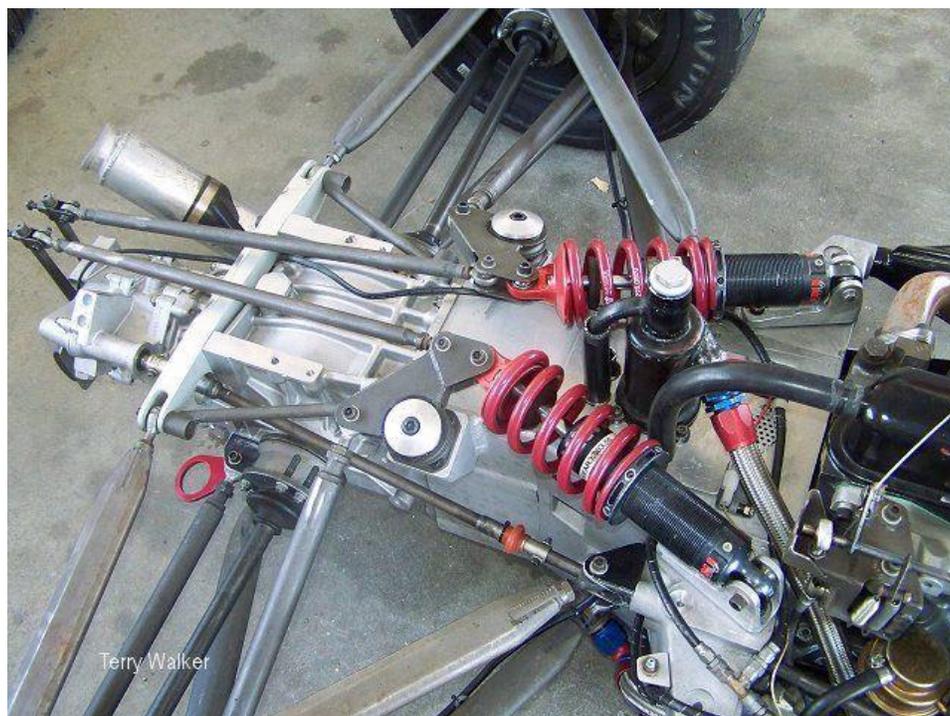
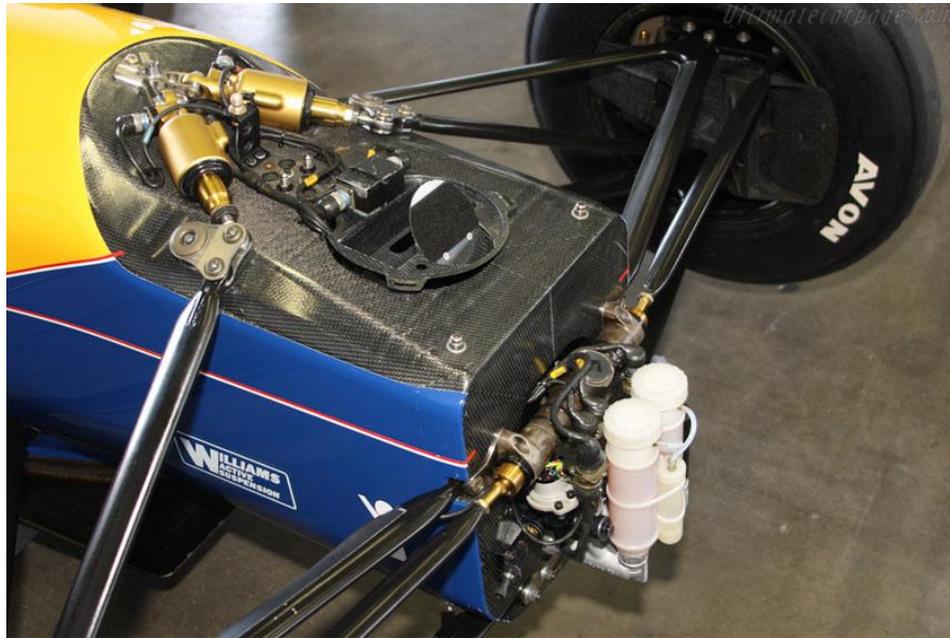


Figura A3. Sistema push-rod para autos de competición

En vehículos de carga medianos se emplean sistemas independientes como McPherson o brazo doble A en el tren delantero, mientras que en el trasero de tipo eje rígido con elásticos

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

o flejes. Este último es la forma más sencilla de suspensión para un eje propulsor y se aplica en vehículos de carga por necesitar poco mantenimiento. La Figura 4A muestra imágenes de los trenes delantero tipo doble A y trasero tipo eje rígido de la camioneta Volkswagen Amarok.



Figura 4A. Imágenes de los trenes delantero tipo doble A y trasero tipo eje rígido

Departamento de Ingeniería Mecánica.  
Mecánica Racional. Ercoli – Azurmendi, edUTecNe 2014  
Alumnos: J. L. Alvarez, F. Catañón, M. Contreras, L. Raynal

## Agradecimientos

Agradecemos especialmente al ingeniero Claudio Gatti por brindar información útil para el trabajo y estar abierto a consultas, así como a los docentes de la materia por su guía durante el desarrollo del mismo y aportes a la versión final del trabajo.

## Bibliografía

Aparicio Izquierdo F., Vera Alvarez C., Díaz López V. (1995). *Teoría de los vehículos automóviles*. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid.

Ercoli L., Azurmendi V. (2014). *Mecánica Racional*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: edUTecNe.

Gatti, C.D. (2008). *Comparación de suspensión de vehículos con modelos de diferentes grados de libertad*. Bahía Blanca, Argentina: Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca.

Gillespie, T.D. (1992). *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. USA: Society of Automotive Engineers.

Jazar, R.N. (2008). *Vehicle Dynamic: Theory and Applications*. New York, USA: Springer.

Wong, J.Y. (2001). *Theory of Ground Vehicles*. USA: John Wiley & Sons, Inc.