

**ANEXO 1**

**Algunas fechas significativas en la historia de los fractales.** Gracias a los esfuerzos de Mandelbrot, los objetos tales como el conjunto de Cantor, hallaron un marco general, la **Geometría Fractal**, compartiendo ubicación con otros importantes modelos como el movimiento browniano fraccionario y los atractores de ciertos sistemas dinámicos deterministas, conceptos y estructuras aparentemente alejados de aquellos.

*LOS MONSTRUOS*

- 1872** El conjunto de Cantor
- 1875** La curva de Weierstrass
- 1890** La curva de Peano
- 1891** La curva de Hilbert
- 1900** Movimiento browniano (Bachelier)
- 1903** La curva de Takagi
- 1906** La isla de van Koch
- 1915** El triángulo de Sierpinski
- 1938** El dragón de Lévy
- 1968** Movimiento browniano fraccionario (Mandelbrot)

*LA DIMENSIÓN*

- 1919** Dimensión de Hausdorff

*COMPORTAMIENTO RELACIONADO CON LA ESCALA*

- 1951** Ley de Hurst (río Nilo)
- 1956** Ley de Gutenberg-Richter para la distribución de la magnitud de terremotos
- 1961** Leyes de escala de Richardson

*LOS FRACTALES*

- 1968** Aristid Lindenmayer describe los ahora denominados sistemas L
- 1975** Mandelbrot inventa el término 'fractal'
- 1975** Publicación de "Fractals: Form, chance and dimension"
- 1980** Mandelbrot ofrece la primera gráfica del conjunto que lleva su nombre
- 1981** Sistemas de Funciones Iteradas (Hutchinson)
- 1982** Publicación de "The Fractal Geometry of Nature"
- 1988** Mandelbrot introduce el concepto de medidas multifractales
- 1988** Artículo de Barnsley y Sloan en BYTE

*FRACTALES Y SISTEMAS DINÁMICOS*

- 1981** Witten y Sanders introducen la agregación limitada por difusión
- 1983** Hentschel y Procaccia relacionan los fractales y los atractores extraños
- 1984** Autómatas celulares de Stephen Wolfram
- 1987** Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld elaboran el concepto de sistemas críticos auto-organizados

## ANEXO 2

## Concepto de Estructura Fractal

En 1975, Benoit B. Mandelbrot publicó un ensayo titulado "**Les objets fractales: Forme, hasard et dimension**" Editorial Flammarion. Paris. En la introducción de la citada monografía se puede leer:

*"El concepto que hace de hilo conductor será designado por uno de los dos neologismos sinónimos "objeto fractal" y "fractal", términos que he inventado, ..., a partir del adjetivo latino "fractus",..."*

En 1982 publica un nuevo libro, con gráficos espectaculares creados con la tecnología informática que, por aquel tiempo, estaba a su disposición: "**The Fractal Geometry of Nature**" Editorial W.H. Freeman & Co. New York. En la página 15 de esta obra Mandelbrot propone la siguiente definición:

*"Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica."*

Este concepto no es definitivo - el mismo Mandelbrot reconoce que no incluye algunos conjuntos que, por otras razones, deben incluirse en la categoría de fractales. Han sido propuestas otras definiciones y, de hecho, estamos ante un concepto geométrico para el que aún no existe una definición precisa, ni una teoría única y comúnmente aceptada.

**KENNETH FALCONER** Kenneth Falconer, en su obra titulada "**Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications**", John Wiley and Sons, 1990, describe un concepto de estructura fractal ' $F$ ' como la que satisface alguna(s) de las propiedades siguientes:

- (1).- " $F$ " posee detalle a todas las escalas de observación;
- (2).- No es posible describir " $F$ " con Geometría Euclídiana, tanto local como globalmente;
- (3).- " $F$ " posee alguna clase de autosemejanza, posiblemente estadística;
- (4).- La dimensión fractal de " $F$ " es mayor que su dimensión topológica;
- (5).- El algoritmo que sirve para describir " $F$ " es muy simple, y posiblemente de carácter recursivo.

En resumen, una técnica análoga a la que los biólogos aplican al concepto de vida.

La propiedad 1 se puede completar indicando que un fractal no tiene ninguna escala característica: todas las escalas son "buenas" para representar un fractal. Como veremos a continuación, esta afirmación tiene límites cuando abandonamos los modelos matemáticos para entrar en la consideración de fractales físicos.

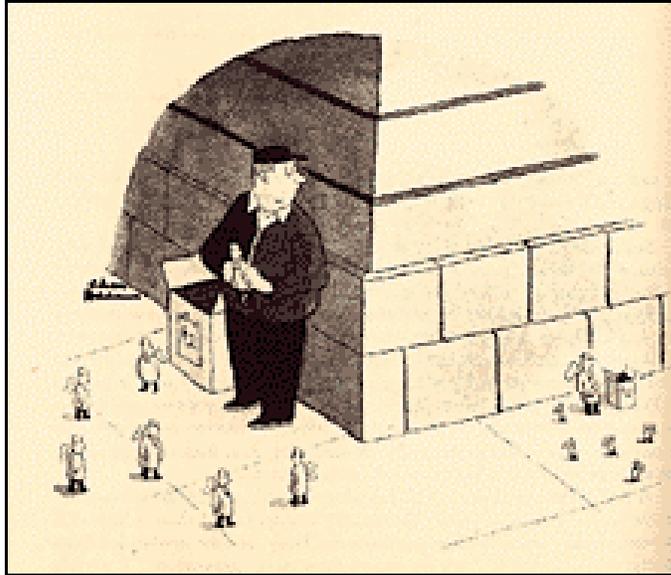


**FRACTALES MATEMÁTICOS Y FRACTALES FÍSICOS.** "A stone, when is examined, will be found a mountain in miniature". (J. Ruskin, Modern Painters, Vol. 5, chapter 18, 1860).



*"The scale invariance of geological phenomena is one of the first concepts taught to a student of geology. It is pointed out an object that defines the scale, i.e. A coin, a rock hammer, a person, must be included whenever a photograph of a geological feature is taken". (Donald L. Turcotte, Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, Cambridge University Press, 1992).*

Para incluir los fractales físicos en una categoría comparable a la correspondiente a los fractales matemáticos, la propiedad 1 debe limitarse a un rango de escalas (una escala mínima y otra máxima) que depende del objeto en consideración.



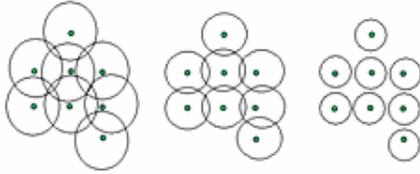
**Autosemejanza.** En general,  $F$  es una estructura autosemejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de  $F$  a tamaño reducido (una imagen de  $F$  mediante una semejanza contractiva).



## ANEXO 3

## Dimensión

Cualquiera que sea el método de aproximación al concepto de fractal que utilicemos, hay un concepto central, que es el de *dimensión*. Más precisamente, consideraremos varios conceptos de dimensión; y el primero de ellos, el de *dimensión topológica*.



Dimensión topológica 0

En los “**Elementos**” de Euclides, ya se define, implícitamente y de forma inductiva, el concepto de dimensión. Se dice que una figura es unidimensional, si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si su frontera está compuesta de curvas y tridimensional, si su frontera está compuesta de superficies.

**Dimensión topológica.** Hermann Weyl ilustra el concepto de dimensión en los términos siguientes:

*“Decimos que el espacio es tridimensional porque los muros de una prisión son bidimensionales.”*

Gerald A. Edgar<sup>50</sup> completa la imagen de Weyl en los términos que siguen:

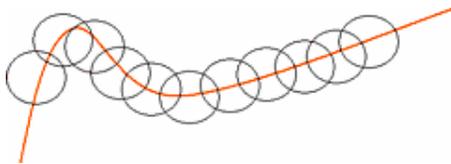
*“Si tenemos un punto en el espacio tridimensional, podemos usar un pequeño cubo como prisión. El cubo está constituido por 6 caras planas. Necesitamos saber que estas caras son bidimensionales. Un punto que vive en una de estas caras puede ser sometido a prisión haciendo uso de una pequeña circunferencia. Así, decir que las caras del cubo son bidimensionales, requiere saber que una circunferencia es unidimensional. Un punto que vive en una de las circunferencias, puede ser aprisionado haciendo uso de dos puntos como muros de la prisión. Necesitamos saber que un conjunto reducido a dos puntos es de dimensión cero. Finalmente, un punto que vive en el conjunto de dos puntos es ya incapaz de moverse. No necesitamos muros para aprisionarlo. Estamos, por definición, ante un conjunto de dimensión 0.”*

La construcción de la dimensión topológica se puede basar en la idea de generalizar el concepto de que la dimensión de una bola es tres mientras que la dimensión de la esfera que la limita es dos: dimensión de un conjunto  $X$  a partir de la dimensión de su frontera  $\partial X$ .

Por otra parte, un objeto fractal es, ante todo, un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . En este contexto, preferimos una definición equivalente de *dimensión topológica* basada en la dimensión de recubrimiento, concepto que juega un papel importante en la definición de dimensión fractal.

**Dimensión de recubrimiento.** Consideremos un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Un recubrimiento abierto de  $S$  es cualquier colección de conjuntos abiertos a cuya reunión contiene al conjunto  $S$ .



Dimensión topológica 1

Un refinamiento abierto  $a'$  del recubrimiento abierto  $a$  es otro recubrimiento tal que cada abierto  $A' \in a'$  está incluido en algún abierto  $A \in a$ .

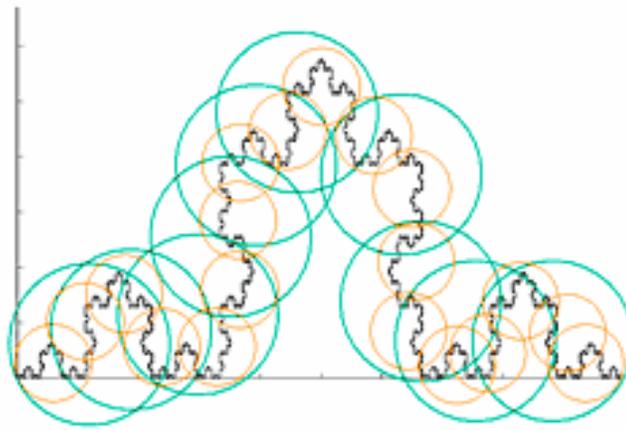
En algún sentido, un refinamiento abierto  $a'$  de  $S$ , proporciona un recubrimiento “más detallado” de  $S$  que  $a$ .

Decimos que  $a$  es un recubrimiento abierto de orden  $k$  del conjunto  $S$ , si, cualquiera que sea  $x \in S$ ,  $x$  pertenece a un máximo de  $k$  abiertos del recubrimiento  $a$ .

<sup>50</sup> “**Measure, Topology and Fractal Geometry**”, Springer, 1990.



**Definición:** El conjunto  $S$  tiene dimensión de recubrimiento (*dimensión topológica*)  $n$ , si cualquier recubrimiento abierto  $\mathcal{a}$  de  $S$  admite un refinamiento abierto de orden  $n+1$ , pero no de orden  $n$ .



Dimensión topológica 1

**ANEXO 4****Galería de fractales clásicos**

Revisamos a continuación una serie de objetos, manejados por sus descubridores con anterioridad a 1975, con intenciones e intereses muy diversos, muchas veces para proponer contra-ejemplos. Todos tienen en común la actual denominación de objetos fractales.

En general, se trata de subconjuntos del plano  $\mathbb{R}^2$ , y para su construcción se utilizan técnicas variadas: en algunos casos algoritmos geométricos, en otros son gráficas de funciones. Muchos se pueden obtener construyendo aproximaciones de atractores de sistemas dinámicos.

¿Por qué estos objetos tienen la consideración de fractales? Teóricamente, porque satisfacen varios de los criterios vistos previamente (ver Anexo 1). Y desde un punto de vista más práctico, porque si realizamos magnificaciones sucesivas de la vecindad de un punto, reproducimos las ‘irregularidades’ de la vecindad inicial. Esto no ocurre con los conjuntos ‘euclidianos’ clásicos.

**El Conjunto Triádico de Cantor.** Posiblemente es el fractal clásico más importante y más conocido, y muchos otros objetos fractales tienen alguna relación con él. Fue descrito en 1883 por Georg Cantor (1845-1918), pero fue mencionado en 1875 (posiblemente antes) por el matemático irlandés Henry Smith.

El conjunto triádico de Cantor es un subconjunto de puntos del intervalo  $[0,1]$  para el que definimos seguidamente un algoritmo recursivo de construcción. Este procedimiento de caracterización, facilita, por otra parte, la demostración de muchas de sus propiedades por inducción.

Partimos del intervalo  $[0,1]$ , que denominamos  $C_0$ . Obtenemos  $C_1$  removiendo el tercio central de  $C_0$ , de forma que resulta  $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ .

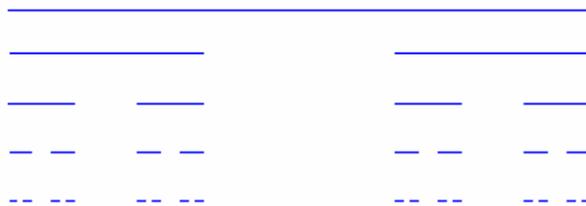
Sucesivamente, se continúa el proceso de remoción, suprimiendo el tercio central de cada nuevo subintervalo generado.

De manera inductiva, definimos el elemento  $C_k$  de la sucesión como la reunión de un total de  $2^k$  subintervalos cerrados, cada uno de ellos de longitud  $3^{-k}$ .

La sucesión de conjuntos compactos  $\{C_k\}$  es monótona decreciente  $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \dots$

El límite de esta sucesión  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$  es el conjunto triádico de Cantor o, en palabras de

Mandelbrot es un “Cantor dust”, nombre que intenta transmitir la clase de conjunto que es.



¿Por qué la reproducción en la pantalla de la iteración 6 exhibe una baja calidad? Porque no es posible la representación exacta sobre el dispositivo, la pantalla, en el sentido de que, a partir de un tamaño de subconjunto, no es posible usar un conjunto equilibrado de pixels. El conjunto de Cantor no se puede representar con un número finito de pixels.

Podemos representar los números reales de  $C_0 = [0,1]$  en base 3, mediante una expresión de la forma  $x = x_1 3^{-1} + x_2 3^{-2} + x_3 3^{-3} + \dots$  siendo  $x_i = 0, 1$  o  $2$ . Los elementos del conjunto de Cantor están descritos para valores  $x_i = 0$  o  $x_i = 2$ .

*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

En efecto, cuando eliminamos el tercio central para pasar de  $C_0$  a  $C_1$ , suprimimos los números  $x$  para los que  $x_1=1$ . Cuando suprimimos los tercios centrales para pasar de  $C_1$  a  $C_2$ , eliminamos los números reales  $x$  para los que  $x_i=1$ , y así sucesivamente.

**PROPIEDADES NOTABLES.** Este conjunto tiene una serie de propiedades notables que vamos a analizar seguidamente:

**(1).**- *El "polvo" de Cantor así definido no es el conjunto vacío.*

Estos puntos, 0, 1,  $2/3$ ,  $1/9$ ,  $2/9$ ,  $7/9$ ,  $8/9$ , ... se denominan puntos de *primer género* del conjunto de Cantor  $C$ . Los puntos restantes, que veremos que también existen, se denominan de *segundo género*.

En efecto, contiene al menos los extremos de todos los subintervalos  $C_k$ . Además, es fácil mostrar que el punto  $1/4$  es un elemento del conjunto de Cantor, por ejemplo escribiéndolo en base 3, y, por otra parte, no es extremo de ninguno de los subintervalos  $C_k$ .

**(2).**- *La medida de Lebesgue del conjunto de Cantor es cero.*

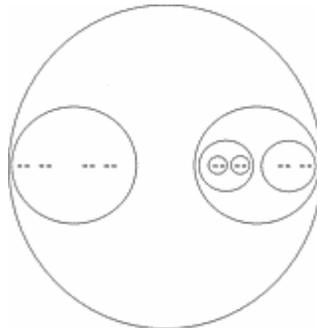
En efecto, la suma de las longitudes de los intervalos suprimidos es 1. Basta sumar la serie geométrica obtenida, de razón  $2/3$ .

**(3).**- *El conjunto  $C$  tiene el cardinal del continuo. Es decir, tiene el mismo cardinal que el intervalo original  $C_0=[0,1]$ .*

Esta propiedad se muestra fácilmente estableciendo una correspondencia entre los puntos que se pueden representar en base 3 en la forma  $0.x_1x_2x_3\dots$ , con  $x_i=0$  o  $x_i=2$  y los que se escriben en binario en la forma  $0.y_1y_2y_3\dots$

Puesto que los puntos de primer género constituyen un conjunto numerable, queda claro que el conjunto de los puntos de segundo género no se reduce al punto  $1/4$ .

**(4).**- *El conjunto  $C$  tiene dimensión topológica 0.*



**(5).**- *El conjunto  $C$  no contiene intervalos de longitud positiva ni puntos aislados.*

**(6).**- *El conjunto  $C$  es un conjunto cerrado y cada uno de sus puntos es un punto de acumulación. Es, decir, es un conjunto perfecto.*

**(7).**- *El conjunto  $C$  es un conjunto compacto, es decir, cerrado y acotado.*

**(8).**- *El conjunto  $C$  es totalmente inconexo.*

Así,  $C$  es un conjunto compacto, perfecto e inconexo. Además,  $C$  está caracterizado por éstas tres propiedades: cualquier subconjunto de  $R$  compacto, perfecto e inconexo se puede aplicar sobre  $C$  por medio de una transformación continua reversible.

**(9).**- *Finalmente, el conjunto  $C$  tiene una propiedad notable, pero nada evidente. Dado cualquier número real  $x$  del intervalo  $[0,1]$ , existen dos elementos de  $C$ ,  $y,z$ , tales que  $x=y-z$ .*

En otras palabras, las sumas  $y+z$  de dos elementos  $y$  y  $z$  del conjunto  $C$ , llenan el intervalo  $[0,2]$ .

Analizando el conjunto de estas propiedades observamos el hecho sorprendente de que  $C$ , a pesar de tener medida de Lebesgue y dimensión topológica nulas (igual que un conjunto finito o numerable de puntos), tiene el cardinal del continuo (lo mismo que  $I_0=[0,1]$  o  $R$ ).

Esta situación, un tanto paradójica, se puede resolver (y, de hecho, se resuelve) argumentando que el conjunto de Cantor está incluido en una nueva categoría de conjuntos,



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

los conjuntos fractales, asociándole en consecuencia un concepto nuevo de dimensión (que no es un número entero), la dimensión fractal.

Existen razones adicionales para clasificar el conjunto de Cantor como objeto fractal. Si consideramos el concepto de estructura fractal de Kenneth Falconer, observamos que el conjunto de Cantor satisface cada una de las propiedades citadas en el Anexo 1. En particular, la "propiedad"

**(3).**- "F" posee alguna clase de autosemejanza, posiblemente estadística;

se detecta en el conjunto C en los términos siguientes.

El conjunto C puede obtenerse como reunión de dos conjuntos: el primero se deduce de C mediante una contracción de razón 1/3. El segundo se deduce mediante la misma transformación seguida de una traslación de vector 2/3.

El conjunto C se puede obtener, además, como el atractor de un sistema de funciones  $w_1(x)=x/3$ ,  $w_2(x)=(x+2)/3$ , cuando se aplican en forma iterada, comenzando, por ejemplo, con  $C_0=[0,1]$ . ¿Es el conjunto así definido el mismo que hemos definido en forma recursiva anteriormente? En efecto, es fácil probar por inducción completa la siguiente propiedad del conjunto de Cantor  $C = w_1(C) \cup w_2(C)$ .

**AUTOSEMEJANZA.** En este sentido, C es una estructura (un conjunto) autosemejante.

**VARIACIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR.** Podemos generar un conjunto de Cantor diferente eliminando un abierto de longitud  $\frac{1}{2}$ , situado en posición central, dejando los segmentos  $[0,1/4]$  y  $[3/4,1]$ . A continuación, se eliminan abiertos de longitud 1/8 de cada uno de ellos. Y así sucesivamente. Queda el atractor del sistema  $w_1(x)=x/4$ ,  $w_2(x)=(x+3)/4$ . Otra construcción consiste en eliminar dos abiertos de longitud 1/3, quedando el conjunto  $[0,1/9] \cup [4/9,5/9] \cup [8/9,1]$ . Se obtiene así el atractor del sistema  $w_1(x)=x/9$ ,  $w_2(x)=(x+4)/9$ ,  $w_3(x)=(x+8)/9$ .

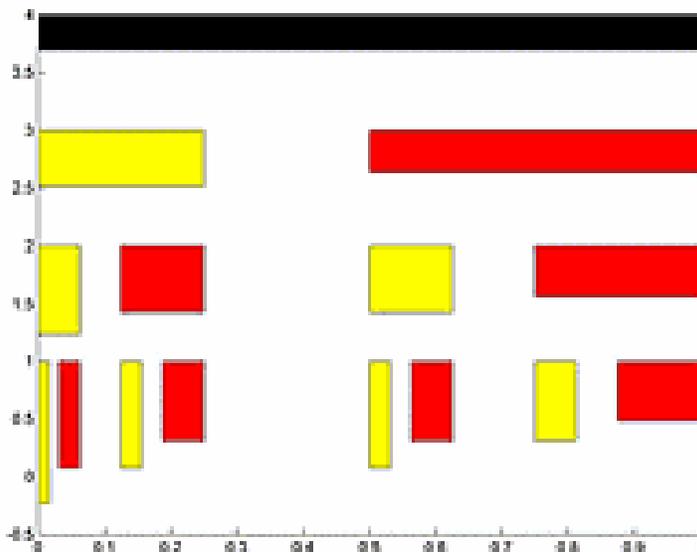
**CURDLING.** Consideramos ahora una construcción del conjunto de Cantor suponiendo que repartimos una unidad de masa sobre el intervalo  $[0,1]$ , con lo que tenemos una barra. Se elimina el tercio central, pero la masa unidad se reparte entre los intervalos restantes, que pasan así a poseer una

densidad igual a  $\frac{1}{\frac{2}{1} = \frac{3}{2}}$ .

La siguiente iteración suprime los tercios centrales de los dos intervalos, quedando cuatro intervalos cerrados a los que se adscribe la totalidad de la masa, repartiendo 0.25 a cada uno de ellos. Quedan barras más pequeñas de densidad

$\frac{1}{\frac{4}{1} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2}$ . En la n-sima

generación tendremos  $2^n$  barras, cada una de ellas de longitud  $3^{-n}$  y con una adscripción de masa de valor  $2^{-n}$ , lo que conduce a densidades crecientes que ascienden a  $(3/2)^n$ .

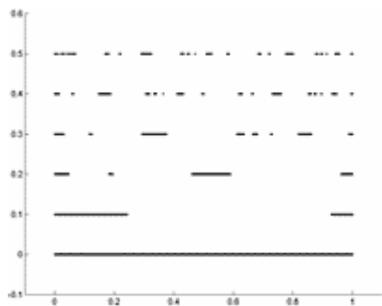
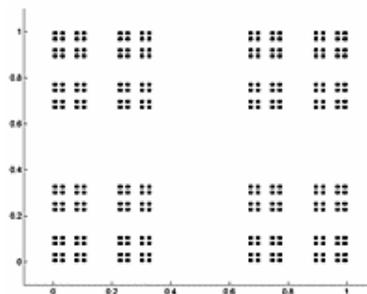




*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

Podemos generalizar el 'curdling' transformando la 'barra' inicial en dos nuevas: izquierda con escala  $l_0$  y derecha con  $l_1$ , al tiempo que repartimos la masa unidad con las proporciones  $p_0$  al segmento izquierdo y  $p_1$  al derecho, respectivamente. Suponemos, así,  $l_0+l_1<1$ ,  $p_0+p_1=1$ .

**PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS DE CANTOR.** La construcción original de Cantor se puede generalizar a dimensión 2 (o superior) mediante diversos mecanismos. Por ejemplo, se puede construir el producto cartesiano de dos conjuntos triádicos de Cantor, dando como resultado conjunto  $C \times C$  con medida de Lebesgue cero y con la potencia del continuo, igual que  $C$ .



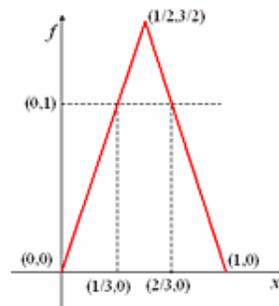
**CONJUNTO DE CANTOR ALEATORIO.**

Partimos, nuevamente, de  $C_0=[0,1]$  y seleccionamos dos cantidades al azar  $r_1$  y  $r_2$ , de forma que  $r_1+r_2<1$ . Deducimos así el conjunto reunión de dos intervalos, a cada uno de los cuales se aplica una construcción semejante a la anterior.

**LA APLICACIÓN DE LA TIENDA DE CAMPAÑA Y EL CONJUNTO DE CANTOR.**

La aplicación  $R \rightarrow R$  definida por

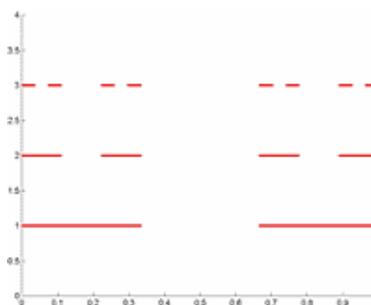
$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1/2, \\ 3-3x, & x > 1/2 \end{cases}$$



se suele denominar tienda de campaña (*tent map*), debido a la forma de su gráfica. Estudiaremos algunos aspectos del sistema dinámico con inicio en  $x_0$  y tal que  $x_{n+1}=f(x_n)$ .

**EL CONJUNTO PRISIONERO.** En primer lugar se observa que si  $x_0<0$  o  $x_0>1$ , la sucesión diverge hacia  $-\infty$ . Y lo mismo sucede si cualquier  $x_n<0$  o  $x_n>1$ . Consideremos, pues,  $x_0 \in [0,1]$ . Nos planteamos la cuestiones siguientes: ¿Existen puntos en  $[0,1]$  para los que la sucesión no diverge? Si la respuesta es afirmativa ¿hay pocos o muchos puntos que se pueden considerar 'prisioneros'?

Es fácil ver, mediante una ilustración gráfica, que la construcción del conjunto de prisioneros  $P$  es la misma que la correspondiente al conjunto triádico de Cantor. Así,  $P=C$ . Esta conjetura responde también a la segunda pregunta. Los puntos de  $C$  (y de  $P$ ) son escasos en  $[0,1]$ . De hecho, si seleccionamos un punto al azar en  $[0,1]$ , la probabilidad de que sea un prisionero es nula.

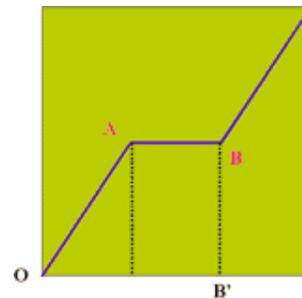


**La Escalera del Diablo.** En el escrito de Cantor titulado "On the Power of Perfect Sets of Points", extraído por los editores de Acta Mathematica partiendo de una carta dirigida a los mismos en 1884, se describe el ya considerado Conjunto de Cantor y una función (de Cantor) conocida como escalera del diablo. Se trata de la gráfica de una función (singular) continua en  $[0,1]$ , no constante, y con derivada nula en todos los puntos, excepto en un

*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

subconjunto de  $[0,1]$  con medida de Lebesgue nula. Este subconjunto es, precisamente, un conjunto de Cantor.

Repetimos la construcción del conjunto de Cantor suponiendo que repartimos una unidad de masa sobre el intervalo  $[0,1]$  y que, en cada operación de eliminación, se elimina también la masa correspondiente. La escalera del diablo se obtiene como la representación de la masa  $M(x)$ , para cada abscisa  $x$ , situada a la izquierda de la misma.

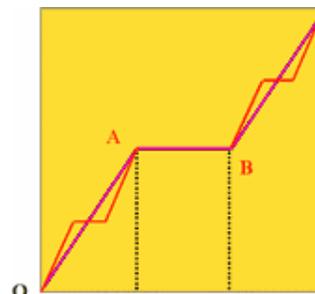


**ALGORITMO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA ESCALERA DEL DIABLO.**

**(1).**- En un cuadrado  $[0,1] \times [0,1]$ , trazamos el segmento  $O(0,0)$ - $U(1,1)$ .

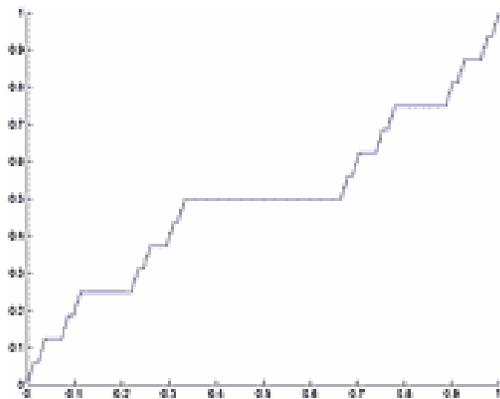
**(2).**- Sobre el tercio central de  $[0,1]$  (abscisas), elevamos un segmento  $y=1/2$ , de extremos  $A(1/3,1/2)$  y  $B(2/3,1/2)$ , respectivamente. Seguidamente, trazamos la línea quebrada  $(0,0)$ - $(1/3,1/2)$ - $(2/3,1/2)$ - $(1,1)$ , finalizando así la segunda etapa.

**(3).**- En la tercera etapa, se realiza una operación análoga con los segmentos  $OA'$  y  $B'U'$ . Se construye sobre el tercio medio de



cada uno de ellos un segmento,  $y=1/4$  para  $OA'$  e  $y=3/4$  para  $B'U'$ .

**(4).**- El algoritmo prosigue indefinidamente.



**OTRAS PROPIEDADES.** La escalera del diablo tiene dimensión topológica 1 y longitud 2. El área entre la curva y el eje de abscisas es igual a  $1/2$ .

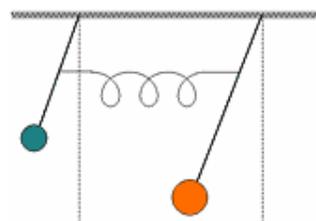
**LA ESCALERA DEL DIABLO Y LOS SISTEMAS DINÁMICOS.** La escalera del diablo no es, simplemente, una construcción matemática con propiedades más o menos notables. La descripción de muchos sistemas físicos origina la

construcción de varias versiones de la curva mencionada.

El comportamiento dinámico de las ecuaciones (no lineales) de un oscilador forzado o de un sistema de Van der Pol, por ejemplo, se puede, bajo determinadas condiciones, simplificar mediante la denominada aplicación del círculo (en si mismo)

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{k}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) + \Omega.$$

Esta aplicación presenta dos parámetros,  $K$ , que corresponde a la intensidad de la oscilación perturbadora, y, simultáneamente, al grado de no linealidad del sistema, y  $\Omega$ , que es la frecuencia del sistema en ausencia de acoplamiento ( $K=0$ ).



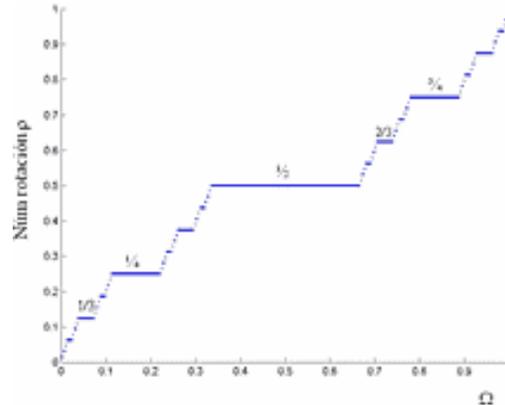
Se denomina número de rotación a la función  $\rho(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}$ . La gráfica de  $\rho$  frente a

$\Omega$  tiene un curioso comportamiento:  $\rho$  es una función continua de  $\Omega$  y presenta un conjunto numerable de mesetas para valores racionales de  $\rho$ : son mesetas de acoplamiento o de resonancia.



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

Los intervalos (abiertos) de  $\Omega$  para los que aparece el fenómeno de acoplamiento, llenan el intervalo  $[0,1]$ , quedando como puntos residuales de  $\rho$ , que no corresponden a resonancia, un conjunto de Cantor. La gráfica de  $\rho$  frente a  $\Omega$  es una escalera del diablo.



**La Curva de Weierstrass.** El 18 de Julio de 1872, Karl Weierstrass (1825-1897) leyó un escrito titulado “**On Continuous Functions of a Real Argument that do not have a Well-defined Differential Quotient**”, en la Royal Prussian Academy of Science. El artículo fue publicado tres años mas tarde por P. du Bois-Reymond.

El párrafo de introducción dice así

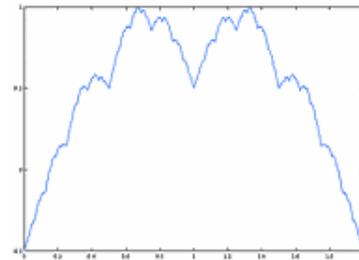
*Hasta tiempos muy recientes, se suponía de forma universal que una función continua uniforme de una variable real siempre tenía una derivada primera, cuyo valor podría no estar definido o ser infinitamente grande sólo en puntos aislados.*

Seguidamente, Weierstrass construye el primer ejemplo de curva continua y no diferenciable en ningún punto, siempre que el producto  $ab$  sea superior a cierto límite

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Weierstrass probó que la función descrita carece de derivada finita o infinita en cada uno de sus puntos si  $0 < a < 1$ ,  $b$  es un entero impar y  $ab > 1 + 3\pi/2$ .

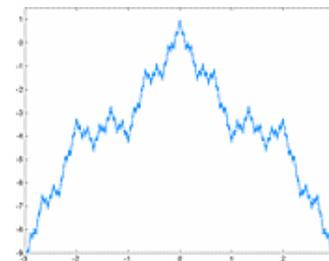
En 1914, Hardy demostró que, si  $ab \geq 1$ ,  $W(x)$  carece de derivadas en todos sus puntos. Si  $ab < 1$ ,  $W(x)$  es continuamente diferenciable.



**La Curva de Mandelbrot-Weierstrass.** La gráfica de la curva de Weierstrass no es autoafín. Mandelbrot diseñó una ligera modificación de ella que le confiere alguna clase de autoafinidad

$$W_M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (1 - \cos(b^n \pi x)).$$

Esta función puede expresarse como suma de una de Weierstrass y una función continua y diferenciable. Además,  $W_M(x) = aW_M(bx)$ .

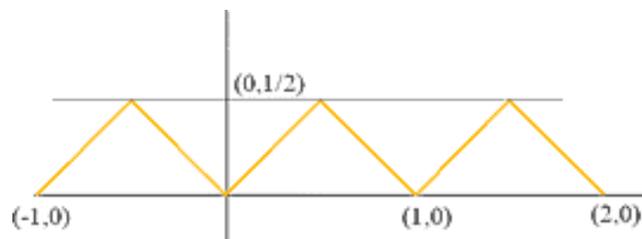


**La Curva Fractal de Takagi.** Esta curva fue descubierta en 1903 por Takagi (1875-1960), y se deduce de la de Weierstrass la función trigonométrica que aparece en la suma por la función  $\psi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$  que mide la distancia entre el argumento  $x$  y el número entero más

próximo a  $x$ ,  $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi(2^n x)$ .

La gráfica de la función  $\psi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$  tiene la forma de la derecha.

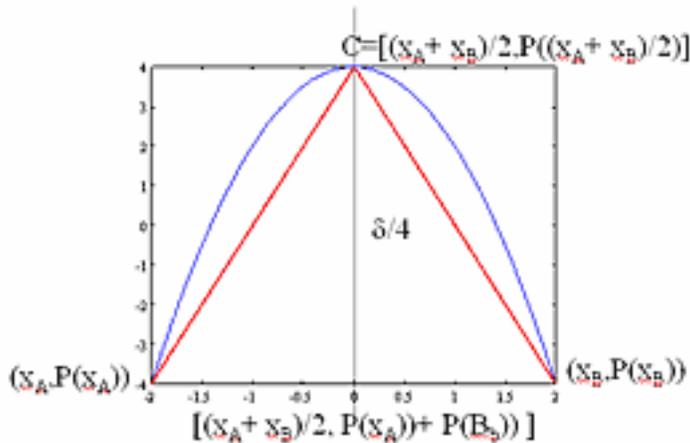
En primer lugar, consideremos el algoritmo de Arquímedes para la construcción punto a punto de la parábola.



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

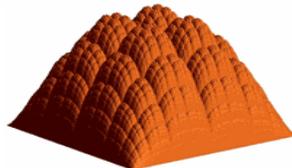
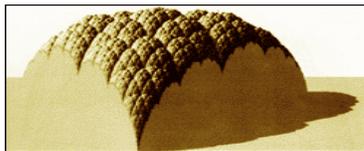
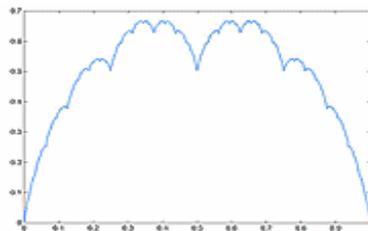
Sea  $y=P(x)=a-bx^2$ , con  $b>0$ . Dados los extremos de la cuerda  $\{x_A, a-bx_A^2\}$ ,  $\{x_B, a-bx_B^2\}$ , Arquímedes interpola el valor  $P(x)$  que corresponde al punto medio  $x=(x_A+x_B)/2$ .

$$P\left[\frac{1}{2}(x_A + x_B)\right] - \frac{1}{2}[P(x_A) + P(x_B)] = \frac{b}{4}(x_B - x_A)^2 = \frac{\delta}{4}.$$



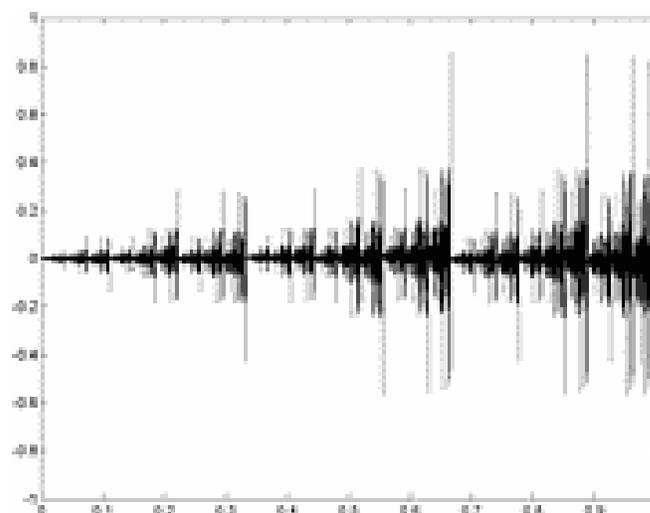
Seguidamente, se interpolan otros dos puntos, partiendo del punto medio de las cuerdas AC y CB, respectivamente, y elevando cada ordenada en la cantidad  $\delta/(4^2)=\delta/16$ . La etapa  $k$  requiere el desplazamiento de los puntos medios de  $2^{k-1}$  cuerdas en la cuantía  $4^{-k}\delta$ . Para la curva fractal de Takagi, se copia el algoritmo precedente, cambiando el incremento de las ordenadas por  $2^{-k}\delta$  en la etapa  $k$ . La curva que se deduce punto a punto es muy diferente de una

parábola.



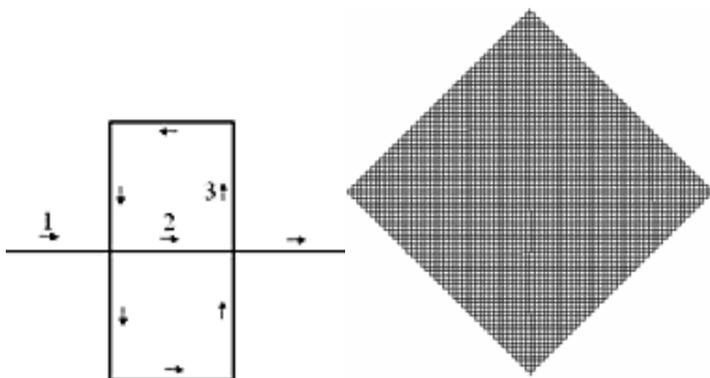
**Un ejemplo diferente.** Sobre el conjunto  $[0,1]$  definimos las aplicaciones contractivas  $w_1(x)=ax$ ,  $w_2(x)=(1-a-b)x+a$ ,  $w_3(x)=b(x-1)+1$ , siendo  $a>1/3$ ,  $b>1/3$ ,  $a+b>4/3$ . Iterando en la forma acostumbrada, se obtiene una función continua no diferenciable en todos sus puntos.

**La Curva de Peano.** En 1890 Giuseppe Peano (1858-1932) publicó un artículo titulado “**Sur une courbe qui remplit toute une aire plane**”. Esta curva, como la de Hilbert, tiene la propiedad notable de “llenar” el plano, en el sentido de que pasa por cualquier punto, por ejemplo, del cuadrado unidad. Se demuestra que ambas tienen dimensión topológica igual a 1.



**ALGORITMO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE PEANO.** Partimos de un segmento de longitud unidad. Deducimos 9 nuevos segmentos, cada uno de longitud  $1/3$ , que colocamos de la forma mostrada en la figura de la derecha.

En la etapa  $p$ , obtenemos un conjunto formado por  $9^p$  cuadrados de lado  $3^{-p}$ . El objeto así engendrado es estrictamente autosimilar, ya que puede obtenerse como reunión de



$n=9$  conjuntos semejantes a  $Q$ , reducidos cada uno de ellos en la proporción  $1/k=1/3$ .

Para construir la curva de Peano como atractor de sistemas de aplicaciones afines necesitamos nueve aplicaciones de la forma

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Las tablas que siguen relacionan los valores de los 54

coeficientes.

a	b	c	d	e	f
1/3	0	0	1/3	0	0
1/3	0	0	-1/3	0	-1/3
1/3	0	0	1/3	-1/3	-1/3
-1/3	0	0	1/3	1/3	-2/3
-1/3	0	0	-1/3	-2/3	0
-1/3	0	0	1/3	0	-1/3
1/3	0	0	1/3	-1/3	1/3
1/3	0	0	-1/3	1/3	-2/3
1/3	0	0	1/3	-2/3	0

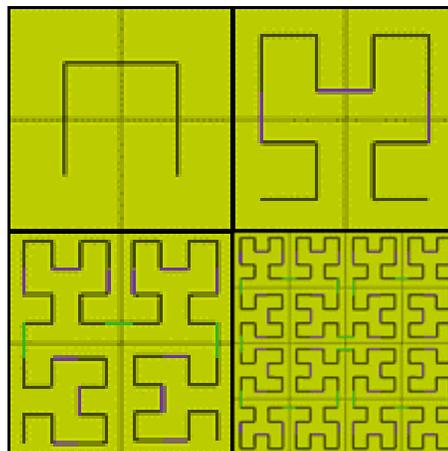
**La Curva de Hilbert.** La curva de algoritmo constructivo que describimos a continuación, fue descrita en 1891 por David Hilbert (1862-1943) en un artículo de exactamente dos páginas, poco más tarde de que Giuseppe Peano describiese una curva análoga. Ambas tienen la notable propiedad, la de "llenar" el plano.

La curva comienza con una línea  $H_0$  compuesta de 3 segmentos, cada uno de longitud unidad, que conecta los centros de cuatro cuadrantes.

En la etapa siguiente se realizan cuatro copias de  $H_0$ , reducidas en la proporción  $1/3$ , y se colocan en los cuadrantes. Resulta  $H_1$ . Se observa que para construir  $H_1$ , es necesario unir las copias de  $H_0$  con tres segmentos de longitud  $1/2$ .

Para deducir  $H_2$ , se hacen cuatro copias de  $H_0$ , reducidas en la proporción  $1/2$ , se colocan como se indica y se unen las copias mediante tres segmentos, ahora de tamaño  $1/4$ . Se observa, así, que el objeto que resulta no es estrictamente autosemejante.

La curva de Hilbert se obtiene como atractor del SFI siguiente:





*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

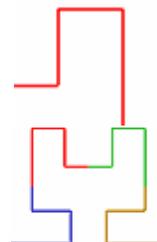
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Si el conjunto inicial es una línea quebrada como la que se representa en la primera figura a la derecha, se obtienen transformaciones sucesivas cuyo límite es una curva de Hilbert, indicada en la segunda figura de la derecha y más abajo.



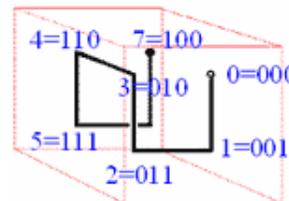
**EL CÓDIGO GRAY.** El código de Gray, basado en una permutación del código binario tradicional, proporciona una representación de objetos ordenados de forma que, pasando de un objeto al siguiente, sólo tenemos que cambiar un bit de información. La distancia de Hamming entre la representación de un objeto y el siguiente (o el predecesor) es 1.

Codificación decimal, binaria tradicional y basada en el código de Gray:

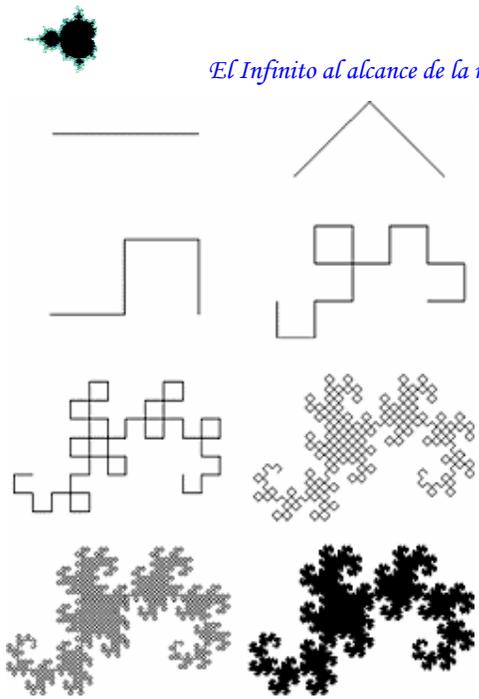
Decimal	Binaria tradicional	Código Gray
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Eventualmente – esto es importante en dispositivos mecánicos – el error medio en la transmisión es menor cuando se hace uso del código Gray.

A continuación se ilustra la correspondencia de los dígitos de 0 a 7 con los códigos de Gray, haciendo uso de una curva de Hilbert tridimensional.



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*



**El Dragón de Heighway.** Esta "curva" fue construida alrededor de 1967 por John E. Heighway. Igual que el dragón de Lévy, tiene dimensión topológica 1.

La curva, que es el borde de la imagen, tiene dimensión topológica 1.

Esta "curva" fue construida alrededor de 1967 por el físico de la N.A.S.A. John E. Heighway. De acuerdo con Martin Gardner (Festival Mágico-Matemático, Alianza Editorial), Heighway ilustró la construcción mediante el doblado conveniente de una hoja de papel.

Esta curva también se puede obtener como el atractor del sistema

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**TRANSICIÓN ENTRE DRAGONES.** Para cada valor de  $t$  en el intervalo  $[0,1]$ , definimos el sistema de funciones

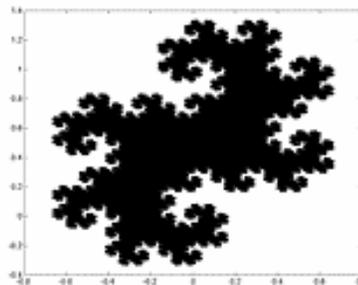
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\text{sen}(\pi/4) \\ \text{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4 + \pi t) & -\text{sen}(\pi/4 + \pi t) \\ \text{sen}(\pi/4 + \pi t) & \cos(\pi/4 + \pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que  $A(t)$ , para cada  $t$ , el atractor del sistema de funciones iteradas así definido, que es una función continua de  $[0,1]$  en el espacio de los conjuntos compactos con topología de Hausdorff, siendo  $A(0)$  el dragón de Lévy y  $A(1)$  el de Heighway.

**SISTEMA DE NUMERACIÓN DE BASE COMPLEJA.**

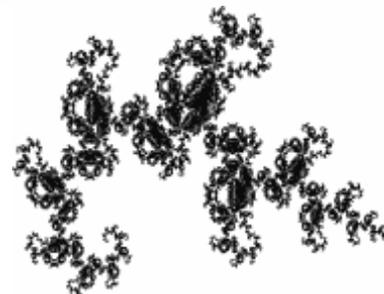
La curva dragón de Heighway, que es el contorno de la figura así construida, tiene una interpretación en el contexto de los sistemas de numeración de base compleja y dos dígitos  $\{0,1\}$ . Si dibujamos los afijos de los complejos que tienen expresión en base  $1-i$  con la forma  $0.x_1x_2x_3\dots x_n\dots$ , tenemos una gráfica cuya silueta es la curva citada.



**La Procesión de Cangrejos.** Se construye como el atractor del sistema

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$





**Conjuntos Atractores.** Los dragones de Lévy y Heighway, la procesión de cangrejos, así como la curva de Peano y la de Takagi, son casos particulares de los conjuntos generados por las aplicaciones afines  $C \rightarrow C$  de la forma

$$f_1(z) = az + b\bar{z}$$

$$f_2(z) = cz + d\bar{z} + 1 - c - d$$

donde  $a, b, c, d$  son parámetros complejos.

Para que las aplicaciones citadas sean contracciones, los parámetros deben verificar

$$0 < |a| + |b| < 1$$

$$0 < |c| + |d| < 1$$

Además, si se desea obtener conjuntos autoafines conexos, es necesario imponerles nuevas restricciones.

## ANEXO 5

## SOLITONES, NO TAN SOLITARIOS

Durante un paseo a caballo por los alrededores de Edimburgo, el ingeniero escocés John Scott-Russell (1808-1882) observó cómo una barcaza era remolcada a lo largo de un estrecho canal por dos caballos que tiraban desde tierra, para obtener un diseño más eficiente de botes.

Transcurría el año 1834. Mientras Russell, contemplaba el espectáculo, la barcaza se detuvo repentinamente, ocasionando un movimiento violento del agua. Ante el asombro de Russell, se levantó una ola en la proa de la nave y *"fué deslizándose a gran velocidad hacia delante, formando una única ondulación de gran altura; una montaña de agua, redondeada y bien diferenciable, que continuó su recorrido por el canal, sin variar aparentemente su forma o reducir la velocidad"*. Russell saltó precipitado de su caballo y se lanzó en persecución del enigmático fenómeno. Durante más de dos kilómetros persiguió a la ola, sin perderla de vista, hasta que desapareció entre las innumerables curvas del canal.

Todos hemos examinado en más de una ocasión los movimientos de una ola, pero la acrobacia que observó Russell aquella mañana fue diferente. Cuando lanzamos una piedra a un estanque se forman pequeñas ondulaciones, que se van extendiendo y ensanchando en círculos concéntricos, cada vez más débiles. hasta que se difuminan en la orilla. Estas olas normales constan de cumbre: seguidas de valles. Pero la gigantesca ola que Russell vio en el canal era, por el contrario, un promontorio único sobre la superficie en calma del agua, que mantenía su forma intacta mientras avanzaba, Sorprendido por aquella visión, Russell tenía que averiguar sin demora si había sido víctima, quizás, de alguna ilusión óptica. Por este motivo, el ingeniero volvió una y otra vez al canal para hacer nuevas observaciones, y en cada ocasión tenía la oportunidad de contemplar atónito olas únicas. Russell las llamo **great waves of translation** y se dedicó a perfeccionar diferentes técnicas para reproducirlas en su laboratorio (el jardín trasero de su casa). Entre sus resultados empíricos se encuentra que la amplitud es proporcional a la velocidad de la onda. Así, en 1844 en su **"Report on Waves"** informó a la *British Association* que *"I believe I shall best introduce the phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn back along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped- not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles per hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that rare and beautiful phenomenon which I have called Wave of Translation"*

Su publicación impresionó tanto a los investigadores de la naturaleza de todo el mundo, que éstos también intentaron observar las misteriosas olas en charcas, estanques, lagos y canales, para desvelar los mecanismos de su formación. Cualquiera puede convertirse en un investigador de olas El descubrimiento de las olas únicas por parte del investigador escocés tuvo como consecuencia el despertar de un nuevo y enorme interés por las olas normales. ¿Cómo se forman y propagan? ¿Por qué éstas se van apagando poco a poco, mientras que la onda de una ola única se desplaza por el agua a gran velocidad, durante largo tiempo y sin modificar su forma o tamaño?.

Airy y Stokes dedicaron parte de sus esfuerzos a entender este curioso fenómeno, y en la década de 1870 Boussinesq y Lord Rayleigh dedujeron que la amplitud de dicha *great wave of translation* debía ser una onda viajera proporcional al cuadrado de la secante hiperbólica, poseyendo así una localización exponencial. Boussinesq derivó la ecuación no lineal en derivadas parciales que hoy lleva su nombre. Pero no fue hasta 1895 cuando, en el trabajo

titulado "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves", *Philosophical Magazine* (5) **39**, (1895) 422-443, Diederick J. Korteweg y Gustav de Vries presentaron la ecuación en derivadas parciales no

lineal que captura la esencia de este fenómeno  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . Sin embargo, la

ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) aparte de tener como soluciones a las *great waves of translation* nos reservaba grandes sorpresas. En concreto, lo que estos teóricos averiguaron sigue teniendo validez hoy, al menos en sus puntos esenciales. Incluso, la teoría de Korteweg y De Vries encontró una clara aceptación en muchas ramas del saber científico, desde la física de partículas hasta la biología molecular.

Además, es posible que pueda contribuir a explicar uno de los misterios más excitantes de la ciencia moderna: el porqué algunas sustancias, en unas determinadas condiciones, se convierten en superconductoras, es decir, que de repente se dejan violar por la corriente eléctrica, sin prestar resistencia alguna. Pero, ¿qué es lo que habían encontrado los físicos holandeses? ¿Por qué podían, de pronto, comprender la existencia de la onda única? El motivo es que no creían en la inmutabilidad de los axiomas. Acabamos de conocer una de estas sentencias: la velocidad de una ola depende sólo de la longitud de onda y no de la fuerza de la onda, es decir, de la amplitud. El axioma naturalmente todavía sigue siendo cierto... bueno, casi siempre. Siempre que la cresta y el seno de la ola no sean excesivamente grandes que el mar o el lago tenga muchos centenares de metros y que ignoremos la fuerza de la ola.

Seguro que se están preguntando qué es lo que ocurrió en el canal de Russell. Como se sabe, los canales tienen la profundidad suficiente para que las quillas no toquen el fondo. Ahora bien, si la ola originada por la proa de un barco que navega por el canal tiene una altura desmesurada, entonces el citado axioma deja de ser válido. Además de la longitud de onda resulta que la fuerza de la onda -que se refleja en la altura de su cresta- influye en la velocidad de propagación. En términos técnicos podemos afirmar que, si la superficie del agua está lisa, pero la amplitud de onda es grande, la velocidad vendrá dada en función tanto de la longitud de onda como de la altura de la misma. Ahora ya puede el lector profundizar casi por sí mismo en los secretos de la onda única, puesto que, si la velocidad de propagación de una onda no depende únicamente de su longitud, sino que entra en juego también su altura, entonces puede imaginarse todas las combinaciones posibles.

Ya en 1895 los dos holandeses describieron este proceso. Mientras que las ondas normales se propagan linealmente y se construyen mediante ecuaciones sencillas, fáciles de resolver, en el caso de la onda única aparecen ante nuestros ojos procesos no lineales. Las ecuaciones no lineales son una maniobra matemática que un físico teórico sólo utiliza cuando resulta absolutamente imprescindible. Las olas únicas, sin embargo, parecían no dar motivo para ello. Además, se las consideraba una rareza científica con poca importancia práctica y teórica.

Esta actitud despectiva por parte de los científicos cambió de forma rotunda, cuando en los años sesenta comenzó la gran explosión de los ordenadores. Y ¿qué es lo que puede hacer de modo inmejorable un ordenador? Simular procesos que no pueden ser observados. En 1965 Zabusky y Kruskal retomaron los estudios numéricos que Fermi, Pasta y Ulam realizaron en 1955 en Los Alamos para los fonones en una red anarmónica. Este modelo numérico era muy semejante a una discretización de la ecuación de KdV.

Zabusky y Kruskal consideraron en "**Interaction of solitons in a collisionless plasma a recurrence of initial states**", *Physical Review Letters* **15** (1965) 240-243, un problema de condiciones iniciales con condiciones de frontera periódicas para la ecuación de KdV. Así encontraron un fenómeno de recurrencia, que no podía ser el de Poincaré. Habían encontrado el **solitón** que pasamos a describir. Las *great wave of translation*, o el 1-solitón de Russell interacciona con otros de su misma clase de una forma sorprendente para ser soluciones de una ecuación no lineal. Cuando dos de estos solitones chocan, tras un tiempo de interacción no lineal emergen de la región de colisión preservando la forma inicial,

de la interacción sólo queda un retraso o desfase. En la siguiente película observamos la colisión de dos solitones de KdV

**Así, un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y velocidad en interacciones no lineales con otras ondas solitarias o con otras perturbaciones localizadas.**

Un paso decisivo en la teoría de sistemas integrables fue la integración de la ecuación de KdV. Así, Gardner, Greene, Kruskal y Miura en el trabajo "**Methods for solving the Korteweg--de Vries Equation**", *Physical Review Letters* **19** (1967) 1095-1097, observaron que si consideramos un potencial  $u(x)$  para la ecuación de Schrödinger estacionaria en la recta los correspondientes datos de *scattering* se transforman de forma extremadamente sencilla cuando el potencial cambia  $u(x)u(x,t)$ , siempre que  $u(x,t)$  satisfaga la ecuación de KdV. Por tanto, dado una condición inicial  $u(x)$  para KdV, podemos hallar los datos de *scattering* asociados y determinar su evolución de manera inmediata. Tan sólo resta por encontrar que potencial  $u(x,t)$  tiene estos datos de *scattering*; esto es, estamos ante un problema inverso. La solución de una ecuación integral lineal, conocida como de Gelfand-Levitan-Marchenko, lleva a la resolución del problema inverso planteado y por tanto al problema de condiciones iniciales para KdV. Este método se conoce como la transformada espectral inversa.

Sólo una gigantesca hélice podría destruir al solitón. En lugar de desaparecer, de las olas rotas por el choque surgieron otras intactas, que continuaron avanzando alegremente, como si nada hubiera pasado. Parecía como si cada una de las dos olas únicas conservara su identidad primitiva, y fuera capaz de elevarse de nuevo, tras la confusión del choque, con su antigua forma y vigor. Los resultados fueron tan impresionantes, que Kruskal y sus colegas dieron un nuevo nombre científico a la ola única, el de solitón.

En 1971, dos investigadores de la Academia de Ciencias de la URSS, Vladimir Euguenievich Zakharov (ó Sajarov) y Aleksei Borisovich Shabat, descubrieron que había otra ecuación interesante que también tenía solitones: la que hoy conocemos como ecuación no lineal de Schrödinger (nls). El descubrimiento de Zakharov y Shabat era matemáticamente interesante, pero en ese momento parecía no tener relación alguna con las telecomunicaciones.

De repente, el solitón se hizo popular. Otros investigadores descubrieron que había solitones en medios líquidos, sólidos, gaseosos, e incluso en la corriente eléctrica o en un campo electromagnético. Se han podido estudiar solitones en sistemas tan diferentes como las atmósferas de los planetas, cristales, plasmas, fibras de vidrio, redes nerviosas y aparatos electrónicos. Es absolutamente emocionante lo que sospechan los biólogos moleculares: desde hace mucho tiempo están buscando el mecanismo que permite transportar los paquetes de energía a través de las cadenas de moléculas biológicas, como las proteínas, y conseguir de este modo efectos a grandes distancias. Algunos expertos creen que este efecto a distancia no tiene nada que ver con la química normal, sino que existen solitones que atraviesan, como fantasmas, la estructura de las moléculas.

En los periódicos, desde hace algún tiempo, vienen siendo noticia de primera página los superconductores a altas temperaturas. "*Superconducción: a temperaturas próximas al punto cero absoluto -menos 273 grados centígrados- desaparece la resistencia eléctrica en algunos metales*". O esta otra noticia: "*Determinados materiales cerámicos se convierten en superconductores a altas temperaturas*". Entretanto se baraja la posibilidad de que existan también superconductores a temperatura ambiente.

Ahora, los físicos teóricos sospechan que los solitones juegan un papel clave en este proceso. Ya se han atrapado ondas únicas en determinadas estructuras superconductoras las denominadas transiciones de Josephson. Los científicos esperan que, con ayuda de solitones, algún día se podrán almacenar y transportar informaciones en ordenadores extremadamente rápidos. La propiedad característica del solitón es que, además de presentar una consistencia mucho mayor que las ondas normales, tiene una larga duración de vida. Un solitón sobre la superficie de una piscina podría ser destruido en cualquier momento con sólo remover el agua con una gigantesca hélice. Pero ojo, también hay solitones que no pueden ser desintegrados jamás.



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

Solitones prisioneros de superconductores y cuerdas cósmicas. Las ondas únicas son realmente consistentes cuando son topológicas, cuando en su formación participa algún tipo de torsión. Con ayuda de las cintas de goma representadas en la imagen se comprende lo que queremos decir. Si se tira de los extremos de la cinta y luego se suelta, obtenemos una onda única de larga duración, suponiendo que la goma no se comporte linealmente. Pero, si la retorremos, lo que provocamos es que se almacene energía en ella. Cuando soltamos la goma enroscada, se origina una cresta de onda, y esta vez el solitón es indestructible. Eso sí, el giro en la cinta se podrá desplazar hacia adelante o hacia atrás, pero no seremos capaces de anularlo. En este caso, los científicos hablan de solitones que están topológicamente prisioneros. Este tipo de solitones no tendría mayor interés, si las ondas únicas existieran exclusivamente en las cintas de goma o en cuerdas retorcidas. Pero la realidad es que tales solitones topológicos aparecen en las más diversas configuraciones. Por ejemplo, en un cristal se producen alteraciones en la disposición regular de los átomos que forman la red. Aunque estas variaciones son móviles dentro de la red, nunca pueden ser eliminadas. También existen solitones topológicos en los superconductores, cuando sus campos magnéticos están presos en tubos angostos. Algo similar ocurre en las cuerdas cósmicas, los hilos de materia primitiva del universo que explicarían cómo pudieron millones de galaxias surgir del plasma primitivo del Big Bang.

Los físicos de partículas tienen puestas sus esperanzas en las ondas únicas. En el mundo subatómico, es decir, en el interior de los átomos, no aparecen los solitones unidos a partículas materiales, sino como estados de excitación de los campos subatómicos. Esto suena muy complicado, pero a tales campos les debemos, en gran parte, la existencia de nuestra tecnología moderna. Los campos electromagnéticos, por ejemplo, nos traen a casa los programas de radio y televisión. Si uno de estos campos no se encuentra excitado, entonces es especialmente uniforme y no se puede descubrir en él ningún tipo de peculiaridad especial. La excitación crea tales singularidades, que luego pueden registrarse como distintas informaciones en nuestros receptores de radio y de televisión.

Los campos electromagnéticos impiden su propio crecimiento. Como todo lo dicho hasta ahora me imagino que está resultando bastante abstracto, voy a comparar la situación con la de un estanque con peces. Mientras la cantidad de peces sea relativamente pequeña, en comparación con la alimentación disponible, los peces se reproducen sin problemas. El número de peces va aumentando exponencialmente, lo que quiere decir que se duplica en un cierto período de tiempo. Así pues, si en el primer año hay cien peces, en el segundo han aumentado hasta doscientos, en el tercero hasta cuatrocientos y así sucesivamente. El crecimiento exponencial es característico de un sistema lineal. Al igual que el índice de natalidad de cada pareja de peces, dicho crecimiento opera independientemente del comportamiento de los otros peces. Ahora bien, cuando el número de peces es muy grande, se rompe la linealidad. Al no haber suficiente alimento para todos, los animales entran en una lucha descarnada. En la misma medida en la que aumenta el número de peces y se intensifica la crisis alimentaria, desciende el índice de reproducción. Tenemos aquí una situación no lineal, que puede describirse del siguiente modo: una colonia de peces actúa sobre sí misma, impidiendo su propio crecimiento. Seguro que se están preguntando a qué viene esta analogía. Pues bien, los campos, por ejemplo los electromagnéticos, pueden actuar sobre sí mismos e impedir o fomentar su propio crecimiento. En este caso estamos frente a campos no lineales.

Volvamos a los campos lineales, en los que, como ya hemos visto, el estado más bajo de energía es igual a cero, lo cual significa que el campo no existe. ¿Cierto o no? Cierto. Por el contrario, los campos no lineales, que tienen la peculiaridad de actuar sobre sí mismos, pueden encontrarse en su estado de energía más bajo y, sin embargo, continuar siendo uniformes, pero su valor es diferente a cero.

A partir de aquí ya sólo es posible continuar con ayuda de dibujos.

Anteriormente hemos representado un diagrama que muestra un campo típico no lineal. Al contrario de lo que podría esperarse, el punto en el que la potencia del campo es igual a cero se encuentra en la cima de una cresta. También es llamativo que los senos, es decir, los puntos que coinciden con la energía positiva o negativa mínima, se encuentren a la



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

derecha y a la izquierda. Todavía sorprende otra cosa: en lugar de un estado mínimo de energía, existen dos. Estos dos senos corresponden a los dos lados de la cinta de goma. No olvidemos que ésta tiene una cara superior y otra inferior. Cada cara corresponde a un estado uniforme, no excitado. Ambos estados poseen exactamente la misma energía, pero son topológicamente diferentes.

Supongamos que un campo, como el reproducido en nuestro diagrama, se extiende por el espacio. Es posible que este campo se encuentre tarde o temprano en algún lugar en un estado que corresponda al seno izquierdo -energía negativa mínima-, mientras que en otro sitio se halle en el estado opuesto, energía positiva mínima. Sólo puede darse un contacto constante entre ambas zonas, si el campo pasa a través del cero en algún punto de la línea del centro, de modo que podría decirse que se eleva por encima de la cresta. Allí donde esto ocurre aparece una región limitada de energía del campo, que representa al solitón. Es similar al retorcimiento de la cinta de goma; se encuentra encerrada topológicamente entre las dos zonas físicamente diferentes de idéntica energía mínima. Naturalmente, no se debe abusar de la analogía con la cinta de goma, ya que en esta estructura el solitón únicamente puede moverse en una dimensión. Los campos reales, en cambio, se extienden a través del espacio tridimensional; a lo largo, ancho y alto. Para moverse en esta dimensión hay que emplear una topología mucho más compleja que en el caso de la cinta de goma.

Sin embargo, la idea esencial continúa siendo la misma: la configuración del campo contiene una región de energía encerrada topológicamente y limitada localmente, capaz de moverse en el espacio, pero que no puede liberarse por sí misma. Muchos físicos teóricos creen que tales solitones pueden ser considerados como una nueva especie de partículas subnucleares, partículas con propiedades interesantes y muy variadas. Si no se aplica un rigor excesivo, se podría incluso considerar solitones a los protones y neutrones normales: ondas únicas en el campo de la energía nuclear, en el campo de la interacción fuerte.

¿Cómo podría darse a conocer una partícula de onda única? Mostrando propiedades que no tengan las partículas normales. Un ejemplo clásico de esto fue descubierto a principios de los años setenta por Gerardt Hooft, de la Universidad de Utrecht, y Alexander Polyakow, del Instituto de Física Teórica Landau, en Moscú. Hooft y Polyakow estaban estudiando un nuevo tipo de campo subnuclear -que podría ser el responsable de una potente fuerza nuclear- cuando descubrieron que dicho campo tenía multitud de estados mínimos de energía. El campo podía estar retorcido y enmarañado entre dos estados. En algunas de estas configuraciones, el solitón resultante se comportaba como una carga magnética aislada.

Todos los imanes conocidos tienen un polo norte y otro sur, por lo que resultaría extraordinariamente llamativo un único polo. Sin embargo, nadie ha podido demostrar nunca la existencia de tal monopolio magnético.

Pasémonos a la cuarta dimensión. Algunos físicos han añadido una nueva variable en sus lucubraciones matemáticas: el tiempo. ¿Cómo puede explicarse un solitón en la cuarta dimensión? Un solitón cuatridimensional es una magnitud en el espacio y el tiempo, y tiene -por lo tanto- una existencia efímera. A pesar de ello, tales instantones, tal como se les denomina, juegan un papel importante en el mundo subatómico, permitiendo traspasos entre configuraciones de campos que anteriormente se consideraban imposibles o prohibidos. Dicho de un modo muy general, un campo de este tipo pasa de una configuración a otra, atravesando un retorcimiento.

Este descubrimiento ha abierto unas posibilidades totalmente nuevas, precisamente en un campo que avanza paralelo al de la física de partículas. Me refiero a la cosmología. Así, por ejemplo, la gravitación es una fuerza que se describe por medio de un campo no lineal. Esta alinealidad conduce a los más extraños estados de la fuerza de la gravedad, como son los agujeros negros, que podrían ser caracterizados como solitones gravitacionales. Algunos teóricos creen que, al comienzo del Universo, cuando aún eran mayúsculos los efectos cuánticos de la fuerza de la gravedad, fueron posibles los instantones de la fuerza de gravedad. Hay una teoría que incluso afirma que todo el universo debe su existencia únicamente a estas magnitudes, porque sólo ellas permitirían que el espacio y el tiempo hayan encontrado el camino desde la nada hasta la existencia, con ayuda de un



*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

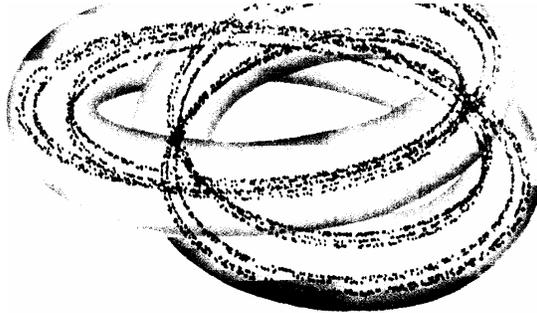
retorcimiento. A pesar de que tales hipótesis continúan siendo vagas, es excitante que la onda única perseguida por Russell en el canal haya traído tantos conocimientos, que nos transportan hasta el nacimiento mismo de nuestro universo<sup>51</sup>.

---

<sup>51</sup> Lectores interesados en otros detalles pueden consultar Agüero, M. y J. Martínez (1995)-“**El misterio solitónico**”, Ciencia ergo sum, Vol. 2, Núm. 2. Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca; Bishop, A. R. y T. Schneider (1978)-“**Solitons and Condensed Matter Physics**”, Springer Verlag, New York; Briggs, J. y F. D. Peat (1991)-“**Espejo y reflejo**”, Editorial Gedisa, Barcelona; Filippov, A. B. (2000)-“**The Versatile Soliton**”, Scientific American. Berlín; González, F. I. (1999)-“**Tsunamis**”, Scientific American. May. <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/> y Russell, S. (1845)-“**Reporte del decimocuarto encuentro de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia**”, York, septiembre de 1844 (Londres), pp. 311-390, láminas xlvii-lvii.

**ANEXO 6****Los atractores: objetos matemáticos**

A veces, el comportamiento dinámico de un sistema natural se vuelve caótico y el tratamiento informático de las medidas efectuadas permite visualizar un atractor extraño: ¿ayudará este objeto matemático a elucidar los mecanismos fundamentales de la turbulencia meteorológica?.



A partir de una transformación geométrica sencilla realizada en un anillo, Steve Smale, en Berkeley, elaboró un atractor extraño, el "solenoid", que traza una especie de ovillo de hilos enrollados alrededor de un eje.

Se encuentran frecuentemente en física, en química y en biología poblaciones por ejemplo, sistemas cuya evolución con el tiempo presenta un aspecto irregular, no periódico, "caótico". Puede pensarse en particular en el humo que se eleva por encima de un cigarrillo: a cierta altura aparecen unas oscilaciones complicadas, que parecen desafiar la comprensión. Las leyes que rigen la evolución temporal del sistema (el conjunto de las partículas de humo en suspensión en el aire más o menos caliente) están bien definidas y son deterministas, pero el sistema parece provisto de una voluntad propia que le hace adoptar un comportamiento fantástico y complejo.

Físicos, químicos, biólogos y también matemáticos, han intentado comprender esta situación; les ha ayudado el concepto de atractor extraño y la utilización de ordenadores. Los atractores extraños son unos objetos matemáticos abstractos, a los que los ordenadores han dado vida y apariencia. Nacieron de un deseo muy antiguo: el de comprender el comportamiento de los sistemas naturales. Para lograrlo, el enfoque consiste en intentar modelizar los fenómenos físicos, químicos y biológicos definiendo los estados de un sistema por medio de cierto número de parámetros. Estos parámetros (que designamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en un formalismo matemático) corresponderían, en química por ejemplo, a las concentraciones de los diferentes reactivos que intervienen en el sistema.

Sabemos que durante una reacción se consumen los reactivos a la vez que se forman nuevos productos. Por lo tanto, las concentraciones de todas estas sustancias varían continuamente y su conocimiento en un instante dado define perfectamente el estado del sistema. Supongamos ahora que estos datos se transfieren a un registrador que tiene por objeto representar gráficamente la evolución temporal del sistema. Si la información consiste sólo en dos concentraciones, el registrador puede marcar en una hoja de papel un punto cuyas coordenadas son estas dos concentraciones. Este punto describe un estado instantáneo del sistema. Si por una razón cualquiera el sistema adopta un comportamiento caótico, se verá aparecer en la hoja de papel un atractor extraño en dos dimensiones. No hay que suponer que la forma de este atractor tenga el menor parecido con una cualquiera de las figuras observadas en el experimento. Por ejemplo, el que dibujaremos a propósito de la turbulencia de los fluidos no tiene nada que ver con los torbellinos visualizados por el experimentador. El objeto atractor extraño consiste en una infinidad de puntos, cada uno de los cuales representa un estado del sistema caótico considerado, pero no tiene realidad física. En el caso de la turbulencia atmosférica, el atractor se parece a unas alas de mariposa. De hecho, el ordenador sólo traza un número finito de puntos, suficientemente grande no obstante para visualizar el atractor.

*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*



[Volvamos] a un ejemplo que tiene un valor histórico ya que fue el primer atractor extraño estudiado detalladamente por un investigador francés, Michel Hénon, del Observatorio de Niza. Su cálculo tenía un objetivo muy modesto, y la primera vez que lo realizó no disponía más que de una calculadora de bolsillo programable. Luego pasó a una máquina más potente. En los dos casos, partió de un sistema de dos parámetros  $x$  e  $y$ , y de dos ecuaciones que permiten calcular  $x(t+1)$  e  $y(t+1)$  en función de  $x(t)$  e  $y(t)$  que son  $x(t+1) = y(t)+1-ax(t)$ ,  $y(t+1) = bx(t)$ .

Dados los valores iniciales  $x(0)$ ,  $y(0)$  y  $a=1,4$  y  $b = 0,5$ , pudo calcular  $x(t)$  e  $y(t)$  para  $t=1, 2, \dots 10.000$  manteniendo siempre

una precisión de dieciséis cifras significativas. Hecho "a mano", este cálculo requeriría varios meses y, como su interés no es evidente (no tiene ninguna aplicación inmediata al estudio de un sistema natural) nadie lo había realizado. Para un ordenador, esta tarea fastidiosa y repetitiva no tiene problemas y si se dispone de un plotter se pueden trazar en un tiempo bastante breve los 10.000 puntos de coordenadas  $x(t), y(t)$ . Inesperadamente, los puntos se disponen sobre un sistema de líneas de estructura compleja. En el origen de este resultado había una elección, la del punto inicial definido por  $x(0)$  e  $y(0)$ , de ahí la segunda idea de M. Hénon: ¿que pasa cuando se cambia  $[x(0), y(0)]$ ? Pues bien, si este par inicial está mal elegido, el punto  $[x(t), y(t)]$  se alejará hacia el infinito (y saldrá en concreto del marco de la hoja). Si se elige "bien" entonces  $(x(1), y(1))$   $[x(2), y(2)]$ , se parecerán rápidamente a un "montón de spaghetti" cuyo aspecto general se reproducirá cuando se habrán marcado algunos miles de puntos. Este "montón de spaghetti" es precisamente el atractor de Hénon. Es extraño. Entre otras curiosidades señalemos que si se cambia un poco  $a$  y  $b$  el atractor puede desaparecer o cambiar de naturaleza. Tomemos por ejemplo  $a=1,5$  y  $b=0,3$ , entonces cuando  $t$  se hace muy grande los puntos ya no se parecen al montón de spaghetti sino a un conjunto de siete puntos. Ya no nos atrevemos a hablar de atractor extraño, y el atractor se dice entonces periódico (de período 7), ya que los puntos dibujados en los instantes  $t$ ,  $t+7$  y  $t+14$  se superponen. Este resultado es bastante molesto desde el punto de vista matemático. En efecto, al no haber podido demostrar todavía que la aplicación que define el atractor de Hénon no tiene solamente atractores periódicos, nada nos permite afirmar sin ninguna duda que el primer atractor es extraño. ¡Por lo tanto, su existencia es de momento una creencia basada en cálculos de ordenador! Hay otro ejemplo de atractor extraño que sin duda vale la pena describir. En primer lugar es, estéticamente, más interesante ya que se desarrolla en un espacio en tres dimensiones ( $n=3$ ). Pero, sobre todo, se conoce bien desde el punto de vista matemático gracias a los trabajos de Steve Smale de Berkeley. Esta vez, no escribimos las ecuaciones que permiten pasar de  $x(t)$  a  $x(t+1)$ , sino que definimos geoméricamente los pasos del sistema de un estado al siguiente. De hecho, suponemos que la transformación ( $F$ ) toma un anillo  $A$ , lo estira, lo comprime transversalmente y lo enrolla de manera que el resultado, es decir la imagen  $F(A)$ , esté contenida en  $A$  y dé ahora dos veces la vuelta al hueco central. Partiendo de un punto  $X_0$  del anillo  $A$ , se pueden marcar los puntos  $X_1, X_2, \dots$  hasta  $X_{5000}$  y se ve cómo se dibuja un nuevo atractor extraño. Es bastante fascinante observar el papel en el que se traza el dibujo. Aproximadamente cada segundo se marca un nuevo punto, con un clic sonoro y de forma aparentemente errática. Sólo al cabo de un tiempo bastante largo se puede adivinar la forma final de la figura. Este atractor se ha llamado solenoide. Recuerda en efecto un enrollamiento de hilos alrededor de un eje. Para explicar su aspecto, hay que señalar que el solenoide en cuestión no solamente está contenido en el anillo  $A$ , sino también en sus imágenes sucesivas que son unas "mechas" muy delgadas que giran numerosas veces alrededor del vacío central. Los

*El Infinito al alcance de la mano. Una introducción a la Geometría Fractal*

parámetros  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,...  $x_m(t)$  tienen que describir un sistema físico, químico o biológico en el instante  $t$ ; se supone que el sistema tiene una evolución temporal determinista definida por unas ecuaciones. ¿Con qué precisión podremos predecir la evolución si los valores iniciales están afectados por un pequeño error, como sucede siempre con los datos experimentales? ¿Cómo crecerá (o decrecerá) el error cuando  $t$  aumente? Desde luego, la respuesta podrá depender de las ecuaciones y de los valores iniciales.

Para el solenoide, un razonamiento simple lleva a afirmar que el error crece experimentalmente con el tiempo. La experiencia demuestra que esta afirmación sigue siendo válida para el atractor de Hénon. Se dice que los dos sistemas dinámicos considerados tienen una dependencia sensible de las condiciones iniciales (dependencia SCI).

Hasta ahora, nosotros hemos intentado aprehender el concepto de atractor extraño sin introducir demasiadas matemáticas, la razón es simple: la teoría matemática de los atractores extraños es difícil y todavía está poco desarrollada, por lo que intentaremos no dar una definición matemática de estos objetos. En la práctica, sin embargo, si la aplicación repetida de una transformación  $F$  produce unos puntos  $X_1, X_2, \dots$  que se acumulan en un conjunto  $A$ , y si hay dependencia SCI, se dirá que  $A$  es un atractor extraño.

Los sistemas fisicoquímicos que dan lugar a atractores extraños son sistemas disipativos, es decir sistemas en los que una forma "noble" de energía (energía mecánica, química, eléctrica, etc.) se transforma en calor, una energía "degradada", como dicen algunos. Además, estos sistemas sólo presentan un comportamiento interesante si tienen una fuente constante de energía noble (en caso contrario tienden al reposo). En 1972 se le preguntaba a un químico competente en esta materia si creía que se descubrirían reacciones químicas con un comportamiento caótico. Contestó que si un experimento obtenía un trazado caótico en el estudio de una reacción, tiraría el registro a la papelera, diciendo que el experimento estaba mal planteado. Afortunadamente, las cosas han cambiado. Se conocen ahora reacciones químicas no periódicas: la reacción de Zhabotínski-Bellussov con las condiciones operativas modificadas, por ejemplo. ¿Corresponde a un atractor extraño o a un atractor casi periódico?. Esto todavía no está claro.

La aplicación de las ideas que hemos discutido plantea a menudo serios problemas metodológicos. ¿Cómo mantener las condiciones experimentales constantes y hacer las medidas precisas?. El reconocimiento del papel de los atractores extraños en muchos problemas es sin embargo un gran progreso conceptual. Las fluctuaciones no periódicas de un sistema no indican necesariamente un experimento "arruinado" por misteriosas fuerzas aleatorias sino, a menudo, un sistema dinámico con un atractor extraño, que se puede intentar comprender.

No he hablado del atractivo estético de los atractores extraños. Estos sistemas de curvas, estas nubes de puntos, recuerdan a veces galaxias o fuegos artificiales, y a veces extrañas e inquietante floraciones. Es todo un mundo de formas que están por explorar y de armonías que están por descubrir<sup>52</sup>.

---

<sup>52</sup> Para más información recomendamos V.I. Arnold et A. Avez-"**Problèmes ergodiques de la mécanique classique**", Paris, Gauthiers-Villars, 1967; R. Abraham and J.E. Marsden-"**Foundations of Mechanics**", 2ª edición, Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978 y D. Ruelle-"**Hasard et chaos**", "Points", Odile Jacob, 1993.