

Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

De las cavernas a los fractales.

Conferencias de Historia de la Matemática.

Juan Eduardo Nápoles Valdés

(II)

Conferencia 6. *Galileo, Padre de la Ciencia Moderna.*

Conferencia 7. *Descartes, Fermat y Pascal. Cavalieri.*

Conferencia 8. *Newton y Leibniz. L'Hopital.*

Conferencia 9. *El Siglo de las Luces.*

Conferencia 10. *Galois y la Teoría de Grupos.*

Conferencia 11. *Bolzano y Cauchy. Gauss, El Príncipe.*

Conferencia 12. *Las Geometrías No Euclidianas.*

ir a [\(I\)](#) - [\(III\)](#)

Holguín - Cuba

1996

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N.

edUTecNe

<http://www.edutecne.utn.edu.ar>

Conferencia 6. Galileo, Padre de la Ciencia Moderna.

"Un hombre sin un sueño y un plan, es un hombre sin futuro"

Kenneth Walker

En el siglo XIII tiene lugar la gran controversia conceptual entre las doctrinas neoplatónico-agustinianas, que venían de antiguo, y el aristotelismo, que tenía como seguidores a los principales sabios musulmanes y judíos, como Avicena (980-1037). Avicebrol (1020/21-1069/70), Averoes (1126-1198) y Moisés b Maimónides (1135-1204). Ya en 1150 exige Domenico Gundesalvo una explicación del plan de estudio vigente hasta entonces y la introducción de los escritos más importante de Aristóteles en el curso de la enseñanza de las artes liberales. En la segunda mitad del siglo XII se desarrollan los grandes colegios catedralicios y conventuales, haciéndose independientes como "Universidades".

Hacia 1200 se reúne el Colegio de la Catedral de Notre Dame y los Colegios de los Conventos de Saint-Denis, Sta. Genevieve, para formar la Universidad de París, que desde entonces contiene cuatro facultades (aristae, theologi, decretitae y medici). Casi al mismo tiempo nacen las universidades de Oxford y Cambridge, organizadas de manera semejantes. El alumno entra con unos diez años en la Facultad de los artistas, en la cual permanece seis años. Sólo después de pasar por un examen final, puede dirigirse a otras de las tres restantes facultades. La facultad más importante y que da más renombre es la de Teología; el curso abarca ocho años y termina con un examen solemne y una discusión. El que quiere continuar estudiando, recibe primeramente la licencia de segundo orden, para enseñar como Baccalaureus, y después de haber demostrado su valer y transcurrido cierto tiempo, recibe el Magisterium (Licencia de enseñanza en cualquier Universidad). Las matemáticas son una disciplina independiente dentro de la Facultad de los Artistas, y abarca las disciplinas del Quadrivium; son mayores, sin embargo, la importancia y estimación de la Lógica, Filosofía y Teología.

La dirección espiritual de las universidades recae en dos órdenes mendicantes: franciscanos (fundada en el 1210 por Eusebio Francisco de Asís, 1182-1226) y los dominicos (fundada en 1225 por Santo Domingo, 1170-1221); en sus filas militan los investigadores más importantes del siglo. En Oxford toma la Orden de los dominicos Roberto Bacon en 1225; en 1226, Adans de Marsch (aprox 1258) la de los franciscanos; en París, los dominicos obtienen, en 1229, con la promoción de Rolando de Cremona, la primera cátedra, en 1230, con Juan de San Egidio, la segunda; los franciscanos obtienen en 1231 una cátedra con Alejandro de Hales (1175-1245). A los futuros sacerdotes de las órdenes les está permitido estudiar el studium general o el provincial.

Ya desde el principio existe fuerte competencia científica entre los profesores de las órdenes y el clero secular, teniendo estos últimos que ceder. En Oxford se practican sobre todo las matemáticas, la biología y los idiomas. En París figura en primer lugar la Filosofía y la Teología. En la primera mitad del siglo se intenta por todas partes asimilar los conocimientos aristotélicos y pseudoaristotélicos y elaborarlos para unirlos a la tradición agustiniana. Las discrepancias que aparecen conducen a la repetida prohibición de la filosofía naturalista de Aristóteles en París (1210, 1215, 1231). Sin embargo, desde 1231 son estudiados los escritos prohibidos por los profesores religiosos, son comentados y encuentran cabida en 1255, de una manera oficial, en los cursos de arte, por que se ha llegado a separar los escritos verdaderos de Aristóteles de otros escandalosamente apócrifos.

Mientras predominaba todavía la concepción agustiniana, permanecen también las matemáticas en el campo del interés general. Guillermo de Auvernia (profesor de París,

1249) es un representante de esta tendencia. Explica el principio de contradicción y del *tercio excluso*, el axioma del todo y sus partes, como principios supremos de la ciencia. Roberto Grosseteste (profesor de Oxford, 1175-1253) traduce del griego escritos aristotélicos y neoplatónicos. Es un pensador muy independiente que se enfrenta con las autoridades eclesiásticas y científicas con gran reserva; considera las matemáticas como la condición precisa de la filosofía naturalista. Lo más importante es su metafísica de la luz, que está influida por ideas neoplatónicas, y tiene cierto contacto con especulaciones semejantes de Guillermo de Auvernia y Alejandro de Hales. Es nuevo su intento de buscar un fundamento severo matemático-dinámico, con aplicación del principio de máximo efecto, usando ya conceptos modernos de relatividad. El alumno de Roberto, el franciscano Rogerio Bacon (profesor de Oxford, 1214-1292) quiere ya hacer una recopilación de toda la ciencia laica. Conoce los **“Elementos”** y la **“Óptica”** de Euclides y Ptolomeo, el **“Almagesto”** de Ptolomeo y la **“Sphaera”** de Teodosio; además, el **“Tratado de Isoperímetros”**; y fragmentos de Hiparco, Apolonio y Arquímedes. Escribe también una óptica interesante, de la cual su discípulo Juan Peckham (profesor en París y Oxford, 1240-1292), mucho menos notable que él, hizo un extracto muy usado, pero no significativo. Todavía el franciscano Regeri Marston (profesor de Oxford hacia 1280) considera a las matemáticas (siguiendo a Averroes) más importantes que las ciencias naturales, y no precisamente refiriéndose a su importancia como método de investigación, sino como medida del nivel de conocimiento. En la segunda mitad del siglo, se produce entre los dominicos la inclinación decisiva hacia el aristotelismo. Alberto Magno (1208-1280) proyectó el gran propósito de hacer accesible a sus contemporáneos todos los conocimientos existentes de los griegos, árabes y judíos, haciendo una exposición crítica. Quiere fiarse más de San Agustín que de Aristóteles en asuntos de fe, cediendo a éste la máxima autoridad en las ciencias de la naturaleza. San Alberto hace destacar, como Rogerio Bacon, la necesidad y la importancia del experimento científico; la observación de los fenómenos astronómicos le induce a abandonar el sistema de Aristóteles, a favor del sistema ptolemaico. También se estima a San Alberto en el campo de las matemáticas, siendo probablemente el autor de una reelaboración de los comentarios de An-Mairizi sobre Euclides, en la cual aparecen conocimientos nuevos (sobre todo de origen árabe).

También su gran discípulo Tomas de Aquino (1225/26-1274) habla de San Agustín con la mayor estimación, desistiendo, sin embargo, de la tendencia neoplatónica, que sustentan que la base del cristianismo radica esencialmente en el corazón y se orienta totalmente hacia la tendencia aristotélica. Junto con su amigo, el franciscano Buenaventura (1221-1274), vence la oposición de los clérigos laicos de la Universidad de París contra las órdenes mendicantes (lucha de los mendicantes, 1252/57). Apasionadamente combate el averroismo latino de la Facultad de los artistas (cuyo representante principal es Siger de Brabante (1235/1282), el cual considera las doctrinas de Aristóteles como base de disputas religiosas). Durante su segundo magisterio en París (1269/72), se origina la lucha contra los franciscano y dominicanos antiguos, los cuales tratan de reconciliar los temas de Aristóteles y San Agustín. Se produce el choque público de Juan Peckham (1270) y la supresión eclesiástica del averroismo latino (1270, reforzada en 1277) y en relación con ella y debido a una interpretación falsa de los puntos de vista de los alumnos de Santo Tomás, se llega a la condenación pasajera de algunas teorías tomistas (1277, 1284, 1286).

Santo Tomás lucha por encontrar un texto lo más verídico posible de los escritos de Aristóteles, después de haber eliminado todas las añadiduras posteriores. Esta es la finalidad de la revisión y traducción nueva del griego que lleva a cabo (1260-1270) el Dominico Guillermo de Moerveke (1215-1286). En la disputa respecto al tomismo, que origina cada vez discusiones mas violentas entre los franciscanos, por un lado, partidarios del agustinismo, y

los dominicos, agustinos-eremitas, cistercienses y carmelitas, por el otro, se agota la fortaleza de la alta escolástica; las ciencias laicas no han prosperado debido a estas discusiones.

La enseñanza matemática de la Facultad de los artistas se limita al Cálculo elemental y algo de Geometría y Astronomía. Como libros más usados se pueden mencionar: el **“Breve libro de Cálculo”** de Juan de Sacrobosco (París, 1200-1256) y el **“Poema de Enseñanza”** de Alejandro de Villedieu (aprox 1225); además, la **“Sphaera”**, de Juan de Sacrobosco, que continúa el punto de vista de Ptolomeo. Y por fin, un **“Computus ecclesiasticus”** (1232). Contra la esférica se levantó Miguel Escoto (1175-1234) quien había traducido (1217) la **“Teoría de los Planetas”** del árabe Alpetragiuos (aproximadamente en el 1200), en la cual se enseña la teoría antigua de Aristóteles sobre las esferas concéntricas del cielo. La discusión que se entabla termina a favor de la teoría de los epiciclos de Ptolomeo, debido al material de observación sobre el cual se basaron.

Miguel Escoto era astrólogo de Federico II (1194-1250, emperador del Sacro Imperio Romano desde 1251), en cuya corte se cultivan las ciencias laicas. Al emperador y su colaborador Miguel, dedica Leonardo Fibonacci de Pisa (1180 hasta 1250) primer matemático del Occidente, sus valiosos y ricos escritos en contenido: **“El Libro de Cálculo”** de 1202 (segunda edición 1228), la **“Geometría Práctica”** (1220), el libro no terminado sobre **“Los Cuadrados”**, y una **“Colección de Problemas”**. Leonardo de Fibonacci procedía de familia comerciante y no había estudiado en la Universidad. Discutió en presencia del emperador sobre problemas teóricos de números contenidos en los dos últimos escritos, y fue muy estudiado por él. Leonardo se apoya sobre escritos árabes y griegos. En la geometría se basa en Banu Musa y Abraham bar Chijja. En el Álgebra y teoría de los números, sigue la tradición diofántica, pero actuando independientemente en cuanto a la elección, disposición, demostración y diversidad de puntos de vista.

Algo más joven que Leonardo parece ser Jordanos Nemorarius, el cual es confundido a menudo con Jordano Saxo (1237), segundo General de los dominicos. Es autor de varios **“Escritos Algorítmicos”** en los cuales usa letras en vez de números arbitrarios, quizás bajo la influencia de nomenclatura aristotélica.

Pero queda reducido a simples ensayos, debida, por un lado, a la falta de símbolos de operación, y del otro, por no usar para la misma magnitud, en cálculos sucesivos, la misma, sino distinta letra.

Aquí en su **“Peculiar Geometria”**, usa Jordanos fuentes árabes; quizás dominaba la lengua árabe. En pro de ello está la atribución que se le hace a la traducción latina del Planifario Ptolomaico, y una traducción de uno de los tratados de **“Isoperímetros”**, de Zedoro, basándose en la versión árabe.

Un contemporáneo de Jordano es Campano de Novara (aproximadamente 1260), a quien debemos la traducción del árabe de los **“Elementos”** de Euclides, que fue considerada ejemplar durante más de dos siglos. El texto está tratado bien y cuidadosamente. En algunos párrafos se encuentran interesantes adiciones del traductor, en su mayor parte exactas, debido a los originales que maneja. Se investiga detalladamente la cuestión de si el ángulo contingente (entre el arco y la tangente, en la circunferencia) tiene la propiedad de la magnitud. Campano, que tiene un concepto plano del ángulo, opina que sí. Para él, la razón del ángulo contingente y del ángulo recto es irracional, pero diferente a la irracionalidad existente entre los lados y la diagonal de un cuadrado. Por otra parte, niega la validez del principio del valor medio (lo que puede ser mayor y menor también puede ser igual). Cuestiones de este estilo son tratadas, más tarde, por los filósofos de sumo interés. Campano comenta además los **“Cuerpos Esféricos”** de Menelao y Teodosio, y probablemente también la traducción llevada a cabo por Jordano del **“Planisphaerium”** de Ptolomeo. La cuadratura

del círculo atribuida a él (una obra de poco valor) cuyo resultado es $\pi=3 \frac{1}{7}$ no es seguramente suya, sino tal vez de Juan Peckham.

Al mismo tiempo que Campano trabaja en su traducción de Euclides, Guillermo de Moerbeke (1215-1286) emprende sus grandes traducciones del griego de Aristóteles y de Proclo, pero Santo Tomás de Aquino entre 1268 y 1272 se atreve también a traducir escritos de Herón, Ptolomeo y Arquímedes. Su traducción, casi literal, lo cual nos sorprende, considerando lo difícil del texto, no tiene al principio gran éxito. Otros fragmentos pequeños de los comentarios griegos sobre Aristóteles, por ejemplo, una abreviada exposición de la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates, la introducción de las medias geométricas de Platón, el **“Tratado de Isoperímetros”** de Zenodoro, la **“Cuadratura del círculo”** de Arquímedes, y parte del **“Tratado de espirales”**, se conocen desde principio del siglo XIII como traducciones de autores desconocidos, y se citarán de vez en cuando. Entre los amigos de Moerbeke figura Witelo, autor de una traducción casi literal de la Óptica contenida en el Alhazen (Ibn al Haitam), en la cual se encuentran también fragmentos de Euclides, Apolonio, Ptolomeo. Lo mejor que en aquel tiempo se hizo en Óptica, se debe al dominico Dietrich de Freiberg (1250?-1310?) orientado hacia San Agustín: la aplicación perfecta del arco iris.

Completamente aislado de este enfoque general está Raimundo Lulio (1235-1315), el adversario más implacable del averroísmo latino. Él cree poder obtener un sistema universal científico, la **“Scientia Generalis”**, mediante su **“Ars Magna”** (en su mayor parte escrito entre 1265 y 1274), basada sobre combinaciones metódicas de conceptos. Aquí tenemos la primera tentativa, aunque todavía imperfecta, de obtener una automatización general de todas las ciencias. Fue incomprendido por sus contemporáneos, pero desde los comienzos del siglo XVI encontró un aprecio creciente; influyó todo decisivamente en Leibniz.

La alta escolástica, dominada por las controversias filosóficas entre el neoplatonismo y el aristotelismo, tiene poco interés en las matemáticas. Estas son cultivadas únicamente de manera incidental; sobre todo aumenta el conocimiento geométrico desde que se introducen fragmentos de la traducción de Euclides, realizado por Campano, en la enseñanza de las matemáticas, en la Facultad de los artistas. Ya se conocen los primeros síntomas de un cultivo más intensivo de los conocimientos estrechamente relacionados con ella.

Se ha convenido en considerar al Renacimiento como **la aurora de los tiempos modernos**. Esta apreciación se enlaza muy bien con aquella que se ha dado de la Edad Media: **una noche que ha durado mil años**, que es también muy convencional (referida única y exclusivamente a Europa), pero de acuerdo a lo que hemos visto, perfectamente ilustrativa de la situación real. Pero hoy podemos darle un nuevo sentido a esta definición del Renacimiento.

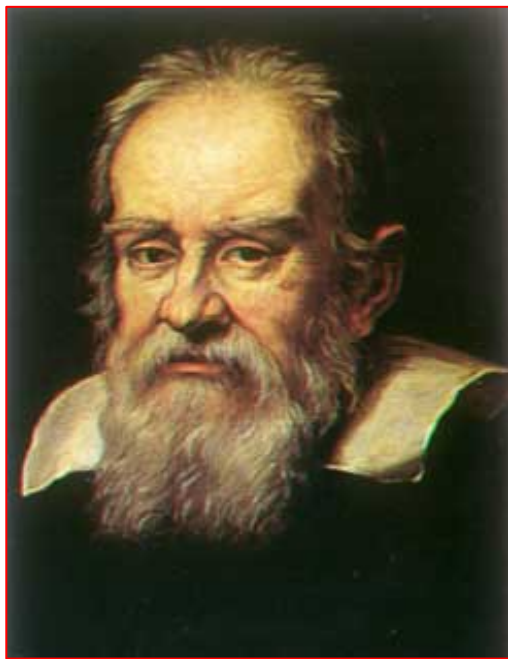
Cuando no se piensa en la noción abstracta de la aurora como el final de la noche, para obtener una imagen concreta y viva de la alborada florentina, en toda su variedad y con toda la dulzura de sus variantes matices, entonces estas imágenes de la aurora se oponen no sólo a las imágenes nocturnas, sino también a todo el esquema monocromo de luces y sombras del mediodía. Este esquema se relaciona con el racionalismo seco, preciso y unívoco del siglo XVIII, o lo que es igual, con el cuadro o diagrama monocromo del mundo, que fue elaborado en aquella época y que pretendía poseer la verdad absoluta, a pesar del paso de avance que constituyó este para la ciencia. En lo adelante fue posible concretar, precisar los conocimientos ya adquiridos, sin poder, no obstante, apartarse de ellos. En este marco, Galileo creó las nociones básicas para la concepción clásica del mundo, las cuales son más categóricas vistas en una retrospectiva histórica; así vemos o más bien vislumbramos, en el **“Diálogo sopra i due massimi sistemi del mondo”** y los **“Discorsi e dimostrazioni matematiche”**, las definiciones rigurosas de **“Principia mathematica philosophiae naturalis”** de Newton, lo mismo que presentimos en las penumbras y en los matices impresos

en la alborada florentina, los contornos familiares de Florencia en pleno día. Pero para hallar en Galileo y, lo que más interesa hoy, para conocer las fuentes de tendencias que van más allá de Newton, más allá de la ciencia clásica, es necesario percibir el elemento matinal en la obra del gran florentino: todo este cúmulo de matices, transición, penumbras, problemas, búsquedas y contradicciones. La obra de Galileo, vista desde esta perspectiva, no sólo se opone a la noche de la Edad Media, sino también al pleno día de la ciencia clásica, al período en que la concepción clásica del mundo estaba en su apogeo.

Una buena parte del prestigio científico de Galileo se funda en los formidables trabajos astronómicos que desarrolló -descontando su mejoramiento del telescopio, tarea que vino a sumarse a la idea del Galileo astrónomo. También claro está, nuestros jóvenes estudiantes lo conocen como físico y matemático. Pero, como bien señalan varios de sus más recientes biógrafos, es justo que igualmente lo concibamos como el **primero de las ciencias experimentales**. Nunca antes que él se habían empeñado, por comprobar en la práctica, lo que postula la teoría. Einstein e Infeld dicen de la obra galileana:

“El descubrimiento y el empleo del razonamiento científico por Galileo es una de las conquistas más importantes en la historia del pensamiento humano y marca el principio real de la física”

Él, que prefería “*escribir en florentino para muchos, y no en latín para pocos*”, hizo nacer una física nueva con un párrafo: “*Mi propósito es presentar una ciencia totalmente nueva sobre un tema muy viejo: el movimiento. He logrado descubrir, por medio de experimentos, algunas cualidades que son científicamente valiosas*”.



La concepción clásica del movimiento ha hallado su más completa expresión en la mecánica analítica del siglo XIX. Es una concepción diferencial. El movimiento de la partícula se examina de un punto a otro, de un momento a otro. La ley del movimiento define el comportamiento de la partícula no sólo negativamente sino también positivamente: de aquí se desprende que el comportamiento del cuerpo en un punto determinado difiere de su comportamiento en los otros puntos; la partícula cambia de velocidad, su movimiento se caracteriza por una aceleración. Los distintos comportamientos de la partícula en los diferentes puntos se explican por su interacción, es decir, por la existencia de campos de fuerzas.

Esta concepción diferencial del movimiento pretendía dar una descripción exhaustiva del mundo. Esta concepción era la certidumbre característica del pensamiento científico del siglo XVIII y del siglo

XIX, a saber, que las leyes de la naturaleza son rigurosamente unívocas y perfectamente determinadas (en una Conferencia posterior, volveremos sobre este tema). Hacia fines del siglo XVIII, la representación diferencial del movimiento había abierto ya la vía a los métodos del análisis infinitesimal. Ya no se trataba de una confrontación cualitativamente lógica de las posiciones “no naturales” y “naturales” de los cuerpos. La trayectoria de la partícula aparecía como un conjunto infinito de puntos: tal había sido el efecto de la gran revolución operada por Galileo en la noción de movimiento.

La idea de la inercia, del movimiento continuo de un cuerpo abandonado a sí mismo, significaba que el movimiento se determina por la homogeneidad del espacio y la equivalencia de los puntos atravesados por el cuerpo. Así, la trayectoria del cuerpo es un conjunto de puntos en los cuales el estado del cuerpo en movimiento está determinado negativamente. Esta idea fue enunciada en el **“Dialogo...”**. En el segundo de los dos libros fundamentales de Galileo, los **“Discorsi...”** la noción diferencial del movimiento se enuncia de forma positiva: el comportamiento del cuerpo en un punto, especialmente su velocidad instantánea, difiere de su comportamiento en los restantes puntos. La ley que establece la relación entre la velocidad y el tiempo empleado define esta diferencia: es la aceleración.

Leonardo muere en 1519, Copérnico en 1543 y Miguel Angel en 1564; en este último año nace Galileo. Sus biógrafos dicen que cuando niño sus entretenimientos consistían en construir juguetes mecánicos; a veces no conseguía la pieza adecuada y entonces inventaba un artefacto, aunque ignorara su finalidad, y no descansaba hasta hacerlo funcionar.

Tocaba muy bien varios instrumentos musicales (el órgano y el laúd) y gustaba mucho de la poesía: recitaba de memoria al Dante y otros clásicos; su preferido era Ariosto. Pero lo que más le entusiasmaba era la pintura. Al final de su vida decía que si hubiera podido escoger su medio de vida, habría sido pintor. Lenzi, en su **“Historia de la Pintura”**, dice que la Escuela Florentina reformada se desarrolló porque Galileo enseñaba a sus practicantes las leyes de la perspectiva que descubrió.

A los 17 años comenzó a estudiar medicina y al año siguiente ya tuvo su primer descubrimiento: midió la frecuencia del movimiento de oscilación del péndulo por medio de su pulso. Esa fue la primera vez que logró medir en forma precisa una función del cuerpo humano y también, como se sabe, con ello se conoció el principio de los relojes modernos. A los 22 años de edad construyó una balanza hidrostática con la cual determinaba con precisión los pesos relativos de dos metales en una aleación.

Al tiempo que renunciaba a sus estudios de medicina y que continuaba sus investigaciones con un ensayo sobre la localización del centro de gravedad de los cuerpos sólidos, gestionó una cátedra de matemáticas en Pisa que al fin logró, aunque con un sueldo exiguo (unos 200 pesos al año). Entonces tenía 25 años de edad.

Al año siguiente comenzó a experimentar con la caída de los cuerpos. Ese fue su primer paso hacia la labor más trascendental de su vida: dilucidar cuestiones aristotélicas. Ya otros se habían percatado de los errores en que había incurrido el sabio de Macedonia, entre ellos Leonardo da Vinci; pero ninguno logró rebatirlos en forma tan contundente como Galileo por medio de sus experimentaciones. Por ejemplo, en la Torre inclinada de su ciudad demostró que dos pesos distintos del mismo material que caigan desde igual altura, llegarán al suelo al mismo tiempo. Su discípulo y biógrafo Vincenzo Viviani dice lo siguiente:

“En esta época Galileo estaba convencido de que el conocimiento de la naturaleza real del movimiento era indispensable para la investigación de los fenómenos naturales, de acuerdo con el axioma filosófico universalmente difundido ignoratur motu, ignoratur natura. Entonces, se dedica por entero a las reflexiones por el movimiento y, para gran asombro de todos los filósofos, estas reflexiones, basadas en la experiencia, el razonamiento y sólidas demostraciones, mostraron la falsedad de muchas afirmaciones de Aristóteles concernientes al movimiento, afirmaciones que hasta ese momento habían sido consideradas como perfectamente evidentes y seguras. Tal es el caso de la afirmación de Aristóteles según la cual los cuerpos en movimiento, compuestos de una misma sustancia pero de pesos diferentes y colocados en un mismo medio, caerían con velocidades proporcionales a sus respectivos pesos; Galileo concluyó que todos se

mueven a la misma velocidad. Y lo demostró con varias experiencias practicadas desde lo alto de la torre de Pisa, en presencia de otros profesores y filósofos y de toda la comunidad universitaria (di tutta la scolaresca). También mostró que la velocidad de un mismo cuerpo que se mueve en medios diferentes es inversamente proporcional a la resistencia o a la compacidad de estos medios, resaltando los absurdos evidentes que implicaba la hipótesis contraria”.

Por varias razones tuvo que abandonar la cátedra de Pisa, pero enseguida, a los 28 años de edad, fue nombrado en la Universidad de Padua. Aquí trabajará durante los próximos 18 años. Escribió sobre mecánica, ideó el compás geométrico militar, el termómetro de aire, estudió el magnetismo y la percusión; la cohesión de las partículas en los cuerpos sólidos; escribió dos libros sobre la estructura del Universo; estudió el sonido, el habla, la luz, los colores, las mareas, los movimientos de algunos animales, las leyes de reflexión del sonido. En su obra **“El método de los indivisibles”**, están los gérmenes del cálculo infinitesimal.

A los 45 años de edad se entera de que en Holanda se ha diseñado un telescopio, y él hace uno mucho mejor. Poco después inventa el microscopio compuesto, del cual dice en una carta: *“He examinado con deleite máximo un crecido número de animales entre los cuales la chinche es el más horrible, y el jején y la falena los más hermosos. He podido también descubrir cómo la mosca y otros animales pequeños están dotados para caminar sobre el cristal de una ventana y colgados del techo mientras mantienen sus patas hacia arriba...”*.

Entre las aseveraciones aristotélicas más celosamente defendidas entonces por la Iglesia, se encontraba la de que el Universo era inmutable, invariable y que La Tierra era el centro de ese Universo. En 1610, Galileo hizo público (**“Sidereus nuncios”**) varios descubrimientos astronómicos trascendentales. Fue el primero en colocar un antejo para observar el cielo, la superficie montañosa de la Luna, descubrir la existencia de satélites en el planeta Júpiter y establecer que la Vía Láctea es una aglomeración de distintas estrellas. Difícilmente podrá encontrarse en la Historia de la Ciencia un acontecimiento comparable con este, por las repercusiones que tuvo en el seno de la sociedad y por su influencia tanto sobre los sabios y la ciencia sucesiva, como sobre amplias capas sociales de la población.

Con respecto a estos descubrimientos astronómicos, quisiéramos detenernos en uno que puede servirnos para entender, cómo Galileo terminó en la Inquisición, nos referimos al descubrimiento de las manchas solares. En el **“Dialogo...”**, Galileo dice haber descubierto las manchas solares cuando se hallaba en Padua, en 1610. De Marzo a Junio de 1611, en Roma, hizo la demostración y un año más tarde el descubrimiento fue publicado en un texto impreso, el prefacio de **“Discorsi intorno alle cose che stanno in su l'acqua e che in quella si muovono”**. Ahora bien, en el mes de Enero de este mismo año 1612, había sido publicada anónimamente una recopilación de cartas dirigidas a Mark Welser, cuyo autor pretendía haber observado las manchas solares en Marzo de 1611. Este autor era un jesuita, el padre Scheiner. Welser, amigo de Galileo, con el que mantenía una correspondencia habitual, le hizo llegar a este el opúsculo.

Galileo le respondió en su **“Storia e dimostrazioni intorno alle macchie solari”** publicada en Roma en 1613. Entonces comenzó una discusión por la primacía, en un inicio cortés, luego cada vez más tensa. Scheiner recurrió a la denuncia y a la intriga y fue uno de los principales responsables de los ataques lanzados contra Galileo por la orden de los jesuitas, ataques que terminarían en el trágico proceso de 1633.

No obstante esto, la correspondencia de Galileo entre 1610 y 1611 permite, en cierta medida, hacerse una idea del interés que despertaban sus trabajos y su personalidad. En París se quería que pusiera el nombre de Enrique IV a la próxima estrella que descubriera, en Praga el emperador Rodolfo II se interesaba de igual modo por los Astros Mediceos y encargó a

Kepler el análisis del “**Sidereus nuncius**”. Pronto Kepler publicó su “**Dissertatio cum nuncio sidereo**”, lo que nos permite establecer una comparación, pues las particulares de las dos obras no reflejan tanto los resultados científicos obtenidos por los dos hombres como los estilos de sus obras.

Al fin Galileo se pronuncia abiertamente a favor de las ideas de Copérnico, los amigos de este reclutan nuevos partidarios del heliocentrismo y pasaban, de vez en cuando, a la ofensiva. En el verano de 1612 Galileo quiso precisar la posición de la Iglesia, la respuesta no pudo serle más oscura: la doctrina peripatética de los cielos inalterables no estaba consagrada por la Iglesia, sin embargo, la interpretación de las Escrituras era una prerrogativa de la Iglesia y para ella, la inmovilidad de la Tierra estaba afirmada con gran nitidez. Afectar esa prerrogativa era un gran pecado. El 15 de marzo de 1616, la Congregación del Index incluye el libro de Copérnico, así como otros en la lista de las obras prohibidas.

En esta época trágica de su historia, la ciencia descubre su orientación real. Se trataba de la soberanía del espíritu en busca de la verdad. Y, en este momento, Galileo demostró que expresaba la tendencia principal del progreso científico de su época, una tendencia que se inscribe en el acercamiento sin fin del conocimiento a su origen inagotable. Aquí radica la inmortalidad de su genio. Todas las peripecias de la lucha, las reservas y la propia abjuración de 1633 son simples detalles que no presentan otro interés que el de ser detalles de la vida de un titán. No fue su legendario **Eppur si muove** lo que hizo de Galileo un héroe inmortal, sino su marcha segura por la senda histórica de la ciencia. Esta senda no sólo conducía al racionalismo de Descartes, sino incluso al de Spinoza y a todo lo que se desprende de ello.

El 22 de junio de 1633 Galileo tiene que leer ante una asamblea de prelados dominicos de la iglesia Santa María sopra Minerva, su fórmula de abjuración. No puede recibir visitas, ni mantener correspondencia ni salir de la casa. Pero continúa trabajando y termina su obra cumbre: “**Diálogos de la nueva ciencia**”. Finalmente, el 8 de enero de 1642, a los 78 años de edad, murió en brazos de sus dos últimos discípulos. Viviani, quien sería de los primeros en escribir su biografía y Torricelli, sobradamente conocido por sus investigaciones físicas.

CUESTIONARIO

1. ¿Cuál fue el papel jugado por los monasterios en la conservación del legado cultural de la humanidad?
2. Explique el papel jugado por los dominicos y franciscanos con respecto a la enseñanza de la matemática, en la Edad Media.
3. ¿Por qué se ha denominado a la Edad Media, "la noche que duró mil años"?
4. ¿Por qué Galileo es considerado el Padre de la Ciencia Moderna?
5. La personalidad de Galileo está algo mistificada, refute alguno de estos mitos.

Conferencia 7. Descartes, Fermat y Pascal. Cavalieri.

“Para hacer que un gran sueño se convierta en realidad, primero hay que tener un gran sueño”

Hans Selye

EL NACIMIENTO DE LAS ACADEMIAS

El redescubrimiento de las matemáticas griegas llegó a su apogeo en los albores del siglo XVII. Las traducciones y reediciones se multiplicaron; además, los numerosos intentos de reconstitución de trabajos perdidos o alterados ponen de manifiesto la nueva envergadura que alcanzó en esa época la cultura matemática. Esta va a beneficiarse tanto del prestigio de los resultados que se le atribuían -Galileo puso su descubrimiento de los satélites de Júpiter al servicio de los Médicis cuyo emblema era precisamente ese planeta- como del convencimiento de que esta ciencia permitía acceder al verdadero lenguaje natural del universo: *“La filosofía, afirmaba Galileo, está escrita en ese gran libro que es el Universo en lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas sin los cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra de ella”*.

Hacia esta misma época comenzaron a surgir en Europa las academias científicas según el modelo de las sociedades italianas más precoces: algunas de ellas, como la Academia dei Lincei de la que Galileo era miembro, habían sido fundadas por un mecenas, otras estaban formadas por grupos autónomos de aficionados a las ciencias que se reunían para intercambiar libros recientes, informaciones científicas o correspondencia, o para asistir a una sesión de disección o de observación de las estrellas.

Como las obras impresas -y sobre todo los libros científicos- eran todavía escasas y su difusión estaba muy limitada, estas academias contribuyeron sobremanera a la divulgación de los conocimientos. En una de las más célebres, en París, se reunían en torno del abate Marin Mersenne (1588-1640) científicos de gran prestigio como Pascal, Descartes, Fermat, Roberval y Desargues.

Formados gracias a la lectura de las grandes obras clásicas, estos matemáticos fueron los continuadores de la tradición humanista, adoptando sus interrogantes y sus amplias perspectivas. Pero fueron también los herederos de los artesanos algorítmicos, tanto por la importancia que atribuyeron en sus obras a las técnicas algebraicas como por su origen familiar, ya que muchos de ellos eran hijos de mercaderes enriquecidos que habían adquirido cargos y títulos nobiliarios.

Ya fueran consejeros parlamentarios, monjes eruditos, diplomáticos o militares, en el siglo XVII los aficionados a las matemáticas no vivían de sus trabajos, ni siquiera de la enseñanza que impartían, y no dependían tampoco de un mecenas. En otras épocas, la práctica del reto matemático permitía a los maestros defender su reputación y ganarse la vida, ya que el triunfo público frente a un adversario les garantizaba una clientela. Ahora bien, aun cuando en el siglo XVII los miembros de una academia continuasen planteando a sus corresponsales problemas difíciles cuya solución ellos conocían, se diría que lo que perseguían era más bien demostrar su propia competencia o incitar a sus interlocutores al estudio. Siguiendo el ejemplo de Descartes, su portavoz en este punto preciso, estos hombres establecían una clara distinción entre la “geometría” basada exclusivamente en la exactitud del razonamiento y la “mecánica” sometida a las limitaciones prácticas de la artesanía.

La geometría misma no se asemejaba necesariamente a la de los griegos. Como veremos, Descartes y Fermat la hicieron analítica: búsqueda de tangentes a las curvas, cálculos de

áreas, evaluación de las posibilidades en los juegos de azar, problemas sobre los números enteros y muchas otras cuestiones salpicaban la correspondencia y los tratados de estos sabios. Se interesaban también por las cuestiones de óptica y, de manera más general, por los fenómenos naturales que se estimaban regidos por leyes matemáticas: la mecánica constituía el modelo de esta “matematización” de las ciencias que había comenzado con los trabajos oxfordienses del siglo XIV.

Desde mediados del siglo XVII, los gobiernos comenzaron a suplir la falta de iniciativa privada para apoyar, al menos en parte, el desarrollo de las ciencias. En 1662 mediante una carta real, la Royal Society dio carácter oficial a las reuniones de sabios que se realizaban en el Gresham College de Londres; y la Academia de Ciencias, fundada en Francia por el ministro Colbert en 1666, contaría entre sus primeros miembros a los contertulios del círculo de Mersenne. En cuanto a las publicaciones periódicas, el **Journal des Savants** en Francia y las **Philosophical Transactions** en Inglaterra mantenían informados a los aficionados a las ciencias sobre los descubrimientos más recientes.

RENATO CARTESIUS

En la primera mitad del siglo XVII Francia, que no era, ni con mucho, de la avanzada capitalista, empezó a recuperar el terreno perdido; superaron el fraccionamiento feudal, lograron desarrollar la industria y el comercio exterior. La forma política del poder pasó a ser la monarquía absoluta, este absolutismo estimuló, en cierta forma, los avances antes citados, así el Cardenal Richelieu, primer ministro del Estado absolutista francés, subvencionaba las manufacturas, las compañías de ultramar y las expediciones coloniales; para fomentar la producción nacional y protegerla de la competencia holandesa e inglesa, el absolutismo aplicaba una política proteccionista, que junto con su política impositiva, constituía, un “medio artificial” de acumular capital.

Pero el clero feudal seguía conservando su influencia económica y político-ideológica. Debido a ello, la ciencia y la técnica de Francia, se encontraban en peor estado que en los Países Bajos o Inglaterra. En esta situación surge el destacado filósofo y matemático René Descartes (1596-1650).

En contraste con los períodos de desarrollo anteriores, caracterizados por la existencia abundante y simultánea de individualidades de gran talento dentro de un ambiente uniforme, el barroco matemático (1550-1730) en su período culminante está determinado por la presencia de unos pocos hombres geniales y sobresalientes, quienes en pocas decenas de años promovieron un cambio completamente nuevo de concepción dentro de la ciencia.

Ya no se trata de mejorar procedimientos prácticos, sino de construir un edificio general del pensamiento científico, el cual se debe elaborar (siguiendo la idea de la época) según el ejemplo de las matemáticas.

Para facilitar tal objetivo hay que transformar primeramente el mosaico de ideas sueltas que figuran una al lado de otra, sin coherencia y relación entre sí, y unirlas en un sistema dominado por tendencias uniformes.

Ya Copérnico (1473-1543) trataba de edificar un nuevo sistema astronómico, transformando y haciendo renacer conceptos antiguos. Kepler (1571-1630) no se somete a la tradición, siguiendo en los puntos esenciales a la intuición. Su punto de partida son suposiciones basadas en especulaciones metafísicas, que rectifica mediante observaciones prácticas. Galileo (1564-1642) lucha contra los conceptos y fundamentos aristotélicos de la física contemporánea. Descartes es el fundador del primer sistema matemático moderno, lo que nos indica que el mundo ya estaba preparado para asimilarlo.

Descartes era hijo de una antigua y noble familia de Normandía: su padre, Joaquín Descartes (muerto en 1640) era consejero en el Parlamento Breton, en Rennes. En la biblioteca de

la Flèche (Colegio Jesuita al que ingresó en 1604), Descartes recibió permiso para utilizar la literatura allí existente, incluyendo la considerada herética y pagana, muchos de sus autores agrupados bajo la denominación común de escépticos, influyeron decisivamente sobre el joven escolar, el conocimiento humano -afirmaban los escépticos- es dudoso por su propia naturaleza; por ello, los esfuerzos hechos en este campo no se justifican a sí mismos, son vanos. Descartes, a pesar de esto, no se convirtió en un escéptico. El intento de dar respuesta a la pregunta “Por qué?” está aún por delante. Ahora cabe señalar que la capacidad de someterlo todo a duda, de abordar críticamente cualquier verdad, por indudable que pareciera a primera vista, fue lo primero que aprendió al leer a los escépticos.

En el tiempo de su incursión en la vida militar, hace su primer descubrimiento matemático independiente, el del teorema llamado de Euler sobre los poliedros, $C+V=A+2$.

En 1620 abandona el ejército y emprende largos viajes por Hungría, Alemania e Italia (1621-25), lo que amplía su conocimiento del mundo y de la gente. Después de su vuelta a París, entra en relaciones más estrechas con Mersenne, cuyos amigos se oponen con manifiesto éxito a la filosofía de Aristóteles, encontrando buena acogida para sus ideas. En 1628 se retira con rápida resolución a los Países Bajos y de aquí pasa sucesivamente a Inglaterra, Dinamarca y Suecia, país en el que muere un año después de su llegada. Sus obras póstumas llevadas a Francia por Chanut, embajador francés en Estocolmo, se pierden en un naufragio. La mayor parte de los papeles salvados se publican (desde 1657), gracias a los esfuerzos de Clerseliers. Entre sus principales obras tenemos:



1637 **“El Discurso del Método”**, con tres anexos: **Dióptrica**, **Meteoros** y **Geometría**.

1641 **“Meditaciones Metafísicas”**.

1644 **“Principios de la Filosofía”**.

1664 **“Tratado de la Luz”**, el cual fue ocultado al ocurrir el juicio a Galileo en 1633.

A pesar de sus generalizaciones, no conocidas hasta entonces, y su modo claro de expresión, su **“Geometría”**, única obra matemática del gran filósofo, llama la atención y se estudia con gran interés. Esta constaba de las siguientes partes:

1er libro: “Sobre los problemas que pueden construirse utilizando sólo círculos y líneas rectas”, ni más ni menos que dedicado a problemas resolubles con regla y compás, entre ellos el famoso problema apoloniano “Locus ad tres et quattuor lineas”.

2do libro: “Sobre la Naturaleza de las líneas curvas”, el que versa sobre un estudio más detallado de las curvas de diferentes órdenes, su clasificación y la revelación de sus propiedades.

3er libro: “Sobre la construcción de sólidos o más que sólidos”, que no es más que la construcción de una teoría general de resolución de ecuaciones y la utilización para esto, junto a los recursos algebraicos, de los lugares geométricos.

La simbología algebraica de Descartes, no se diferencia ya de la actual.

Pero las matemáticas de Descartes sólo encuentran adeptos gracias a los esfuerzos de Fr. van Schooten (1615-1660), quien como hijo y sucesor de un distinguido profesor de la Universidad de Leiden, recibió una excelente instrucción profesional. En 1649, se editó la

“Geometría”, traducida al latín por Schooten y revisada por Descartes, seguida de comentarios detallados y las “**Notae breves**” de Debeaune. Esta obra reeditada y publicada en casi todos los países de Europa, desplazó a la literatura profesional más antigua y fue la base común del desarrollo de las ciencias matemáticas durante mucho tiempo.

En la historia de la ciencia matemática, ocupa un lugar muy significativo el siglo XVII, en este siglo se abre un nuevo período de la historia de las matemáticas: el período de las matemáticas de las magnitudes variables.

En este siglo, los éxitos de la matemática y sus aplicaciones, condujeron a la creación de las ciencias sobre la Naturaleza: las ciencias exactas. La idea filosófica de la universalidad del método matemático, la cual reflejaba el rápido desarrollo de la técnica y de la propia matemática, agobió la mente de los más grandes científicos y filósofos del siglo XVII. Entre ellos, naturalmente, Descartes.

Bacon por un lado y Descartes por el otro, elaboraron las reglas de los métodos inductivo y deductivo de la ciencia, líneas de gran influencia en la lógica y la metodología del conocimiento científico de nuestra época. Ambos van a delinear, los métodos válidos en un grupo de ciencias; tomando cada uno de ellos un modelo, al cual deben reducirse las demás ciencias, exagerando, en ocasiones, el papel de estos.

En Descartes, su método “universal”, reduce todo problema científico a un problema algebraico, siguiendo el siguiente esquema:

Problema Científico $\Rightarrow$ Problema Matemático $\Rightarrow$ Problema Algebraico,

significando, cada paso, la concreción del problema actual en los métodos y medios específicos del próximo nivel.

De este modo, el método universal de Descartes es por naturaleza matemático, es más, al contrario de Bacon, toma como modelo la Geometría.

Por otra parte, al estudiar la influencia que ejerciera directamente Descartes sobre sus contemporáneos y la ciencia de su época, y al definir su lugar en la “República de los Sabios” que surgió y obró en el S.XVII, al igual que su influjo multifacético y extraordinariamente variado sobre la ciencia, la filosofía y la literatura de los últimos siglos, se puede observar que la influencia simultánea de la personalidad de Descartes y de su sistema transcurrió (dejando a un lado su filosofía y hablando en términos generales) por tres direcciones fundamentales:

1. (Metodológicas, sobre todo) de sus búsquedas ópticas,
2. sus ideas sobre la mecánica,
3. sus ideas matemáticas.

En lo que respecta a estas últimas, debemos recalcar, que todo el sistema filosófico de Descartes fue asimilado en grado sumo, por la cultura de los siglos posteriores como cierto proyecto, detalladamente elaborado, de matematización de las ciencias naturales.

No olvidemos, que la consecuencia esencial de la introducción de un sistema de coordenadas, es que el estudio de las curvas, se reduce al estudio de sus ecuaciones, nos permite el paso de las curvas a los “números” que la determinan, punto advertido apenas fue establecido el isomorfismo entre el campo de los números reales y el campo de los segmentos de una recta. Este nuevo método engloba a la vez, el punto de vista geométrico y el punto de vista algebraico. El cálculo sobre los números, es la negación del real geométrico y niega esta negación, estudiando las variaciones mutuas de dos variables geométricas y crea así, un nuevo método de investigación de lo real geométrico.

La idea fundamental de Descartes (que presentamos en su versión “moderna”, como la mayoría de los grandes descubrimientos, fue simple, ¿por qué no formar dos direcciones básicas, una tomada horizontalmente y la otra vertical (a partir de un punto central O, llamado origen) que se utilizasen como líneas de medición para situar en un plano, cualquier punto P deseado? La distancia sobre la dirección horizontal podría designarse por un número negativo, positivo o cero, según que se tuviese que ir a la izquierda, a la derecha o a ninguna de las dos, para llegar a un punto. Análogamente en la dirección vertical, para llegar a un punto situado abajo, arriba o coaxial con el origen.

Siguiendo la construcción de Descartes, vemos que a cada punto del plano le corresponde, un par de números reales x e y , inversamente, a cada par de números reales le corresponde un punto y sólo uno. Los dos números escritos “(x,y)” se dicen las coordenadas del punto P, respectivamente la coordenada x y la coordenada y (llamadas abscisa y ordenada).

Las coordenadas geográficas, que se conocen bien, determinan la situación de un punto en una superficie (en la superficie de La Tierra); cada punto en la superficie terrestre tiene dos coordenadas: la longitud y la latitud.

Este método de coordenadas, método para la determinación de la posición de unos entes geométricos con respecto a otros, dotó a la geometría del necesario método analítico, aplicando el álgebra al estudio de los diversos lugares geométricos.

Toda curva se considera como el lugar geométrico de los puntos que poseen determinadas propiedades comunes. Si cada punto de este lugar geométrico, se pone en correspondencia con un par de números, o sea, sus coordenadas, mediante las propiedades comunes de todos los puntos del lugar geométrico, podemos relacionar las coordenadas x e y , en una ecuación $F(x,y)=0$.

Recíprocamente, toda ecuación $F(x,y)=0$, en cierto sistema de coordenadas, está en correspondencia con un lugar geométrico, cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación.

Por todo lo anterior tenemos que uno de los problemas fundamentales de la geometría analítica es el siguiente:

“Dado un lugar geométrico cualquiera, obtener la ecuación que corresponde a este lugar geométrico”.

Otro de sus problemas fundamentales es el inverso del anterior:

“Dada una ecuación, determinar el lugar geométrico o curva que corresponde a esta ecuación”.

Una vez establecida la relación entre curva y ecuación, se puede utilizar el conocimiento de las propiedades de uno, para derivar las propiedades del otro. En esto consiste, precisamente, el problema fundamental de la geometría analítica:

“Obtener las propiedades de un lugar geométrico de las propiedades de su ecuación, o viceversa”.

Como vemos, la idea de un “sistema de coordenadas” o “sistema de referencia”, presenta grandes posibilidades. Así, para estudiar una circunferencia de radio a , podemos elegir el origen en el centro de la circunferencia. Por el teorema de Pitágoras, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia satisface ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, además, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen dicha ecuación, es un vértice de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es a , que se encuentra a una distancia a del origen y , en consecuencia, está en la circunferencia. Todas las propiedades de una circunferencia se admiten que están contenidas

en esta ecuación. Siguiendo esta dirección, es evidente, que en el espacio tridimensional, podemos llegar a cualquier punto de dicho espacio, con tres segmentos dirigidos, proporcionando un tercer eje, el eje z, perpendicular a los ejes x e y en el origen. Es por esto, que para determinar la posición de un satélite, se debe indicar, además de la longitud y la latitud del punto sobre el cual se encuentra (punto de la superficie de La Tierra), la altura de este sobre dicho punto.

Esta idea es la utilizada en el Ajedrez, aunque con sus peculiaridades, para fijar las posiciones de las piezas sobre el tablero, utilizando en este caso, letras y números (tanto en el sistema descriptivo, como en el algebraico). La aplicación de las coordenadas, permite jugar al ajedrez por correspondencia, reproducir partidas interesantes, ... sin necesidad de tener que dibujar el tablero con las piezas.

Una nota interesante, relacionada con el sistema de coordenadas en el plano, es el hecho de que al dar una sola coordenada, la posición de un punto no está bien determinada, esto fue lo que sirvió de argumento a la obra de Julio Verne, **“Los Hijos del Capitán Grant”**. Los héroes de la novela, sólo conocían una de las coordenadas del lugar del naufragio (la latitud) por esto, para explorar todos los puntos posibles y encontrar a los sobrevivientes, ellos tuvieron que dar la vuelta al mundo por todo el paralelo, o sea, por una línea cuyos puntos tenían una latitud de 37 grados 11 minutos.

Ya decía sutilmente Aristóteles, que no se puede desatar al que no cae en cuenta que está atado y al que no puede hacerse caer en cuenta de que lo está. Hasta el racionalismo no cayó en cuenta el hombre de que la geometría euclídea, por sus pretensiones luminosas de ser la única posible, constituía una atadura para el entendimiento, para la actividad mental.

La existencia, el “factum” científico de la geometría analítica, radicalmente distinta de la geometría intuitiva helénica nos descubre que el hombre había encontrado otra manera de conocer los objetos en que no dependía ya de ellos, sino de sus artificios.

A pesar de este progreso que en forma ya definitiva, dejando intentos o atisbos anteriores, debemos a Descartes; no se consigue sino reproducir constructivamente, con definiciones algebraicas, la misma geometría euclídea, pues como único es el mundo físico, única es la geometría que lo describe.

Pero la geometría analítica, que va a permitir un estudio más profundo de las figuras planas y, ulteriormente, de las figuras del espacio gracias a la utilización de un sistema de referencia, no podrá, aún durante mucho tiempo después de Descartes, “absorber” definitivamente la geometría como se lo imaginaba el propio Descartes. El caso es que, en efecto, subsiste aún una oposición entre geometría analítica y geometría. Los cálculos efectuados en geometría analítica necesitan el empleo de un sistema de coordenadas, mientras que las mismas propiedades geométricas son independientes.

Así las propiedades geométricas de una elipse no dependen más que de su forma geométrica, mientras que la ecuación de esta elipse, que debe permitirnos estudiar esas propiedades geométricas, depende del sistema de referencia utilizado y no únicamente de la elipse misma. Este antagonismo entre los métodos, explica el desarrollo de la geometría que persistirá, después de Descartes, con Desargues, Pascal, La Hire, Le Poivre, Poncelet, ... pero ese desarrollo independiente de la geometría llegará, utilizando la noción de grupo, introducida por Evaristo Galois (1811-1832), a una concepción superior de la geometría, que contendrá y superará a la vez, la síntesis de Descartes y la concepción tradicional de la geometría euclidiana. La identificación de esa noción algebraica -abstracta- de grupo de sustitución con la noción geométrica -concreta- de transformación, nos va a conducir, como ya dijimos, a una concepción sintética de la geometría, que englobará a la vez los métodos cartesianos y los métodos de la geometría euclidiana, más aún, esta síntesis ha conducido a la concepción de geometrías caracterizadas por sus grupos de operaciones. Esto fue desarrollado por Sophus Lie (1842-1899) y Felix Klein (1849- 1925). La noción de grupo puede extenderse a

sustituciones no lineales de las coordenadas proyectivas como lo harían Cremona (1830-1903) primero, y Bertini (1846-1933) después (en 1877) al fundar la geometría algebraica.

GERARDO DESARGUES

Si la vida de Gerardo Desargues hubiese transcurrido dos siglos más tarde, su trabajo quizás habría tenido mayor atención y sería más apreciado por sus colegas matemáticos.

Desgraciadamente para él, ocurre precisamente en los instantes en que el auge hacia la matemática infinitesimal y el matrimonio entre el álgebra y la geometría era creciente. Gerardo Desargues nació en la Ciudad de Lyon en el año 1592 y murió en su propia ciudad natal en 1655. Desargues era arquitecto e ingeniero y había servido como oficial en el ejército francés.

Su obra más importante la edita en París en el año 1639 y con ella da inicio a una nueva rama de la Matemática la **“Geometría Proyectiva”**. Por razones atribuibles a lo antes expuesto los ejemplares de su obra fueron relegándose al olvido y llegaron a perderse.

No obstante un discípulo suyo Felipe La Hire (1640-1718), cuya admiración por Desargues era grande, conservó una copia manuscrita la que halló doscientos seis años después de escrita, el geómetra francés Michel Chasles.

Este la justipreció altamente y a partir de entonces es que se da apropiada continuación al desarrollo de esta rama de la Matemática.

La labor matemática de Desargues parte del estudio de las cónicas desde un punto de vista distinto por entero al de Apolonio. Su libro, cuyo título tan alambicado tampoco ayuda a su divulgación era **“Brouillon projet d'une atteinte aux evenemes des recontres du cone avec un plan”** (Borrador de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano).

Este trabajo está inspirado en las ideas respecto a la perspectiva de Durero y el principio de continuidad de Kepler. Puede pensarse en que al proyectar desde una pantalla circular los haces de luz que salen de esta y se cortan por planos en diferentes posiciones se obtienen distintas elipses e hipérbolas. Del análisis de estas cuestiones llegó Desargues a concluir que aunque se perdían algunas propiedades había otras propiedades de esas cónicas que se conservaban en la proyección.

Tomó como base estas observaciones y realiza un excelente estudio de estas propiedades invariantes, de las que establece los teoremas fundamentales sobre las relaciones áreas mónicas, la polaridad, la homología, etc.

En otra de sus obras publicada en 1648, titulada **“Modo universal de practicar la perspectiva”**, demuestra Desargues el teorema que lleva su nombre y cuyo enunciado es:

“Si dos triángulos están situados de modo que sus vértices correspondientes pertenecen a las rectas de un mismo haz, entonces los puntos de intersección de sus tres lados son colineales”.

El recíproco de este teorema también es cierto y para demostrarlo es preciso emplear la propiedad de la invarianza de la relación anarmónica.

Durante los años que vivió en París entabló amistad con los mejores matemáticos franceses de su época: Descartes, Mersenne, Pascal y otros.

Todos reconocieron su talento pero no se interesaron en los trabajos que esta nueva dirección de la Geometría brindaba.

Su discípulo La Hire, no obstante, tras un insistente y sistemático esfuerzo logró probar que todos los teoremas de Apolonio de las **“Secciones cónicas”** se podían asimismo demostrar mediante la teoría de las proyecciones centrales de Desargues.

EL DESARROLLO CONTINÚA

Mucho más que Descartes, Fermat logró avanzar en relación con la representación sistemática. Sin embargo, no hay que hacerse ideas exageradas de los logros de Fermat.

Su oficina jurídica en Toulouse tiene que haberle dejado evidentemente, mucho tiempo para las matemáticas. Indiscutiblemente, él es uno de los matemáticos más significativos, es uno de los precursores de la matemática infinitesimal y del cálculo de probabilidades. Especialmente famosos fueron sus aportes en la Teoría de Números (recuerde el Gran Teorema de Fermat, que será tratado más adelante).

Fermat escribió un pequeño tratado sobre geometría analítica **“Ad locos planos et solidos isagoge”**, o sea, Introducción a los lugares (geométricos) planos y corpóreos, estos lugares corpóreos consisten en las cónicas y demás curvas fuera de la circunferencia y la recta y no la geometría analítica del espacio.

El desarrollo de los métodos de la geometría analítica tuvo lugar con bastante lentitud. Por una parte, las ideas eran muy nuevas y, por otra, resultaba muy poco usual el empleo de nuevos símbolos de una manera consecuente. El trabajo de Fermat, que inicialmente sólo circulaba en copias se imprimió en 1679; el **“Discours”** con **“La Géométrie”** se inscribió en el sumario papal de libros prohibidos.

Al principio la Escuela Matemática Holandesa, asumió la geometría analítica en la forma planteada por Descartes; van Schooten inició a los jóvenes matemáticos interesados en **“La Géométrie”** y en 1649 editó una traducción en latín del texto original francés.

Posteriormente, se introdujo en la escuela inglesa, la cual se encontraba en rápido desarrollo. Newton rompió con el tabú de las coordenadas negativas; a él se debe el empleo del sistema de coordenadas “cartesianas”. En 1676 él dio una clasificación en gran escala -en los cuatro cuadrantes- de las curvas de tercer orden.

Otro paso esencial lo dio Euler con su **“Introductio in analysis infinitorum”** (1748). La expresión específica “geometría analítica” es original de Lacroix, quien la empleó en 1796-99 en su libro de texto **“Cours de mathématiques”**.

Durante el siglo XIX la geometría analítica fue dotada de numerosos medios auxiliares algebraicos -determinantes, matrices, grupos, vectores. En las manos de Möbius, Plücker, Grassmann, Jacobí, Cayley, Sylvester, Hamilton, Hesse, Salmon y muchos otros, la geometría analítica recibió rasgos esenciales de la estructura que se emplean actualmente en las escuelas y universidades.

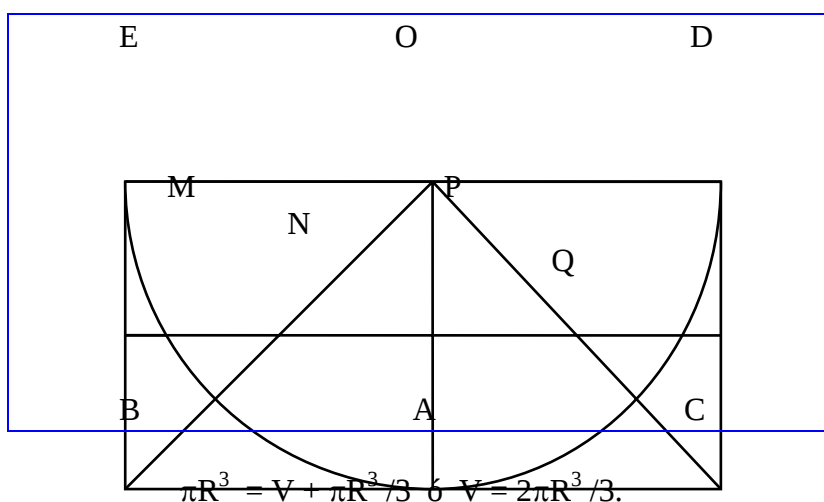
Sabemos que los griegos y, en particular, Eudoxio y Arquímedes calculaban las superficies y los volúmenes con ayuda del método de exhaustión, que consistía en considerar las líneas como el límite de polígonos inscritos y circunscritos, cuyos lados aumentan en número, indefinidamente.

En 1635, Cavalieri (1598-1678) en su obra **“Geometría indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota”**, utiliza el método llamado de los indivisibles, que Pascal y Roberval aplicarían a la cicloide. *“Un indivisible, dice Pascal en su opúsculo “Acerca del espíritu de la geometría”, es lo que no tiene partes”* (ver B. Pascal-**“Pensées”**, edition Havet, **“De l'esprit géométrique”**, pág. 620). Las reglas de cálculo sobre los números ordinarios ya no se aplican: la suma de dos indivisibles es un indivisible igual, lo mismo que la suma de dos ceros es un cero. Por otra parte, según Pascal, el cero de la aritmética es un verdadero indivisible de número, como el indivisible es un verdadero cero de extensión. El indivisible resulta de la división de la extensión al infinito. No se puede ser buen geómetra si no se ha comprendido que el espacio y el tiempo pueden dividirse sin verse obligados a detenerse. Es lo que equivale a decir que una línea es una suma de puntos -en número infinito,

es decir, tan grande como se quiera- una superficie, una suma de líneas y un volumen una suma de superficies.

He aquí un ejemplo de la aplicación del método.

Dado un semicírculo y una paralela cualquiera con diámetro ED. Cuando la figura gira alrededor del radio OA, el semicírculo engendra una semiesfera, la diagonal OB del cuadrado OEBA engendra un tronco de cono de revolución de volumen $\pi R^3/3$, si R es el radio del círculo; y el cuadrado OEBA engendra un cilindro de volumen πR^3 , el plano perpendicular en P a OA corta los tres volúmenes siguiendo tres círculos. Esos círculos son indivisibles de volumen que, apilados los unos sobre los otros en número infinito, nos vuelven a dar los tres volúmenes. Siendo el número de círculos el mismo para cada uno de los tres volúmenes: cono, esfera y cilindro, esos volúmenes son entre sí como los cuadrados de sus radios, es decir, como los cuadrados de las longitudes PQ, PN, PM. Es fácil observar que $PN^2 = OM^2 = PM^2 + PQ^2$. Si V es el volumen de la semiesfera tenemos:



Pascal (1623-1662), dice que el método es tan riguroso como el de los antiguos y que difiere solamente “*en la manera de hablar*”. Gasendi, Bayle y el Caballero de Meré, se oponen a esa forma de ver las cosas. Este último rechaza las nuevas reglas de cálculo sobre los indivisibles. No puede aceptar “*que un indivisible multiplicado tantas veces como se quiera, está tan alejado de poder superar una extensión, que no pueda formar más que un solo indivisible*” (ver “**Reflexions sur l'esprit géométrique**”, en “**Pensées et opuscules**”, 5a ed., 1909, pág. 182). Pascal responde mostrando que es necesario concebir en un segmento una infinitud de puntos, ya que sin eso un cuadrado contendría un número finito de indivisibles, que sería un cuadrado perfecto y el cuadrado construido sobre la diagonal contendría un número doble de ello, lo cual es imposible, puesto que no pueden existir dos enteros p y q tales que $p^2 = 2q^2$.

Lo que hace que para los adversarios sean más difícilmente aceptables las teorías de Pascal, es que el jansenista de Port-Royal imagina que los principios del cálculo sobre los indivisibles, que reposan en la divisibilidad al infinito del espacio geométrico, van a permitir explicar el mundo y sus contradicciones.

Esos principios parecen incomprensibles a algunos, pero esos escépticos, según él, no comprenden mejor el mundo. Escribe: “*Incomprendible. Todo lo que es incomprendible, no deja por eso de ser*” (“**Pensées**”, f.322, sec.VII, fr.430).

Es por eso que, pese a las objeciones (no carentes de buen sentido) del Caballero de Meré, Pascal considera la materia misma como divisible al infinito, como lo prueba el célebre pasaje de “**Pensées**”, donde hace ver en una brizna partes más pequeñas cada vez “*sin fin ni reposo*”, afirmación que ha sido negada hace ya bastante tiempo por las teorías atómicas.

Pascal no quiere solamente explicar el mundo material, sino también el hombre y las relaciones del hombre con Dios. Hace corresponder al hombre el número finito; a Dios, el número infinito; a la nada el cero. Así, si h es un número finito, los principios del cálculo sobre los indivisibles le muestran que $h:\infty = 0$ y que $h:0 = \infty$.

Por eso el hombre es una “nada respecto al infinito, un todo respecto a la nada” (ver “**Pensées**”, p.102) o también: “*el finito se destruye en presencia del infinito y se convierte en pura nada. Así es nuestro espíritu ante Dios, así es nuestra justicia ante la justicia divina*” (“**Pensées**”, pp.267-9). De esta forma el misticismo pascaliano forma el mundo de acuerdo con las abstracciones de la razón pura. Nada hay más opuesto a un conocimiento científico del Universo, que modifica, por el contrario, sus concepciones, sometiéndose a verificaciones positivas. Pascal lo siente tan bien que nota: “*Escribir contra los que como Descartes profundizan demasiado en las ciencias*” (Idem, pág. 491).

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo período de desarrollo matemático, para el siglo XVII se habían formado las premisas esenciales: existencia del álgebra ya formada y de la técnica de cálculo, introducción en las matemáticas de la variable y el método de coordenadas; asimilación de las ideas infinitesimales de los antiguos, especialmente de Arquímedes; acumulación de métodos de resolución de problemas del cálculo de cuadraturas, curvaturas, determinación de centros de gravedad, búsqueda de tangentes, extremales, etc., en este proceso tomaron parte muchos matemáticos destacados: Galileo, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Wallis, Roberval, Fermat, Descartes y Barrow entre otros. Algunos de ellos ya han sido tratados, mientras que otros serán los elegidos para los próximos epígrafes y algunos serán mencionados concisamente.

Dentro de los primeros pasos en esta dirección deben citarse los trabajos de Johann Kepler (1571-1630), quien fue un eminente astrónomo y matemático y dedicó prácticamente toda su vida al estudio, desarrollo y propaganda del sistema heliocéntrico de Copérnico. Analizando un enorme material de las observaciones astronómicas, en los años 1609-1619 descubrió las leyes del movimiento de los planetas que llevan su nombre:

- I. *los planetas se mueven según elipses; el Sol se encuentra en una de sus focos;*
- II. *los radiovectores de los planetas “barren” sectores de áreas iguales en intervalos de tiempo iguales;*
- III. *los cuadrados de los tiempos de rotación de los planetas alrededor del Sol están en la misma relación que los cubos de sus distancias medias hasta el Sol.*

La formulación de estas leyes muestra que para la demostración matemática de su veracidad es insuficiente el dominio de la técnica de cálculo conocida en aquella época, el conocimiento de las secciones cónicas y los recursos algebraicos. El problema del cálculo de las áreas de los sectores exigía el arte de utilizar las magnitudes infinitesimales. Este arte lo exigían también otros problemas de carácter práctico, como lo fue el de la búsqueda de la forma más racional de los toneles y la medición de su capacidad. La obra dedicada a este problema se llama así **“Nueva estereometría de los toneles de vino, preferentemente los austríacos, que tienen la forma más ventajosa y la excepcionalmente cómoda utilización para ellos de la raíz cúbica con la anexión de un complemento a la estereometría arquimediana”** (Linz, 1615). Esta obra consta, no considerando las observaciones previas, de tres partes: la parte teórica, la estereometría espacial de los toneles austríacos y las reglas para la medición de la capacidad de los toneles.

En la parte teórica, Kepler toma el antiguo método de exhaustión; en algunos casos se aparta aún más del rigor de la exposición, introduciendo consideraciones intuitivas. Por ejemplo, se demuestra que la superficie lateral de un cono inscrito está en relación con el área de la base (círculo máximo de la esfera) como $\sqrt{2}:1$; esta superficie es la mitad de la superficie lateral de

un cono circunscrito. Y de repente, Kepler escribe: *“Es bastante verosímil que la superficie de la semiesfera es la media proporcional entre las superficies [lateral] de ambos conos”*. Para ser más exactos, advirtamos que en la mayoría de los enunciados sobre la verosimilitud intuitiva de los resultados u otros razonamientos, Kepler cita a Arquímedes, el cual *“lo demuestra con todo rigor”*.

BONAVENTURA CAVALIERI

Alumno y gran amigo de Galileo, se le debe, como ya vimos, un gran paso hacia el análisis infinitesimal. Nació en Milán en 1598, después de terminar sus estudios matemáticos con Galileo ingresó en la orden religiosa de San Jerónimo a cuyos miembros se les conoce con el nombre de Jesuatos, para distinguirlos de los Jesuitas. Más tarde (1629) es designado profesor de matemáticas en la universidad de Bolonia, cargo que desempeña hasta su muerte en 1647. Publicó diversas obras, varias de ellas de Geometría y Astronomía, entre estas **“Directorium universale usanometricum”** en la que aparecen tablas de las funciones trigonométricas con sus correspondientes logaritmos, contribuyendo notablemente a la introducción de estos en Italia.

Sin embargo, su contribución más sobresaliente y la que lo hace famoso es la aplicación de los “indivisibles” que conduce directamente a lo que hoy llamamos “integración”. Sus primeras ideas las expuso Cavalieri en 1635 en su obra **“Geometrie indivisibilibus Nova quadam ratione promota”**, con ellos trata de sustituir los procedimientos de Arquímedes para calcular áreas y volúmenes por el Método de Exhausión que Cavalieri consideraba muy engorroso.

En 1647, poco antes de su muerte, publica otra obra sobre los “indivisibles” que titula **“Exercitaciones Geometricas”**. En esta muestra mediante sus indivisibles el Teorema de Pappus-Guldín con la intención de refutar a este último, (1577-1643), que había intentado probar este teorema sobre áreas y volúmenes de revolución mediante procedimientos un tanto metafísicos.

El argumento que esgrime para usar sus indivisibles expresa, por ejemplo, que si estos son segmentos de líneas y al deslizarse sobre determinadas figuras planas barren longitudes iguales es porque las áreas de estas son iguales y a partir de aquí, enuncia el conocido “Principio de Cavalieri”:



- I. *“Si dos figuras planas están incluidas entre un par de rectas paralelas y los segmentos que determinan las paralelas son iguales en longitud, entonces las áreas de las dos figuras son iguales.”*
- II. *“Si dos sólidos están situados entre dos planos paralelos y las secciones determinadas por estos planos sobre los sólidos o por cualesquiera planos paralelos a los lados tienen áreas equivalentes, entonces los volúmenes de los sólidos son iguales.”*

El método de los indivisibles permitió resolver un conjunto de problemas que eran irresolubles. Le surgieron muchos adeptos, uno de ellos, Torricelli, escribió que la nueva geometría de los indivisibles pasa de mano de un científico a otro, como una maravilla de la

ciencia; según la opinión de Torricelli, convenció al mundo que el siglo de Arquímedes y Euclides fueron los años de la infancia de la actual ciencia geométrica. Torricelli, trabajando activamente con los métodos de Cavalieri, fue el primero que pudo determinar el volumen de un cuerpo formado por la rotación de una rama de la hipérbola alrededor de sus ejes.

Sin embargo, este método tenía sus deficiencias. Primeramente, no era adecuado para la medición de las longitudes de las curvas, ya que los correspondientes indivisibles (los puntos) resultaban sin dimensiones. En segundo lugar la inexplicabilidad del concepto de indivisible, la imposibilidad de su explicación racional creaba para toda la teoría una atmósfera de ausencia de fundamentos. En tercer lugar el desarrollo del método se frenaba fuertemente debido a que Cavalieri, en correspondencia con las ideas formadas en aquella época sobre el rigor científico, evadía la utilización del simbolismo y los métodos del álgebra.

No obstante, la integración definida en forma de cuadraturas geométricas adquirió fama en la primera mitad del siglo XVII. Todos los esfuerzos, desde entonces, fueron dirigidos a su precisión y al logro de resultados lo más generales posibles.

PIERRE DE FERMAT



Para algunos autores, es Fermat el matemático más destacado del siglo XVII después de Newton, pero de lo que no hay dudas es que fue el más versátil de su época, pues trabajó en casi todos los nuevos campos de la matemática.

La vida de este fue siempre apacible y tranquila, el reverso de la de su compatriota Descartes. Nació en la ciudad de Beaumont de Lomagne en la Francia de 1601, hijo de un comerciante y descendiente de una familia de juristas. Después de estudiar la carrera de leyes en Toulouse fue designado, con 30 años, magistrado de esta ciudad para, 17 años más tarde, ser ascendido a un cargo en la Conserjería Real del Parlamento de la citada ciudad, permaneciendo en esta posición hasta su muerte en Gastres en el año 1665.

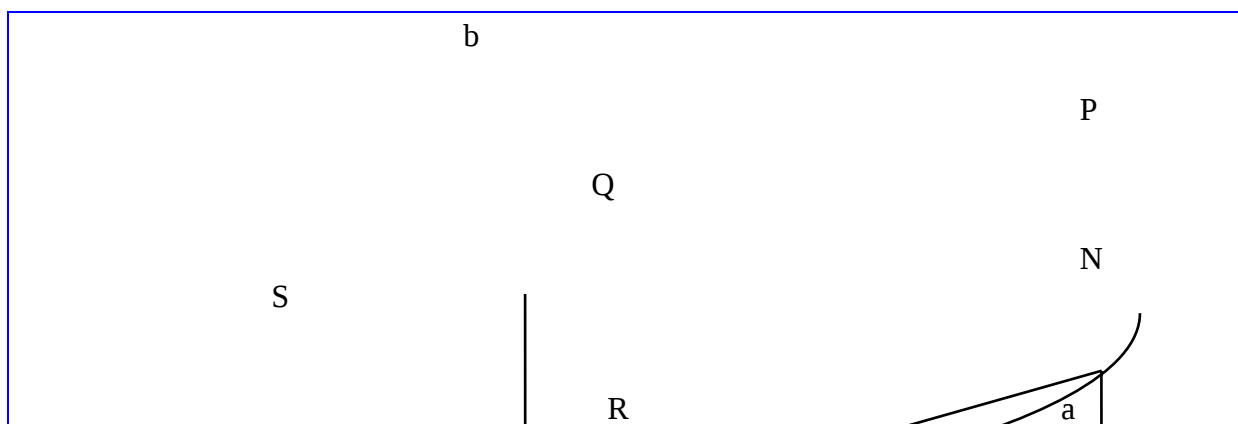
Bell bautiza a Fermat, usando lo que señalábamos antes, como “El Príncipe de los Aficionados”, dado que su profesión no era la de matemático. Este, contemporáneo de Descartes, Mersenne, Desargues, Pascal, Roberval y otras figuras de la época, establece relaciones con todos ellos mediante una copiosa correspondencia sobre Geometría Analítica, Teoría de las Probabilidades, Teoría de los Números y el incipiente Análisis Infinitesimal.

Incluso, como sucede varias veces en la historia de las matemáticas, Fermat gestaba a la vez que Descartes y de un modo independiente, los fundamentos de la Geometría Analítica ya que en 1636, un año antes de editarse el apéndice **“La Geometría”** de Descartes, establece el principio siguiente: *“Siempre que en una ecuación aparezcan dos variables, existe un lugar geométrico, ya que el extremo de una de las variables describe una línea recta o una curva”*. Este principio se halla en una carta que Fermat hace a Roberval y se cree que ya por aquella época redactaba su obra titulada **“Ad locos planos et solidos isagoge”**, la que no se publicó hasta 1679 gracias a los esfuerzos de su hijo Samuel. Sin embargo se sabe que su manuscrito circuló desde mucho antes.

En el análisis desarrolla otro importantísimo avance y lo presenta en su libro, también póstumo, **“Método para determinar máximos y mínimos”**. Este se supone data del año

1629 y en el, pese a que desconoce el concepto de límite, determina la idea del trazado de tangentes del siguiente modo:

Para determinar la tangente a la curva continua $y=f(x)$ por un punto P de esta curva, considera otro punto Q de la misma y lo “mueve” sobre la curva hasta que coincida con P. Expresa estas ideas con el simbolismo algebraico y muestra como las coordenadas de Q nos revelan que b/a es la “medida de la tangente” de la secante PQ y concluye que cuando coincide con P, en esta posición límite, se convierte en la tangente por P y el valor límite de b/a es la pendiente de la tangente pedida.



De estas ideas (expuestas de un modo distinto, por supuesto), le es fácil a Fermat llegar al concepto de extremo: ~~“si se determina en la gráfica el punto de máxima o mínima ordenada de la curva es evidente que en cada uno de estos puntos la tangente es paralela y por tanto el ángulo de inclinación es nulo”,~~ es decir, que si se puede conocer la “expresión general de la pendiente a la curva” (derivado) bastaría hacerlo cero y así obtener el valor del extremo. Con estas ideas, al estudiar en Óptica la reflexión de los rayos de un haz deduce las leyes correspondientes a la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión.

Fermat hace también incursiones en el cálculo integral, pues considera hallar el área bajo la curva $y=x^n$ en un intervalo $(0,a)$, dividiendo este en infinitos subintervalos con abscisas de la forma $a, ra, r^2a, \dots, r^n a$ con $0 < r < 1$, determina la ordenada de estos e introduce rectángulos circunscritos, obteniendo la progresión geométrica:

$$a^n(a-ra), (ra)^n(ra-r^2a), (r^2a)^n(r^2a-r^3a), \dots$$

cuya suma calcula, evita la indeterminación cuando r se aproxima a 1, descomponiendo el denominador y obteniendo de este modo:

$$S = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Cálculos análogos los realiza Fermat para n racional llegando a resultados que permiten afirmar que calculó la integral definida de x^n (n entero o fraccionario) sobre cualquier intervalo de la forma $(0,a)$. Este procedimiento lo utiliza en la integral de $1/x^n$ sobre la semirecta $(x, +\infty)$, al parecer influido por las obras de Neper, ya que el mismo lo denominó logarítmico.

Poco después obtiene el área de la parábola $y=b(x/a)^p$, empleando simultáneamente el método de Euclides para el volumen de una pirámide y el de la cuadratura geométrica de la parábola de Arquímedes, construye figuras escalonadas inscritas y circunscritas cuyos vértices tienen

en el eje de las abscisas valores iguales a los términos de una progresión geométrica. Más tarde, aplica el mismo procedimiento a las parábolas $(y/b)^q = (x/a)^p$, p y q enteros positivos primos entre sí, y a las espirales $(r/a)^p = (r/a)^q$ y $(1-r/a)^q = (r/a)^q$ y lo amplía para aplicarlo a las hipérbolas $(x/a)^p (y/b)^q = 1$.

En la Teoría de las Probabilidades el aporte de Fermat es asimismo muy importante y se recoge básicamente en su correspondencia con Pascal. Famosa es la solución de Fermat al problema que plantea determinar la razón en que deben estar las apuestas sobre dos jugadores que poseen iguales habilidades y se sabe que puntos necesitan cada uno para ganar.

Sin embargo, en la rama en la que Fermat alcanza su máximo esplendor es en la Teoría de los Números. Entre sus principales resultados tenemos:

- Si p es un número primo y a es primo con p , entonces $a^{p-1} - 1$ es divisible por p (Teorema Menor).
- Todo número primo puede expresarse de una sola forma como diferencia de dos cuadrados.
- Todo primo de la forma $4n+1$ se puede descomponer en la suma de dos cuadrados.
- Todo número entero y positivo puede expresarse como suma de cuatro cuadrados menores que él.
- No existen enteros positivos a, b, c tales que $a^2 + b^2 = c^2$, si $n > 2$.

La primera proposición que se ha llamado “Pequeño Teorema de Fermat”, fue después resuelto por Euler. En cuanto a la propiedad 5 es la más famosa de todas y es conocida como el “Gran o Último Teorema de Fermat” (por ser el último que, en el siglo XVIII, quedaba sin resolver) y que por su trascendencia le dedicaremos buena parte de una conferencia, sólo queremos añadir, que en el Congreso de la IMU de 1980 se probó que ciertos tipos de ecuaciones, a las que pertenece $x^2 + y^2 = z^2$, tienen sólo un número finito de soluciones tales como $(1,0,1)$.

Hablando de conjeturas famosas en la teoría de los números, queremos traer dos de las más interesantes que existen, ambas relacionadas, al igual que el Último Teorema de Fermat, con los números primos.

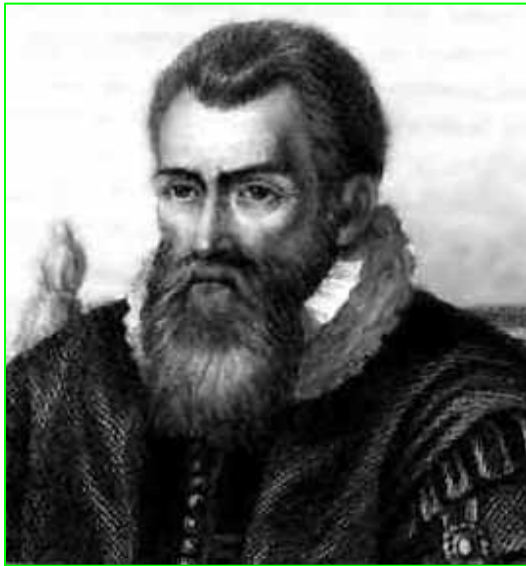
Observemos inicialmente que el problema de determinar cuando el número $a^n - 1$ es primo o no, puede ser reducido a verificar cuando $2^n - 1$ es primo o compuesto. En efecto, si $n > 1$ y $a^n - 1$ es primo, entonces $a=2$ y n es primo, esto se demuestra fácilmente, porque si $a > 2$, entonces $a - 1 \mid a^n - 1$, y si $a=2$ y $n=kl$, entonces $2^k - 1 \mid 2^n - 1$. En 1644, Mersenne conjeturó que $M_p = 2^p - 1$ era primo para $p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ y compuesto para los otros valores de p menores que 257.

El primer contraejemplo sobre la veracidad de esta conjetura, fue dada por Pervusin y Seelhoff quienes descubrieron, en 1886, que M_{61} era primo. Nuevos contraejemplos fueron dados y la conjetura de Mersenne dejó de ser considerada en serio.

En 1876 Lucas encontró un método para verificar cuando M_p es primo y lo utilizó para demostrar que M_{127} es primo. Este fue el mayor número de Mersenne conocido hasta el año 1951 cuando, por diferentes métodos, Ferrier encontró un primo mayor y Miller y Wheeler (usando la computadora eléctrica EDSAC1 de Cambridge) descubrieron varios primos mayores que M_{127} , entre los cuales el más grande era $180M_{127} + 1$, mayor aún que el primo M hallado por Ferrier.

Hasta el año 1978 el mayor número de Mersenne era $2^{44\,497} - 1$. Pero, recientemente, D. Slowinski ha descubierto que $2^{86\,243} - 1$ es primo. Suponiendo que entre estos no haya ningún otro número de Mersenne, entonces este último sería el vigésimo octavo número de Mersenne.

2				3
	4	5	2	
0	0	0		
6				1
	8	5	4	
1	1	0		
6				2
	6	0	8	
4	4	8		



Sin embargo, su aporte más significativo es la invención de los logaritmos, idea en la cual trabajó por más de 20 años. Podemos calificar esta invención de Neper de verdadera genialidad, pues **no tenía relación alguna con otra teoría matemática**. Para confeccionar las tablas trigonométricas empleadas en navegación y astronomía se requerían colosales cálculos, por lo que se le dio la encomienda de simplificar estos a Neper, al que debemos el nombre de **logaritmo** (de logos y aritmo), es decir, número de razón. Esta acepción explica el origen de los mismos y fue expuesto por Neper en su libro **“Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio”** publicado en 1614, adelantándose a los trabajos de Briggs en esta dirección.

El concepto que tenía Neper de los logaritmos, se basaba en una idea ingeniosa y bien conocida; una comparación entre dos puntos animados de movimiento, uno de los cuales engendra una progresión aritmética y el otro una geométrica. Para obviar los números negativos utilizó como razón de la proyección geométrica un número próximo a la unidad, pero menor que ella. Además, como ya dijimos, introdujo la noción mediante una concepción cinemática con lo que implícitamente tuvo en cuenta la propiedad de la función logaritmo de ser continua. Más tarde, Euler tomó como base el número trascendente 2.718281... que denominó e y dio a los logaritmos de este sistema, en honor a su creador, el nombre de Logaritmos Neperianos. Las presentes tablas de logaritmos comunes fueron preparadas por Henry Briggs, después de acordar con Neper que la base 10 sería más satisfactoria en muchos casos.

Otros resultados son también debido a Neper en la trigonometría, y la simbología matemática (el punto decimal que apareció en su obra **“Constructio”**), pero sin lugar a dudas, el nombre de este estará asociado siempre a los logaritmos.

BLAISE PASCAL

Pascal era de estirpe matemática, su padre Etienne era un asiduo visitante de las tertulias del padre Marín Mersenne. Nació en la ciudad de Clermont en la Auvernia francesa en 1623. En París, donde la familia se había mudado cuando Blaise tenía 7 años, recibió su primera

instrucción matemática de su padre, demostrando una precocidad y un talento excepcional, a los 12 años ya conocía los **“Elementos”** de Euclides y era capaz de redescubrir algunos de los teoremas de este.

A los 14 ya acompañaba a su padre a las reuniones con Mersenne, las que constituyeron el germen de lo que en 1666 sería la Academia de Ciencias de París. Su vida fue muy accidentada y se desenvolvió entre el misticismo religioso y su extraordinaria lucidez matemática.

Es posible que sea Pascal el único matemático, aparte del discípulo de Desargues, Felipe la Hire, que aprecia en su justa medida la obra del iniciador de la Geometría Proyectiva y ya con 16 años imprime una hoja que titula **“Ensayo para las cónicas”** en las que reconoce la creación de Desargues y establece el famoso teorema del **“Exagrama Místico”**:

“Si se inscribe un hexágono en una cónica, entonces los puntos de intersección de las prolongaciones de los tres pares de lados opuestos son colineales y recíprocamente”.

Durante el siglo XIX C. J. Brianchon (1785-1864) enuncia y demuestra el dual del teorema de Pascal:

“Si en un hexágono circunscrito a una cónica se unen los vértices opuestos dos a dos por sus diagonales, estas se intersectan en un mismo punto”.



A los 18 años diseña una máquina para calcular que se considera precursora de las computadoras actuales. Ofrece esta a la Reina Cristina de Suecia, la que parece no dio mucha importancia al adminículo de Pascal.

Son conocidos asimismo sus trabajos en hidrostática y presión atmosférica, teoría de las probabilidades y el triángulo aritmético que lleva su nombre y que es debido al matemático chino Chu Shi Kie en 1303. A fines de 1654, ya estaba redactado el **“Triangle arithmétique”**, pero no editado porque Pascal se retiró, por causas personales, a Port-Royal, residencia jansenista y renunció a las ciencias por unos años, hasta que en 1658, después de una noche de insomnio provocado por un dolor de muelas decide distraerse estudiando la cicloide propuesta por Galileo. Esta

curva tiene múltiples aplicaciones y fue de enorme importancia en los primeros pasos del análisis infinitesimal.

Pascal examinó y realizó cuestiones referentes a las superficies y sólidos de revolución de esta curva y otros relacionados con los centroides de estas figuras.

Escribió sobre la cicloide un libro titulado **“Histoire de la roulette”** en 1659. El papel de esta curva en la historia de la ciencia es relevante y veremos que más tarde aparece como solución al problema de la “Tautocrona” que es la *trayectoria de una partícula pesada que partiendo desde cualquier punto del arco de curva, arriba siempre en el mismo tiempo a un punto dado de este arco*. Esta propiedad la empleó Huyghens en la construcción del péndulo. La cicloide es también solución del problema de la braquistocrona que es la *trayectoria de más rápido*

descenso de una partícula pesada entre dos puntos de una campo gravitacional que estudiaron los Bernoulli.

Por otra parte, Pascal escribió dos obras notables en la literatura francesa **“Cartas Provinciales”** y **“Pensamientos”**, a este último nos hemos referido anteriormente. Enfermo desde 1659, muere a la edad de 39 años en 1662.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII con gran asombro y entusiasmo se convencían de la gran cantidad de problemas de geometría y mecánica, aparentemente difíciles, que conducían a las cuadraturas. Cada año, cada nuevo resultado revelaba la generalidad de las operaciones, las cuales era necesario aplicar en la resolución de estos problemas. En esta dirección, es un ejemplo característico los trabajos de John Wallis (1616-1703), profesor de la universidad de Oxford (desde 1649), uno de los fundadores de la Royal Society de Londres (en 1663). En el año 1655 editó **“Arithmetica Infinitorum”**, de la que envía un ejemplar a Fermat.

Las ideas que incluyen elementos de integración definida se difundieron ampliamente entre los matemáticos de los países de Europa Occidental, estos abarcaban amplias clases de funciones algebraicas y trigonométricas. Era necesario sólo un impulso, la consideración de la totalidad de los métodos bajo un punto de vista único, para cambiar radicalmente toda la problemática de la integración y crear el cálculo integral.

En el transcurso del siglo XVII los problemas diferenciales aún se resolvían por los métodos más diversos. Ya en la escuela de Galileo para la búsqueda de tangentes y normales a las curvas se aplicaban sistemáticamente los métodos cinemáticos, recuerden la obtención de la ley de la caída libre de los cuerpos ($s=gt^2/2$). En ellos la tangente surgía como la diagonal del paralelogramo, cuyos lados eran la componente horizontal y vertical de la velocidad, este método cinemático dio comienzo a la consideración de diversos lanzamientos y movimientos complejos y a la determinación de la tangente en cualquier punto de su trayectoria. La exposición sistemática del método y sus aplicaciones más importantes la dio en el año 1640 Roberval. A pesar de su importancia el método cinemático era muy incómodo, ya que partía de particularidades individuales de las curvas, y por eso no era lo suficiente algorítmico. Por eso en aquella época representaba mayores perspectivas para la determinación de tangentes y normales el método de las normales de Descartes, contenido en el segundo libro de su **“Geometría”**.

La acumulación de los diferentes métodos integrales y diferenciales, hace que en estos momentos, el terreno para la obra de Newton y Leibniz, esté ya preparado.

CUESTIONARIO

1. ¿Cuáles fueron las dos primeras curvas, aparte de la recta y la circunferencia, o sus combinaciones, que encontraron aplicación en las ciencias?
2. Compruebe de modo aproximado la Tercera Ley de Kepler empleando los datos actuales siguientes (considere que el semieje mayor del planeta Tierra es la unidad, a la que llamaremos Unidad Astronómica, UA)

Planeta	Número de años	U.A. del semieje mayor
Venus	0,615	0,723 U.A.
Tierra	1,000	1,000 U.A.
Marte	1,881	1,524 U.A.

Júpiter	11,862	5,202 U.A.
---------	--------	------------

3. Determinar el eje mayor de un planeta cuyo período fuese de 30 años.
4. Kepler estudió cubrir el plano con mosaicos formados por polígonos regulares congruentes. Pruebe que solo existen tres polígonos regulares que lo satisfacen y diga cuáles son.
5. ¿Quién influyó más en la matemática del siglo XVII, Descartes o Fermat?
6. ¿Por qué la geometría proyectiva de Desargues no encontró apoyo ni continuidad entre sus contemporáneos?
7. Pruebe que la fórmula de Descartes para los poliedros se satisface para los 5 poliedros regulares.
8. Dada la ecuación de la parábola $y^2=4x$, hállese por el método de Descartes las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva en el punto (1,2).
9. Utilice el método de Fermat para calcular el área bajo la curva $y=x^5$ en el intervalo (0,4).
10. Comprobar para los casos $a=4, 7$ y 10 el Pequeño Teorema de Fermat para el primo 3.
11. Expresar mediante coordenadas polares el Folium de Descartes.
12. Compruebe que la fórmula de Wallis:

$$\int_0^1 (x - x^2)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

es correcta para $n=1$ y $n=3$.

13. Multiplique, usando el Método de Gelosía, los números 6714 y 85321.

Conferencia 8. Newton y Leibniz. L'Hopital.

“Para que pueda surgir lo posible, es preciso intentar una y otra vez lo imposible”

Herman Hesse

Surgimiento del Análisis Infinitesimal

Durante la segunda mitad del siglo XVII comenzaron a desarrollarse las cuestiones que la lectura analítica de los tratados de geometría había suscitado. Así, el vínculo entre el cálculo del área y la búsqueda de las tangentes se fue aclarando gradualmente y quedó sintetizado en los trabajos de Newton y Leibniz. Ambos publicaron muy poco y de manera tardía: cada uno por separado dio respuestas coherentes pero distintas al problema constitutivo del cálculo integral. Ninguno de los procedimientos propuestos obtuvo una aprobación unánime y los seguidores de uno y otro reivindicaron durante muchos años la superioridad de la metodología empleada por sus respectivos maestros.

Pero esta evolución señaló también el comienzo de una nueva etapa en las relaciones de los matemáticos con el mundo físico: en 1687, en su obra maestra, **“Principios matemáticos de la filosofía natural”**, Newton propuso una comprensión unificada de los movimientos de los cuerpos terrestres y celestes, formulada en un lenguaje geométrico semejante a los **“Elementos”** de Euclides. Esta obra, profusamente comentada durante el siglo siguiente, permitió comprender mejor algunos fenómenos nuevos; basándose en ella, en 1731, el matemático francés Clairaut llegaría a precisar la trayectoria periódica de ciertos cuerpos celestes, como la del famoso cometa Halley (bautizado con el nombre del astrónomo que en el siglo XVII predijo su retorno).

La tradición instituida a fines del siglo XVII se mantuvo durante los primeros años del siguiente. Pero si bien los militares, los diplomáticos o los nobles siguieron interesándose por las matemáticas, tuvieron que ceder gradualmente su lugar a los matemáticos profesionales en busca de empleos a tiempo completo. En algunos países estos pertenecían a un establecimiento de enseñanza, en otros ejercían funciones en una academia científica o en la corte de algún soberano. Se daba prioridad a las aplicaciones prácticas, a su contribución al desarrollo de la técnica y al bienestar de la humanidad. Sobre todo en Francia el Siglo de las Luces fue favorable a la difusión de las ideas científicas, que debían garantizar el progreso y liberar a los espíritus de los prejuicios religiosos. D'Alembert escribió numerosos artículos sobre las matemáticas para la **“Enciclopedia”**. No sólo circulaban las ideas sino también se desplazaban los hombres: así, Euler pasó de Berlín a San Petersburgo y Lagrange de la Academia militar de Turín se trasladó a la corte de Federico II de Prusia y, más tarde, a la de Luis XVI en Francia.

De manera aún más sistemática que en el siglo precedente, estos matemáticos se escribían, intercambiando ideas y temas de reflexión, publicaban artículos ya no sobre los tratados e investigaciones concluidas sino sobre las investigaciones que estaban realizando. Así, ampliaron las propiedades del cálculo integral y analítico, procurando multiplicar sus utilidades y sus posibilidades numéricas. Al mismo tiempo, aparecían obras didácticas como la **“Introducción...”** de Euler (1748). Estos textos permitían el aprendizaje directo de las nuevas maneras de pensar, proponían notaciones y métodos y normalizaban las cuestiones que se estimaba de interés. Lo que distingue este siglo del anterior es la confianza creciente en el instrumento algebraico: el cálculo ya no recurre a la geometría en busca de justificación y adquiere por fin, autonomía.

Para recuperar, asimilar y superar el legado greco-árabe fue necesaria la contribución de varias generaciones que participaron en complejos movimientos de reivindicaciones sociales,

de emancipación y de retorno a las tradiciones intelectuales, interesándose a veces por las nuevas técnicas de drenaje o de arquitectura, a veces por las teorías cosmogónicas o por los métodos de cálculo de la superficie.

La primera etapa de la existencia del análisis fue la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió como una parte independiente de las matemáticas casi simultáneamente, como ya dijimos, en dos formas diferentes: en la forma de teoría de las fluxiones en los trabajos de Newton y sus sucesores y en la forma del cálculo de los diferenciales de Leibniz, el cual obtuvo difusión ante todo en el continente europeo.

El desarrollo de los cálculos matemáticos porta un carácter dialéctico expresado claramente. En los dominios de los cálculos ya existentes transcurre el proceso de acumulación de premisas, elementos y partes componentes del nuevo cálculo.

ISAAC NEWTON



La primera forma del análisis es la teoría de las fluxiones, el descubrimiento del cual pertenece a Isaac Newton (1642-1727). Este nació en una familia de granjeros en la región de Woolsthorpe cerca de la ciudad de Cambridge (Inglaterra), en cuya universidad se graduó en 1655 con el grado de bachiller y en 1668 el de maestro.

Habiéndose establecido pocos años después que Oxford, la Universidad de Cambridge es la segunda universidad más antigua de Inglaterra y una de las más antiguas del mundo. Se fundó a principios del siglo XVIII en un pequeño, pero importante centro religioso y comercial, que fuera un antiguo asentamiento romano, conocido como **Cantabrigénesis** (puente sobre el río Canta o Granta, hoy denominado Cam-de

de ahí la derivación a Cambridge, que significa “puente sobre el Cam”).

De entonces a la fecha algunas cosas han cambiado, aunque mucho menos de las que uno podría esperar. Cambridge se jacta de sus múltiples tradiciones, que a menudo, resultan incomprensibles para el recién llegado. La toga, la siguen utilizando estudiantes y maestros en ocasión de diversos quehaceres cotidianos de la Universidad, algunos tan mundanos como comer. A pesar de ello, la vida universitaria medieval era bastante distinta de la actual. Por ejemplo, los estudiantes se matriculaban a los 14 ó 15 años, y completar una educación universitaria les tomaba alrededor de 7 años. Los requisitos de ingreso incluían, tan sólo, saber leer, escribir y tener rudimentos de latín.

Entonces prevalecía la tradición escolástica caracterizada por una educación apoyada en la memoria y en la repetición. Se estudiaban las llamadas Siete Artes Liberales, divididas en dos grupos de materias, el Trivium, que proveía la educación humanística y el Cuadrivium, fuente de la educación científica. Un grado de Bachiller en Artes se obtenía después de completar el Trivium que constaba de tres cursos: Gramática, Lógica y Retórica y cuyo objetivo era adquirir un dominio completo del latín, con lo que se aseguraba el poder tomar parte en los debates o discusiones públicas formales que constituían el alma de la educación universitaria medieval. Los estudiantes podían participar en estos debates a partir de un 2do año y su desempeño era examinado por su director de estudios (esta forma de examen sobrevivió hasta el siglo XVIII).

La acreditación del Trivium permitía al estudiante continuar con el Cuadrivium, que consistía de 4 cursos: Aritmética, Música, Astronomía y Geometría que al aprobarlos hacían merecedor al bachiller del grado de Maestro en Artes. Una vez adquirido el grado podía continuarse estudiando teología, leyes (civiles o religiosas) lo que conducía posteriormente a la práctica de una profesión bien remunerada.

Una de las peculiaridades más significativas de la Universidad proviene de su organización en Colleges o sociedades académicas, la cual se conformó durante el siglo XV y perdura hoy día. Estas instituciones se fundaron a partir del patrocinio de benefactores ricos y su función consiste todavía en agrupar a estudiantes y profesores, darles techo y alimento. Gradualmente su objetivo se amplió para ofrecer asesoría a los estudiantes a fin de lograr su mejor desempeño en los cursos y exámenes de la Universidad, la cual, además de organizar la enseñanza, es la única facultada para otorgar grados.

Profesor Lucasiano

Se reincorporó a la vida universitaria en 1667 convirtiéndose “en Miembro Menor de la junta de gobierno [del Trinity]” (V. E. Rickey-**“Isaac Newton: hombre, mito y matemáticas”**, Mathesis VI (2), 1990, 119-163) y un año más tarde es Miembro Principal. A finales de octubre 1669 sucedió a Isaac Barrow en la cátedra Lucasiana, primera cátedra matemática que se instituyó en esa universidad. En 1672 fue elegido miembro y en 1703 presidente de la Royal Society Londinense.

Comparada con otras instituciones semejantes, Cambridge tardó mucho tiempo en instituir una cátedra para la enseñanza de las matemáticas. Otras reconocieron la necesidad de instituir la con mayor anticipación, como Oxford, por ejemplo, que fundó su primera cátedra matemática: La Cátedra Salviliana en 1619, cuyo primer ocupante fue Henry Briggs. Esta tendencia llegó incluso antes al nuevo continente que a Cambridge. En México, la real y pontificia universidad fundó, en 1638, la primera cátedra de matemática en América y nombró al fraile mercedario y matemático Fray Diego Rodríguez para que la ocupara, (E. Trabulse-**“La ciencia perdida. Fray Diego Rodríguez. Un sabio del siglo XVII”**. Fondo de Cultura Económica, México, 1985). Casi 30 años más tarde, en 1662, se fundó en Cambridge la Cátedra Lucasiana, primera en matemáticas de esa universidad, la cual carecía inicialmente de prestigio. Isaac Barrow fue el primero en ocuparla y sólo duró en ella 4 años, abandonándola para ocupar otra de Filosofía dentro de esa misma universidad que contaba con mayor reconocimiento. Fue entonces cuando, a la edad de 26 años, Newton lo sucedió en el cargo; mismo en el que permanecería más de 30 años. Su arribo a la cátedra estuvo marcado por las famosas **“Conferencias sobre óptica”** en las que detalló por primera vez su contribución revolucionaria al estudio del color y la difracción de la luz.

Su responsabilidad como profesor Lucasiano incluían impartir cátedras una vez por semana y depositar 10 conferencias al año en la biblioteca. Durante los primeros 17 años en el cargo, depositó de 3 a 10 conferencias por año y después ninguna. Como catedrático no dejó indicios de su labor. De sus cursos se sabe poco y sobretodo parece que muy poca gente, o incluso a veces nadie, asistía a ello. Su amanuense Humphrey Newton, con quien no tenía ningún parentesco, escribió:

“Rara vez salía de su aposento... a no ser en horas prefijadas cuando impartía su cátedra como Profesor Lucasiano que era, donde tan pocos asistían a oírle y menos aún lo entendían que, a menudo, y hasta cierto punto, por falta de escuchas hablaba a las paredes.” (cfr. C. C. Gillispie-**“Dictionary of Scientific Biography”**, 16 Vols, Scribners: New York, 1970-1980; Vol.X pág. 44).

Su propia efigie es símbolo de devoción. Isaac Milner, por ejemplo, quien más tarde sería también Profesor Lucasiano y Vice-rector de la Universidad, al graduarse de matemático, en 1774, con el más alto rango que otorga Cambridge (senior wrangler incomparabilis) y para conmemorar tal evento le mandó a hacer a un joyero un sello magnífico en el que estaba bellamente tallado el busto de Sir Isaac Newton.

En la teoría de fluxiones se resuelven dos problemas principales, formulados, tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

1. determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado. De otro modo: determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes;
2. dada la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado. En términos matemáticos: determinar la relación entre los fluentes dada la relación entre las fluxiones.

El primer problema, llamado *problema directo* de la teoría de fluxiones, representa el problema de la diferenciación implícita de funciones, en el caso general y obtención de la ecuación diferencial que expresa las leyes fundamentales de la naturaleza. El segundo, un *problema inverso* de la teoría de fluxiones, es el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general. En particular, en este problema se trata de la búsqueda de funciones primitivas. De esta manera, la integración en la teoría de las fluxiones, se introduce inicialmente en forma de integración indefinida e introduce para su resolución un algoritmo de diferenciación de funciones.

El problema inverso de la teoría de las fluxiones: la búsqueda de la relación entre los fluentes, conocida la relación entre las fluxiones, por su presentación es extraordinariamente general. Ella es, como indicamos, equivalente al problema general de integración de cualquier ecuación diferencial. Los enfoques de Newton para la solución de un problema tan general y los procedimientos de su resolución se construyeron gradualmente.

Ante todo, la simple inversión de los resultados de búsqueda de fluxiones le dio una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo advirtió la necesidad de agregar, en esta inversión, una constante aditiva. Después resultó que la operación de inversión, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas de la forma $Mdx + Ndy = 0$, obtenidas en el cálculo de las fluxiones, no siempre era posible y no da la función original. Newton advirtió esto, considerando aquellos casos donde $M=M(x,y)$ y $N=N(x,y)$ eran racionales enteras. Tanto en el método directo como el inverso, Newton en muchas ocasiones recurre al desarrollo de las funciones en series de potencias, como medio universal de la teoría de las fluxiones. Para esto, Newton utilizó todos los resultados de sus antecesores y acopió un gran arsenal de métodos. Entre ellos los que más frecuentemente se aplicaban son:

- a) generalización del teorema (inductivo) sobre las potencias del binomio $(a+b)^n$ en caso de exponente fraccionario y negativo;
- b) división (directa) del numerador, de las funciones racionales fraccionarias, entre el denominador;
- c) el método de los coeficientes indeterminados en diferentes variantes.

El uso de la teoría de las fluxiones, así como su poca disposición a publicar los resultados, lleva a la necesidad de una exposición racional de un gran número de conceptos básicos y problemas relacionados entre sí. Newton comprendió bien esto, sin embargo, no pudo vencer estas dificultades. En búsqueda de una salida creó el método de las primeras y últimas relaciones que es una de las primeras formas de la teoría de límites. Él la expuso en los **“Principios matemáticos de la filosofía natural”** (1687), cuya primera parte se llama: **“Sobre el método de las primeras y últimas relaciones, mediante el cual se demuestra lo**

que sigue". El destino ulterior de la teoría de fluxiones, está relacionada con una lucha encarnizada que estalló inmediatamente después de la aparición de esta teoría, precisamente en torno a sus fundamentos. La filosofía natural de Newton, buena y empírica, no excluye de la trama del mundo y de la composición de los cielos las fuerzas inmateriales. A lo único que renuncia es a la discusión de su naturaleza y ocupándose de ellas tan sólo como causas de los efectos observables, las trata -puesto que es una filosofía natural matemática- como causas o fuerzas matemáticas, es decir, como conceptos o relaciones matemáticas.

Ya desde 1670 las críticas que Newton dirige contra Descartes y Hooke no están motivadas tanto en las hipótesis, cuanto en el hecho de no reconocer que la verdadera filosofía consistía en estimar las leyes de la naturaleza a partir de los fenómenos. Estas leyes debían explicarse en términos de movimiento de la materia, sin tratar de remontarse a la causa de ese movimiento, que ya no es de naturaleza mecánica. Si la causa de ese movimiento no depende de la materia, no tiene sentido -piensa Newton- el tratar de imaginar modelos al estilo cartesiano. El límite de la filosofía natural estaría en el descubrimiento de las fuerzas, pues más allá de ellas está Dios; y ¿quién sería capaz de descubrir sus secretos planes sobre el Universo?

Newton termina sus cuestiones de la **"Óptica"** (1704) como un platónico de los viejos tiempos de Cambridge, al considerar que la verdadera filosofía ha sido revelada y luego olvidada y corrompida, lo cual explica sus frecuentes citas de los griegos, que sin duda consideraba como lejanos resplandores en la oscuridad de la caverna platónica.

De la lectura atenta de las Cuestiones de la **"Óptica"** y del Escolio General de los **"Principia..."**, que presentamos a continuación:

"Hasta el presente no he logrado descubrir la causa de esas propiedades de la gravedad a partir de los fenómenos y no finjo hipótesis. Pues todo lo no deducido a partir de los fenómenos ha de llamarse una hipótesis, y las hipótesis, metafísicas o físicas, ya sean de cualidades ocultas o mecánicas, carecen de lugar en la filosofía experimental (pág. 187)",

se desprende que la meta última de la Ciencia -según Newton- es llegar a la causa primera de todas las cosas, causa que, nos dirá repetidamente, no es ni mecánica ni física.

Se desprende también la conciencia que Newton tiene sobre la necesidad de desarrollar a través de la filosofía natural valores éticos y valores morales. La ciencia -piensa Newton- debe llevar al perfeccionamiento del hombre, ayudándolo a descubrir los deberes que tiene para consigo mismo y para con Dios.

Para comprender esto, nada mejor que leer el último párrafo de la **"Óptica"**:

"En la medida en que descubramos por filosofía natural cuál es la primera causa, qué poder tiene sobre nosotros y qué beneficios obtendremos de ella, en esa misma medida se nos aparecerá con la luz natural cuál es nuestro deber hacia ella, así como hacia nosotros mismos. No cabe duda de que, si el culto a los falsos dioses no hubiese cegado a los paganos, su filosofía moral habría ido más lejos de las cuatro llamadas virtudes cardinales y, en lugar de enseñar la transmigración de las almas y adorar al Sol, la Luna y los héroes muertos, nos habrían enseñado el culto al Verdadero Autor y Benefactor, del mismo modo que lo hicieron sus antecesores bajo el gobierno de Noé y sus hijos antes de que se corrompiese."

Newton en los albores del siglo XXI

El último gran homenaje que Cambridge ha ofrecido al gran matemático es la fundación de un Instituto para la investigación matemática que lleva su nombre: El Instituto Isaac Newton de Ciencias Matemáticas, el primero de su clase en el Reino Unido, se inauguró en esa Universidad el 3 de Julio de 1992. Al frente de él está el Master de Trinity y presidente de la Royal Society, Sir Michael Atiyah, connotado matemático.

El objetivo del Instituto es funcionar como un centro de estudios avanzados donde científicos y matemáticos de todo el mundo se reúnan, por periodos de hasta 6 meses, para trabajar conjuntamente sobre un tema específico. Se pretende lograr enfoques multidisciplinarios, para lo cual cada programa será un intenso esfuerzo de colaboración entre científicos de punta deseosos de avanzar en la comprensión de los aspectos matemáticos de un campo particular.

Es interesante notar que en junio de 1993 Andrew Wiles escogió este lugar para exponer su demostración del Lema de Taniyama que demuestra, después de 356 años, el Último Teorema de Fermat.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Si la comparamos con los Países Bajos e Inglaterra, Alemania era, en la segunda mitad del siglo XVII, un país atrasado. Tras el fracaso de la Guerra Campesina (1525) empezó la de los Treinta Años, que trajo muchas y mayores calamidades a la sociedad alemana. Eran tiempos difíciles para la ciencia y las corrientes materialistas de la filosofía.



Esta es la situación en que aparece Leibniz (1646-1716), que nació en Leipzig en la familia de un profesor de filosofía y moral de la universidad local. Después de terminados sus estudios (en las universidades de Leipzig y Jena) pasó al servicio de los gobernantes germanos: del príncipe elector de Maguncia y a continuación del Duque de Hannover. Fueron muchos sus descubrimientos teóricos y prácticos, el utilitarismo que desarrolló lo llevó a una nueva concepción de toda la labor científica, espíritu que transmitió a la Academia de Ciencias de Berlín (en realidad, Sociedad de Ciencias de Berlín, luego Real Academia Prusiana) de la que fue fundador y Presidente Vitalicio. Por sus méritos científicos, fue elegido miembro de la Royal Society (1673) y la Academia de Ciencias de París (1700).

Al hablar de Leibniz nos centraremos, fundamentalmente, en sus investigaciones en el campo del cálculo diferencial. Consideremos x la longitud de un segmento, considerémosla que pueda hacerse más pequeña que cualquier número positivo dado de antemano, lo escribiremos así dx (antes x/d , pues Leibniz se esforzó por reflejar la inversibilidad mutua de los problemas de los símbolos, si $\int I = ax$, entonces $I = ax/d$, de donde llegó a la idea, de que es mejor escribir $d(ax)$, por lo que del símbolo anterior comprendió que x/d es lo mismo que dx) y como él, la llamaremos indefinidamente pequeña, denominación que actualmente ha sido sustituida por la de infinitamente pequeña; el

descubrimiento de Leibniz es, ante todo, dialéctico: la razón de dos infinitésimos puede permanecer finita.

La afirmación que dx/dy puede ser finita cuando $dx, dy \rightarrow 0$ (y por ende, la propia concepción de los infinitesimales), movió inmediatamente, a las más acérrimas discusiones, críticas cuyo tono dio el conocido Obispo Berkeley (con una buena cuota de razón, ver la obra del autor **“Del Partenón a la Realidad Virtual. La idea de la demostración en la Historia de la Matemática”**, ISPH, 1998) en obras como **“El analista o el razonamiento dirigido a un matemático no creyente”** (1734) en el cual se esforzaba por demostrar que el análisis no tiene una fundamentación mucho mayor que la religión y por el otro L'Hopital, los Bernoulli, etc., principales divulgadores del nuevo método.

Pero a medida que progresa el cálculo infinitesimal, se hará indispensable, para facilitar los progresos, superar en la definición de derivada, la contradicción que se encuentra superada a cada instante en la práctica misma del cálculo (recuerde, el cociente incremental), es decir, que habrá que brindar en definitiva, de la operación de derivación, una definición no contradictoria, aspecto que se logrará con la profundización y esclarecimiento del concepto de límite, labor de los matemáticos del siglo XIX y entre ellos el más grande: Cauchy.

Pero no sólo en este aspecto hay que hablar del Cálculo Infinitesimal, pues en las tareas de la ciencia entra el estudio, no solamente de aquello que ya está realizado sino, también de aquello que puede ser generalizado o utilizado en una dirección determinada, en caso contrario, la ciencia explicaría, solamente, el mundo real, mientras que su tarea fundamental consiste en transformarlo. Es por eso, que el estudio de aquello que es real en la posibilidad, es en la misma medida, una tarea fundamental, como el estudio de lo ya hecho realidad. Ejemplo de esto, son las nuevas nociones del espacio y sus aplicaciones: la Teoría de las Catástrofes, el Caos, los Fractales, etc., hechos que destruyen nuestra noción de dimensión, contradicción que sólo puede ser resuelta en los marcos de la matemática y con un método dialéctico de conocimiento.

Citemos algunos más conocidos, los espacios funcionales de infinitas dimensiones, que ya han sido utilizados ampliamente por la física, partiendo de la Mecánica Cuántica, por sólo citar un ejemplo, que interpreta el mundo físico construyendo estructuras abstractas con entes arbitrarios; relacionados por operaciones convencionales, sin pretensiones ontológicas de realidad, ni aún de modelo intuitivo, construido a semejanza del mundo objetivo, cuya esencia aspiramos a conocer; donde existe una correspondencia entre ese aparato simbólico y los entes físicos y que a cada operación entre esos entes, corresponda una operación en la estructura antes construida, es decir, un isomorfismo entre los símbolos y el mundo físico, que nos permita estudiar el mundo físico; teoría que en los años 25-26 de este siglo cobró gran desarrollo, gracias a los trabajos de Schrodinger-Heisenberg-Dirac; obteniendo resultados similares por diferentes vías, reflejo de la armonía matemática de la relación mundo físico-espacio de Hilbert y que ha llevado, entre otras, al convencimiento de que en la nueva física, conserva su eficacia el análisis clásico, pero sus funciones continuas, representan densidades de corpúsculos o probabilidades de distribución en el espacio.

Desde el punto de vista filosófico, es interesante notar que Leibniz consideraba que para comprobar las “verdades del entendimiento”, bastan los principios de la lógica aristotélica y para comprobar las “verdades de hecho” (las de la experiencia), es indispensable el principio de razón suficiente. Se considera a Leibniz, junto a Russell, Boole y otros, como fundador de la lógica matemática, pues en su afán de materializar una idea que lo acosa desde su juventud, la creación de un “alfabeto de los pensamientos humanos” y de un “idioma universal”, logró formular la idea del cálculo lógico universal, a este resultado lo denominó “característica universal”, que contiene muchos de los conceptos de la lógica simbólica de hoy, pero que entonces no tuvieron mayor trascendencia, pues quedaron inéditos hasta este siglo.

El valor práctico del cálculo de Leibniz, su sencillez operativa atrajo la atención de los científicos. Rápidamente se convirtió en el centro de todas las matemáticas, en el arma fundamental de investigación. Pero en este cálculo había un lugar débil: quedaba sin aclarar qué explicación racional se puede dar a los conceptos fundamentales que se apoyaban en la proximidad infinita, pequeñez infinita o proceso infinitamente ilimitado. En los manuscritos y artículos Leibniz constantemente retorna al problema no resuelto de la fundamentación del análisis infinitesimal. Él realizó muchos esfuerzos desde distintos puntos de vista. En sus obras pueden encontrarse: tratamiento de los infinitesimales como magnitudes no arquimedianas; utilización de la apreciación intuitiva de un infinitesimal potencial; referencias al antiguo método de exhaustión y la introducción de todas sus dificultades; la postulación de la posibilidad de la sustitución de las relaciones entre infinitesimales por relaciones entre magnitudes finitas; ideas sobre límites no desarrolladas, tendencia hacia ella; introducción en los razonamientos, en calidad de apoyo, de la continuidad, como si fuera intrínseca a la naturaleza de todas las cosas.

Sin embargo, el problema de la fundamentación del análisis infinitesimal no pudo ser resuelto por Leibniz, como tampoco por Newton. Los fundamentos de esta parte importante de la matemática, en la cual se sucedían unos tras otros logros notables, quedaban sin aclaración, en misterio. En el dominio de la fundamentación, el nuevo análisis, en el transcurso del siglo XVII y gran parte del siglo XVIII, vivió un período “**místico**”, según Marx.

Quisiéramos detenernos en las discusiones sobre la prioridad en el descubrimiento del nuevo cálculo, que en su época adquirió un carácter tenso. Al parecer, Newton y Leibniz descubrieron sus formas del cálculo independientemente uno del otro, apoyándose ambos, en la experiencia de numerosos predecesores, en los cuales se acumuló una suficientemente cantidad de premisas para sus descubrimientos. Newton, parece ser que alcanzó el éxito antes, Leibniz algo después. Sin embargo, la prioridad en la publicación, la superioridad en la comodidad de los algoritmos y símbolos, los méritos en la propaganda activa del nuevo cálculo pertenecen a Leibniz.

Señalemos por último, que el surgimiento de la Geometría Analítica y el Análisis Infinitesimal creó a finales del siglo XVII una nueva situación en las matemáticas, se hizo tan significativa que las matemáticas de este período suelen denominarse, las matemáticas de las magnitudes variables.

EL PRIMER LIBRO DE TEXTO DE CALCULUS

El año 1996 marcará exactamente 300 años de la aparición del “**Analyse des infiniment petits**” de L'Hôpital (Guillaume-Francois-Antoine de L'Hospital, “**Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes**”, París, 1696. Las páginas indicadas en este trabajo se refieren a la edición original). Este libro, el primer libro de texto publicado sobre el CALCULUS, marcó la mayoría de edad del nuevo método de investigación, mostrando además, la influencia y popularidad que pronto le acompañaría.

Históricamente, la integración antecedió a la diferenciación por, prácticamente, dos mil años (ver Margaret E. Baron-“**The origins of the infinitesimal calculus**”, Pergamon Press, Oxford-Edinburgh-New York, 1969. En este se hace un buen uso de estudios anteriores de Clagett, Hofmann, Scott, Seriba, Whiteside y Toeplitz, completando a C. Boyer-“**The history of the calculus and its conceptual development**”, Dover, New York, 1959). El antiguo método griego de exhaustión y las medidas infinitesimales de Arquímedes (para una discusión del trabajo de Arquímedes sobre espirales, con especial referencia a la determinación de tangentes a ellas, su método general de reducir problemas de máximos a otros de tangentes y su importancia en el desarrollo de los métodos infinitesimales en los

siglos XVI y XVII, el lector puede consultar I. G. Bachmakova-“**Les méthodes différentielles d'Archimède**”, Arch. History Exact Sci.2, (1964/65), 87-107), representan ejemplos antiguos de procesos límites de sumas integrales, pero no fue hasta el siglo XVII que Fermat, encontró las tangentes y los puntos críticos por métodos equivalentes a la evaluación de cocientes incrementales. Él descubrió la naturaleza inversa de estos dos procesos, junto con la consecuente explicación de la anti-derivación en la determinación límite de sumas. La diferenciación, tanto inversa como directa, convirtió el algoritmo básico en una nueva y poderosa parte de la matemática. La integración fue tomada como “la memoria de la derivación” y no fue hasta 150 años más tarde, que la atención se dirigió directamente al concepto de sumación en el cálculo (consultar Thomas Hawkins-“**Lebesgue's theory of integration. Its origins and development**”, The University of Wisconsin Press, Madison, Wis.-London, 1970).

Como sabemos, el CALCULUS apareció impreso, por primera vez, en una memoria de seis páginas de Leibniz en el Acta Eruditorium de 1684, que contenía una definición de la diferencial y dio pequeñas reglas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces. Él incluyó también pequeñas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos.

Desgraciadamente, este corto informe, contuvo algunos errores lo que contribuyó a que permaneciera enigmático a los matemáticos de la época (una traducción del trabajo de Leibniz de 1684 aparece en D. E. Smith-“**A Source Book in Mathematics**”, New York, 1929, pp.619-626). La base del método de fluxiones de Newton fue publicado primeramente, más bien impropriamente, como lemas en su “**Principia**” de 1687. Aquí encontramos algunas propiedades de límites e indicó pequeñas direcciones para encontrar “momentos” infinitesimales pequeños de productos, potencias y raíces (Sir Isaac Newton-“**Opera quae exstant omnia**” (ed. por Samuel Horsley, 5 vol., Londres, 1779-1785). Ver “**The mathematical papers of Isaac Newton**”, Cambridge University Press, ed. por D. T. Whiteside, 4 vols, London-New York, 1967-1970).

Se dice que cuando Huygens, sobre 1690, deseó enseñar el nuevo método, no pudo encontrar un hombre calificado para exponer este. Newton entre 1669 y 1676 compuso varios tratados sobre los elementos de las fluxiones, pero no aparecieron impresos hasta 1704. John Craig en 1685 y 1693 publicó dos trabajos basados en parte, sobre el método de Leibniz, pero estos no fueron entendidos como introducciones y presentaban además, dificultades con la lectura, basadas en la forma geométrica en la cual fueron presentados.

Sobre el continente, los hermanos Bernoulli fueron pioneros en el nuevo cálculo, precisamente Jean fue quien instruyó a L'Hôpital, quien a su vez, preparó a Huygens. Esta fue la atmósfera de entusiasmo, que rodeó al nuevo cálculo al cerrar el siglo XVII. El mismo Jean sobre 1691-1692 preparó dos pequeños libros de textos, pero su publicación fue desplazada y el que trataba sobre el cálculo integral apareció, finalmente, en 1742 (Jean Bernoulli-“**Opera Omnia**” (4 vol., Lausanna y Génova, 1742). Ver Johannis Bernoulli-“**Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita**”, I-IV, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Ed. J. E. Hofmann, 4 vols, Hildesheim, 1968; que incluye una introducción biográfica y una pequeña bibliografía) y el de cálculo diferencial, casi doscientos años después (Jean Bernoulli-“**Die Differentialrechnung aus dem Jahre 1691/92**”, Clásicos de Ostwald, No.211, Leipzig, 1924). Es por tanto comprensible, la atención que se le dirigió al libro de texto de L'Hôpital como introducción a un mundo nuevo en las Matemáticas.

L'Hospital, Marqués de San Mesme (años más tarde, la familia cambió la ortografía de su nombre, llamándose L'Hôpital en lugar de L'Hospital), nació en 1661. Su interés por la

Geometría fue de temprana edad y a los 15 años, resolvió el problema sobre la cicloide propuesto por Pascal. L'Hôpital iba a ser militar, pero tiene que renunciar a esta carrera a causa de su gran miopía y, a partir de este momento, se dedica enteramente a sus pequeños estudios matemáticos y mecánicos, bien aconsejado por Malebranche, mantiene correspondencia con Leibniz. Desde 1690, tiene relación epistolar con Huygens y estudia los primeros trabajos de Leibniz sobre el Análisis Infinitesimal, aunque no consigue penetrar bien en su esencia.

Cuando Jean Bernoulli estuvo en París en 1692, L'Hôpital durante cuatro meses, estudió la geometría infinitesimal bajo su dirección, formación que continuará por correspondencia en los años siguientes. Más adelante, L'Hôpital le escribió a su maestro, que pensaba publicar un pequeño tratado sobre secciones cónicas, añadiéndole un pequeño apéndice sobre el nuevo cálculo, demostrándole, de este modo, su reconocimiento; por otra parte, él quería que este sirviera de introducción a un tratado más elaborado, “De scientia infiniti”, el cual Leibniz planeaba escribir (ver L'Hôpital, op. cit., Prefacio).

El libro prometido sobre cónicas, fue desplazado por el autor y apareció, póstumamente, en 1707 (es de interés notar que este trabajo, **“Traité analytique des sections coniques”**, gozó de una gran popularidad durante el siglo XVIII, apareciendo en ediciones sucesivas en 1720, 1723 (traducción inglesa de Stone), 1770 (Venecia) y 1776), pero el **“Analyse...”** fue publicado rápidamente en 1696. Su recepción, no fue una aclamación unánime, los admiradores de la clásica geometría sintética (“antiguos”) no aprobaban la nueva aproximación analítica. Incluso, en 1701, la Academia de Ciencias estaba dividida (encabezados, por un lado Abbe Gallois y por el otro Rolle) y optó por nombrar un jurado para dilucidar la cuestión, lamentablemente, L'Hôpital no pudo presenciar el triunfo absoluto de su libro, pues murió en 1704.

En realidad esta controversia, fue el segundo de los tres ataques contra el nuevo método. El primero fue cuando Nieuwentijdt atacó el trabajo de Leibniz y el tercero fue el del controvertido **“El Analista...”** en los años 1734-1735, concerniente al cálculo de Newton.

El **“Analyse...”** representó el primer tratamiento sistemático del Calculus y como tal, presenta una buena imagen del nivel de conocimiento de la época. Dividido en diez secciones o capítulos y un Prefacio (que incluye un pequeño esbozo histórico, en el cual el autor admite que Newton también tiene una “especie” de cálculo, aunque prefiere y utiliza las contribuciones de Leibniz).

La primera sección (pp.1-10 de la edición original) es dedicada a las definiciones fundamentales, consideraciones y reglas de trabajo. Las fórmulas básicas para diferenciar funciones algebraicas -sumas, productos, cocientes, potencias y raíces- son derivadas por L'Hôpital a la manera de Leibniz.

La segunda sección (pp.11-40) está dedicada a los problemas de tangencia. El autor encuentra las tangentes a diversas curvas: hipérbolas y parábolas, espirales de varios tipos, la cuadratrix de Dinostratus, la conoide de Nicomedes, la cisoide de Diocles, la cicloide, traxtriz y la curva de los logaritmos. Varias de estas curvas son definidas analíticamente, mientras que otras son definidas cinemáticamente.

El tercer capítulo (pp.41-54) versa sobre máximos y mínimos.

Puntos de Inflexión y de rebroussement (puntos cúspides para los cuales las tangentes son horizontales) son tratados en la sección cuarta (pp.55-70), saliendo a relucir la cuestión del diferencial de segundo orden, punto neurálgico que se criticó en los años 1695-1696 cuando el primer ataque al nuevo cálculo.

El concepto de radio de curvatura como tal, no es presentado en la manera moderna, pero es dado en el contexto en el cual surge históricamente. En la sección cinco (pp.71-103) también se incluyen los tópicos de evolutas y envolventes.

Las secciones seis y siete (pp.104-119, 120-130) tratan sobre caústicas por reflexión y refracción. A pesar de que no son tópicos tradicionales del cálculo, eran muy populares a fines del siglo XVII. El capítulo ocho (pp.131-144) incluye el bien conocido método de Leibniz de diferenciación con respecto al parámetro.

La parte del libro que despertó más polémicas fue la novena (pp.145-163), la cual trataba sobre las formas indeterminadas, y cuyo resultado básico es la conocida “Regla de L'Hôpital”. Así, cuando en los *Journal des Scavans* del 3 de Agosto de 1702 y del 15 de Febrero de 1703, Saurin alaba a L'Hôpital por su método para tratar problemas indeterminados. Le hace patente Jean Bernoulli -indelicadamente, pocos meses después de la muerte de L'Hôpital- en el *Acta Eruditorium*, VIII, de 1704, que los métodos y ejemplos explicativos y muchos detalles de este libro son suyos y no del autor (confirmado por la publicación de las cartas de los años 1693-1694, tiempo después).

El crédito de Jean, que se ha visto muy disminuido por sus discusiones con su hermano Jakob, lleva a Saurin a rechazar irónicamente estas reclamaciones, por considerarlas injustificadas.

Más adelante, en 1742, Jean vuelve a protestar ante el comentario (anónimo) de Crousaz sobre el **“Analyse...”** (1721) y contra el **“Method of Fluxions”** (1730) de Stone, traducido al francés (1735), cuya primera parte es una traducción inglesa de la de L'Hôpital, reclamando sus derechos de prioridad infructuosamente.

La décima y última sección del tratado de L'Hôpital (pp.164-181) está quizás, fuera de armonía con el resto de la obra. Aquí realiza una “comparación” entre el nuevo método y el procedimiento antiguo de obtención de máximos y mínimos, de Descartes y Hudde, sobre esta base, él enfatiza que el método de Leibniz ofrece soluciones generales, mientras que el otro el aplicable, sólo, a casos particulares.

El libro de L'Hôpital ocupa en el Calculus, un lugar similar al que ocuparía el **“Traité élémentaire”** de Lavoisiers en Química, casi una centuria después. Para apuntar esto, señalemos que, a pesar de la publicación del **“Introductio ad analysin infinitorum”** de Euler, este siguió conservando su vigencia debido, principalmente, a que el lenguaje y notación en este, difieren poco del actual. Su deficiencia en aplicaciones a la ciencia, fue, prácticamente en el siglo XIX, lo que invalida este texto. Así y todo, en 1715 aparece la segunda edición, en 1721 Crousaz publica en París su **“Commentaire sur l'analyse des infiniment petits”**, consistente en una serie de notas suplementarias. Más adelante Varignon saca sus **“Eclaircissements sur l'analyse des infiniment petits”**, en 1730 (a pesar de la “distancia” entre los matemáticos británicos y continentales) Stone publica una traducción inglesa del **“Analyse...”**, recíprocamente, Buffon prepara una traducción francesa del **“Method...”** de Newton. El título del libro de Stone es **“El método de fluxiones tanto directo como inverso. Una traducción del celebrado Analyse des infiniments petits del Marqués de L'Hôpital: y un suplemento posterior del traductor”**.

El **“Analyse...”** continuó, durante el siglo XVIII como el manual elemental más apreciado de matemáticas superiores. Durante la última mitad del siglo encontró un fuerte rival en el **“Istituzioni analitiche”** de María Agnesi (Milán, 1748), pero la frecuencia de la publicación del texto de L'Hôpital indica que el “viaje” de este continuó. El apareció en nuevas ediciones francesas, corregido y aumentado, en 1758 (París), 1768 (Avignon) y en 1781 (París) y traducciones latinas en 1764 y 1790 (ambas en Viena).

Una idea de esta celebridad, podemos ilustrarla con el hecho que, en 1774 Abbé Sauri en su **“Cours complét de mathématiques”** (5 volúmenes), se refiere al libro de L'Hôpital como *“connue de tout le mond”*.

Finalizando el siglo, Lacroix (S.F. Lacroix es, quizás, el más prolífico escritor de libros de textos de los tiempos modernos, si nos guiamos por las múltiples ediciones hechas a sus obras. En 1848 apareció en París, la vigésima edición de su **“Traité élémentaire d'arithmétique”** y la sexagésima de sus **“Elémens de géométrie”**. La vigésima de sus **“Elémens d'algèbre”** fue publicada en París en 1858, y la novena edición del **“Traité élémentaire de calcul”** en 1881. Y estos números no incluyen el gran número de ediciones en otras lenguas) comienza la publicación de su renombrada serie de libros de textos y uno de estos, el **“Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul integral”** (París, 1802) tomó el lugar que durante el siglo XVIII había ocupado el **“Analyse...”**. Los conceptos de función y límite, se convierten en punto central del análisis infinitesimal y hacen que el trabajo de L'Hôpital ya no sea actual; a pesar de todo, es indudable la influencia que ejerció, durante un siglo, el **“Analyse des infiniment petits”** del Marqués de L'Hôpital.

CUESTIONARIO

1. Presente la construcción de tangentes por medio de consideraciones cinemáticas.
2. Analice la relación cuadratura-construcción de tangentes, a partir de las ideas de Isaac Barrow.
3. ¿Cómo procedía Newton para resolver el problema directo del cálculo de fluxiones?
4. El problema inverso, ¿cómo lo solucionaba?
5. Discuta la influencia metodológica de los **“Principia...”**.
6. Haga un esbozo del primer trabajo publicado, sobre el cálculo diferencial.
7. Haga un esbozo del primer trabajo publicado, sobre el cálculo integral.
8. ¿Qué razones propiciaron la creación de una “escuela” en torno a Leibniz y no así con respecto a Newton?
9. Discuta los problemas de los fundamentos en los trabajos de Newton y Leibniz.
10. ¿Cuál fue el hecho básico, que propició que una teoría no fundamentada y esencialmente contradictoria, ganara tantos adeptos?
11. Discuta el papel jugado por el primer libro de texto de CALCULUS, en la historia de la matemática.
12. Es conocido que, hasta el siglo XVII, los mejores resultados obtenidos para el valor de π , eran los siguientes:
 - ! Ptolomeo, 3.1416,
 - ! Tsu Ch'ung Chi (430-501), 355/113,
 - ! Al'Khwarizmi, 3.1416,
 - ! Al'Kashi, 14 lugares,
 - ! Viète, 9 lugares,
 - ! Roomen (1561-1615), 17 lugares,

! Van Ceulen (1540-1610), 35 lugares.

El surgimiento del Calculus, permitió mejorar notablemente estos, así tenemos que:

! En 1699, Sharp usó el resultado de Gregory (1638-1703), para obtener 71 lugares decimales corectos,

! En 1701, Machin usó una mejora de este resultado, para obtener 100 dígitos correctos, y en lo sucesivo, se usaron sus métodos, así,

! En 1719, Lagny encontró 112 dígitos correctos,

! En 1789, Vega obtuvo 126 lugares y en 1794, 136,

! En 1841, Rutherford calculó 152 dígitos y en 1853, 440,

! En 1873, Shanks calculó 707 lugares, de los cuales 527 eran correctos.

Muestre el resultado general de Gregory (en ocasiones el primer desarrollo que obtuvo es atribuido a Leibniz), que hizo posible estas mejoras.

Conferencia 9. El Siglo de las Luces.

“La curiosidad por aprender ha sido dada al hombre como castigo”

Montaigne

LEONARD EULER

El proceso de desarrollo de las matemáticas, en el transcurso de su historia, se hace cada vez, más y más complejo a lo largo de la historia del hombre, pero, sin lugar a dudas, el siglo XVIII ocupa un lugar predominante: en este siglo la complejidad y multilateralidad del desarrollo matemático, alcanzó un alto grado.

El ritmo de desarrollo de la ciencia en esta época aumenta rápidamente, la revolución industrial, la formación de un mercado mundial, lo que conlleva un desarrollo de la navegación y construcción naval, la técnica militar, la termotecnia, la hidroenergética, etc., las necesidades de los hombres, presentan problemas ante la ciencia que rápidamente se complican. Junto a los problemas de la mecánica y la astronomía, se situaron los problemas de la creación del aparato matemático de investigación de los fenómenos electromagnéticos y térmicos.

Para las investigaciones científicas, en las ciudades más grandes de Europa, se crean instituciones especiales: las Academias de Ciencias, subsidiadas por el Estado. Gradualmente crece el papel de los centros superiores de enseñanza, haciéndose particularmente notable hacia finales de siglo, en la época de la Revolución Francesa. Es así como surge una capa de científicos profesionales, entre ellos los matemáticos-profesionales, cuyo principal asunto es la investigación científica y la enseñanza. Entre ellos, como el más notable de dicho siglo, surge Leonard Euler (1707-1783).



Euler fue no solamente uno de los matemáticos más fecundos de la historia, sólo igualado, probablemente, por Cayley y Cauchy, sino también, uno de los más eminentes científicos de todos los tiempos. Cosmopolita en el exacto sentido de la palabra -pasó los primeros años de su vida en Basilea (Suiza), trabajó más de 30 años en San Petersburgo y un cuarto de siglo en Berlín, entonces capital de Prusia- y alcanzó una popularidad y una celebridad comparables a las de Galileo, Newton o Einstein. Euler, hijo mayor del pastor campesino Pablo Euler, se interesa pronto por las matemáticas y, en consecuencia, asiste a los cursos de Jacobo Bernoulli.

El inteligente joven recibe las primeras enseñanzas de su padre, asistiendo posteriormente al gimnasio de Basilea, entonces de poco prestigio y, además, es alumno particular de Burckhardt. Ingresa, en 1720, en la Universidad de Basilea y asiste simultáneamente, a los cursos de Daniel y Nicolás II Bernoulli; adelanta mucho en la clase de éste. En 1721 se gradúa de bachiller y, en 1723, de maestro en artes; traba amistad con el hijo de Juan Bernoulli, interrumpiendo sus estudios teológicos y dedicándose, por entero, a las matemáticas y, ya en 1725, trabaja dignamente en las trayectorias algebraicas

recíprocas (publicada en 1727). En Mayo de este mismo año viajó a San Petersburgo, pues no fue aceptado, por su juventud, en la cátedra de Física de la Universidad de Basilea y allí comenzó a trabajar en la Academia. La vacante, es cierto, era en la cátedra de Fisiología, pero esto no desconcertó al joven científico. ¡A pesar de todo, era un trabajo!, sin embargo, no llegó a ocuparse de fisiología y le propusieron la posibilidad de realizar investigaciones en el campo de las ciencias físico-matemáticas, dedicándose con ahínco al trabajo científico y pedagógico.

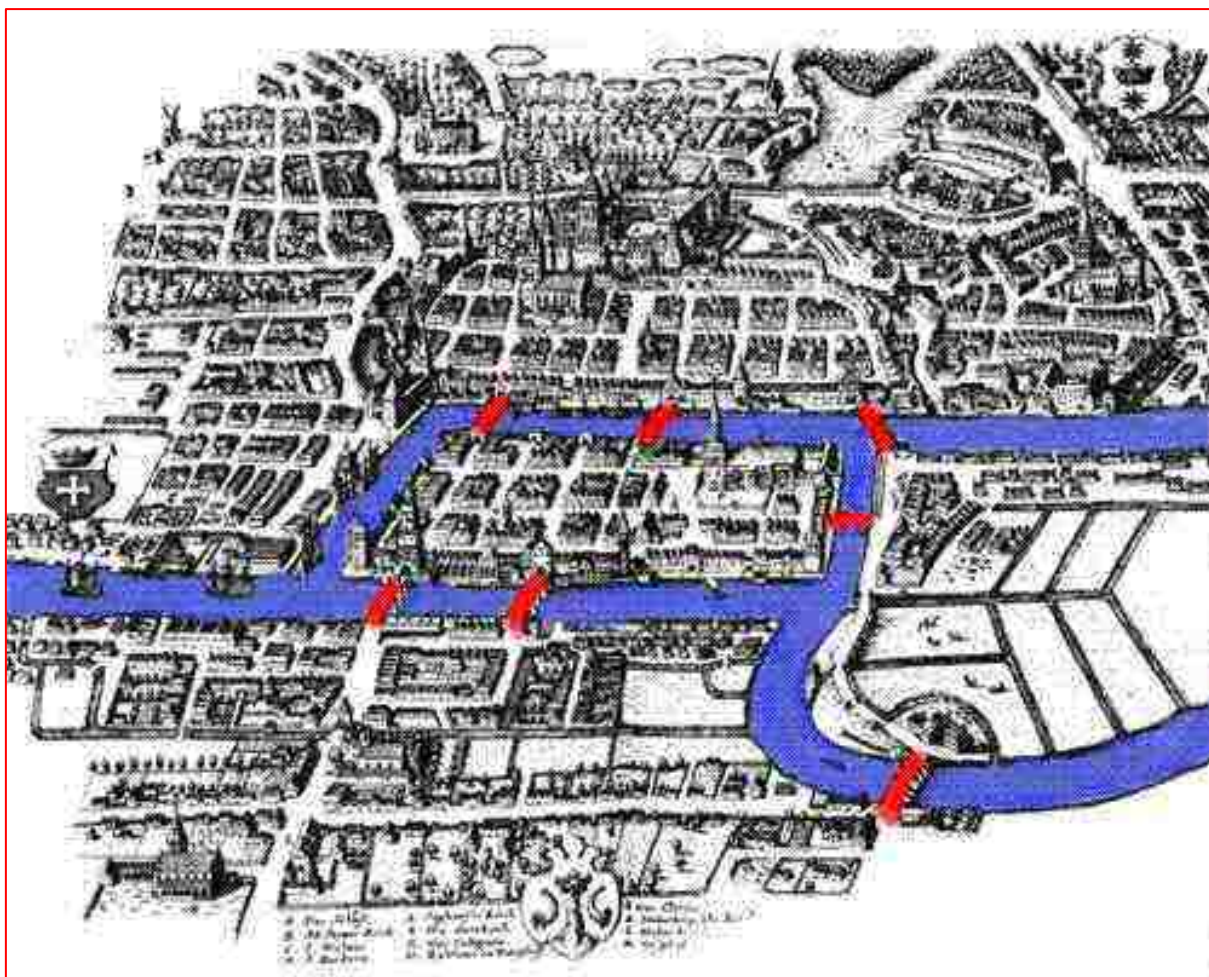
Con respecto a lo último apuntado, debemos decir, que no hay posibilidades de enumerar, aunque sea los descubrimientos principales y los logros científicos de Euler, ellos son demasiados. Caracterizarlos significaría, prácticamente, caracterizar toda la matemática del siglo XVIII. En los trabajos de Euler, están contenidas toda una profunda serie de ideas, las cuales obtuvieron desarrollo ulterior, sólo después de algunas decenas de años. Por ejemplo, parcialmente se adelantó a las investigaciones de Gauss sobre la geometría interior de las superficies. Los teoremas y fórmulas, los métodos y símbolos que llevan el nombre de Euler, frecuentemente se encuentran en la matemática actual, ocupando un lugar de importancia.

Muchos descubrimientos de Euler se redescubrieron después de su muerte por otros investigadores. Especialmente numerosos son los redescubrimientos que se encuentran en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, el problema sobre las vibraciones de una membrana circular Euler lo redujo, ya en el año 1766, a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables. Ahora esta ecuación lleva el nombre de Bessel, matemático y astrónomo alemán del siglo XIX. A propósito, la solución dada por Euler a esta ecuación, es una serie infinita que expresa funciones cilíndricas de primer género y cualquier orden (las funciones cilíndricas de orden cero, aparecieron en las memorias de Daniel Bernoulli, sobre las vibraciones de un hilo flexible fijo en un extremo). Ejemplos de tal tipo de redescubrimientos pueden citarse muchos.

Euler era también extraordinariamente modesto, respecto a la propiedad intelectual. Jamás aspiró a disfrutar de privilegios -contrariamente a la mayoría de los científicos de todos los tiempos- llegando incluso a veces a hacer don generoso de sus ideas y descubrimientos. En sus obras no oculta nada al lector, sino que juega limpio con él, brindándole las mismas condiciones y posibilidades de que disfrutó para encontrar algo nuevo; más aún, frecuentemente lo guía hasta el umbral, dejándole la alegría del descubrimiento, única pedagogía valedera.

¿Cuáles son las razones que propiciaron la aparición del fenómeno Euler? En primer lugar, una memoria prodigiosa (a edad avanzada divertía a su familia recitándole, fielmente y en latín, cualquier canto de **“La Eneida”** de Virgilio; amén de que conocía de memoria, las actas de las sesiones de la Academia, varios decenios después de efectuadas, esto sin referirnos a su prodigiosa memoria para las matemáticas). En segundo lugar, una extraordinaria capacidad de concentración. *“Con un niño en las rodillas o un gato en el hombro, así escribía sus obras inmortales”*, nos cuenta su amigo y colega Thiébauld. La tercera razón es, simplemente, su trabajo, tranquilo e incesante.

En la ciudad alemana de Königsberg (en la época soviética, Kaliningrado) siete puentes atravesaban el río Pregel en su curso sinuoso por la ciudad. Sencillos ciudadanos se preguntaban: ¿Cómo puede una persona planear su paseo del domingo en la tarde, de modo que cruce una sola vez cada puente? Así, estos siete puentes del siglo XVIII proporcionaron el material para uno de los más célebres problemas de las matemáticas. Cuando presentó, en 1735, la solución a la Academia Rusa de San Petersburgo, la Topología o Analysis Situs quedó fundada. Con respecto al “Problema de los Siete Puentes”, debemos decir además, que sentó también las bases de la moderna teoría de grafos, pues su solución, presentó las técnicas actuales de esta rama de las matemáticas.



En 1758 publicó la demostración de la fórmula $V + C = A + 2$, para poliedros simplemente conexos, consolidando e iniciando la acumulación de hechos de Topología. Esta fórmula, que Poincaré reconoció como uno de los teoremas centrales de la Topología, permite demostrar que no existen más que 5 poliedros regulares.

Con la primera concepción formal del CALCULUS, elaborada por Newton y Leibniz y que tuvo en los hermanos Jacques y Johan Bernoulli, entre otros, a los descubridores de un mundo incommensurable del espíritu humano, que había de colonizarse en el Siglo de las Luces (siglo XVIII), el papel de primer colonizador de gran estilo, comparable al de hombres como Cristóbal Colón, iba a corresponderle a Euler.

En el campo de las llamadas Matemáticas Puras, Euler creó de golpe y de manera extraordinaria, varias nuevas disciplinas de investigación, aparte de las ya mencionadas y las desarrolló metódicamente: la teoría de las series infinitas, el álgebra superior y el cálculo de variaciones.

Asimismo determina Euler, investigando la serie armónica, la constante de su nombre, siendo la más sencilla y conocida de las series infinitas que dan el valor de ella:

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + \dots,$$

Euler, que indudablemente tenía el tacto de Midas en las matemáticas, no sólo inventó el símbolo e y calculó su valor hasta 23 decimales, sino que dio para él varias expresiones interesantes, en términos de fracciones complejas infinitas.

Por otra parte, la Fórmula de Euler: $e^{\pi i} = -1$, es, a no dudarlo, la fórmula más famosa de las matemáticas.

En el álgebra, la investigación la centra sobre todo en los problemas y teoremas de Fermat. Aunque su esperanza de poder resolver ecuaciones de grado superior mediante radicales no se cumple, Euler descubre, no obstante, en 1776, clases especiales de ecuaciones que sí pueden resolverse.

Los métodos generales de solución de problemas del cálculo de variaciones fueron elaborados en este siglo por Euler y Lagrange. Precisamente en esos trabajos fue establecida una estrecha relación entre el Cálculo Variacional y las Ciencias Naturales. La elaboración de la teoría de este, prosiguió en el transcurso de más de 2 siglos, como una imperiosa necesidad de completar las condiciones necesarias de primer orden (ecuación de Euler), así fueron halladas las condiciones necesarias y suficientes de segundo orden, para dos tipos de extremos: fuerte y débil.

Para no agobiar al lector con sucesivos datos de este tipo, debemos decir que, en conclusión, Euler es quien hace triunfar los conceptos y los métodos analíticos sobre los sintéticos, demasiado unidos a lo concreto y quien abre a los sucesores, un campo de trabajo muy amplio.

Ya por su sola productividad (aquí no hemos hablado de sus trabajos teológicos, filosóficos, mecánicos, astronómicos, de hidromecánica y de óptica, que ocupan significativo lugar en su obra) Euler constituye un fenómeno único. La gran edición suiza de sus obras, en la que vienen trabajando desde comienzos de siglo numerosos especialistas de diferentes países, cuenta hasta la fecha con 70 volúmenes en cuarto, a los que seguirán 14 tomos de "Cartas y Manuscritos".

El siguiente cuadro da una idea más completa de las obras que preparó Euler para la imprenta, sin contar algunas decenas de manuscritos que no han podido ser fechados todavía:

Años	Obras
1725-1734	35
1735-1744	50
1745-1754	150
1755-1764	110
1765-1774	145
1775-1783	270

Según las diversas disciplinas de que tratan, estas obras se distribuyen de la siguiente manera:

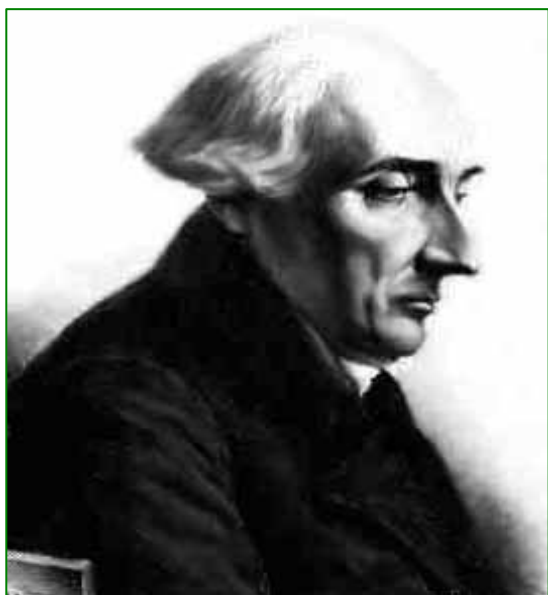
Álgebra, Teoría de los Números y Análisis	40%,
Mecánica y demás aspectos de la Física	28%,
Geometría y Trigonometría	18%,
Astronomía	11%,
Construcción naval, arquitectura, artillería	2%,
Filosofía, teología, teoría de la música, etc.	1%,

De todo lo expuesto es que podemos decir, que aún quedan por descubrir numerosos tesoros en la obra de Euler, por lo que es necesario esperar todavía para que esa obra prodigiosa, sea accesible a todos.

DE LA MECANICA ANALÍTICA A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

“Los métodos que yo analizo no requirieron construcciones ni consideraciones geométricas o mecánicas, sino únicamente operaciones algebraicas sometidas a un proceso regular y uniforme. Todos los que amen el Análisis verán con placer que la mecánica se convierte en una nueva rama suya y me agradecerán que yo haya extendido su dominio de este modo”

LAGRANGE



La Mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos que se registran acerca de esta materia, son los de Arquímedes referentes al principio de la palanca y al principio del empuje; puede que un “rigorista” alegara que Arquímedes trata más bien con la estática matemática y puede que si se tomara “mecánica” en un sentido genérico, serían anteriores algunas ideas de Aristóteles y quizás un escrito de la escuela aristotélica sobre **“Problemas -o cuestiones- físicos -o mecánicos”**-, nuestra afirmación se basa en que Arquímedes es el principal sistematizador de estos estudios en la antigüedad y la aplicación de estos a problemas geométricos y estáticos (**¡mecánicos!**); puede consultar al respecto Arquímedes-**“El Método”**, Alianza Editorial

1151, Madrid, 1986 (introducción y notas de Luis Vega). Por otra parte, no soy yo el único en proclamar la existencia de un mecánico en los tiempos griegos, en J. R. Pastor y J. Babini-**“Historia de la Matemática”**, Vol.I, Editorial Gedisa, Barcelona, pág. 62 se afirma: **“...Arquitas de Taras (Tarento), estadista y científico que se ocupó de Mecánica Teórica y práctica (autómatas), de aritmética (progresiones y proporciones) y de geometría...”**; si faltaran otras razones para clasificar a Arquímedes como el primer mecánico, puede consultar J.R. Pastor y J. Babini- Ob. Cit., pp.89-97.

A la formulación de las leyes de la composición vectorial de fuerzas dada por Stevin (1548-1620), aguardaba un progreso sustancial y el mismo autor enunció la mayoría de los principios de la Estática. El primer estudio de un problema dinámico se debe a Galileo y se refiere a los experimentos sobre la caída de los cuerpos, aunque debemos considerar un precursor importante: Copérnico, quien con su sistema heliocéntrico, sentó las bases de una nueva ciencia: **la Mecánica Celeste**; Sir Arthur Eddington observaba que uno de los grandes misterios del Universo consiste en que todo en él rota. En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años, cierto es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico (que se remonta a Aristarco de Samos en el siglo III a.C.) resolvió estas y otras dificultades y la publicación de la obra de Copérnico **“De revolutionibus orbium coelestium”** (1543), abrió el camino de la verdad celeste por la que transitarían más adelante Kepler, Galileo, Newton, Poincaré y muchos más.

Hablaremos sobre una rama particular de la Física: la Mecánica Analítica, fundada por Euler, D'Alembert (1717-1783) y algunos otros científicos y que fue genialmente originada

por J. L. Lagrange (1736-1813) en su obra maestra **“La Mécanique Analytique”**, que proyectó en Turín, cuando tenía 19 años, a pesar de que fue publicada en París en 1788 ya con 52 años de edad. En esta obra, hace notar que la ciencia de la mecánica, puede ser considerada como la geometría de cuatro dimensiones, o sea, una nueva forma de considerar la mecánica, que se hizo popular desde 1915 cuando Einstein la utilizó en su Teoría Especial, de principios de siglo.

El estudio analítico de la mecánica, rompe con la tradición griega, pues a diferencia de Newton, que consideraba útiles las figuras en sus estudios de los problemas mecánicos, Lagrange mostró que se alcanzaban mejores resultados, si desde el principio se empleaban métodos analíticos generales. Precisamente, esta es la característica que queremos destacar de la Mecánica Analítica: su carácter bifronte. Por un lado, es teoría de los sistemas mecánicos, el conjunto de esquemas estructurales de la mecánica clásica, y por el otro, ciencia puramente matemática (C. Lanczos), composición de métodos y estructuras matemáticas interrelacionadas, que pueden estudiarse independientemente del contenido físico. Desde este punto de vista, la mecánica analítica puede considerarse parte de la matemática. Este doble carácter de la mecánica analítica, la convierte en medio natural donde resulta posible el proceso de conversión de “lo mecánico” en “lo matemático”. De esta manera, los estímulos ‘externos’, provenientes de la mecánica, del desarrollo de la matemática, se convierten en factores ‘internos’ de este desarrollo.

Precisamente, a esta relación y estos factores ‘internos’ proporcionados por la mecánica analítica a la matemática; en particular, a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, es que nos dedicaremos, por ello, nos detendremos en ciertos aspectos históricos que nos ayudarán a desarrollar nuestras ideas. Es sabido que la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó a desarrollarse en el siglo XVII, simultáneamente con el surgimiento del cálculo diferencial e integral. Se puede decir, que la necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales para las exigencias de la mecánica (es decir, para encontrar las trayectorias de los movimientos), a su vez, fue el estímulo para la creación del nuevo método de cálculo por Newton y Leibniz. Las leyes de Newton constituyen un modelo matemático del movimiento mecánico. A través de las ecuaciones diferenciales ordinarias o de la aplicación del nuevo cálculo a los problemas de la geometría y la mecánica, se logró resolver problemas que a lo largo de mucho tiempo no admitían solución. En la Mecánica Celeste, resultó posible, no sólo obtener y explicar hechos ya conocidos, sino también, hacer nuevos descubrimientos (por ejemplo, el descubrimiento del planeta Neptuno por Leverrier en 1846, sobre la base del análisis de las ecuaciones diferenciales). De esta manera, el primer rasgo de las ecuaciones diferenciales es su estrecha vinculación con las aplicaciones, en otras palabras, la teoría de las ecuaciones diferenciales “nació” de las aplicaciones.

Precisamente, en la teoría de las ecuaciones diferenciales, la matemática actúa como parte integrante de las ciencias naturales, sobre la cual se fundamenta la deducción y comprensión de las regularidades cualitativas y cuantitativas que componen el contenido de las ciencias de la Naturaleza. Precisamente las ciencias naturales son para la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, una fuente maravillosa de nuevos problemas, ellas determinan en medida considerable la dirección de sus investigaciones y les dan una orientación correcta. Es más, las ecuaciones diferenciales no pueden desarrollarse sin el contacto con los problemas físicos. Esto no es sólo porque la Naturaleza es más rica que la fantasía humana.

La teoría sobre la no resolubilidad de ciertas clases de ecuaciones diferenciales, desarrolladas en años recientes, muestra que incluso ecuaciones lineales “muy simples”, pueden no tener solución, no sólo en el sentido corriente, sino en las clases de funciones generalizadas y en las clases de hiperfunciones y, por consiguiente, para estas ecuaciones

no puede ser construida ninguna teoría “sustanciosa”. En el plano histórico, la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, pasó a ser la primera forma matemática de la mecánica clásica. Se reveló la estructura variacional de la mecánica y desde el punto de vista matemático se hizo posible considerar la mecánica como cálculo de variaciones. El desarrollo del formalismo lagrangiano, llevó a la geometrización de la mecánica que, hacia finales del siglo XIX adquirió la forma de geometría multidimensional de Riemann.

A la vez, la geometrización del formalismo hamiltoniano originó la geometría del espacio de fases y, en realidad, reveló otra cara de la mecánica: la geometría simpléctica.

Algunas de las mencionadas ramas de la matemática- el cálculo de variaciones y la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden- se modelaban en paralelo con la elaboración de los formalismos de la mecánica analítica. En otros casos, se identificaban los formalismos de la mecánica con teorías matemáticas ya formadas y se daban impulsos adicionales para el desarrollo de esas teorías.

La equivalencia de algunos formalismos de la mecánica analítica, contribuyó a que se comprendieran las profundas relaciones entre ramas de las matemáticas que antes parecían tan diferentes. Las tareas de la mecánica analítica en el marco de uno u otro formalismo, con frecuencia llevaban a elaborar partes absolutamente nuevas de la matemática, como la teoría de grupos y de las álgebras de Lie y la topología (por ejemplo, en relación con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias).

Cuando se comprendía la identidad de la estructura matemática de la mecánica con una u otra teoría matemática, ello era siempre positivo para la mecánica, ante la cual se abrían nuevas posibilidades para resolver un círculo cada vez más amplio de problemas y aplicar estos métodos en la física y la astronomía.

Analizaremos ahora, una estructura matemática de la mecánica y pasaremos a continuación, a la exposición de algunas líneas de desarrollo de la mecánica como teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sobre todo, a partir de fines del siglo pasado.

LA MECÁNICA COMO TEORÍA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Leonard Euler fue el primero en formular de modo analítico- en su obra “**Mechanica, sive motus scientia analitica exposita**” (Petropoli, 1736)- la mecánica de Newton, en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Empleó la descomposición de fuerzas en los componentes normal y tangencial. Los componentes cartesianos de la fuerza y la respectiva representación de las ecuaciones del movimiento mecánico, fueron realizados por Collin Maclaurin (1742).

Muchos métodos de integración de ecuaciones diferenciales los elaboraron por primera vez, para las ecuaciones de la mecánica.

Euler y los hermanos Bernoulli (Joham y su hermano mayor Jakob) resolvieron en las postrimerías del siglo XVII, la ecuación diferencial designada con el nombre de Jakob Bernoulli $y' + p(x)y = q(x)y^{2n}$.

Joham Bernoulli utilizó a principios del siglo XVIII el procedimiento del factor integrante. Euler trabajaba especialmente con una teoría de solución coherente de la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden; en 1743 él dio a conocer el principio de solución $y = e^{kx}$, halló después formas de tratamiento para la ecuación no homogénea; el método de variación de las constantes, usual actualmente, fue publicado por Lagrange en 1777, aún cuando el mismo fue utilizado ocasionalmente por Euler, este trabajó también en la ecuación diferencial designada posteriormente con el nombre de Bessel.

Euler y Clairut estudiaron las condiciones de integrabilidad y “chocaron”, con el método de integración de los diferenciales totales. D'Alembert y otros, avanzaron mucho en el tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

En el campo de la mecánica celeste también se crearon los primeros métodos para resolver ecuaciones no lineales, en particular, los métodos de aproximación: el “método de Euler”, el del parámetro pequeño, el empleo de las series trigonométricas,...

Lagrange, Hamilton y C. Jacobi señalaron reiteradamente y con toda claridad que la mecánica clásica de los sistemas, desde el punto de vista matemático, no es otra cosa que la teoría de los sistemas de ecuaciones ordinarias de segundo orden:

$$m_i a'' = \frac{\partial U}{\partial a}; \quad m_i b'' = \frac{\partial U}{\partial b}; \quad m_i c'' = \frac{\partial U}{\partial c};$$

con $a=x_i$, $b=y_i$ y $c=z_i$, donde m es la masa del i -ésimo punto material con coordenadas (x_i, y_i, z_i) y $U(x,y,z)$, función de la fuerza. En 1835, W. Hamilton escribió que la integración de dichas ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema constituían el problema principal y, probablemente único, de la dinámica matemática (“**Second essay on a general method in dynamics**”, Phil. Trans. Roy. Soc., part 1, 1835, pp.95-144; reprint: “**W. R. Hamilton. Mathematical Papers**”, Cambridge, 1940, t.2, pp.162-212).

Según destacara Arnold, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias “*permite estudiar los más diversos procesos de evolución que pueden determinarse, tener dimensión finita y ser diferenciables*” (V. I. Arnold-“**Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**”, Moscú, 1971, pág. 7 (en ruso)). Estas tres propiedades forman la base de la mecánica de los sistemas discretos. A propósito, la expresión exacta de la idea de la determinación son los teoremas de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para una ecuación de primer orden $y'=f(x,y)$, semejante teorema fue demostrado por primera vez, en conferencias de A. L. Cauchy, dictadas en 1820-1830.

Es evidente la relación entre el determinismo de Laplace y los teoremas de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En los límites de la mecánica celeste y la teoría de las oscilaciones y (en parte) de la física matemática, se desarrollaron nuevos métodos de integración, en particular, los que se resuelven con series, según las funciones especiales. Más tarde estos métodos fueron interpretados según la teoría de grupos. Uno de los campos principales de aplicación de los métodos de la mecánica analítica en el siglo XIX, fue el de los problemas de la mecánica celeste; muchos de estos problemas, ante todo, el de los tres cuerpos, no se lograban integrar.

Esto estimuló, en primer término en las obras de Poincaré, la elaboración de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, que fue también uno de los más importantes puntos de partida, en la creación de la Topología Homotópica (1880-1886), expuestos principalmente en su “**Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste**”.

Pasaremos ahora a detallar estos aspectos, tomando como base, el péndulo matemático libre (en resumidas cuentas, una ecuación de segundo orden, hablando en “términos” matemáticos), el estudio de tal péndulo constituye, desde hace un buen número de años, un capítulo clásico de todo libro de texto de mecánica analítica. Mgr. Lemaitre, lo “adelantó” en sus conferencias en la Universidad de Louvain (Bélgica). Sus notas de conferencia son tituladas: “**Lecciones de Mecánica. El Péndulo**”, y podemos leer en su introducción: “*Una actitud intermedia que nosotros seguiremos, consiste en retener de la historia de la ciencia, la preeminencia dada a un problema particular, el movimiento del péndulo, y por tanto presentar los conceptos fundamentales en el marco de este problema particular... Este*

problema del péndulo es uno de aquellos donde la ciencia de la mecánica fue surtida de una de sus mayores contribuciones a la edificación de las matemáticas modernas, porque él puede ser ampliamente identificado, con el estudio de las funciones elípticas alrededor de las cuales, fue construida la teoría de funciones de una variable compleja...

Mucho más reciente, en la “**Encyclopediae Universalis**” francesa, en un artículo titulado “**Systemes dynamiques differentiables**”, A.Chencher usa de nuevo el péndulo como un tema central, para iniciar al lector a la teoría moderna de sistemas dinámicos: el primer capítulo describe en detalle ejemplos conectados al péndulo e introduce más y más comportamientos asintóticos complejos cuyos análisis van a requerir los conceptos más abstractos de la última parte, en el capítulo nueve de este artículo, encontramos: **el péndulo sin fricción; un sistema Hamiltoniano, el péndulo con fricción lineal: un sistema estructuralmente estable, perturbaciones periódicas de un péndulo friccionado y difeomorfismo que preservan el área en el plano.**

EL PÉNDULO SIMPLE

La Ley de Isocronismo de Galileo (linealización)

A pesar de sus precursores, Galileo es el primer científico asociado al estudio experimental y teórico del péndulo. Es conocida la historia -verdadera o falsa- de su descubrimiento en 1583 o 1584, del isocronismo de las oscilaciones del péndulo, observando una lámpara suspendida en la Catedral de Pisa.

El primer documento escrito de Galileo sobre el isocronismo del péndulo es una carta de 1602 a Guidobaldo del Monte: “*Ud debe perdonar mi insistencia en mi deseo de convencerlo de la verdad de la proposición que los movimientos en el mismo cuadrante de un círculo son hechos a igual tiempo*”. En su famoso “**Diálogo**”, él escribió: “*El mismo péndulo hace sus oscilaciones con la misma frecuencia, o con poca diferencia, casi imperceptible, cuando estas son hechas por una circunferencia mayor o sobre una muy pequeña*”. Esto es, por supuesto, un planteamiento erróneo o, en un camino positivo, podemos considerar que es una manifestación muy primitiva de lo que es, posiblemente, la primera herramienta básica en la ciencia no-lineal: la linealización. Conocemos que el isocronismo no es una propiedad de las soluciones de la ecuación diferencial del péndulo con longitud l :

$$u'' + (g/l)\sin u = 0, \quad (1)$$

pero de su forma linealizada si

$$u'' + (g/l)u = 0. \quad (2)$$

La expresión precisa $T = 2\pi(g/l)^{1/2}$ para el período de las soluciones de (2), será lo primero dado por Newton en su “**Principia**”, en 1687.

Note que algunas aplicaciones del péndulo fueron ya presentadas por Galileo, en particular a la medición de un “**Pulsilogium**” para chequear el pulso de un paciente, a la navegación en la determinación de la longitud y a la horología con la regulación de los relojes mecánicos.

Una prueba de la “independencia” del desarrollo matemático con respecto a las exigencias de la práctica social, está en el hecho de que este problema del isocronismo, todavía es objeto de estudio por parte de diversos matemáticos en el mundo. Así, sea la ecuación diferencial:

$$y'' + f(y) = 0. \quad (3)$$

Donde la función $f(y)$ es continua, $yf(y) > 0$ si $y \neq 0$; y suponga que la función:

$$F(y) = \int_0^y f(s) ds,$$

satisface la relación $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \infty$ cuando $y \rightarrow \infty$. Entonces, toda solución de (1) es oscilatoria y periódica. El problema de isocronismo para esta ecuación es el siguiente: ¿Bajo cuáles condiciones, todas las soluciones de (1) tendrán el mismo período?

En (A. Elbert-“**Isochronism problems for nonlinear second order differential equations**”, Public. Mathematicae, Tomus 34, Debrecen, 1987, 163-167) este problema se extiende al caso de la ecuación diferencial más general:

$$y'' + \mu f(y)g(y') = 0, \quad (4)$$

donde la función f satisface las condiciones anteriores para (3) y g es una función que satisface las siguientes condiciones:

(i) $g(t)$ es continua y positiva sobre $\mathbf{R}$.

(ii) Los límites $\int_{\pm 0} \frac{z dz}{g(z)}$ existen.

(iii) La función $G(z) = \int_0^z \frac{s ds}{g(s)}$ satisface la relación: $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = \infty$ cuando $z \rightarrow \infty$.

Con μ un parámetro positivo.

Relación entre período y amplitud.

Si Guidobaldo del Monte expresó en 1602 un buen grado de escepticismo al llamado Isocronismo de Galileo, fue un astrónomo belga, Wendelin, quien primero mostró experimentalmente que el período de las oscilaciones crece con las amplitudes de las oscilaciones y da tablas justas en su “**Luminacarni Eclipses Lunares**” de 1644. Este hecho fue entonces deducido matemáticamente por Huggens en su famoso “**Horologium**” de 1673, y el mismo Huyggens también observó los fenómenos no-lineales de “Sincronización” en dos péndulos fijados sobre una misma cuerda delgada. Doscientos Quince años después, Van der Pool y Appleton descubrieron un fenómeno análogo en circuitos eléctricos y la teoría iniciada por Galileo.

La relación matemática entre el período T y la amplitud A es expresada por Euler en 1736 en su “**Mechanica**” por la serie:

$$T = 2\pi (l/g)^{1/2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots (2k)} \right)^2 \text{sen}^2(A/2) \right], \quad (5)$$

y Poisson en su “**Traite de Mecanique**” de 1811, analizó la ecuación del período, usando un método de desarrollo en “series de potencia de un parámetro pequeño”. La relación (5) fue formulada por Legendre en 1825 (“**Traite des fonctions elliptiques**”) y por Jacobí en

1829 (“**Fundamenta nova theoriae functionem ellipticarum**”) para integrales y funciones elípticas.

Análisis del Plano de Fases (Teoría Cualitativa)



La teoría cuantitativa del péndulo libre fue completada por la expresión de las soluciones de la ecuación (1) en términos de funciones elípticas. Debemos a Poincaré en 1881 el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales, particularmente, en el caso de la ecuación (1), la descripción topológica de las órbitas $(u(t), u'(t))$ de las soluciones de (1), en el plano de fases (u, u') . El retrato correspondiente, con el equilibrio estable $(2k\pi, 0)$, centros, el equilibrio inestable $((2k+1)\pi, 0)$, puntos de sillan, las soluciones periódicas no constantes (órbitas cerradas) sobre las que Poincaré apuntó: *“Lo que hace que estas soluciones periódicas sean tan apreciadas es que son, por así decirlo, la única brecha por donde podemos intentar penetrar en un lugar considerado hasta aquí*

inabordable”, las soluciones rotatorias y las separatrices conectadas con el equilibrio inestable (órbitas heteroclínicas u órbitas homoclínicas, si identificamos, módulo 2π , el equilibrio inestable, i.e. si trabajamos sobre la variedad natural cilíndrica de fases). Como tantas veces, la historia tomó el camino opuesto con respecto a la metodología de Poincaré en el “ataque” de las ecuaciones diferenciales no-lineales: el estudio cuantitativo del péndulo libre había precedido al cualitativo.

El acercamiento cualitativo es particularmente útil a la discusión de la ecuación del péndulo libre amortiguado:

$$u'' + cu' + (g/l) \sin u = 0,$$

cuyas soluciones no pueden ser expresadas en términos de funciones conocidas, el cual es también el caso para la ecuación:

$$u'' + cu' + a \sin u = b,$$

la que aparece en el estudio de motores sincrónicos (Edgerton, Fourmarier, Tricomi). En el caso de una ecuación diferencial de la forma:

$$x'' + Ax' + Bx = F, \tag{5'}$$

donde A, B y F no son necesariamente constante, el retrato de fases de esta, son curvas en el plano xx' . Este puede ser obtenido tanto, cuando la ecuación (5') sea lineal o no lineal; con el plano de fases obtenidas, el próximo paso es, normalmente el análisis del comportamiento del sistema físico, donde la palabra “análisis” significará un número de diferentes hechos

dependientes de la circunstancias. Algunos de los aspectos del análisis puede incluir uno o más de los siguientes pasos:

1. Cálculo de la respuesta exacta transitoria, para un conjunto de condiciones iniciales.
2. Predicción del tipo de respuesta transitoria (oscilatoria o monótona) para un cierto rango de condiciones iniciales.
3. Estimado del “exceso” en la respuesta a la entrada de un paso de magnitud dada.
4. Predicción de la estabilidad del sistema.
5. Predicción de la existencia y la amplitud de ciclos límites (oscilación no lineal de amplitud constante).
6. Predicción de la existencia de varios modos de operación.
7. Estudio del efecto de un tipo dado de no-linealidad sobre el comportamiento del sistema, comparado con el sistema lineal, con un sistema no lineal, con un tipo diferente de no-linealidad, o con un sistema, el cual es no lineal en el mismo sentido, pero con un grado diferente.
8. Ensayar la respuesta a preguntas como:
 - ! ¿Esta no-linealidad mejora el comportamiento?
 - ! ¿Qué cambios se pueden hacer para suprimir el ciclo límite?
 - ! ¿Cómo podemos ajustar este sistema y hacer que satisfaga a las especificaciones?
 - ! ¿La no-linealidad es continua o discontinua?

En el primer caso, el plano de fases puede constar de dos, tres o más hojas, y en el segundo, las líneas de conmutación originan una quiebra en las trayectorias de fases.
9. Análisis de la influencia de los parámetros y de la existencia de bifurcación en las soluciones periódicas de (5') en casos de existir estas.

Por tanto, es realmente claro, que el retrato de fases debe ser obtenido como condición sino indispensable, por lo menos muy importante, en el análisis del sistema.

El Análisis de la Estabilidad (Segundo Método de Liapunov)

El trabajo fundamental de A. M. Liapunov (1857-1918) sobre la estabilidad del movimiento (A. M. Liapunov-“**Problème général de la stabilité du mouvement**”, Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, 20-3-474 (1907), traducción francesa del artículo original publicado en 1893 en Comm. Soc. Math. Karkhovo), originalmente recibió poca atención y por un largo tiempo fue prácticamente olvidado. Justamente 25 años después, estas investigaciones fueron retomadas por algunos matemáticos soviéticos, al notar que el método de Liapunov era aplicable a problemas concretos en física e ingeniería. Por tanto, cada vez fue mayor, el número de matemáticos que se “dedicaron” a la teoría de la Estabilidad fundada por Liapunov.

El también llamado “Método Directo” no solo se usa actualmente para probar teoremas de estabilidad y de mecánica teórica. Actualmente, este método es aplicado a problemas prácticos de la mecánica y de las oscilaciones eléctricas, particularmente, en el control ingeniero.



La teoría del método directo, ha recibido un considerable avance en los últimos años y se aproxima a un cierto estado de completamiento. Han aparecido algunos trabajos en las últimas décadas, relacionados con el estudio del comportamiento de las trayectorias de ecuaciones diferenciales no lineales, que representan generalizaciones paulatinas de la ecuación del péndulo. Dentro de estas, podemos señalar los

obtenidos por T. Yoshisawa a partir del año 1960, Z. Opial en los años 1960 y 1961, A. C. Lazer en 1965, J. siglo W. Wong en 1967, el de D. Willet y J. siglo W. Wong en 1968, T. Burton y R. Grimmer y Burton y Townset en el año 1971, así como T. Hara, W. E. Mafoud, J. O. C. Ezeilo y el propio Burton en los últimos años. En estos trabajos y en otros referidos en la bibliografía, se intentan hacer planteamientos sobre la estabilidad del equilibrio, sin usar la forma explícita del movimiento perturbado, estos planteamientos se hacen usando (en adición a la ecuación diferencial) determinada función definida en el plano de fases.

Estas funciones usualmente se denominan Funciones de Liapunov. En general, el signo de la función de Liapunov, y el signo de su primera derivada para la ecuación diferencial son considerados. El método admite una interpretación geométrica, la cual es muy probable sea debida a Chetaev, y la cual es particularmente útil en aplicaciones.

Algunas consideraciones de las investigaciones de la mecánica-matemática

De esta manera, hemos apuntado algunos detalles que permitirán comprender la importancia que ha tenido, en el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la Mecánica Analítica y como, tomando un tópico de esta, el desarrollo de una y otra se han ido entrelazando y han contribuido, como peldaños mutuos, al desarrollo simultáneo de ambas.

Un punto citado anteriormente y que nos hace salir del marco anterior, lo constituye el hecho de que, la proliferación de los dispositivos del control automático en la técnica moderna, confiere a la teoría de la Regulación Automática un papel extraordinariamente importante. Uno de los principales problemas que se les plantea a los constructores de reguladores automáticos es el de la Estabilidad del Funcionamiento del sistema Máquina-Regulador. En muchos casos, este problema puede resolverse con ayuda del Método Directo de Liapunov. El sistema de regulación automática más antiguo, es el formado por la máquina de vapor y el regulador centrífugo de Watt. Este regulador centrífugo, ideado por Watt a finales del siglo XIX, cumplió perfectamente sus funciones hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando hubo que modificar su estructura y, con ello, su funcionamiento resultó menos seguro.

Numerosos ingenieros y científicos trataron de dar solución a este problema. Que fue resuelto de manera especialmente elegante y sencilla por el ingeniero ruso Vichnegradski, fundador de la teoría de la regulación automática. La memoria de Vichnegradski **“Sobre los Reguladores de Acción Directa”** (1876) constituyó el punto de partida de la teoría de la regulación de las máquinas, para hacer frente a las exigencias de la práctica industrial.

En este siglo se han ido desarrollando nuevos métodos a partir de los trabajos de Poincaré, Andronov, Jaquin, Witt, Bulgakov,... los que han contribuido al desarrollo de esta dirección, y sus resultados son considerados como clásicos.

Las secciones tradicionales de la mecánica -la teoría de las oscilaciones y la teoría de la estabilidad han incorporado en la época actual soviética, una serie de nuevas investigaciones fundamentales. Surgió la teoría de las oscilaciones no-lineales con su amplia aplicación para el estudio de los procesos de vibraciones especiales de los sólidos, los líquidos con partículas en suspensión, la autosincronización de las rotaciones de electromotores dispuestos en un cimiento común, el movimiento intermitente, discontinuo de deslizamiento de los cuerpos (un cuerpo se desliza por la superficie de otro), las fluctuaciones del agua en el tanque de compensación de las centrales hidroeléctricas, así como el estudio de un amplio abanico de problemas de la radiotécnica, la regulación de procesos tecnológicos y la teoría de la resonancia paramétrica.

La Teoría de la Estabilidad ha resultado de utilidad para resolver muchos problemas de la técnica, incluyendo el de garantizar la estabilidad del movimiento de los barcos, automotores, aviones, cohetes, así como de los servosistemas, dispositivos giroscópicos y los

procesos que transcurren en un reactor químico. La Inestabilidad no siempre es un estorbo. Por el contrario, es necesaria para excitar las llamadas auto-oscilaciones, producidas con una amplitud invariable por una fuente de energía exterior. En otros casos, como por ejemplo, en el control inercial de los cohetes balísticos, la inestabilidad sencillamente no tiene tiempo para desarrollarse, debido a la corta duración del funcionamiento de los motores en el llamado tramo activo del vuelo del cohete.

En los últimos 15 o 20 años, se modificó fuertemente, el aspecto de la teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Uno de los progresos más importantes consistió en el descubrimiento de regiones límites de nuevos tipos, que recibieron el nombre de atractores.

Resultó que, paralelamente a los regímenes límites estacionarios y periódicos, son también posibles regímenes límites de una naturaleza completamente distinta, en las cuales cada trayectoria por separada es inestable, mientras que el mismo fenómeno de la salida al régimen límite en cuestión es estructuralmente estable. El descubrimiento y el estudio detallado de tales regímenes (atractores) para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, requirió de la participación de los recursos de la geometría diferencial y la topología, del análisis funcional y la teoría de las probabilidades. En la actualidad tiene lugar una penetración intensiva de estos conceptos matemáticos en las aplicaciones.

Así, por ejemplo, los fenómenos que tienen lugar durante el paso de una corriente laminar a una turbulenta, con el aumento de los números de Reynolds, se describen mediante un atractor.

Durante la utilización de cualquier modelo matemático surge el problema de la validez de la aplicación de los resultados matemáticos a la realidad objetiva. Si el resultado es fuertemente sensible a una pequeña modificación del modelo, entonces, variaciones tan pequeñas como se quiera del mismo, conducirán a un modelo con propiedades distintas. No se puede extender tales resultados al proceso real investigado, debido a que en la construcción del modelo se realiza siempre una cierta idealización y los parámetros se determinan solamente de manera aproximada.

Esto llevó a A. A. Andronov y L. S. Pontrjagin (en 1937) al concepto de **sistemas gruesos** o de estabilidad estructural de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este concepto resultó muy fructífero, en el caso de los espacios de fases de dimensiones pequeñas, (1 ó 2), y en este caso, los problemas de la estabilidad estructural, fueron detalladamente estudiados.

De esta manera, la teoría de las ecuaciones diferenciales en el presente, constituye una rama de la matemática, excepcionalmente rica por su contenido, que se desarrolla rápidamente, en estrecha relación con otros dominios de la matemática y sus aplicaciones. Sin embargo, no se puede negar la significación que para las matemáticas, han tenido algunos problemas particulares (uno de los cuales fue desarrollado en el punto anterior). El cauce fundamental de la matemática; como el de un gran río, es alimentado, en primer lugar, por los arroyuelos. Los grandes descubrimientos, con mucha frecuencia, se garantizan y preparan mediante el trabajo metódico de muchos investigadores. Todo lo dicho no sólo se refiere a la matemática, sino también, a una de sus líneas más ricas, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, rama que en la actualidad constituye un conjunto difícilmente abarcable de hechos, ideas y métodos muy útil para las aplicaciones y capaces de estimular las investigaciones teóricas en otras ramas de las matemáticas y fuera de esta.

La creación de la mecánica analítica y su percepción como intermediario entre la mecánica y la matemática, estuvieron íntimamente vinculadas con notables procesos de disciplinas científicas a fines del siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX: cambios en los métodos de educación, traspaso de la poca actividad científica de las academias a los centros de enseñanza superior, formación de nuevas disciplinas científicas,...

Si en Francia la necesidad de desarrollar la mecánica analítica, estaba vinculada, en muchos aspectos, con la formación de una base teórica y matemática única con la variedad de disciplinas mecánicas aplicadas que se dictaban en la Escuela Politécnica de París, en Alemania, las premisas para un desarrollo intenso de la mecánica analítica, se crearon en el proceso formativo de la concepción de la matemática pura, proceso en que fueron protagonistas Jacobí y la Universidad Konisberg. La división de la matemática en pura y aplicada, permitió interpretar los formalismos de la mecánica analítica como cosas particulares de las respectivas teorías matemáticas. Las peculiaridades del aporte que Hamilton hizo en la mecánica analítica, se relacionaban con su carrera de astrónomo y se expresaron en el afán por hallar la base matemática única, para la óptica geométrica (teoría de instrumentos astronómicos) y la mecánica celeste (teoría del movimiento de los cuerpos celestes).

El material expuesto, nos introduce en el círculo de importantes problemas metodológicos de las ciencias naturales exactas, en problemas como el de las ideas equivalentes de la teoría científica, la “eficacia increíble de la matemática en las ciencias naturales” (E. Wigher), que es análogo a la eficacia invencible de la mecánica analítica en la física, problemas de los mecanismos con que las teorías de las ciencias naturales influye en la matemática,... Hemos visto que la eficacia matemática de la mecánica analítica, se vinculó en la existencia de gran cantidad de formalismos matemáticos equivalentes a esta teoría. Este último aspecto, según R. Feynmann, es índice indiscutible de una “buena” y profunda teoría científica. Con eso se explica también el criterio “matemático” de la eficacia de los programas de investigación de I. Lakatos (como regla general, son fructíferos, los programas que ofrecen potentes estímulos para el desarrollo de la matemática).

Si bien es cierto que el formalismo apuntado, facilita la modelación de ciertos problemas de la mecánica analítica, no debemos exagerarlo, pues se observa, cada vez con mayor nitidez, un proceso de disminución del formalismo clásico de la matemática, con el fin de lograr una participación más efectiva en el proceso.

Por otro lado, las teorías físicas “buenas” (por ejemplo, la mecánica clásica) destacan, digamos, estructuras matemáticas “polivalentes”, o sea, estructuras matemáticas ricas en diversas relaciones. El subsiguiente “juego matemático” en ellos en el plano de la generalización y el desarrollo lleva, por lo común, a una matemática “buena” y de profundo contenido que, posteriormente, es muy eficaz cuando se elaboran nuevas teorías físicas.

A pesar de las profundas conmociones que hubo en la física de los siglos XIX y XX, las estructuras de la mecánica analítica, surgido en teoremas físicos tan pobres a primera vista, como es la mecánica de los puntos materiales, siguen desempeñando, hasta la fecha, importantísimo papel, en la estructura de las teorías físicas fundamentales.

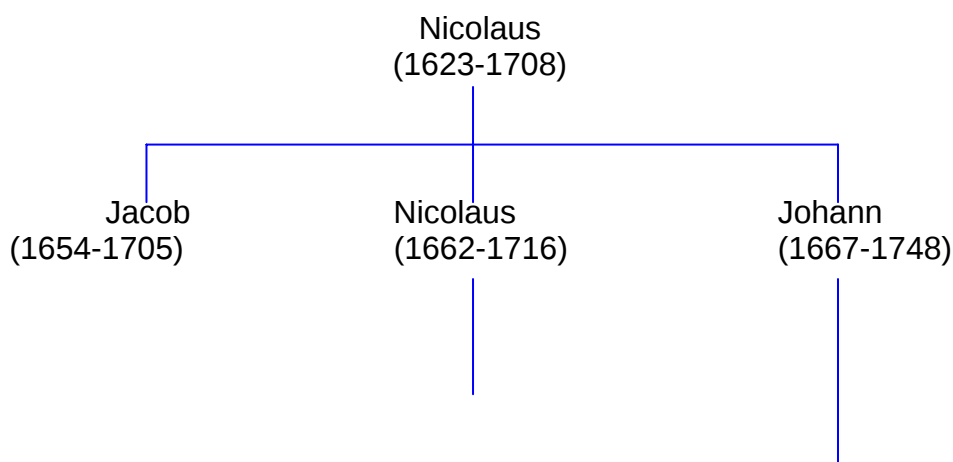
La identificación de las estructuras de la mecánica con las de la matemática que se operaba en el campo de la mecánica analítica significa, como hemos visto, el mecanismo fundamental de la influencia de la mecánica de los sistemas discretos en el desarrollo de la matemática en general. Esta identificación también fue importante para el progreso de la mecánica, puesto que, agregaba al arsenal de sus métodos, los poderosos recursos de la matemática, hecho que triplicaba las capacidades de cálculo de la mecánica, imponía claridad y rigidez en su esquema teórico, abriendo nuevos caminos hacia las generalizaciones pues:

“...los conocimientos de la mecánica suponen los conocimientos de las matemáticas...”(Steklov)

Estos apuntes no pretenden abarcar todos los cambios e interrelaciones entre la Mecánica Analítica y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, de la que es parte fundamental la escuela de mecánicos analíticos de Rusia, que tuvo eminentes representantes de talento, entre ellos hay que mencionar en primer lugar al Profesor y Académico M. V. Ostrogradski (1801-1861), fundador de la Mecánica Analítica en Rusia. A él le pertenecen resultados de superior calidad, obtenidos por los métodos de integración de las ecuaciones de la mecánica analítica y elaboración de los principios generalizados de la estática y la dinámica. Discípulos y seguidores de Ostrogradski fueron los profesores de la Universidad de Moscú N. D. Brashman, F. A. Sludski y A. Yu. Davidov, los que contribuyeron a la consolidación de esta escuela.

CUESTIONARIO

1. Expón los principales resultados matemáticos y mecánicos obtenidos por Euler y valore su influencia en el desarrollo de la Matemática.
2. Presente algunos de los conceptos y resultados del análisis vectorial, derivados directamente del desarrollo de la Mecánica.
3. Expón los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
4. Discuta, en las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes, los casos de trayectorias cerradas, oscilaciones amortiguadas y soluciones no acotadas.
5. Expón la solución dada por Euler al Problema de los Siete Puentes de Koenigsberg.
6. Discuta algunos casos particulares del Teorema de Euler para poliedros simplemente conexos.
7. Expón los métodos de solución de la ecuación de Bernoulli.
8. Discuta algunos casos particulares de la ecuación de Riccati y algunas de sus aplicaciones físicas.
9. Valore la influencia de la Mecánica, en la interpretación de diferentes descubrimientos científicos efectuados a fines del siglo XVIII y principios del siglo XIX. ¿Qué aportes destruyeron esas concepciones mecanicistas?
10. El árbol de la familia Bernoulli, es el siguiente:



Nicolaus I
(1687-1759)

Nicolaus II
(1695-1726)

Daniel
(1700-1782)

Johann II
(1710-1790)

Johann III
(1744-1807)

Daniel II
(1751-1834)

Jacob II
(1759-1789)

Presente los principales resultados obtenidos por esta notable pléyade familiar.

Conferencia 10. Galois y la Teoría de Grupos. Surgimiento de la Teoría de Galois. Desarrollo de ramas especiales del Álgebra Moderna. Los Teoremas de Sílov .

“Ultimamente, cada vez es más difundido el punto de vista, que muchas de las partes de las matemáticas no son otra cosa que la teoría de invariantes de grupos especiales”

Sophus Lie, 1893

Los trabajos de Galois y el Álgebra en la segunda mitad del siglo XIX

Abel no pudo dar un criterio general de la resolubilidad en radicales de las ecuaciones con coeficientes numéricos. Pero la resolución de este problema no se hizo esperar largamente. Perteneció a Evaristo Galois (1811-1832), matemático francés, fallecido como Abel, a temprana edad. Su vida, corta, pero plena de activas luchas políticas y un interés apasionado por los estudios matemáticos, representa un viejo ejemplo de cómo, en la actividad de un hombre dotado, las premisas acumuladas en la ciencia se transforman en una etapa cualitativamente nueva de su desarrollo.



Galois escribió pocos trabajos. Pero el significado de estos trabajos es enorme. Por ello consideremos sus ideas y resultados más detalladamente. Tomemos, siguiendo a Galois, la ecuación $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Para ella definamos la región de racionalidad, esto es la totalidad de las funciones racionales de los coeficientes de la ecuación $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

La región de racionalidad R es un campo, esto es, un conjunto de elemento cerrado con relación a las cuatro operaciones. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son racionales, entonces R es el campo de los números racionales; si los coeficientes fueran magnitudes arbitrarias, entonces R sería el campo de elementos de forma $\frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)}$, donde el

numerador y el denominador son polinomios. La región de racionalidad se puede ampliar

añadiéndole elementos, por ejemplo las raíces de la ecuación. Si a esta región se le agregan todas las raíces de la ecuación entonces la cuestión sobre la resolubilidad de la ecuación se hace trivial. El problema de resolubilidad de la ecuación en radicales se puede plantear sólo en relación a una región determinada de racionalidad.

Galois demostró que para cada ecuación $P_n(x) = 0$ se puede en la misma región de racionalidad encontrar cierta ecuación $Q(x) = 0$, denominada normal, tal que las raíces de la expresión dada $P_n(x) = 0$ y la correspondiente ecuación normal $Q(x) = 0$ se expresan una a través de la otra racionalmente. La ecuación normal es una ecuación que goza de la propiedad de que todas sus raíces se expresan racionalmente a través de una de ellas y los elementos del campo de coeficientes. Un ejemplo de ecuación normal es la ecuación $x^n - 1 = 0$. La ecuación cuadrática, por ejemplo, también es normal.

Todas las situaciones de raíces de una ecuación normal forman un grupo G . Este es el grupo de Galois de la ecuación $Q(x)=0$, o lo que es lo mismo de la ecuación $P_n(x)=0$. Ella goza, como aclaró Galois, de la notable propiedad: cualquier relación entre las raíces y los

elementos del campo R es invariante respecto a las sustituciones del grupo G . De esta manera, Galois vinculó con cada ecuación, el grupo de sustituciones de sus raíces. El mismo introdujo (1830) el término “grupo” y le dio una definición adecuada a nuestras exigencias actuales, aunque no tan formalizada.

La estructura del grupo de Galois resultó relacionada con el problema de resolubilidad de las ecuaciones en radicales. Para que la resolubilidad tenga lugar, es necesario y suficiente que el grupo de Galois correspondientemente sea resoluble. Esto significa que en el grupo dado exista una cadena:

$$G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset \dots \supset H_{p_k} (= E),$$

de divisores normales con índices primos $p_1, p_2, \dots, p_k$. Recordemos, a propósito, que los divisores normales o lo que es lo mismo, los subgrupos invariantes H_i , son tales subgrupos G donde se cumple la ecuación $gH_i = H_i g$, donde g es un elemento cualquiera del grupo G .

Las ecuaciones algebraicas $P_n(x) = 0$ con $n \geq 5$, hablando en general, no tienen tal cadena, ya que los grupos de sustituciones tienen sólo un divisor normal de índice 2, esto es, el subgrupo de todas las sustituciones pares. Por esto, tales ecuaciones, en general, no son resolubles.

El aparato, introducido por Galois, para el establecimiento de la resolubilidad en radicales de las ecuaciones algebraicas tuvo una significación que salía de los marcos del problema indicado. Su idea del estudio de la estructura de los campos algebraicos y la comparación con ellos de la estructura de los grupos de un número finito de sustituciones fue la base fructífera del álgebra moderna. Sin embargo, no obtuvo reconocimiento inmediato.

Antes del fatal duelo que acabó con su vida, Galois, en el curso de una noche, formuló sus más importantes descubrimientos y les envió a su amigo O. Chevallier para la publicación en caso de un fin trágico. Esta carta fue publicada después de la muerte de Galois, sin embargo, las ideas en ella contenidas no encontraron repercusión. Sólo después de 14 años, en 1846, Liouville descifró y publicó todos los trabajos matemáticos de Galois. A mediados del siglo XIX en una monografía en dos tomos de Serret y además en un trabajo de E. Betti (1852) por primera vez aparecieron exposiciones conexas de la teoría de Galois y sólo desde los años 70 del siglo pasado, las ideas de Galois comenzaron obtener desarrollo posterior en diferentes direcciones.

En el dominio de los fundamentos clásicos los nuevos problemas más próximos a las propias ideas de Galois, se agruparon alrededor del problema de la clasificación de las irracionalidades algebraicas y el establecimiento de su naturaleza aritmética. A éstos, por ejemplo, se refiere el teorema de Kronecker-Weber de que las raíces de las ecuaciones abelianas (esto es, ecuaciones con grupo conmutativo) con coeficientes racionales se expresan racionalmente a través de la unidad. La generalización ulterior de este teorema condujo a la teoría general de los campos de clases, donde se trata de la clasificación de todas las extensiones abelianas del campo de números algebraicos dado. Este es una extensión algebraica finita del campo de los números racionales. La teoría actual de los números algebraicos se formó como unión de la teoría de estos números con la teoría de los ideales y la teoría de Galois.

El planteamiento de nuevos problemas, más generales, favoreció la complicación rápida de la teoría de Galois, y el crecimiento de la generalidad de sus resultados. Entre estos problemas mencionemos, por ejemplo, el problema de la búsqueda de todas las ecuaciones, las cuales para una región dada de racionalidad tienen un grupo determinado, prefijado de antemano. Los problemas de tal género condujeron al estudio de los campos de funciones racionales generales (problema de Lürot-Steinitz). La generalización del problema sobre la resolubilidad de ecuaciones en radicales condujo al problema, de carácter general, sobre la posibilidad de reducir una ecuación a una cadena de ecuaciones auxiliares con un menor número de pará-

metros. Los primeros resultados generales aquí fueron obtenidos sólo por el matemático soviético N.G. Chebotariov en su teoría de las resolventes. Otro matemático soviético I.R. Shafarievich en el año 1954 resolvió el denominado problema inverso de la teoría de Galois: para un grupo resoluble de cualquier orden, si el campo extendido K_0 de números algebraicos contiene una raíz n -ésima de la unidad, siempre existen cuantas extensiones K se quieran, las cuales tienen sobre k_0 cualquier grupo resoluble de antemano prefijado de orden n .

La teoría actual de Galois se ha convertido en una disciplina matemática compleja y ramificada, la cual incluye un amplio material sobre las relaciones entre las propiedades de las ecuaciones, los números algebraicos y los grupos.

En estos momentos, una de las aplicaciones más sustanciales de la teoría de grupos, se produce en la Física Teórica, es decir, en la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica, y, en los últimos decenios, en la teoría sobre las partículas elementales. Según la opinión del conocido físico norteamericano F.J. Dayson (1927):

“el grandioso papel de la teoría de grupos en la física se explica por dos factores. En primer término, conforme a las leyes de la mecánica cuántica, si un objeto físico posee determinada simetría, existirá entonces un grupo de operaciones exactamente definido que conserva esta simetría, y los posibles estados cuánticos del objeto se encontrarán en exacta correspondencia con las representaciones del grupo. En segundo lugar, todos los grupos “bien contruidos” y sus representaciones, fueron descritos y clasificados por los matemáticos de una vez por todas, sin relación con las representaciones físicas en los cuales estos grupos pueden ser utilizados”.

Diez años antes del descubrimiento de los mesones π (piones) y apoyándose en la teoría de los grupos puramente abstracta, N. Kemmer pronosticó sus principales propiedades físicas.

Fundamentada en la teoría de grupos, se creó la teoría abstracta de la simetría de las partículas elementales y se ofreció su cómoda clasificación. el logro más relevante de esta clasificación fue el pronóstico de la existencia de una nueva partícula, la cual fue experimentalmente descubierta en 1964 y denominada *barión omega menos*.

En la actualidad, la teoría de grupos, conjuntamente con las teorías de los campos de matrices de dispersión (en especial la escuela checa de O. Borouvká y su aplicación a la teoría global de las ecuaciones diferenciales ordinarias), constituye uno de los métodos más importantes de la investigación matemática a disposición del físico teórico.

Surgimiento de la teoría de grupos. El aparato, introducido por Galois, se apoya en considerable grado, sobre el concepto de grupo. Galois mismo, al parecer independientemente de Ruffini, indujo el término correspondiente. Lo fructífero de este concepto y la necesidad de su introducción eran evidentes para muchos matemáticos. El grupo de las sustituciones realmente fue considerado ya por Lagrange. Desde el año 1815, Cauchy llevó a cabo una serie de investigaciones sobre la teoría de grupos finitos, demostrando, en particular, el teorema de que cada grupo cuyo orden se divide por un número primo p contiene al menos un subgrupo de orden p .

En la primera mitad del siglo XIX, los resultados de la teoría de grupos aún jugaron un papel auxiliar, especialmente en la teoría de las ecuaciones algebraicas. la teoría de grupo que se formaba eran aún, predominantemente la teoría de los grupos finitos, esto es, de los grupos de sustituciones. Hacia mediados del siglo quedó claro que el concepto de grupo tiene una aplicación más general. En relación con esto en los años 50 en trabajos de Cayley y otros comenzaron a aparecer definiciones abstractas más generales de grupo. Quedó claro que las

posibilidades más importantes de grupo dependen no de carácter de los elementos de la sustitución, sino de la operación de grupo. El proceso de paso a la teoría abstracta de grupos se aceleró desde el año 1870, después de la aparición del trabajo de C. Jordan “**Traité des substitutions et des equations algébriques**” donde fue hecho un resumen de los resultados de la teoría de los grupos finitos en su aplicación a la teoría de números, teoría de funciones y geometría algebraica.

Hacia fines del siglo XIX, se formó y alcanzó un alto nivel de teoría de los grupos finitos. Surgió una serie de tratados los cuales contenían su elaboración sistemática. en esta misma época aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de grupos. En los años 1890-1891, el cristalógrafo y geómetra ruso E.S. Fiódorov y el matemático alemán A. Schoenflies, independientemente uno de otro, resolvieron el problema de la clasificación de todas las redes cristalinas espaciales. Establecieron la existencia de 230 grupos de simetría espacial, que constaban con la totalidad de las estructuras cristalinas autocoincidentes. Los puntos que se obtienen uno de otro por la transformación de un grupo dado se denominan homólogos con relación a este grupo y forman el llamado sistema regular. En la actualidad, la investigación de la estructura de las sustancias cristalinas incluye la definición de los grupos de Fiódorov.

Los grupos discretos finitos, a los que pertenecen los grupos de Fiódorov, obtuvieron extensión en la teoría de los espacios multidimensionales en la relación con la teoría de los poliedros regulares en éstos. En la base de estos estudios está el teorema de Jordan: el número de grupos finitos lineales de una dimensión dada es en esencia, finito. Este mismo teorema obtuvo aplicación en la confluencia de los siglos XIX y XX en la teoría de las integrales algebraicas de las ecuaciones lineales, las superficies de Riemann y otros. Por ejemplo, Jordan indicó la relación entre las ecuaciones diferenciales lineales que tienen integrales algebraicas y los grupos finitos. Resultó que, la condición necesaria y suficiente de existencia de integrales algebraicas para una ecuación diferencial lineal de tipo Fuks es la condición de finitud del grupo de las transformaciones lineales, sufridas por sus integrales cuando variable independiente circula cada uno de los puntos críticos.

Hacia fines del siglo XIX, la teoría de los grupos finitos se desarrolló en tal grado que para ella adquirió actualidad el problema de la clasificación. Sin embargo, en forma general, este problema no ha sido resuelto hasta el momento. Extraordinarias dificultades surgen también en la investigación de sus aspectos particulares. Por ejemplo, aún no está resuelta totalmente la cuestión sobre la estructura y clasificación de los grupos solubles finitos. Resultó, además, que todos los grupos finitos simples no conmutativos conocidos tienen el orden par. El problema de Burbside: será o no esta propiedad general para todos los grupos de esta clase, está por ahora sin resolver.

Bajo tal estado de cosas en la teoría de grupos, cuando se destacó el concepto abstracto de grupo, era natural que surgiera la cuestión sobre la investigación de los grupos infinitos tanto continuos como discretos y también sobre la creación de un aparato de cálculo adaptado a las necesidades de la teoría de grupos. Estos tres grupos de cuestiones fueron presentadas y recibieron desarrollo a fines del siglo XIX- comienzos del XX.

Los logros fundamentales pertenecen a los discípulos de C. Jordan, F. Klein y S. Lie, los cuales emprendieron el estudio sistemático de la teoría de grupos y sus posibles generalizaciones y aplicaciones.

El matemático noruego Sophus Lie extendió los métodos de la teoría de grupos al problema de la integración de ecuaciones diferenciales. Introdujo alrededor del año 1873 un nuevo tipo de grupo, denominado por él “grupos continuos de transformaciones”. Con cada ecuación diferencial relacionó tal grupo de transformaciones que la deja invariante. Los grupos de Lie constaban de las transformaciones del tipo

$$x \rightarrow f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

determinadas por los parámetros. Por ejemplo, para la rotación de un plano, los parámetros son los ángulos de giro, en el espacio, los denominados ángulos de Euler. La multiplicación de dos transformaciones que son elementos del grupo da una transformación que es también un elemento de grupo. Los parámetros de este último están vinculados con los parámetros de los cofactores de las funciones continuas

$$F_i = F_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Los grupos, definidos de esta manera, recibieron la denominación de grupos de Lie. La estructura de los grupos de Lie resultó relacionada con la cuestión sobre la integrabilidad de ecuaciones diferenciales en cuadraturas. Las propiedades estructurales correspondientes del grupo del Lie obtuvieron, por analogía con la teoría de Galois, la interpretación de las propiedades de resolubilidad. Lie clasificó todos los grupos posibles de transformaciones en el plano y compuso una tabla de los tipos normales de ecuaciones diferenciales con indicación de si se resuelve o no en cuadraturas. La cuestión, surge o no de la continuidad de las funciones F_i , la existencia de tales parámetros en el grupo para los cuales las funciones F_i sean analíticas fue incluida por D. Hilbert en el número de sus problemas famosos y en la actualidad ha sido resuelta positivamente.

Otra aplicación importante de la teoría de los grupos continuos fue realizada alrededor del año 1872 por F. Klein. Más adelante se hablará sobre la concepción de Klein de que cualquier geometría (Euclidiana, afín, proyectiva, etc.). Tiene en su base cierto grupo continuo de transformaciones y es en esencia el estudio de los invariantes de este grupo.

El descubrimiento de tan variada aplicaciones de la teoría de grupos continuos fue la causa de la introducción de una definición abstracta, aún más general del grupo continuo. En ella se incluye la exigencia de bajar la transición límite, de acuerdo con un grupo de operaciones. Enseguida se logró demostrar (esto lo realizó Van Dantzig), que esta definición es más general que la definición de Lie y que existen grupos continuos que no son grupos de Lie. Ya que en esta definición se hace abstracción de que los elementos del grupo son transformaciones, entonces se llega, en esencia, a un grupo topológico y a un espacio topológico. En relación con esto, se creó una imperiosa necesidad de unificar los hechos topológicos aislados en una teoría única. Esto fue realizado por H. Poincaré en su famosa memoria “**Análisis situs**” (1895) y en cinco suplementos a éste (1899-1911).

En la confluencia de los siglos XIX y XX la teoría de grupos se ramificó desmesuradamente, formando el núcleo de álgebra actual. Ella se compone de una serie de teorías altamente desarrolladas: los grupos finitos, los grupos discretos infinitos, los grupos continuos y entre ellos los grupos de Lie. Los métodos teóricos de grupos penetraron en una serie de disciplina matemáticas y sus aplicaciones. Los descubrimientos de De Broglie, Shrodinger, Dirac, y otros, en la mecánica cuántica y en la teoría de la estructura de la materia mostraron que la física moderna debe apoyarse en la teoría de los grupos continuos, en particular en la teoría de la representación de grupos por operadores lineales, la teoría de los caracteres y otras elaboradas por Cartan, H. Weyl y otros científicos.

Pasó un medio siglo después de los trabajos de Gauss, Abel y Galois y el centro de gravedad en las investigaciones algebraicas se trasladó a la teoría de grupos, subgrupos, anillos, estructuras. En el álgebra comenzó el período de las matemáticas modernas.

Algunas otras vías de formación del Algebra Moderna. De la rica y la variada historia del álgebra del siglo XIX, extrajimos una parte comparativamente pequeña de la formación de ciertos conceptos fundamentales. Esto se hizo porque en el aislamiento de algunos objetos algebraicos: Los grupos, campos y más tarde anillos y estructura, y en la creación de las

teorías correspondientes se reflejan los cambios principales que ocurrieron en el álgebra en el transcurso en el siglo XIX- comienzos del XX. Estos cambios predeterminaron las direcciones fundamentales del desarrollo del álgebra en la primera mitad del siglo XX.

Una investigación más detallada de la historia de la creación del Álgebra actual está relacionada con la resolución de algunos problemas histórico-matemáticos.

En primer lugar, es necesario seguir el enriquecimiento de la teoría de grupos y también de la teoría de otros conceptos algebraicos fundamentales, con hechos los cuales permiten descubrir completamente sus propiedades. Así, junto con la historia de los grupos finitos e infinitos continuos, gran interés, en virtud de su importancia para las aplicaciones, provocan los grupos infinitos discretos.

En segundo lugar, ante los investigadores se pone la tarea de descubrir las relaciones de la teoría de grupo (y también la teoría de campos, anillos y estructura) con otras disciplinas matemáticas. Por ejemplo, la introducción de las consideraciones de la teoría de grupos en el dominio de las propiedades topológicas condujo a que ahora cada representación topológica se caracterice en cierta medida por su grupo fundamental, en caso general infinito. Especialmente grande, al parecer, es el papel de la teoría de grupos en la teoría de los nudos, caso particular de los cuales es la teoría de trenzas. Entre los numerosos problemas que aquí quedan por resolver, puede citarse, por ejemplo el problema de la aclaración detallada de las circunstancias que las representaciones topológicas de los grupos fundamentales tienen, al parecer, funciones semejantes a las funciones de los grupos de Galois en los campos algebraicos.

La historia del álgebra del siglo XIX quedaría incompleta, si el investigador no atendiera, en tercer término, a la formación del álgebra lineal, surgida de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales y relacionadas con la teoría de determinantes y matrices. En la segunda mitad del siglo XIX se llevaron a cabo investigaciones muy importantes de la teoría de los invariantes de las ecuaciones, esto es, la evidencia de las funciones de los coeficientes que conservan sus valores ante una u otra clase dada de transformaciones. En este camino del desarrollo creció la teoría más general de las formas, la cual encontró aplicación no sólo en el álgebra, sino también en otras ramas de las matemáticas: la teoría de números, la geometría diferencial, la geometría algebraica, la mecánica y otras y, además, en sus aplicaciones.

No podemos finalmente dejar lugar para la aclaración de la historia de los sistemas numéricos hipercomplejos de Hamilton y Grassmann, creados en los años 1830-1840 y para el rico conjunto de recuerdos de estudios de espacios vectoriales, los cuales juegan actualmente un papel tan importante en investigaciones de diversas, al parecer, teorías matemáticas desde posiciones únicas, muy generales.

El Álgebra clásica llegó a cierta culminación con los trabajos de Weber y Hilbert. Por otra parte, en las postrimerías del siglo se presentaron muchos principios e ideas de desarrollo futuro. Las características principales del proceso siguiente consisten en la inclinación a lo abstracto, la utilización continua del método axiomático y en la penetración teórica-conjuntista que tuvo lugar en el álgebra, al igual que en toda la matemática.

Un primer paso importante se dio entre 1906 y 1910 con los trabajos de Huntington y Steinitz. En ambos casos se considera de manera abstracta la teoría del cuerpo y se da una definición axiomática del concepto cuerpo (ver G. H. Moore-**"The axiomatization of linear algebra: 1875-1940"**, Mathematical Reports, McMaster University, No.3, 1994/95). Huntington obtuvo sus resultados en el marco de sus investigaciones generales sobre el método axiomático y sobre la independencia de los sistemas de axiomas. El punto de vista algebraico permaneció aquí entonces en un segundo plano; en primer plano estaba el análisis de los sistemas de axiomas. Steinitz tenía, por el contrario, objetivos algebraicos:

“Obtener una visión de todos los posibles tipos de cuerpos y determinar sus relaciones mutuas en sus rasgos básicos, este puede ser el programa de este trabajo” (E. Steinitz-**“Algebarische Theorie der Körper”**, J. reine u. angew. Math. 137 (1910), pp.167-309. Reeditado Berlín 1930 H. Hase y R. Baer (eds.)).

Esto lo escribió en su obra **“Teoría algebraica de los cuerpos”** (1910). A diferencia de Weber, para él el concepto cuerpo se encontraba en el punto central de la investigación. En la medida en que él sistematizaba la variedad de cuerpos abarcados con el axioma, pudo lograr totalmente su objetivo. En este sentido definió Steinitz muchos conceptos importantes de la teoría de cuerpos; por ejemplo, cuerpo de ampliación, conjugado de un conjunto, cuerpo primo, ampliación equivalente, ampliación simple, etc. Es característica también la unión del álgebra y la teoría de conjuntos. El trabajo de Steinitz es la primera publicación que se ajusta ampliamente al estilo del **“Algebra Moderna”**. El concepto general: anillo, se introdujo primeramente en 1914 por Fraenkel, o sea mucho después que el concepto cuerpo se había impuesto y ya se conocían numerosos ejemplos de anillos.

Pero también la publicación de Fraenkel se dedica solamente a un tipo de anillo muy especial. Resulta así un mérito indiscutible de Emmy Noether, Artin y los algebristas de su escuela, como Hasse, Krull, Schreier, van der Waerden, el haber impuesto totalmente en la década de los años 20, las concepciones de un álgebra moderna como teoría de estructuras algebraicas. A ellos les interesaba esencialmente el descubrimiento de conceptos abstractos que fueran comunes a las distintas teorías algebraicas. Los puntos de vista de estos algebristas podían expresarse en las palabras de van der Waerden, con las que él caracteriza la máxima de E. Noether:

“Todas las relaciones entre números, funciones y operaciones se hacen verdaderamente perceptibles, aptas para la generalización y realmente fructíferas, cuando se apartan de sus objetos especiales y se reducen a relaciones conceptuales generales” (B.L. van der Waerden-**“Nachruf auf Emmy Noether”**, Math. Annalen 11(1935), pp.469-476).

En sus investigaciones ellos utilizaron principalmente los trabajos de Dedekind y Steinitz. Estos dos matemáticos crearon una tendencia a la **“linealización”** en la teoría de cuerpos, y esta tendencia se convirtió en un detalle característico del álgebra creada por E. Noether, Artin y sus discípulos. Para E. Noether, la teoría de ideales era una aplicación de la teoría de módulos. La selección del concepto abstracto módulo, como punto de partida de las investigaciones de la teoría de ideales condujo naturalmente a que las construcciones del álgebra lineal, tales como formación de cocientes y productos, se aplicaran. A través de los trabajos de E. Noether y Krull cobraron nueva vida los ideales a la izquierda y a la derecha de un álgebra, definidos por Poincaré y Wedderburn en 1903 y 1907, respectivamente, y quedaron bien establecidos en el sistema de conceptos del álgebra. Con la diferenciación entre las operaciones del módulo unilateral y bilateral aparecieron entonces estructuras no conmutativas como objetos de investigación, las cuales contenían los casos conmutativos como caso especial. El álgebra homológica intensificó la tendencia anterior de la linealización, en donde H. Cartan formuló en 1948 varios conceptos fundamentales de esta teoría en el marco de la investigación de módulos especiales.

De esta forma a finales de la década del veinte se habían fijado ya tres columnas del álgebra moderna teoría de grupos, teoría de cuerpos y teoría de ideales en su forma abstracta y axiomática. Mediante esta clasificación en sus estructuras básicas el álgebra se convirtió en una rama sinóptica de la matemática. Pero frecuentemente se consideraban los conceptos y

métodos algebraicos como algo de segunda categoría respecto a los del análisis. Esta situación se modificó decisivamente por van der Warden y su libro **“Álgebra Moderna”** (1930-31). El objetivo de este libro, que representaba el nivel de desarrollo de aquella época y resumía los resultados de las más recientes investigaciones de E. Noether, Artin y su escuela algebraica, se caracterizó por su autor de la forma siguiente:

“La dirección abstracta, “formal” o “axiomática” que el álgebra agradece al nuevo auge cobrado en época reciente, condujo, ante todo, en la teoría de cuerpos, la teoría de ideales, la teoría de grupos y la teoría de los números hipercomplejos a una serie de formaciones de conceptos nuevos, al conocimiento de nuevas relaciones y a resultados muy amplios. El objetivo principal de este libro ha de ser introducir al lector en todo este mundo de conceptos” (B.L. van der Waerden-**“Moderne Algebra”**, Berlín, 1930-1931.

Este libro escrito magistralmente, cuyas ediciones posteriores se encuentran aún entre lo mejores libros de álgebra, produjo en los matemáticos una impresión muy fuerte. Los problemas algebraicos ocuparon de repente un puesto central entre toda la investigación matemática.

Los años posteriores pueden calificarse como una época de florecimiento del Álgebra abstracta. Birkhoff, von Neumann y otros tomaban como base los trabajos de Dedekind sobre la teoría de retículos y desarrollaban esta aún más, a fin de aplicarla especialmente en la solución de interrogantes algebraicas. La axiomatización de otras disciplinas matemáticas había avanzado tanto ya en aquella época, que fue posible aplicar los métodos algebraicos de forma muy útil en muchas ramas. La premisa fundamental para ello fue la elaboración del substrato algebraico de la teoría en cuestión, a fin de conocer claramente sus estructuras algebraicas fundamentales y las mezclas presentes eventualmente.

La acentuación del pensamiento estructural abstracto se intensificó aún más por los matemáticos del grupo de Bourbaki. En los **“Elements de Mathématique”**, publicados a partir de 1939, ellos trataron de reestructurar toda la matemática mediante otra axiomatización y formalización. Partiendo de los conceptos de conjunto y función, desarrollaron la matemática como teoría de las estructuras y las aplicaciones entre ellas. En la búsqueda de las estructuras matemáticas lógicamente más sencillas, ellos ubicaron a las algebraicas entre las estructuras fundamentales. El análisis practicado desde la elaboración y desarrollo del **“Álgebra Moderna”** condujo a una intensa dedicación a los métodos de demostración puramente conceptuales y a una variedad de problemas que estimularon un rápido desarrollo. Simultáneamente se refrenaron el cálculo de fórmulas y los procesos explícitos de algoritmos, lo cual se expresa también en un tránsito parcial de las demostraciones constructivas a demostraciones puras de existencias. La tendencia hacia la ulterior abstracción se continuó hasta los años de la década del 60, de lo cual da fe el **“Álgebra”** de Birkhoff y MacLane publicada en 1960.

En este libro utilizaron los autores especialmente el lenguaje de la teoría de categorías, cuya aplicación a las distintas disciplinas matemáticas produjo una unificación esencial de la matemática.

Con la construcción y la intensa utilización de los equipos electrónicos de procesamiento de datos pudieron palparse en el álgebra nuevamente algunos esfuerzos que se orientaban a las necesidades prácticas. Diferentes estructuras algebraicas (por ejemplo, grupoide, subgrupo, retículo, etc.), que habían llevado en cierto modo una vida a oscuras, alcanzaron entonces mayor importancia. Al mismo tiempo se hacían esfuerzos exitosos por emplear las modernas teorías abstractas (por ejemplo, álgebra universal) con vista a la solución de los problemas

prácticos. En la búsqueda de algoritmos más efectivos y exactos se tropezaba frecuentemente con interrogantes que forman parte del álgebra “clásica”, surgió la “nueva álgebra numérica”. El álgebra de nuestra época se caracteriza por una diversidad de interrelaciones y aplicaciones, en la que las ideas “modernas” y “clásicas” se mezclan y regeneran continuamente.

Desarrollo de ramas especiales del Algebra moderna. La idea fundamental de la teoría de los números p -ádicos; sobre la cual Hensel publicó un trabajo por primera vez en 1899, se basa, en la aplicación del método de series de potencias en los cuerpos numéricos. A pesar de la fundamentación inicialmente deficiente, las ideas de Hensel actuaron de forma extraordinariamente estimulante sobre las investigaciones posteriores. Por una parte, estas son punto de partida de las investigaciones que Steinitz y Fraenkel desarrollaron sobre el concepto cuerpo y anillo abstracto; por otra parte proporcionaron un ejemplo valorado de cuerpo, que se definió en 1913 por Kürschak.

En los años siguientes el concepto valorización alcanzó gran importancia en la teoría de los números, la aritmética y el álgebra, tal como lo expuso Ostrovski en 1932, en un extenso trabajo. Para las aplicaciones teórico-numéricas son importantes especialmente los completamientos de un cuerpo algebraico de números. Partiendo de una idea de Hensel, Chevalley utilizó en 1936, la inclusión de un cuerpo numérico algebraico en el producto de sus completamientos, así como la posibilidad de poder aplicar la teoría de los grupos localmente-compactos mediante la introducción de una adecuada topología. Ya en 1918 Ostrovski determinó todas las valorizaciones del cuerpo de los números racionales, mientras que Hasse, F.K. Schmidt, Teichmüller y Witt clasificaron todas las valoraciones de cuerpos cualesquiera hacia mediados de la década de los años 30. Otra generalización de las valorizaciones procede de Krull, quien en 1932 en lugar de los números reales aceptó un grupo ordenado como imagen de la valorización de van der Waerden, Zariski y sus discípulos exitosamente en la geometría algebraica.

A través de las publicaciones de Artin y Schreier se lograron importantes avances en la teoría de los cuerpos reales. Esto ocurría en 1927. Uno de los resultados más notables consistió en demostrar la existencia de una relación de orden sobre un cuerpo como propiedad puramente algebraica de ese cuerpo.

La teoría de Galois, que combina entre sí ciertas relaciones de la teoría de cuerpos y grupos, recibió una nueva fundamentación y una formulación con los conceptos del álgebra abstracta. En principio ya Dedekind señaló en 1857, por primera vez, los elementos del grupo de Galois, no como sustituciones, sino como automorfismos de cuerpos, Hilbert, E. Noether y Artin y sus discípulos defendían también esta concepción.

En su trabajo fundamental Steinitz proporcionó, además, el fundamento teórico para una teoría de Galois, la cual no se limitaba a los cuerpos numéricos y de funciones. En su conferencia de 1926 Artin presentó la teoría de Galois como teoría estructural de los cuerpos de ampliación normal, o sea, totalmente en el sentido de las ideas de Hilbert-Noether. Pero solamente en su libro **“Galois Theory”** (1938) pudo él eliminar la “mancha”, el empleo del elemento primitivo en la demostración del teorema principal de la teoría de Galois.

La teoría de Galois estimuló a Lie ya en el siglo XIX en relación con la creación de su teoría de los grupos continuos. Lie tenía la idea de que para las ecuaciones diferenciales tenía que haber también una teoría de Galois. El concepto de grupo de Lie se amplió entonces al de grupo topológico. Hilbert y Brouwer proporcionaron entonces importantes ideas sobre este desarrollo. El fundador de la teoría de los grupos topológicos fue Schreier (1925). Aquí se tiene un ejemplo de la algebrización de la matemática, especialmente de la interrelación entre la pujante álgebra abstracta y otras ramas de la matemática (análisis, topología). Esta es una

razón esencial para el desarrollo impetuoso que experimentan los grupos topológicos, incluyendo a la teoría de Lie, en las últimas décadas.

El desarrollo de esta teoría requirió profundas investigaciones en distintas disciplinas, pero los adelantos obtenidos, conjuntamente con el aparato algebraico mejorado o nuevo, son frecuentemente motivo de valiosas aplicaciones en las distintas disciplinas. Esta influencia recíproca se hace evidente en la teoría de los conjuntos o agregados. Weyl utilizó una idea de Hurwitz acerca de la integración sobre grupos de forma sistemática, y en 1927 terminó las investigaciones comenzadas por E. Cartan ya a inicios de siglo, acerca de la estructura de los grupos sencillos de Lie y sus representaciones irreducibles. A principios de la década de los años 30, Haar, v. Neumann y Pontriaguin brindaron extraordinarios aportes a la integración según una medida invariante en grupos localmente compactos, y aplicaron estos exitosamente a las investigaciones de la estructura de los grupos topológicos. Otros adelantos van unidos a los nombres de Gleason, Montgomery y Zippin, los que en 1952 solucionaron el quinto problema de Hilbert.

Como otro ejemplo de la interrelación entre el álgebra y la topología puede mencionarse la topología algebraica, la cual se inició en las postrimerías del siglo con la introducción de los grupos fundamentales de un espacio topológico y de los grupos de Betti. También el interesante y variado problema de la investigación de la estructura de grupos y álgebras solamente puede mencionarse. Aquí fue nuevamente la teoría de módulos el punto de partida el que permitió a E. Noether caracterizar la teoría de la representación de las álgebras como primaria respecto a la representación de grupos, y con ello establece la unión entre estos problemas. La teoría de la representación halló ya en la década de los años 20 exitosa aplicación en la física y se manifestó en lo sucesivo, también en el análisis funcional y en la teoría de las funciones casi periódicas, como muy útil.

La historia del álgebra moderna ha sido desarrollada por muchos matemáticos notables: en representación de muchos debemos citar aquí también a A. Weyl. Macaulay. H. Cartan. Grothendieck y Serré.

Es admirable, que una de las ramas del Álgebra más antiguas y más rica en resultados, que juega un papel fundamental en la Geometría y en las aplicaciones de las Matemáticas a cuestiones de las ciencias naturales, se base en axiomas tan sencillos. Un pequeño análisis muestra, que se pueden simplificar aún más, pero esta tarea rebasa los marcos de nuestro trabajo.

Los grupos con operaciones conmutativas se llaman, naturalmente, *conmutativos o abelianos*, (en honor de matemático noruego Niels Henry Abel). El propio término *grupo* pertenece, como ya vimos, al matemático francés Galois, el legítimo creador de la teoría de los grupos. La idea de la teoría de grupos “flotaba en el aire” (como frecuentemente sucede con las ideas matemáticas fundamentales mucho antes de Galois, y algunos de sus teoremas ya habían sido demostrados en forma ingenua por Lagrange (baste a título de ejemplo el Teorema 1). Los trabajos geniales de Galois resultaron incomprensidos, y el renacimiento del interés por ellos comenzó sólo después del libro de Jordán “**Curso de la teoría de permutaciones y de ecuaciones algebraicas**” (1870). Sólo hacia fines del siglo XIX en la teoría de grupos se *renuncia totalmente a la fantasía. A cambio de esto, se prepara cuidadosamente el esqueleto lógico* (ver F. Klein-“**Lecciones sobre el desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX**”, Berlín: Springer, 1926).

Teorema 1 (de Lagrange). El orden de un grupo finito, es divisible por el orden de cada uno de sus subgrupos.

Corolario 1. El orden de cualquier elemento es un divisor del orden del grupo. Un grupo de orden primo p , es siempre cíclico y, con exactitud hasta el isomorfismo, único.

Concretemos un poco más la definición de elemento primo. Un polinomio f de grado no nulo del anillo $P[x]$, se llama irreducible en $P[x]$ (o irreducible sobre el campo P), si él no es divisible por ningún polinomio $g \in P[x]$, en el que $0 < \deg g < \deg f$. En particular, todo polinomio de primer grado es irreducible. Es totalmente evidente, que la irreducibilidad del polinomio de orden >1 o su descomposición en factores irreducibles, son conceptos íntimamente ligados con el campo básico P , como lo muestra el polinomio $x^2+1=(x+i)(x-i)$. El polinomio x^4+4 es reducible sobre $\mathbb{Q}$, aunque esto no es tan fácil de adivinar:

$$x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Ambos multiplicadores del segundo miembro son irreducibles no sólo sobre $\mathbb{Q}$, sino también sobre $\mathbb{R}$, siendo reducibles, sin embargo, sobre $\mathbb{C}$, pues $x^2 \pm 2x + 2 = (x \pm 1)^2 + 1$ (ver “Teorema de Sofía Germain” en Yu. Perelman-**“Algebra Recreativa”**, Mir, Moscú, 1978, pp.117-118). Como los polinomios de un grado dado sobre un campo finito, son un número finito, entonces, se puede hacer la siguiente conclusión útil.

Sobre cualquier campo finito, existen polinomios irreducibles de grados tan grande como se quiera.

En muchas ocasiones, es conveniente la descomposición del grupo G en subconjuntos del tipo $a \text{Ker } f$, siendo f un homomorfismo de G en G' . En general se acostumbra estudiar esta descomposición, independiente de los homomorfismos.

Sea H un subgrupo del grupo G . *Clase adjunta a la izquierda en el grupo G del subgrupo H* (brevemente, G del H) se llama al conjunto gH de elementos del tipo gh , donde g es un elemento dado de G y h recorre todos los elementos del subgrupo H . El elemento g se denomina *representante* de la clase adjunta gH . Análogamente se definen las *clases Hg adjuntas a la derecha*.

Al conjunto de todas las clases adjuntas a la izquierda en G de H , lo designaremos con el símbolo G/H (o $(G/H)_l$, si surge la necesidad de examinar el conjunto $(G/H)_r$ de clases adjuntas a la derecha de G en H). Para la potencia $\text{Card } G/H$ de este conjunto, se usa el nombre de *índice del subgrupo H en G* y se introduce la designación especial $(G:H)$, que concuerda muy bien con la designación $(G:e)$ de orden $|G|$ del grupo G (el número de clases adjuntas del grupo unidad). Como la aplicación $H \rightarrow gH$ es biunívoca (ver demostración del Teorema de Cayley en A. I. Kostrikin-**“Introducción al Algebra”**, Editorial Mir, Moscú, 1980 (p.144) y A. López T.-**“Reviviendo el Teorema de Cayley”**, Universidad del Cauca (Colombia), 1991 (preprint)), entonces $\text{Card } gH = (H:e)$. De este modo tiene lugar la fórmula:

$$(G:e) = (G:H)(H:e),$$

de la cual se deduce el clásico Teorema de Lagrange (ver Teorema 1).

Es conocido que la teoría de grupos empezó con ejemplos de grupos de transformaciones, los subgrupos del grupo $S(\Omega)$ de todas las aplicaciones biunívocas del conjunto Ω en sí mismo. Esta es la forma adoptada por nosotros, pues responde al camino histórico por el que se desarrolló esta teoría y al significado que los grupos de transformaciones tienen en otras partes de las Matemáticas. La llamada teoría abstracta de grupos, fruto de una época posterior (primera mitad de nuestro siglo), se alejó de los grupos de transformaciones, pero muchos de sus conceptos llevan la marca de los “viejos tiempos”. Precisamente, la fuente de estos conceptos los hallamos en la idea de *realización (representación)* del grupo G en $S(\Omega)$, donde

Ω es un conjunto elegido adecuadamente. Es cómodo entender como realización de G en $S(\Omega)$, que responde al elemento $g \in G$, entonces $\Phi_e = e_\Omega$ es la transformación unitaria $\Omega \rightarrow \Omega$ y $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$; $g, h \in G$. Las propiedades de la transformación Φ_g , se escriben en la forma:

- i) $ex = x$, $x \in \Omega$,
- ii) $(gh)x = g(hx)$, $g, h \in G$.

Cuando se tiene la aplicación $(g, x) \rightarrow gx$ del producto cartesiano $G \times \Omega$ en Ω , que satisface las propiedades I), ii) se dice que el grupo *opera* (a la izquierda) sobre el conjunto Ω y que Ω es un *G-conjunto*. Así, teniendo un *G-conjunto* Ω , por medio de la fórmula:

$$\Phi_g(x) = gx, \quad x \in \Omega,$$

definimos la aplicación $\Phi_g: \Omega \rightarrow \Omega$, para cada $g \in G$, además de las propiedades I), ii), se deduce que $\Phi: g \rightarrow \Phi_g$ será un homomorfismo de G sobre $S(\Omega)$. También se dice (en particular, cuando $|\Omega| < \infty$), que con la operación de G sobre Ω se asocia la *representación* (Φ, Ω) del grupo G en el grupo de permutaciones. El núcleo $\text{Ker } \Phi$ se llama *núcleo de operación* del grupo G .

Dos puntos $x, x' \in \Omega$ se llaman equivalentes con relación al grupo G , que opera sobre Ω , si $x' = gx$ para algún elemento $g \in G$. Las propiedades de reflexibilidad, simetría y transitividad obtenidas fácilmente con ayuda de i), ii) muestran, que estamos en presencia de verdaderas relaciones de equivalencia, que dividen Ω en clases disjuntas de equivalencias llamadas *G-órbitas*. el concepto de órbita se tomó de la Geometría. Si, por ejemplo, $G = \text{SO}(2)$ es un grupo de rotaciones en un plano alrededor del punto de origen O , entonces la circunferencia con centro en O , que pasa por P , servirá de órbita del punto P y el conjunto $\Omega = \mathbb{R}^2$ será la unión de las circunferencias concéntricas, incluyendo la de radio nulo (el punto O).

Sea x_0 un punto fijo de Ω . Examinemos el conjunto:

$$\text{St}(x_0) = \{g \in G : gx_0 = x_0\} \subset G.$$

Como $ex_0 = x_0$, y $g, h \in \text{St}(x_0) \Rightarrow gh^{-1} \in \text{St}(x_0)$, entonces $\text{St}(x_0)$ es un subgrupo de G . Este se denomina *subgrupo estacionario* (o *estabilizador*) en G del punto $x_0 \in \Omega$ y frecuentemente se denota con el símbolo G_{x_0} . Para el ejemplo antes citado tenemos que $\text{St}(O) = \text{SO}(2)$ y $\text{St}(P) = e$, si $P \neq O$. De lo anterior, podemos obtener que las clases adjuntas para la izquierda $g\text{St}(x_0)$, se encuentran en correspondencia biunívoca con los puntos de la órbita $G(x_0)$. en particular:

$$\text{Card } G(x_0) = \text{Card } (G/\text{St}(x_0)) = (G:\text{St}(x_0)), \quad (1)$$

Aquí, $G/\text{St}(x_0)$ es el conjunto cociente de G respecto a $\text{St}(x_0)$ y $(G:\text{St}(x_0))$ es el índice del subgrupo $\text{St}(x_0)$ en G . La potencia $\text{Card } G(x_0)$ muchas veces se llama *longitud de la G-órbita* del punto x_0 .

De (1) y del Teorema de Lagrange se deduce, *que la longitud de cualquier órbita con relación al grupo finito G , es divisor del orden del grupo.*

En $\Omega = G$ se define la operación de cualquier elemento $g \in G$ mediante la fórmula:

$$g \circ x = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

Esta operación se traslada a los subconjuntos y subgrupos en G . Dos subconjuntos $H, T \subset G$ son *conjugados*, si $T = gHg^{-1}$ para algún $g \in G$. Sea H un subgrupo en G . se acostumbra decir que:

$$N(T) = St(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\},$$

es el *normalizador* del subgrupo H en G . En correspondencia con (1), la *longitud de la órbita* H^G (número de subgrupos conjugados con H) coincide con el índice del normalizador $N(H)$ en G .

La aplicación $L_a: G \rightarrow G$, definida por la fórmula $L_a(g) = ag$, con frecuencia es llamada *traslación por la izquierda en a* . Como $eg = g$ y $(ab)g = a(bg)$, entonces las traslaciones por la izquierda provocan la operación de G en sí mismo, y ésta induce la operación en los subconjuntos del grupo G .

La expresión:

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1},$$

se llama *conmutador* de los elementos x , y del grupo G , sirve de término corrector, necesario para cambiar los lugares de x e y :

$$xy = [x, y]yx.$$

Si x e y son permutables, entonces $[x, y] = e$. Es intuitivamente claro que, cuanto más conmutadores diferentes de e haya en el grupo G , tanto más significativa será la desviación de la ley de multiplicación en G de la conmutativa. Sea M el conjunto de todos los conmutadores en G . Se llama *conmutante* (o *subgrupo derivado*) del grupo G el subgrupo $G' (= G^{(1)} = [G, G])$, engendrado por el conjunto M :

$$G' = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle.$$

Existen grupos $\neq e$ coincidentes con su conmutante y, por lo tanto, insolubles. Más aún, es conocido el siguiente resultado, sobre la existencia de grupos no abelianos, en los cuales no hay en absoluto subgrupos normales propios ($\neq e$ y G). A estos grupos se adopta llamarlos *simples*.

Teorema 2. El grupo alternativo A_5 es simple.

Consideremos ahora una estructura, que permite construir nuevos grupos a partir de otros dados. Llamemos *producto directo (externo)* de los grupos arbitrarios A y B , al conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (a, b) , donde $a \in A$, $b \in B$, con la operación binaria:

$$(a_1, b_1) (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2),$$

incluyéndose en $A \times B$ los subgrupos $A \times e$, $e \times B$, isomorfos a A y B , respectivamente.

Teorema 3. Sea G un grupo con subgrupos normales A y B . Si $A \cap B = e$ y $AB = G$, entonces $G \cong A \times B$.

El grupo G que satisface las condiciones de este teorema, se llama *producto directo (interno)* de sus subgrupos A , B . Difiere del producto directo externo en que G contiene en calidad de

factores directos los propios grupos A , B y no sólo sus copias isomorfas Axe , exB . Se sobreentiende, que el producto directo externo $G=AxB$ también es producto interno de los subgrupos Axe , exB y, con cierta experiencia, no es necesario hacer distinciones entre ellos, utilizando la expresión reducida “producto directo”.

Con un poco más de trabajo, es posible obtener el siguiente resultado *G es el producto directo de sus subgrupos normales $G_1, \dots, G_n$, ya que cada elemento $g \in G$ permite, además, ser escrito unívocamente en la forma $g=g_1 \dots g_n$, $g_i \in G_i$.*

Los Teoremas de Sílov (ver A. I. Kostrikin-Ob. Cit.). En el punto anterior prestamos atención al hecho de que en el grupo finito G de orden $|G|$ puede no haber ningún subgrupo de orden d , divisor de $|G|$. De ejemplo mínimo sirve el par $G=A_4$, $d=6$.

Como en un grupo simple no abeliano, no puede haber subgrupos de índice 2 (en virtud de su normalidad) entonces, según el Teorema 2 del punto anterior, en el grupo alternativo A_5 de orden 60 no hay subgrupos de orden 30 (tampoco hay subgrupos de orden 20 y 15, ver A.I. Kostrikin-Ob. Cit., p.273). Sobre este fondo, especialmente notables parecen las leyes generales, que hace más de un siglo formuló el matemático noruego Peter Lüdwig Sílov (12.12.1832-7.9.1918), que desarrolló prácticamente toda su vida en Cristiania (Oslo), trabajando en su Universidad, donde obtuvo una cátedra en 1898, a pesar que es más conocido en Álgebra, obtuvo otros resultados importantes en la Teoría de las Funciones Analíticas. Estas leyes obtenidas por Sílov y que llevan su nombre, pueden tomarse como los recíprocos del Teorema de Lagrange, ellas se refieren a los p -grupos, contenidos en calidad de subgrupos del grupo G . La existencia del elemento de orden p en el grupo abeliano, cuyo orden se divide por p , fue observado ya por Cauchy.

Sea $|G|=p^n m$, donde p es un número primo y m uno entero, además, p y m son primos entre sí. Al subgrupo $P \subset G$ de orden $|P|=p^n$ (si existe) lo llamaremos *p-subgrupo de Sílov* del grupo G . Por $N(P)$ se comprende el normalizador del subgrupo P en G .

Teorema 4 (Primer Teorema de Sílov). Los p -subgrupos de Sílov, existen.

Teorema 5 (Segundo Teorema de Sílov). Sean P y P_1 dos p -subgrupos de Sílov cualesquiera del grupo G . entonces, existirá un elemento $a \in G$, para el cual $P_1 = aPa^{-1}$. en otras palabras, todos los p -subgrupos de Sílov son conjugados.

Teorema 6 (Tercer Teorema de Sílov). Para el número N_p de los p -subgrupos de Sílov del grupo G , tiene lugar la igualdad $N_p = (G:N(P))$ y la congruencia $N_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Recurramos al caso general y obtengamos una especificación útil de los Teoremas de Sílov.

Teorema 7. Son justas las siguientes afirmaciones:

I) el p -subgrupo de Sílov P del grupo G es normal en G sí y sólo sí, $N_p=1$;

II) para que el grupo finito G de orden $|G|=p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ resulte un producto directo de sus p_i -subgrupos de Sílov $P_1, \dots, P_k$, es necesario y suficiente, que todos estos subgrupos sean normales en G .

Observación 1. El p -subgrupo de Sílov normal P del grupo G , es *característico* en G , o sea, invariante para la operación de cualquier automorfismos $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Efectivamente, $|\varphi(P)| = |P|$, por eso, $\varphi(P)$ es un p -subgrupo de Sílov y, por lo tanto, $\varphi(P)=P$, si $N_p=1$. Es también

digno de mención, que los análogos de los subgrupos de Sílov se observan en estructuras algebraicas, lejanas a los grupos finitos.

Observación 2. Esta no es la única forma de presentación de los Teoremas de Sílov recogida en la bibliografía, en P. Dubreil y M. L. Dubreil-Jacotin-“**Lecciones de Algebra Moderna**”, Ediciones R., La Habana, 1969, pp.78-83 se demuestra el 1er Teorema y se deduce el 2do y 3ro en un único resultado.

En otros textos, por ejemplo L.A. Skorniakov-“**Elementos de Algebra**”, Naúka, Moscú, 1980, p.216 (en ruso) se presenta y demuestra el 1er y 2do Teorema bajo un único resultado, denotado como 1er Teorema de Sílov con una demostración muy similar a la brindada en A.I. Kostrikin-Ob. Cit.. Por otra parte, el clásico I.N Herstein-“**Topics in Algebra**”, Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, 1964, pp.78-79, presenta una demostración elemental y muy elegante (debida a Wielandt, Archiv der Mathematik, Vol.10 (1959), pp.401-402) del siguiente resultado:

Teorema 2.k (Sílov). Si p es primo y p^α divide al orden del grupo G , entonces G posee un subgrupo de orden p^α .

Es claro que el resultado de Skorniakov, y en general los dos primeros Teoremas de Sílov, son casos especiales del teorema anterior, así tiene lugar la siguiente conclusión:

Corolario. Si p^α divide al orden del grupo G , $p^{\alpha+1}$ no divide a $|G|$, entonces G posee un subgrupo de orden p^α .

En la monumental “**Elements de Mathématique**” de N. Bourbaki, Hermann, París, 1970 se utiliza otro esquema, basado en la siguiente definición de p -subgrupo de Sílov:

Definición. Sea G un grupo finito. Llamaremos p -subgrupo de Sílov de G , todo subgrupo P de G que verifica las dos condiciones siguientes:

- a) P es un subgrupo;
- b) $(G:P)$ no es un múltiplo de p .

A continuación brinda una serie de resultados que incluyen, entre otros, los teoremas de Sílov antes expuestos.

Observación 3. Los tres teoremas de Sílov presentados aquí, pueden obtenerse como una combinación de un grupo de problemas (ver ejercicios 7-9).

CUESTIONARIO

1. Fundamente por qué Galois es considerado una de las mayores mistificaciones de la Historia de la Matemática.
2. Hallar el número de los 5-subgrupos de Sílov en A_5 .
3. Comprobar que el conjunto P de las matrices:

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \pm \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \pm \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

sobre Z_3 forma un grupo isomorfo al grupo de cuaterniones Q_8 y que es 2-subgrupo de Sílov en $SL(2, Z_3)$. Mostrar que $P \triangleleft SL(2, Z_3)$.

Conferencia 11. Cauchy y Bolzano. Gauss, El Príncipe.

“La humanidad avanza gracias no solo a los potentes empujones de sus grandes hombres, sino también a los modestos impulsos de cada hombre responsable”

Green

Comienzos del siglo XIX, fin del mito de los infinitesimales.

La contradicción en los algoritmos del cálculo diferencial y su correspondencia con las representaciones existentes entonces con el rigor matemático heredado de los griegos, fue evidente para la mayoría de los matemáticos del siglo XVIII. Por otra parte, este cálculo encontraba cada día nuevas aplicaciones en la mecánica y la astronomía, convirtiéndose, poco a poco, en la parte central y más productiva del conocimiento matemático. El problema de la fundamentación del cálculo diferencial se hizo cada vez más actual, convirtiéndose en uno de los problemas del siglo y según palabras de Marx, llamando la atención también de los no especialistas. Está claro que una teoría puede ser lógicamente fundamentada sólo cuando llega a determinado nivel de madurez. Una teoría que todavía se encuentra en el estadio de búsqueda de leyes fundamentales de desarrollo y de definición precisa de sus conceptos principales no puede ser fundamentada lógicamente. Además, para poder hablar de una fundamentación filosófica los conceptos fundamentales deben ser suficientemente generales y a la vez bien determinados. La fundamentación lógica y filosófica del cálculo diferencial e integral era objetivamente imposible sobre la base de los conceptos sobre los cuales aparecieron y por eso los esfuerzos de Newton, Leibniz, Lagrange y otros, hasta los mismos comienzos del siglo XIX, terminaron en el fracaso. Señalemos las principales insuficiencias:

Incorrecta comprensión del concepto de diferencial: En Leibniz, L'Hospital, Euler y otros matemáticos del siglo XVIII el concepto de diferencial se confundía en el incremento. Una aproximación suficientemente correcta del concepto de diferencial fue dada sólo por Lagrange (1765).

Insuficiente comprensión del concepto de función: De hecho hasta fines del siglo XIX los matemáticos partiendo de la intuición mecánica y geométrica, entendieron por fundamentación sólo las funciones analíticas representadas por una determinada fórmula (en algunos casos infinitos como en las consideraciones de Fourier ligadas con su teoría del calor). Sólo con la aparición de las funciones discontinuas en problemas prácticos, los matemáticos prestaron atención a la formación lógica del concepto de función (ver última sección de esta conferencia, para mayores detalles).

Ausencia de un concepto claro de límite: Los seguidores de Newton: Maclaurin, Taylor, Wallis y otros, mantuvieron una larga discusión sobre el hecho de que si la variable alcanza o no el límite. Este problema no era fácil, precisamente, porque no había una definición precisa de límite y sólo se determinaba por razonamientos mecánicos y geométricos. Esta insuficiencia permaneció hasta Cauchy (1823).

El concepto de continuidad funcional era intuitivo: Esto se explica porque los matemáticos del siglo XVIII consideraban todas las funciones continuas y por eso no tenían la necesidad de precisar este concepto. Sólo a principios del siglo XIX se comenzó a pensar en este problema (otros detalles los puede encontrar en la última sección de esta conferencia).

Concepto difuso de integral definida: Relacionado ante todo con la ausencia de un teorema de existencia. Se consideraba por ejemplo, que la fórmula de Newton-Leibniz tenía un significado universal, es decir, que era válida para todas las funciones y en todas las condiciones. Los esfuerzos en la precisión del concepto hechas por Lacroix, Poisson y Cauchy pusieron en primer plano el concepto de límite y de continuidad. Pero el problema de la integral definida sólo halló una respuesta completa hasta fines del siglo XIX en los trabajos de Lebesgue.

Así, el movimiento del análisis matemático en el siglo XVIII hacia su fundamentación, puede describirse completamente en el sistema **“teoría-práctica”**, esto es, como interrelación dialéctica entre estos momentos. La necesidad del cálculo de áreas y volúmenes y del hallazgo de máximos y mínimos entre otros problemas concretos, conllevó a la creación del algoritmo del cálculo diferencial e integral. La aplicación de estos algoritmos a nuevos problemas inevitablemente conllevó a la generalización y precisión de los ritmos. En última instancia, el análisis se formalizó como lógicamente no-contradictorio, como un sistema relativamente cerrado y completo.

Pero aunque estas razones para provocar una crisis no son pocas, a ellas se une de manera sustancial las inconsecuencias de los enfoques filosóficos que imperaban en la época. Como es sabido durante el siglo XVIII y buena parte del siglo XIX las dos corrientes filosóficas principales fueron la metafísica y la empírica. La primera, trataba de fundamentar la matemática a través de formas más elementales de movimiento, a través de concepciones apriorísticas del pensamiento, tal es la posición de Leibniz que retoma en cierto sentido Euler y que más adelante Kant (1724-1804) en su trabajo **“La experiencia en la introducción en la filosofía de las cantidades negativas”** y Hegel (1770-1831) en **“La ciencia de la lógica”** van a llevar a planos más generales. Hay que señalar que cuando Hegel daba su teoría de que tales contradicciones en el concepto de infinitesimal eran insalvables, ya D'Alembert y Lagrange exponían las ideas que más tarde Bolzano y Cauchy desarrollarían en la hoy conocida “teoría de límites”.

Las posiciones empíricas sobre los infinitesimales fueron defendidas por Newton y su escuela inglesa, principalmente, pero también encontraron eco en el continente.

Pero tanto las tendencias metafísicas como las empiristas al no poder sustentar una teoría consecuente y completa fueron cediendo ante el desarrollo de las ideas de quienes como Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Dirichlet, y otros consideraban el problema de los infinitesimales desde un ángulo más dialéctico.

Aportes de Bernardo Bolzano (1781-1848)

Los pasos decisivos en este camino se relacionan siempre en la conciencia de los actuales matemáticos con el nombre de Cauchy. Esto es correcto en lo que se refiere a que su **“Cours d'Analyse”** (1821), donde se esforzó con éxito por lograr una determinación exacta de conceptos fundamentales del análisis, tuvo un gran efecto sobre el desarrollo posterior. No obstante, para seguir la verdad de la historia hay que destacar el aporte del moralista y matemático bohemio Bolzano, quien en algunos puntos incluso se adelantó a Cauchy. En un pequeño escrito **“El principio del binomio...”** (1816) él plantea:

“...como yo ... también en lugar de las llamadas magnitudes infinitamente pequeñas... me valgo del concepto de aquellas magnitudes que pueden ser menor que toda magnitud dada, o (como yo la llamo para evitar la monotonía, aunque menos rigurosamente) de las magnitudes que pueden

hacerse tan pequeñas como se quiera. Ojalá no se ignore la diferencia entre las magnitudes de este tipo y aquello que uno se imagina bajo el nombre de infinitamente pequeño”.

En otra obra de Bolzano del año 1817, la cual contiene la demostración estricta del teorema del valor intermedio, se encuentra por primera vez en la historia de la matemática una definición rigurosa de “Continuidad de una función” con el propósito, explícitamente manifestado, de concebir estrictamente el concepto utilizado hasta ese momento solo intuitivamente o aludiendo a la intuición, a fin de que pueda integrarse a la representación sistemática del análisis. Bolzano define:

“que una función $f(x)$ para todos los valores de x que se encuentran dentro o fuera de ciertos límites, varíe según la ley de continuidad (...) que cuando x es un valor semejante, la diferencia $f(x-\alpha)-f(x)$ puede hacerse menor que toda magnitud dada, cuando se puede suponer α tan pequeña como se quiera”.



Si se pasa por alto que Bolzano no conoce aún el uso del signo de módulo, se tiene aquí una definición de la continuidad, tal como resulta usual actualmente a todo matemático. Bolzano fue también el primero en formular el criterio de convergencia necesario y suficiente para series de (funciones) infinitas, denominado por Cauchy y utilizado primeramente por él en 1821. Bolzano basa su uso en la utilización de sumas parciales.

En 1920 se produjo un hecho sensacional en la historia de la matemática cuando al investigar la obra póstuma de Bolzano se comprobó que en un **“Estudio sobre las funciones”** (publicado por K. Rychlik sólo en 1930, o sea 100 años después de su escritura) fue el primero en dar un ejemplo de una función continua en todo un

intervalo, pero en ningún punto diferenciable, esto ocurrió 45 años antes de Weierstrass, al cual se le había adjudicado la prioridad de este descubrimiento, Bolzano amplió la clase de curvas continuas aplicando el método de acumulación de singularidades y obtuvo por esta vía muchas funciones originales. **“Estudio ...”** contiene otros resultados notables: por ejemplo, la relación entre la monotonía y la continuidad de las funciones.

Es difícil soslayar el papel de Bolzano en la matemática, si tenemos en cuenta que ya en 1817 formuló y demostró el teorema de que si el conjunto de los números reales está acotado superiormente (inferiormente), entonces él tiene extremo superior (inferior), Weierstrass formuló este teorema en 1860.

Aportes de Augustín Louis Cauchy (1789-1857)

Bolzano apenas logró que se reconocieran sus méritos en su época: por razones políticas le estaba prohibida la actividad pública; pero él tampoco reconoció el requisito resultante de la Revolución Industrial de hacer más accesible la matemática a la enseñanza. Cauchy por el contrario -a pesar de su actitud extremadamente conservadora en cuestiones políticas- se

ajustó mejor a este desarrollo, el cual combinaba la aritmetización del cálculo con la apertura hacia la rigurosidad.

El proceso de reconstrucción de los fundamentos del análisis matemático sobre la base de la teoría de límites se reveló claramente en los años 20 del siglo XIX ante todo en las famosas conferencias de Cauchy, las cuales dictó en la Escuela Politécnica de París. Desde 1816,



Cauchy fue nombrado miembro de la Academia y profesor de la Politécnica, donde trabajó con muchos de los mejores matemáticos de Francia. No obstante, desde 1830 hasta 1838, Cauchy se vio obligado a encontrarse en la emigración debido a sus convicciones monárquico-religiosas y la oposición al régimen republicano. A su regreso enseñó en un colegio jesuita y sólo en 1848 se hizo profesor de la Sorbona.

En el año 1821 se publicó el **“Analyse Algébrique”** de Cauchy, el cual representaba la primera parte del libro de texto oficial de la Escuela Politécnica, el **“Cours d'Analyse”**. El lo elaboró “para mayor utilidad de los pupilos” y por eso no puede “explicar profundamente las propiedades principales de las magnitudes infinitamente pequeñas, propiedades que constituyen la base del cálculo infinitesimal “. A causa del rigor de los métodos de enseñanza, él se ve precisado también a exponer varios principios:

“que a primera vista parecen un poco duros. Por ejemplo,... que una serie divergente no tiene suma alguna”.

A través de Cauchy, el axioma de Eudoxio-Arquímedes se convirtió -en forma aritmética- definitivamente en base del cálculo infinitesimal; las exigencias de exactitud y maniobrabilidad se cumplen entonces en relación con el aparato -posterior- formal del lenguaje ε - δ .

Se hace entonces innecesario referirse a la visualización geométrica o a la interpretación mecánica de la continuidad. Al mismo cálculo somete Cauchy la formación del valor límite, por ejemplo, en el cociente diferencial. El mismo cálculo permitía -y con ello se refutó un intento de demostración de Ampère -demostrar la continuidad y la diferenciabilidad como propiedades que no se implicaban recíprocamente: de la diferenciabilidad resulta la continuidad, pero no a la inversa.

Cauchy introdujo la expresión de que los términos de una sucesión se hacen infinitamente pequeños o arbitrariamente pequeños. Él definió el límite superior y el límite inferior de una sucesión y estableció la relación con el valor límite de una sucesión eventualmente existente. El criterio mayorante utilizado ya por Gauss en 1812, lo empleó Cauchy expresamente como criterio de convergencia general y de amplio alcance y partiendo de esto, y mediante el empleo de la serie geométrica, se deriva el criterio de la raíz o de Cauchy. Cauchy determinó también en 1833 que la ley conmutativa para los términos de una serie infinita es válida ilimitadamente solo para series absolutamente convergentes: Dirichlet se remitió a esto en 1857. La condición de la convergencia absoluta de dos series se manifestó también como suficiente para que la serie de los productos que surge mediante la multiplicación término a término sea convergente al producto de los valores límite de las distancias series. Debemos

añadir, que en este campo, le precedieron sólo pocos descubrimientos: el criterio integral (Maclaurin, 1742) y el criterio, formulado con rigor insuficiente, de D'Alembert en 1768. La teoría de series se enriqueció en las conferencias de Cauchy con el establecimiento de la región de convergencia de las series de potencias:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

tanto para valores reales como complejos del argumento. Para estos últimos se definió (en 1844) el círculo de convergencia y dedujo el teorema (conocido ahora como de Cauchy-Hadamard): una serie converge, sí:

$$|z| < r = \frac{1}{L}, \text{ donde } L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \text{ con } n \rightarrow \infty.$$

Quedó claro que si $L=0$, la serie converge en todo el plano, si $L=\infty$, entonces la región de convergencia se reduce a un punto; finalmente, la condición $0 < L < \infty$ significa que la serie converge dentro del círculo de radio $1/L$ y diverge fuera de él.

Otros teoremas elaborados por Cauchy y por Abel, Dirichlet, Fourier, Chebyshev, Olivier, Stokes y otros sobre la teoría de las series infinitas atañen también a la conducta de la convergencia de series de funciones generales y no sólo a la de las series de potencia. Ellos toman las propiedades funcionales -como continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad- de la función definida mediante la serie a partir de las propiedades de la convergencia de la serie y de las propiedades funcionales de sus términos. Decisivo para la explicación de tales interrogantes es el concepto convergencia uniforme. En la obra de Cauchy se mantuvo esta laguna, la cual lo hizo cometer ocasionalmente errores. La inseguridad resultante de esto solamente pudo resolverse después del descubrimiento del alcance total de este concepto en la segunda mitad del siglo XIX. Cauchy destacó finalmente el papel metodológico decisivo de la demostración de existencia en el análisis, ya sea para la suma de series o para la solución de ecuaciones diferenciales.

Cauchy introdujo un desarrollo que permitió al cálculo integral -concebido hasta ese momento solo como operación inversa del cálculo diferencial- convertirse en una disciplina matemática independiente del cálculo diferencial. A través de Dirichlet y Jacobi, de Riemann, Weierstrass, Heine, Borel, Lebesgue y otros se dirigió a la investigación de aquellas clases de funciones que poseen una integral (en el sentido de Riemann o de Lebesgue). Continuado en el estilo riguroso de la escuela francesa, este fructífero razonamiento influyó además sobre la formación y desarrollo de la teoría de conjuntos y el análisis funcional.

La producción científica de Cauchy fue excepcional. Los biógrafos calculan 789 trabajos publicados por él. La mayoría de ellos se relacionan con diferentes ramas del análisis matemático y sus aplicaciones, las que incluyen geometría, teoría de números, álgebra, teoría de la elasticidad, óptica y, muy en particular, la teoría de funciones de variable compleja. Por último debemos decir, que las conferencias de Cauchy, donde se construye el análisis matemático sobre la teoría de límites, fue publicado en tres libros: el ya aludido **“Curso de Análisis”** (1821), **“Resumen de conferencias sobre cálculo de infinitesimales”** (1823) y **“Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría”** (2 tomos, 1826, 1828) los que señalan el comienzo de una reconstrucción radical de los fundamentos de esta ciencia, reconstrucción que antecedió inmediatamente a su estado actual.

El Príncipe de las Matemáticas.

En la confluencia de los siglos XVIII y XIX se realizaron en el álgebra, descubrimientos de importancia extraordinaria. Ellos estuvieron acompañados de la introducción en esta ciencia de una serie de nuevos conceptos (en primer lugar el concepto de grupo) los cuales yacen en la base del álgebra moderna. Estos descubrimientos condujeron a la transformación de toda el álgebra en el transcurso del siglo XIX. Tenemos en cuenta aquí, los resultados de K. F. Gauss, N. H. Abel y E. Galois, relativos a la demostración del teorema fundamental del álgebra, la demostración de la no resolubilidad de las ecuaciones de grado mayor o igual que 5 y la creación de la teoría de Galois. Detallemos un poco estos resultados.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) hizo sus primeros descubrimientos en álgebra, siendo aún muy joven, en la época de sus estudios en la Universidad de Gotinga (1795-1798). En marzo de 1796 ocupado en los problemas de la búsqueda de las raíces de la ecuación:

$$x^n - 1 = 0,$$

advirtió la relación entre estos problemas y la división de la circunferencia partes iguales, demostrando que el polígono de 17 lados se puede inscribir en el círculo mediante regla y compás. El resultado algebraico correspondiente, que la ecuación anterior, con $n=17$, es resoluble en radicales cuadráticos, Gauss lo generalizó enseguida, encontrando criterios de la

posibilidad de tal resolubilidad (la ecuación es resoluble para n primo de la forma $n=2^{2^k} + 1$) y dando su interpretación geométrica.

En la demostración de este grupo de proposiciones, Gauss desarrolló los métodos que sirvieron de uno de los puntos de partida para la creación de la teoría de Galois, según el propio reconocimiento de su autor. Así, por ejemplo, Gauss explícitamente expresó que el objetivo de sus investigaciones del polinomio:

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1,$$

consiste en descomponer sucesivamente el polinomio en factores incluso hasta factores lineales, descubriendo de esta manera la estructura de la ecuación.

Gauss estableció que la ecuación $X=0$ de grado $m - n - 1$, donde n es primo, es irreducible en el campo de los números racionales y normal sobre éste, esto es, todas sus raíces se expresan racionalmente a través de una de ellas. Resultaba que estas raíces tiene la forma $\alpha, \alpha^\beta, (\alpha^\beta)^\beta, \dots$, esto es, el grupo de los automorfismos de esta ecuación es cíclico. Quedaba nada más que un sólo paso para descubrir que cualquier subgrupo de un grupo cíclico es su divisor normal. Este paso lo realizó Galois, considerando también la indicación de Lagrange de que las permutaciones de las raíces de las ecuaciones indican el camino para la construcción de su teoría general.

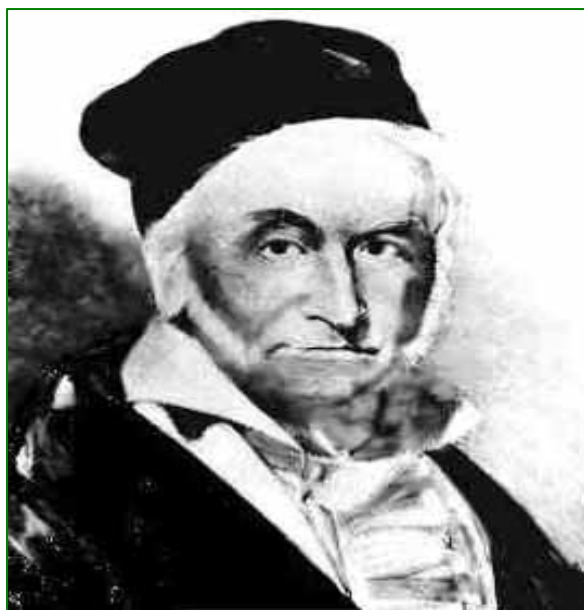
Al cabo de tres años, en 1799, Gauss obtuvo en Helmstadt el grado de doctor con una tesis dedicada a la demostración del teorema fundamental del álgebra. Muchos años después regresó a este teorema y dio (en 1815, 1816 y 1849) tres nuevas demostraciones.

La primera formulación de este teorema dada por Girard (1629) y Descartes contenía, como ya mencionamos, la afirmación de que la ecuación $P(x) = 0$ puede tener tantas raíces como unidades contiene su grado. En relación con la sucesiva introducción de los números complejos $a + bi$ esta comprensión de la posibilidad se convirtió en la seguridad de que las raíces de la ecuación $P(x)=0$ (donde n es el grado de la ecuación) son precisamente n reales o

complejas. Tras la primera demostración de D' Alambert (1746) surgieron otras. En todas ellas, se suponía que cada polinomio podía ser desarrollado en factores lineales:

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Quedaba demostrar que todas las raíces x_i ($i=1,2,\dots,n$) tenían la forma $a + bi$ (a y b son reales). El problema consistía ahora en el establecimiento del desarrollo de cada ecuación algebraica con coeficientes reales en un producto de factores reales de grado $n=1$ o $n=2$.



No consideramos aquellas demostraciones, en las cuales aparecen apelaciones explícitas a los resultados del análisis matemático. Hablando en general, negarse totalmente a la utilización de las propiedades de continuidad en la demostración de este teorema es imposible. Sin embargo, la cuestión sobre una demostración puramente algebraica del teorema fundamental del álgebra era en esta época muy actual. Tal demostración algebraica la buscaba también Gauss.

En la tesis doctoral mencionada antes, Gauss consideró críticamente todas las demostraciones y advirtió su insuficiencia común: la suposición a priori de que las raíces de la ecuación existen. En realidad es

necesario demostrar la existencia de las raíces para evitar un círculo vicioso. Gauss vinculaba su existencia con el campo de los números complejos $\{a + bi\}$ ya que ninguna otra forma más general de magnitudes podía representarse. No obstante, advirtió que si fueran definidos otros campos numéricos, entonces la cuestión sobre la existencia de raíces sería necesario relacionarla a éstos.

La demostración algebraica de Gauss partió de la suposición que de antemano está dado el campo K de los números complejos. Esta demostración consistía en el establecimiento del hecho de que cada ecuación con coeficientes reales tiene raíz en el dominio indicado. En otra formulación equivalente, se exige demostrar la posibilidad de desarrollar cualquier polinomio, cuyos coeficientes sean números reales en factores reales de primero o segundo grados.

La negación a la suposición sobre la existencia de raíces de la ecuación postulada por Gauss, y además sobre la innovación de los resultados del análisis matemático, dificultó fuertemente el problema. En esencia fue necesario construir los campos de desarrollo de los polinomios. La voluminosa demostración ocupó una memoria especial (1815). Ella exigía una serie de conceptos y lemas especiales. Así, Gauss se vio obligado a construir de nuevo la teoría de las funciones simétricas y demostrar su independencia algebraica. Esto le daba la posibilidad de introducir un nuevo método de demostración, el cual obtuvo posteriormente (en las obras de Kronecker, König y otros) la denominación de principio de Gauss. La relación entre funciones simétricas elementales

$$\Omega(l_1, l_2, l_3, \dots) = 0,$$

puede ser sólo una identidad. Sea, por ejemplo, dado un polinomio desarrollable en factores lineales:

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

y entre sus coeficientes se establece alguna relación:

$$\Omega(l_1, l_2, l_3, \dots) = 0.$$

En virtud del principio de Gauss, esta relación sigue siendo cierta cuando se sustituyen los coeficientes de cualquier otro polinomio $Q(y) = 0$. Así, todas las relaciones entre los coeficientes de los polinomios desarrollables son ciertas para los coeficientes de todos los polinomios. Tras esto se introduce el concepto de discriminante:

$$P(x) = \prod_{i,j=1}^n (x_i - x_j)$$

y se demuestra una serie de lemas, los cuales, en virtud de su carácter especial no citaremos aquí.

Pasados unos 50-60 años, Kronecker logró utilizar el método de construcción de campos, dado por Gauss, y crear (1882) la construcción del campo de descomposición para cualquier polinomio. Resultó que si está dado $P(x)$, un polinomio con coeficientes del campo K , sobre el cual la ecuación $P(x)=0$ es irreducible, entonces se puede (no suponiendo la existencia de K) construir un campo de descomposición, esto es, un campo minimal en el cual $P(x) =$

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Entonces el teorema fundamental del álgebra tomó la forma siguiente: **el campo de cualquier polinomio (con coeficientes reales o complejos) es un subcampo del campo de los números complejos o es isomorfo a este subcampo.**

Gauss y el Siglo XX.

La transformada rápida de Fourier (“Fast Fourier Transform”, FFT) es un algoritmo muy conocido para el cálculo de la transformada discreta de Fourier (“Discrete Fourier Transform”, DFT). Esta fórmula es utilizada para la evaluación de N coeficientes de Fourier de una muestra de N puntos. Actualmente ninguna rama de la ciencia escapa a la necesidad de utilizar técnicas de tipo Fourier. Es imprescindible en el procesamiento de señales e imágenes; en la espectroscopía, en el cálculo de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, etc.

En 1965, J. W. Cooley y J. W. Tukey, del Centro de Investigaciones Thomas J. Watson, de la IBM, y de los laboratorios Bell Telephone de Murray Hill, respectivamente, mostraron que la DFT de N puntos, que hasta ese momento requería un número proporcional a N^2 de operaciones aritméticas, podía reducirse a una cantidad proporcional a $N \log N$. El algoritmo propuesto por ellos fue conocido más tarde como FFT y revolucionó las técnicas donde el uso de la DFT era necesaria, ya que la importante reducción de las operaciones traía un consecuente ahorro de tiempo.

Dada la sencillez del método, desde el primer momento llamó la atención el hecho que pasara tanto tiempo antes de encontrarlo. Esto originó una gran polémica que suscitó una investigación histórica dirigida por el propio Cooley y realizada tan sólo dos años después de su descubrimiento. Como resultado de esta investigación, Cooley, encontró que los antecedentes de su descubrimiento databan de principios de siglo. Sin embargo, sus orígenes eran más lejanos que lo que racionalmente se podía suponer.

Cooley y Tukey, en su artículo original, hicieron referencia sólo al trabajo de I. J. Good (1958), como antecedente al suyo. Este trabajo es ahora comúnmente referido como el primer algoritmo de descomposición en factores primos. Pero las diferencias entre estos dos trabajos es notable. Rudney en 1966, si encontró que un algoritmo similar a la FFT podía deducirse de un trabajo de Danielson y Lanczos de 1942. Tomando como punto de partida este último trabajo, Cooley dirigió la investigación histórica. En el artículo de Danielson-Lanczos se hacía referencia a dos trabajos publicados por Carl Runge a comienzos de este siglo. Aunque el algoritmo de Runge no era tan general como el de Cooley y Tukey, se podían encontrar antecedentes a la FFT desde principios de siglo. Esto fue lo que concluyó Cooley en su investigación. Pero inusitadamente, H. H. Goldstine, en su reciente historia del Análisis Numérico publicada en 1977, atribuye a Carl Friedrich Gauss, el eminente matemático alemán un algoritmo similar a la FFT para el cálculo de los coeficientes de una serie finita de Fourier. A partir de esta información sorprendente, Michel T. Heideman dirige, en 1985, una investigación para corroborar la afirmación de Goldstine. Heideman comienza su trabajo donde Cooley y su equipo, terminaron el suyo.

En las obras completas de Gauss, publicadas por la Universidad de Gotinga, aparece el trabajo que no fue publicado en vida de Gauss, **“Nachlass, Theoria Interpolationis Methodo Nova Tractata”**, presumiblemente escrito en 1805. Aquí expone su método.

El trabajo de Runge fue referido en un popular libro de Análisis Numérico escrito por Whittaker y Robinson en el año 1924. Estos citaban a un tal siglo P. Thompson biógrafo de Sir William Thompson. Popularizó a Runge, a través de dos artículos en 1883. En uno de ellos incluía una interesante nota de George Howard Darwin (hijo del famoso Charles) quien atribuía a Archibald Smith y a Sir Richard Strachey una eficiente técnica para el análisis armónico de ondas y que fue dada a conocer en 1874. Darwin también citaba a J. D. Everett quien publicó un resultado similar en 1860, pero éste también citaba a Archibald Smith en su trabajo. Everett estaba trabajando con Lord Kelvin en el análisis armónico de las variaciones diarias de temperaturas. En su estudio utilizó muestras de 12 puntos y de 32 puntos para aplicar el método que había descrito Archibald Smith desde 1846 y presentado en detalle en 1850 y 1855.

De manera que podríamos decir que a Archibald Smith le cabe el mérito de haber introducido técnicas eficientes en el análisis armónico en Gran Bretaña. Sin embargo en el capítulo 9 **“Interpolación Trigonométrica”** del libro **“Enciclopedia der Mathematischen Missenschaften”** escrito por H. Burkhardt cita al italiano Francesco Carlini quien desarrolló una técnica para una muestra de 12 puntos en 1828 y a Peter Andreas Hansen que lo hizo para una muestra de 64 puntos en 1835, ambos anteriores a Archibald Smith.

Euler en 1753, dio las fórmulas para los coeficientes de Fourier de una función de una variable real. En otro trabajo de 1750, Euler utilizaba las series trigonométricas para aproximarse al movimiento de la propagación del sonido en un medio elástico. Se llaman aquí series de Fourier a las series trigonométricas por tradición, pero como es lógico, entonces no tenían este nombre. Varios científicos abordaron temas similares durante estos años D'Alembert, Clairaut, Daniel Bernoulli, etc. Sin embargo los trabajos que más se influyeron en los años subsiguientes, incluso ya adentrados en el siglo XIX, fueron los trabajos de Lagrange. Este extendió los resultados obtenidos por Euler y publicó en 1759 y 1762 una fórmula parecida a la DST que contenía solamente senos.

En Enero de 1801 el astrónomo italiano G. Piazzi descubrió Ceres, el primero de los asteroides que jamás se había visto. Pero, sólo pudieron ser realizadas unas pocas observaciones antes de que se perdiera tras el Sol. Gauss construyó un método para estimar la órbita de Ceres con la suficiente precisión como para pronosticar su posible nueva visita. Fue brillantemente exacto. Nombrado ya director del observatorio de Gotinga en 1807, desarrolla en 1809 su famoso trabajo: **“Theoria Motus Córporum Celestium”** un método para

determinar las órbitas aurales. Gauss estuvo trabajando en interpolación de datos de problemas astronómicos. En esos años debe haber generalizado los resultados de Lagrange. Por esos años también data su deducción del método de mínimo cuadrado, utilizado para la reducción de errores en las mediciones de las órbitas e intuye la densidad de probabilidad más importante: la normal, que se conoce también con el nombre de gaussiana.

Como los datos obtenidos de las órbitas son periódicos, Lagrange y sus colaboradores usaron para interpolar expresiones del siguiente tipo (expresadas en terminología moderna y normalizados los datos):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cos 2\pi kx, \quad 0 < x < 1.$$

El problema es calcular los (A_k) para N valores de f donde $x=n/k$ con $n=0,1,\dots,N-1$. Gauss extendió el resultado a funciones periódicas no necesariamente pares o impares como las consideró Lagrange. O sea:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m A_k \cos 2\pi kx + \sum_{k=0}^m B_k \sin 2\pi kx,$$

donde $m=(N-1)/2$ si N es impar y $m=N/2$ si N es par. Si $f(x_n)$ valores muestreados ($x=n/N$ con $n=0,1,\dots,N-1$) los A_k , B_k son los ahora conocidos por las fórmulas de la DFT. Gauss no solo da las fórmulas de la DFT, sino que da una manera eficiente para su cálculo.

Existen evidencias que nos permiten enmarcar la fecha aproximada en que Gauss realizó su descubrimiento: entre diciembre de 1804 y principio de 1805, a través de la correspondencia entre Gauss y Bessel se puede extraer que ellos conocían el problema de interpolación trigonométrica. En una carta de Gauss el astrónomo Olbers le da los últimos elementos del asteroide Juno entre los cuales estaba el valor de la excentricidad (0.254236). Este número fue calculado por Gauss usando su FFT. Este resultado fue publicado en mayo de 1805 en las notas que contenían las informaciones y observaciones astronómicas de la *Monatliche Correspondenz*. El editor de las obras completas de Gauss refiere que su libreta de notas contiene unas pequeñas notas referentes a la teoría de interpolación. Sin embargo esto no aparece en ninguno de sus trabajos publicados. También puede leerse en su diario que en noviembre de 1805 expresa: “*Nosotros estamos trabajando además, en la teoría de interpolación*”. Gauss sigue refiriéndose al tema en una nueva carta a Olbers de enero de 1805 y el 30 de julio da un nuevo valor de la excentricidad de Juno (0.254944) en una carta a Bode, que apareció en *Monatliche Correspondenz*.

Schumacher, discípulo de Gauss, el 8 de noviembre de 1808, le escribe, que trabajó sobre interpolación, ya su madre le está escribiendo la copia. Pero no queda claro si se refiere a *Mathematische Brouillons* o a la *Theoria Interpolationis*. En 1816, el 8 de junio, Schumacher escribe a Gauss que ya tiene el manuscrito sobre interpolación y espera que Gauss lo publique pronto. Sin embargo, a pesar de que, al parecer, no quería mantener en secreto este resultado, (prueba de ello son las múltiples cartas donde lo comenta) no estaba interesado en publicarlo. Es conocido lo terriblemente exigente que era Gauss para publicar. Aunque acostumbraba a utilizar en sus trabajos posteriores, los resultados obtenidos, desconcertando a sus contemporáneos y a estudiosos modernos de su obra. No faltó quien le atribuyera excelencias divinas.

El Algoritmo propuesto por Cooley y Tukey en su trabajo “**An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series**” de 1965 fue, en síntesis, el siguiente:

La DFT tiene la forma:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \text{Exp}(-i2\pi km / N), m = 0, 1, \dots, N-1;$$

para cada valor de m , N multiplicaciones complejas y N adiciones complejas, se necesitan para resolver $X(m)$. Luego en la solución total se necesitan N multiplicaciones y N adiciones complejas. Supongamos que f tiene periodo uno ($x(k)=f(k/N)$) y denotando por $X_N = \text{Exp}(-i2\pi/N)$, la expresión de la DFT queda:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{M_k}, m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

La DFT puede ser reescrita en términos de N_2 conjuntos de N_1 sub-muestras, donde $N=N_1N_2$. Haciendo el cambio de variables $k = N_2 k_1 + k_2$ y $m = m_1 + N_1 m_2$, donde $m_1, k_1 = 0, 1, \dots, N_1-1$ y $m_2, k_2 = 0, 1, \dots, N_2-1$. Entonces la ecuación (1) queda:

$$x(m_1+N_1m_2) = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \left[x(N_2 k_1 + k_2) W_N^{k_1 m_1} W_N^{k_2 m_1} \right] W_N^{k_2 m_2}, \quad (2)$$

de esta forma el número de operaciones a realizar disminuye. Siendo su mayor reducción cuando N es una potencia de dos, ya que el número de operaciones a efectuar es proporcional a $N \log_2 N$. Gauss en su trabajo, descompone en N_2 elementos de N_1 submuestras la muestra N . La manera de hacer esto es una descomposición en factores primos de un número N . Gauss había dedicado tiempo, algunos años atrás, al estudio de la teoría de números. Por supuesto que no utiliza la expresión W_N sino expresiones trigonométricas, las cuales sustituye adecuadamente por identidades convenientes. Pero la suma interna de la expresión (2), luego de las transformaciones las formaciones anteriormente dichas, es exactamente igual a la dada por Gauss. La equivalencia, entre el algoritmo de Gauss y el de Cooley y Tukey, no es evidente dada la notación y la formulación trigonométrica que le da Gauss. Sin embargo uno puede verificar fácilmente que los resultados de la suma interna de (2) y los resultados que da Gauss para muestras de 12 puntos de la órbita del asteroide Pallas, y también para muestras de 36 puntos del mismo asteroide, así como para un paso especial de simetría impar, que aparecen en el artículo que expone el método, son iguales.

Aunque no era costumbre en esta época generalizar los resultados de cálculo numérico, Gauss sugiere y, de hecho, da la generalización de su algoritmo. Por supuesto Gauss no usa los modernos resultados de complejidad algorítmico que ahora nos son familiares (complejidad de $N \log N$) pero salvo esta pequeña “diferencia”, el procedimiento desarrollado por Gauss, es, computacionalmente tan general, eficiente y poderoso como el dado por Cooley y Tukey.

EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

La Prehistoria.

Se puede encontrar una noción vaga de función bajo la forma de tablas de correspondencia que provienen de la observación de fenómenos naturales, ya que la idea de función está ligada históricamente a la percepción desarrollada de correlaciones entre los fenómenos de la naturaleza.

Los babilonios hicieron un progreso notable (ver A. Youschkevich-“**The concept of function up to the middle of 19th century**”, Archive for History of Exact Sciences, 16 (1976), 36-85).

La noción de función se encuentra en las tablillas astronómicas del período seleucida. Sobre estas tablillas, existen relaciones aritméticas que provienen de la observación de fenómenos análogos, por ejemplo los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular del mismo al Sol.

En lo más profundo de la estructura de la matemática griega, falta el concepto de función y más aún no existía orientación alguna hacia él. Los griegos no estudiaron nunca las funciones, en un sentido propio, ni en las matemáticas ni en otros dominios de su sistema de conocimiento. Especialmente la geometría griega se interesaba a las formas más que a sus variaciones, y, es tal vez a causa de ello que la idea de función no se desarrolló. Además, en la geometría griega, no existe mención alguna ni de una curva común correspondiente a una función, ni una definición satisfactoria de la tangente en términos del concepto de límites.

Hacia el siglo XIV, los diferentes sabios, retomando las ideas de Aristóteles sobre el movimiento, desarrollaron considerablemente la cinemática; como rama de la mecánica, ella está evidentemente ligada a la geometría, de manera que su desarrollo no puede ser considerado aislado y separado de la discusión general de relaciones funcionales en el mundo natural.

Uno de esos sabios era Thomas Bradwardine que, en su tratado, aborda el concepto de función potencia (**“Tractatus de proportionibus”**, 1328). Después de este tratado, varios trabajos han aparecido en los cuales la teoría de las proporciones era desarrollada en relación con esta función.

Particularmente, Nicole Oresme (1323-1382), obispo de Normandía, en su **“Algorismus propositum”**, explora las reglas para manipular las funciones potencia y es el primero que concibió la noción de potencias fraccionarias. Además, Oresme, utilizando las expresiones de “latitud” y “longitud”, netamente para la representación de las trayectorias de los astros, fue llevado a la representación gráfica. Muchos historiadores de la matemática consideran que Oresme con las palabras “latitudo formarum” introdujo el germen de la idea de función (ver Youschkevich, Ob. cit, p.46).

El Período Inicial.

Hasta el siglo XVII, las curvas eran bien definidas por sus propiedades geométricas y el concepto de función era una noción que faltaba al estudio de las curvas.

Descartes con sus aplicaciones de métodos algebraicos en geometría, mostró el camino para la introducción de la noción de función.

Newton, en su **“Methodus fluxionum”** (escrito en 1671, pero publicado en 1736) hace uso de la locución “relata quantitas” expresión que se aproxima bastante al sentido de la palabra función.

En 1673, en su memoria **“Methodus tangentium inversa seu de functionibus”**, Leibniz emplea la expresión “functionem faciens” o “functio” para designar magnitudes cuyas variaciones están ligadas por una ley.

El dice que si uno traslada el punto de la curva al cual le corresponde un valor definido de esas magnitudes, estos varían al mismo tiempo que la abscisa o la ordenada de ese punto.

En 1698, Jean Bernoulli utiliza el término “fonctions des ordonnées” en una carta, concerniente al problema de las isoperimétricas, que él dirigía a Leibniz.

En 1718, él (Bernoulli) da la definición siguiente: *“Se llama función de una cantidad variable, una cantidad que compone de una cierta manera de ésta cantidad y de constantes”*.

En esa memoria, Jean Bernoulli ha dado, como símbolo, la letra griega σ , para representar la función de una variable dada *“... tomando σ por la característica de esas funciones”*.

Euler, fue el más grande formalista del siglo XVII del cálculo infinitesimal. Habiendo rechazado correctamente los argumentos geométricos como medios válidos para establecer la

ciencia de los infinitésimos, Euler fundó el tema sobre una teoría formal de funciones y sus medios, dependiendo de la concepción de función. Para Euler, la funcionalidad era la materia de la representación formal, más que un reconocimiento conceptual de un informe.

Es necesario hacer notar que Euler fue el primero, que había empleado los paréntesis 1734 y también la letra f , inicial de la palabra función (ver A. Cajori-“**A History of Mathematical Notations**”, London: Open Court Company, 1929).

Euler, en el primer volumen de su “**Introductio in analysis infinitorum**” (1748), definió la función como una expresión analítica cualquiera. Más precisamente, dio la definición siguiente: “*La función es la expresión analítica cualquiera de las cantidades variables y de números o con cantidades constantes*”.

Sin embargo, se debe decir sobre esta definición de Euler que:

- Las operaciones admitidas no son claramente distinguidas.
- El no excluye alguna expresión que contenga operaciones infinitas (no hay problema de convergencia).

En su “**Introductio ...**”, Euler da el primer rol a la teoría algebraica de funciones, o entre otras, él denota las constantes con a, b, c ; las variables con x, y, z e introduce su clasificación de las funciones como algebraicas o trascendentes, explícitas o implícitas, uniformes o multiformes (es decir, simples o con varios valores). Pero el análisis de las cuerdas vibrantes ha dado la primera extensión de la noción de función y ella condujo a Euler, en su segundo volumen, a hacer la distinción entre una curva “continua” o “discontinua”. En esa época, la idea de función estaba ligada al estudio analítico de las curvas. Una curva que estaba representada por una ecuación algebraica o trascendente se llamaba una curva continua.

Las curvas que exigían diferentes ecuaciones para la representación de sus diversas partes constituyentes, se llamaban discontinuas (o mixtas, o irregulares). En lo que concierne a las curvas “arbitrarias”, el punto de debate era, sobre la legitimidad de asumir su continuidad en el sentido dicho, y si no cuando es que esas curvas podrían, tal vez todavía, exceder la clase de curvas continuas.

En relación con el concepto de continuidad para las curvas, las funciones determinadas por una expresión analítica para todo el dominio de la variable independiente se llamaban continuas (por supuesto la continuidad en el sentido de Euler). Entonces, por un lado se tenían las “verdaderas” funciones y por otro las funciones discontinuas y arbitrarias que evidentemente no eran funciones “verdaderas”. De todas formas, Euler consideraba como continuas las curvas que obedecían a una ley constante; y como discontinuas, las curvas cuyas diversas porciones tienen como expresiones funciones diferentes de x .

Notemos que Euler llamaba función discontinua a aquella que es diferenciable a pedazos.

Sin embargo, la palabra función para Euler no significa totalmente la cantidad concebida como dependiente de las variables, sino como una expresión analítica con constantes y variables que serán representadas por simples símbolos.

Algunas veces, Euler utilizaba otra definición de “función”, es decir, “*la relación entre Y y X expresadas sobre el plano por una curva trazada a mano libre*”.

Como se verá, esas dos definiciones concurrentes se encuentran en la historia posterior. Así, Lagrange siguió la idea expresada en la primera definición, mientras que Fourier siguió la idea de la segunda definición.

Hacia la última mitad del siglo XVII se encuentra por una parte la investigación sobre la posibilidad de representar una función por una serie trigonométrica, investigación que resultaba de la investigación de problemas físicos. Y por otra parte, se encuentran discusiones

del género: ¿existen funciones más generales que aquellas definidas por un desarrollo trigonométrico, y se puede prolongar el dominio de ellas?

Pero la concepción de función no responde suficientemente a todas las necesidades de la ciencia. En efecto, ella se encuentra insuficiente en el dominio de la física-matemática; y sobre todo, en lo que concierne a los problemas de las cuerdas vibrantes. Evitaremos el perdernos en detalles de la famosa discusión en la que cayeron desde 1741, D'Alembert y Euler y de otras provocadas por eminentes sabios de esa época. Nos remitiremos solamente a la simple nota que aportó D'Alembert a la selección de esas funciones; restricciones que provocaron grandes objeciones de parte de otros matemáticos de su época y netamente de la parte de Euler. Este, en efecto, insistía sobre el punto siguiente: la naturaleza del problema exige que se admitan todas las funciones figuradas por las líneas trazadas por un movimiento libre de la mano. En lo que sigue, Euler insiste sobre el hecho que las funciones arbitrarias de ese género no son, en general, representables por una expresión analítica única que queda invariable para todos los valores de variable independiente.

No estando satisfechos de la definición de función arriba citada, Euler se sentía obligado a formular otra. Esta nueva definición figura en el prefacio de su obra **“Institutiones calculi differentialis”**, que él escribió en 1755. Con esta nueva definición, Euler abandonó:

- Las expresiones analíticas como lo principal de la definición de una función.
- El problema de la representación analítica.

La nueva concepción de Euler consiste en dar la definición de función como una relación arbitraria entre las cantidades variables de una dependencia cualquiera. Más precisamente, su definición es la siguiente: *“las cantidades dependiendo de las otras de manera que si las otras cambian, esas cantidades cambian también. A ellas, se tiene la costumbre de nombrarlas funciones, metonimia, que es evidente y que contiene en ella misma las maneras con las cuales una cantidad puede ser determinada por las otras. Entonces, si yo pudiera denominar la variable de cantidades, todas las cantidades que dependen de cierta forma de x o que pueden ser determinadas, se le llama función de esta variable”*.

Esta idea de función, desembarazada de toda consideración de expresión analítica estaba latente, aún y cuando ella era utilizada frecuentemente. Por tanto, Euler fue el primero que la enuncia de una manera clara subrayando la generalidad de la nueva definición.

Ese concepto nuevo de Euler no tardó en encontrar seguidores. Uno de los primeros sabios que adoptó la nueva definición de Euler fue Condorcet.

La concepción de función está expuesta por Condorcet en su tratado de Cálculo integral que fue presentado por partes a la Academia de Ciencias de París en 1778 - 1782.

El autor, en principio, dio la definición de función analítica: *“Supongo que tengo un cierto número de cantidades $x, y, z, \dots, F$ y que cada valor determinado de $x, y, z, \dots, F$ tenga uno o varios valores determinados que le corresponden; digo que F es una función de x, y, z ”. Es notable el concepto de función según Condorcet, pues se aproxima bastante a la definición contemporánea.*

Enseguida, el autor continua diciendo: *“...si yo se que mientras x, y, z serán determinadas, F lo será también, por supuesto yo no conoceré ni la manera de expresar F en términos de x, y, z , ni la forma de la ecuación entre F y x, y, z ; yo sabré que F es una función de x, y, z ...”*.

Condorcet distingue tres tipos de funciones:

- funciones cuya forma es dada,
- funciones que no son determinadas más que por una ecuación entre F y las cantidades donde ella es función.

- funciones que no son dadas más que en ciertas condiciones, como por ejemplo, los radios vectores de los planetas que son funciones del tiempo, de las masas, etc.

Sobre la concepción de función, Lagrange no tenía ideas totalmente divergentes de las de Euler (ver A. F. Monna-**“The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue”**, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1972), 57-84). En su obra **“Teoría de funciones analíticas...”** (París, 1796), él dio la definición siguiente: *“Se llama función de una o varias cantidades, toda expresión de cálculo en la cual esas cantidades entran de alguna manera, mezcladas o no, con otras cantidades que se miran como teniendo valores dados e invariables mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles”*.

En cuanto a las funciones que no son determinadas más que gráficamente, Lagrange mismo, no busca representarlas analíticamente mas que de una forma aproximada.

Además, Lagrange nombraba funciones analíticas simples de una variable real x , a las funciones que pueden ser desarrolladas en series enteras.

Al poner en ecuación las condiciones de la propagación del calor condujo a Fourier a fórmulas análogas a aquellas que rigen las vibraciones de las cuerdas vibrantes (hacia 1807).

Dirigido por una nota de Euler que dice que en la serie trigonométrica:

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + b_0/2 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots$$

los coeficientes se determinan por las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Fourier pensó que esta determinación sigue siendo aplicable cuando la función $f(x)$ está dada arbitrariamente. La impresión fue profunda cuando Fourier afirma que toda función arbitraria, sea simple o compuesta de partes de funciones, puede ser representada por una serie trigonométrica. Esta afirmación le pareció a Lagrange tan sorprendente que la contesta fuertemente; ya que esta proposición estaba en contradicción con la noción de función tal como se entendía en esa época.

Fourier rompió la continuidad euleriana como lo dice Hankel en su artículo, donde se encuentran también notas interesantes sobre la historia del concepto de función.

“... toda la concepción de la idea de función, como la de Euler, que describiré brevemente con el primer golpe fuerte en 1807 por el importante descubrimiento de Fourier, que es posible representar las funciones por series periódicas; no solamente las funciones analíticas (o continuas en el sentido de Euler) sino otras funciones cualesquiera que no satisfacen a una ley simple o aún a diferentes leyes en diversas partes (discontinuas), son las funciones que llamaré funciones ilegítimas, ... Entonces yo había creído que la única vía para llegar a elucidar la discontinuidad y a decidir la naturaleza de las funciones, es la de negar todos los conceptos, a los que aún el más moderno matemático está relacionado por medio de la idea de la función euleriana, y en primer lugar, la de interpretar el conjunto de relaciones de cantidades posibles de dos variables que están contenidas en la idea pura de la función de Dirichlet, pero al mismo tiempo de dar una

atención particular a las funciones ilegítimas que son hasta este momento poco estudiadas...”.

Creemos que los matemáticos del siglo XVIII influidos por el viejo adagio latín: “natura non facit saltus”, consideraban que la noción de continuidad estaba excluida de la ciencia. Es a causa de ello que pensaban que la propiedad de discontinuidad encierra, una noción malvada (curvas discontinuas o irregulares según Euler, ilegítimas según Fourier). Desde que el análisis fue liberado de la estructura estrecha de continuidad, él evolucionó y revisó sus principios con mayor rigor.

Los métodos de Fourier fueron criticados por los matemáticos ulteriores. Es necesario señalar que Fourier era sobre todo físico y que él guardaba constantemente en su espíritu la idea de la representación.

Veremos más tarde que Dirichlet quiso examinar con mayor cuidado las condiciones que el concepto de función debe satisfacer para demostrar la congruencia de la serie que representa (convergencia que Fourier había supuesto a priori).

SIGLO XIX.

Los conceptos de función y de continuidad.

En esta época empiezan las primeras incertidumbres sobre los principios del análisis. En efecto, como los métodos anteriores se presentan defectuosos e incorrectos es necesario buscar la causa en el origen.

Especialmente se puede considerar como principales representantes de la evolución del concepto de función: Cauchy, Bolzano, Dirichlet y a Riemann.

Abel en una carta enviada a Hausteen en 1826, insiste sobre la insuficiencia de las demostraciones de la teoría de las series infinitas y él indica que es el verdadero origen de las paradojas que uno encuentra en el análisis. Veamos precisamente un extracto de la carta:

“.. Yo consagraré todas mis fuerzas para expandir la luz sobre la inmensa oscuridad que reina ahora en el análisis... En el análisis superior pocas proposiciones son demostradas con un rigor definitivo. Por todas partes se encuentra la mala manera de concluir de lo especial a lo general y lo que hay de maravilloso, es que después de un procedimiento tal no se encuentra más que muy raramente, lo que nombra como paradojas. Es verdaderamente interesante el buscar la razón de ello. Esta razón desde mi punto de vista, es necesario verla en que las funciones en las que hasta ahora se ha ocupado el análisis, la mayoría pueden expresarse por [series de] potencias”.

“Cuando se mezclan de otras, lo que no se hace verdaderamente muy seguido, no se tiene éxito, y por pocas conclusiones falsas, nacen una infinidad de proposiciones viciosas que se apoyan las unas de las otras. Yo he examinado varias de ellas y yo he estado muy feliz por llegar al final”.

Cauchy, dice Lebesgue, nota que las dificultades que resultan de las investigaciones de Fourier se representan aún cuando uno se sirve más de expresiones muy simples, es decir, que siguiendo el procedimiento empleado para dar una función igual a $+x$, si $x > 0$, a $-x$, si $x < 0$. Esta función no es continua, ella está formada de partes de dos funciones continuas $+x$, $-x$; ella aparece por lo contrario como continua cuando se denota por $\sqrt{x^2}$.

De ahí, la noción de continuidad renovada aparece encerrada y va a servir como instrumento al estudio de las funciones.

Cauchy, en su curso de Análisis en la escuela Politécnica en 1821, no da una definición de función cuando dice que: “... Mientras que cantidades variables son totalmente ligadas entre ellas, el valor de una de ellas siendo dado se puede concluir todos los otros valores, se concibe de ordinario esas diversas cantidades expresadas por medio de una de entre ellas, que toma entonces el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que uno llama funciones de esta variable”.

En ese mismo curso, Cauchy dio la definición siguiente para la continuidad: “...sea $f(x)$, una función de la variable x , y supongamos que, esta función admite constantemente un valor único y finito. Sí, partiendo de un valor de x comprendido entre esos límites, se le atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α , la función misma recibirá para el incremento de la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

que dependerá, al mismo tiempo, de la nueva variable α y del valor de x . Así puesto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x función continua de variable, si para cada valor de x intermedio entre esos límites, el valor numérico de la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

decrece infinitamente con el de α . En otros términos, la función $f(x)$ queda continua con respecto a x entre los límites dados, si entre esos límites un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma. Se dice, además, que la función $f(x)$ es en la vecindad de un valor particular atribuido a la variable x , función continua de esta variable, todas las veces que ella es continua entre dos límites de x , aún muy próximos, que encierran el valor tratado”.

Gracias a esas definiciones de Cauchy, la noción de función deja de estar subordinada a la hipótesis de continuidad.

Bolzano, más que matemático representa la transición de los conceptos rigurosos de Lagrange y Cauchy a los de Weierstrass.

Bolzano ha dado una definición de continuidad, algunos años antes de Cauchy (ver Monna, Ob. cit pp.61-62), en 1817.

“...Según una definición correcta lo que se entiende por la expresión de que una función $f(x)$ para todos los valores de x , que se encuentran al interior, o fuera de ciertos límites, cambia, según la ley de continuidad, si cualquier x toma tal valor, la diferencia $f(x + w) - f(x)$ puede llegar a ser más pequeña que toda cantidad dada, cuando uno puede aceptar w , tan pequeña como se quiera”.

Esta definición de Bolzano es anterior a la de Cauchy, ella es más rigurosa (ya que la definición de Cauchy no se sabe exactamente que continuidad define: local, global o uniforme) e indica la dirección hacia la concepción local. En ese mismo tratado Bolzano critica como incorrecta la definición de continuidad, según la cual cuando $f(x) = a$, $f(y) = b$, $a + b$, $f(z)$ toma los valores entre a y b si $x \leq z \leq y$.

Dirichlet, es el primero en hacer un estudio riguroso sobre las series de Fourier. El realizó investigaciones para establecer las condiciones suficientes para que la serie de Fourier represente una función.

En 1840, Dirichlet publicó un importante artículo **“Sobre la representación de funciones arbitrarias en series de senos y cosenos”**, en el cual el definió el concepto de función y de continuidad (ver I. Kleiner-**“Evolution of the function concept: A brief survey”**, The College Mathematics Journal, 20 (1989), 280-300).

Su definición de función no está solamente desprovista de “expresión analítica” sino lo que es notable, es que ella llega a la descripción de correspondencia unívoca de una manera bastante lúcida. En lo que concierne a la continuidad, Dirichlet trata solamente la continuidad global.

Riemann dio la definición sobre el concepto de función en su discurso inaugural en Gottingen en 1851: *“...Sea z una cantidad variable, que toma paso a paso, todos los valores reales de un valor único de la cantidad definida w y si z recorre continuamente todos los valores que se encuentran entre dos valores constantes y w cambia también continuamente entonces se le nombra a ésta función continua”*.

Esta definición no define aparentemente ley alguna entre los diferentes valores de la función, de esta manera, si existe una función definida en un cierto intervalo, su prolongación fuera del mismo, es dejada arbitrariamente.

La dependencia de la cantidad w de z puede ser dada por un principio (ley) matemático, de tal forma que se encuentra para cada valor de z , la correspondiente w para ciertas operaciones cuantitativas.

La posibilidad de definir todos los valores que se encuentran en un intervalo dado de x por la misma ley de la dependencia, era reconocida anteriormente sólo para ciertas funciones (continuas según Fourier).

Se ve que, en la definición de Riemann existe también la concepción de correspondencia.

Weierstrass en su curso **“Introducción a la teoría de funciones analíticas”** del semestre de 1874 (verano), comienza por el estudio de las funciones analíticas. Él da la definición de función, anteponiendo reservas sobre su gran generalidad y no atribuye la paternidad de la definición únicamente a Dirichlet, sino también a Fourier y a Cauchy.

En lo que concierne a la definición de función de Weierstrass, no la considera suficientemente como para sacar conclusiones sobre sus propiedades, es decir, evita el dar una definición de función pero 'poco a poco en el transcurso de sus lecciones' él dará una representación correcta y utilizable de función”.

En su último curso de Análisis, en la Universidad de Berlín, en 1886, teniendo como título **“Capítulos seleccionados de la teoría de funciones”**, él consagra su primer capítulo al estudio histórico del concepto de función. Considerando la idea de función como una relación aritmética entre dos variables (noción que tiene su origen en Leibniz) y la de Dirichlet que Weierstrass considera como la más general, él da la definición de función como correspondencia entre los elementos y llega a la conclusión de que mientras esta correspondencia es continua, esas dos nociones son las mismas. Menger considera a Weierstrass *“como el matemático que ha dado a la definición de función un aspecto conjuntivista ...”*, mérito que no compartió hasta que en la década de los 30 de este siglo, se introdujo la definición de función como conjunto de pares de números, ya que las definiciones antiguas de Dirichlet y otros, a pesar de su gran fecundidad no podían ser consideradas como definiciones conjuntistas.

En 1875, Darboux dio una definición de la continuidad como propiedad local, diciendo que *“Una función $f(x)$ se dice continua para el valor $x=x'$ cuando se puede tomar h tan pequeño para que se cumpla:*

$$|f(x'+\theta h)-f(x')|<\varepsilon$$

pudiendo θ tomar todos los valores positivos más pequeños que 1 siendo tan pequeños como se quiera”.

En esa misma memoria, Darboux hace la anotación siguiente: “... existen funciones discontinuas que disfrutan de una propiedad que se mira algunas veces como la característica distintiva de las funciones continuas, aquella de no poder variar de un valor a otro sin pasar por todos los valores intermedios”.

Lebesgue dice que en Francia existía el hábito de definir una función continua como aquella que no puede pasar de un valor a otro sin tomar todos los intermedios, y esta definición era considerada como equivalente a la de Cauchy. Darboux demostró que las dos definiciones eran muy diferentes.

Como lo dice Brushevich, habría algo de injusticia al no marcar el lugar de Frege en la historia. Frege, espíritu polivalente, quiso reformular las ideas fundamentales, entre ellas la de función. Así en 1831, en un estudio escribe: “Mi punto de partida es el de saber lo que se llama función en matemáticas, ...debemos regresar a la época donde el Análisis fue descubierto, si queremos saber lo que la palabra función significa en su origen. La respuesta que probablemente tendremos a esta cuestión es: “La función de x era considerada como una expresión matemática, conteniendo x , una fórmula que contiene la letra x , así la expresión $2x^3 + x$ será una función de x , y $2 \cdot 2^3 + 2$ será una función de 2. Esta respuesta no puede satisfacernos, en ese caso ninguna distinción era hecha sobre el significado entre la forma y el contenido, el signo y el objeto”.

El Inicio del siglo XX.

Mientras que la teoría de conjuntos de Cantor penetraba progresivamente en toda la matemática, el concepto de función no era muy lúcido a principios de siglo. Varios matemáticos como Baire, querían clarificar la idea de función.

Lebesgue apuntaba:

“Bien que, después de Dirichlet y Riemann, uno está generalmente de acuerdo en decir que existe una función cuando hay correspondencia entre un número y , y números $x_1, x_2, \dots, x_n$ sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia, muchos matemáticos parecen no considerar como funciones más que aquellas que son establecidas por correspondencias analíticas.

Se puede pensar que si se introduce tal vez así una restricción bastante arbitraria; sin embargo, es cierto que ello no restringe el campo de las aplicaciones, puesto que, sólo las funciones presentadas analíticamente son efectivamente empleadas hasta el momento”.

Más adelante, Lebesgue cita cuando un “objeto” está definido.

“Un objeto está definido o dado cuando se ha pronunciado un número finito de palabras... aplicándose a ese objeto y sólo a ese, es decir, cuando se ha nombrado una propiedad característica del objeto. Para dar una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nombran generalmente una propiedad perteneciendo a todos los conjuntos de nombres:

$$x_1, x_2, \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y sólo a ellos; pero ello no es de ningún modo necesario se pueden nombrar otras propiedades características de esta función. Eso es lo que se hace, por ejemplo, cuando una función $f(x)$ siendo definida de cualquier manera, se dice que $F(x)$ es de las funciones primitivas de $f(x)$ la que se anula para $x=0$. Es nombrar una función, que es decir que ella es igual a cero o, que la constante de Euler C es racional o no.

No es necesario, por otra parte, creer que una función es necesariamente mejor definida cuando se da una propiedad característica del conjunto $y, x_1, x_2, \dots, x_n$, ya que una propiedad tal no permite, en general, calcular y , por ejemplo, la función $X(x)$ que aún ella admite una representación analítica conocida, no es conocida para $x=c$, bien que uno sepa calcular c con tantos decimales como se quiera, si la conocemos para $x=\pi$, no es su expresión analítica la que nos la hace saber”.

La cuestión sobre la existencia y la definición de función era uno de los puntos de controversia entre Borel y Lebesgue. En 1912, Borel desarrollando sus ideas sobre la teoría de integración, cita sus pensamientos sobre la existencia y la definición de objetos matemáticos:

“Diremos que una función es calculable, en tanto que su valor es calculable para todo valor calculable de la variable. En otros términos, si a es un número calculable, se debe saber calcular el valor de $f(a)$ tan preciso como se pida, para cualquier n . Una función no puede pues ser calculable sólo si es continua, a menos para los valores calculables de la variable”.

En 1918 Lebesgue responde al artículo de Borel de 1912:

“M. Borel ve una gran diferencia entre sus definiciones y las mías, porque yo considero las funciones y los conjuntos en sí (es decir, sin ocuparme de la forma en que esas funciones y conjuntos me son dados), mientras que él pretende razonar únicamente sobre seres dados de una cierta manera. Desde que yo aplico las definiciones, yo no encuentro, es verdad, en la práctica más que las funciones y conjuntos estudiados por Borel”.

De aquí en lo adelante se apoya en ejemplos históricos, lo que parece poner fin a la controversia a favor de Lebesgue. Con todo, Borel siguió escribiendo varios artículos sobre la cuestión fundamental de las definiciones en matemáticas.

En la misma época, Frechet, Eliakin, Hasting Moore trabajaban en el concepto actual de función. Frechet desde 1904 (en su tesis), generaliza la definición de función como sigue: *“Supongamos que damos una cierta categoría (elementos cualesquiera, números, superficies, etc.) en la cual se sabe discernir los diferentes elementos. Podemos decir que $V\alpha$ es una función (operación funcional), uniforme en un conjunto E de elementos de c , si a todo elemento A de E le corresponde un número bien determinado $V\alpha$ ”.*

Así, desde 1904-1905, se llegó a la concepción de valor numérico definido en un conjunto absolutamente arbitrario.

Desde 1909, Frechet generalizó también el conjunto donde la función toma sus valores. Así, en su famoso **“Los espacios abstractos”** él afirma:

“...No obstante una nota. Si se ha generalizado la teoría de funciones intercambiando la variable numérica por una variable cualquiera, por qué no generalizar íntegramente intercambiando también la función numérica

por una función de cualquier naturaleza. Y entonces, el Análisis general aparece ahora como el estudio de las relaciones entre dos elementos de naturaleza cualquiera, (en donde uno podrá jugar el rol de variable y el otro funcional). El caso donde la funcional es un número y aquél ha sido estudiado hasta ahora con más detalle; por tanto el estudio de las propiedades infinitas, de las relaciones entre dos variables de cualquier naturaleza ha atraído la atención. Ello no es otro que el estudio de las transformaciones abstractas continuas o bicontinuas. Nosotros habíamos considerado desde 1909 esas transformaciones y particularmente los 'homeomorfismos', es decir, las correspondencias biunívocas y bicontinuas entre dos elementos de naturaleza cualquiera”.

De esta forma, la concepción actual de función ha sido, en lo esencial, formulada en los años 1904-1909.

La época moderna.

Este concepto de función, penetró progresivamente en las matemáticas, estando las principales dificultades relacionadas con el hecho que los matemáticos seleccionaban sus definiciones según las teorías que ellos querían desarrollar, así, Caratheodory, en 1917, definió la función como una correspondencia de un conjunto sobre los números reales. En 1939, en las estructuras fundamentales del Análisis de Bourbaki, se puede leer: “Sean E y F dos conjuntos distintos o no, una relación entre una variable x de E y una variable y de F , se dice relación funcional en y , o relación funcional de E hacia F , si para toda x perteneciente a E , existe un sólo y que pertenece a F , que está en la relación considerada con x . Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento x en E , el elemento y en F que se encuentra en la relación dada con x , y que la función está determinada por la relación funcional considerada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función...”. O sea, la definición de función como un cierto conjunto del producto cartesiano $E \times F$.

La importancia intrínseca de esta evolución del concepto de función, es que ella reformuló los principios del Análisis. Particularmente, considerando la función como una correspondencia, se agrandan los conceptos llamados “clásicos” como por ejemplo continuidad, continuidad uniforme, discontinuidad, estudiando ahora los conceptos de semi-continuidad (lateral o no), oscilación de una función, función de variación acotada; nociones que deben su aparición a la nueva definición de función como correspondencia y por el cerco de las propiedades topológicas de los conjuntos de puntos.

Por último, debemos decir, que a fines de la primera década de este siglo, la definición de Dirichlet-Bourbaki ya estaba establecida en los libros de textos (ver M. A. Malik-“**Historical and pedagogical aspects of the definition of function**”, International J. of Mathematics Education in Science and Technology, 11 (1980), 489-492) y en los años 60, los libros de textos de esta época, presentaban básicamente tres tipos de definición de función (ver C. P. Nicholas-“**A dilemma in definition**”, The American Mathematica Monthly, 73 (1966), 762-768):

- funciones definidas en términos de variables,
- funciones definidas en términos de conjuntos,
- funciones definidas en términos de una regla de correspondencia,
- funciones definidas en términos de INPUT-OUTPUT.

Esta última relacionada con el desarrollo computacional experimentado en estos años.

CUESTIONARIO

1. Destaque algunos de los hechos más relevantes en la vida de Cauchy.
2. Presente las principales aportaciones de este a las matemáticas.
3. Haga un breve esbozo biográfico de Bolzano.
4. ¿En qué consiste el método de acumulación de discontinuidades de Bolzano?
5. Presente ejemplos de funciones con características locales de no-continuidad, no-diferenciabilidad, etc.
6. ¿Cuáles son las principales insuficiencias de la matemática en el siglo XVIII?
7. Analice la segunda crisis en los fundamentos de la matemática.
8. ¿Cuáles son los hechos más notables en la vida de Gauss?
9. Ponga ejemplo de la presencia de Gauss en la matemática actual.
10. Presente el desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia de las matemáticas, destacando las principales nociones vinculadas con este.

Conferencia 12. Las Geometrías No Euclidianas.

“Tal es la fuerza de la verdad, que, como la bondad, se difunde por sí misma”

Umberto Eco

“Del oriente, donde había nacido, la Geometría penetró en el Valle del Nilo; de los sacerdotes egipcios pasó a los filósofos griegos, que hicieron de ella una verdadera ciencia. Después de la decadencia de la civilización griega, fue recogida por los árabes que la introdujeron en Europa, de inmediato en Italia y en España; fue honrada entre los monjes alemanes, los enciclopedistas franceses, los pastores y doctores ingleses. Tales métodos de investigación matemática cedieron el lugar a otros. La sutil síntesis de los geómetras griegos encontró apoyo en los analistas árabes; se vio aparecer la Trigonometría, el Álgebra, el Análisis Infinitesimal y todos esos métodos de estudio encontraron numerosas aplicaciones en la Geometría. Se concibieron las Geometrías Analítica y Diferencial, mientras en contraposición a esas tendencias del Análisis, tomaba cuerpo una nueva geometría sintética, la llamada Geometría de Posición. La Geometría se ampliaba con rapidez como un cristal hundido en una solución saturada, que continúa conservando la misma forma.

Pero el 11 (23) de Febrero, la situación cambió del todo. En Kazán, una Universidad alejada de los centros de la cultura matemática, un geómetra ruso creó una nueva Geometría y la orientó en la vía de evolución rica en promesas, con lo cual abrió una nueva era en el campo de la Geometría. El hombre que ese día tomó la palabra ante la Facultad de Física y Matemática de la Universidad de Kazán, era más que un joven profesor cuya erudición y dones pedagógicos suscitaba un respeto sin flaquezas, el creador de una nueva ciencia: la Geometría de Lobatchevski”. (V. Kagan-“Lobatchevski”, Editorial Científico Técnico. Ciudad de la Habana. 1984. pp. 110-111).

EL PROBLEMA DEL V POSTULADO. TENTATIVAS POR DEMOSTRARLO.

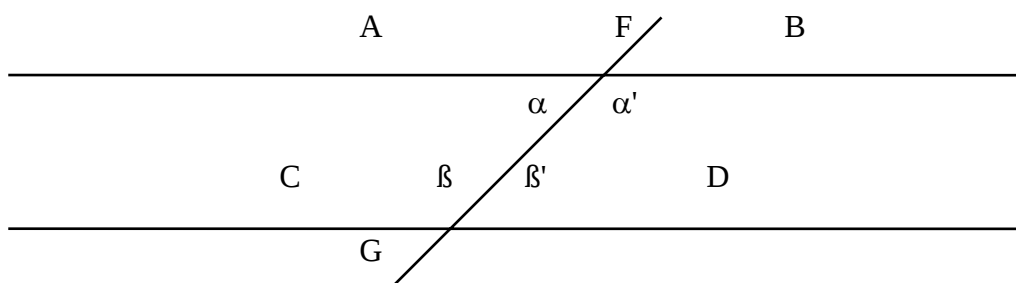
La fiebre que se originó por reducir el sistema de axiomas de Euclides, llevó a los geómetras directamente al V Postulado y aunque las investigaciones relativas al mismo son tan antiguas como los **“Elementos”**, estas no culminaron hasta cerca del siglo XIX con importantes descubrimientos. Es posible que el propio Euclides tratase de demostrar el V Postulado, pues él no utilizó el mismo hasta la demostración de la proposición 29 de los **“Elementos”**.

Antes que todo, recordemos la redacción de tan controversial postulado: **“Si una recta corta a dos rectas (en un mismo plano) los ángulos interiores del mismo lado son menores a los rectos. Esas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran del lado en que los ángulos son menores que dos ángulos rectos”**.

El problema consistía en que los matemáticos se dieron a la tarea de probar que este postulado era un teorema, es decir, que era demostrable a partir de los restantes postulados y axiomas. Desde Euclides hasta fines del siglo XIX el problema del V Postulado era uno de los más populares de la Geometría. Durante más de veinte siglos se propusieron muchas “demostraciones” diferentes de dicho postulado. Todas eran, sin embargo, equívocas.

Por lo común sus autores utilizaban en dichas demostraciones, sin darse cuenta una proposición equivalente al famoso postulado. A continuación citaremos algunos de los matemáticos que “demostraron” el V Postulado de Euclides:

- Posidonio (siglo I a.C.): Propone llamar rectas paralelas a dos rectas coplanares y equidistantes. Esta definición y la euclídea se corresponden, sin embargo, los hechos de que sean equidistantes y no se corten pueden tratarse por separado, aspecto que aborda en su obra Gemino.
- Gemino (siglo I a.C.): Plantea que pueden existir rectas paralelas en el sentido de Euclides, pero no así en el sentido de Posidonio, es decir, que prolongadas hasta el infinito no se corten y sin embargo que sean no equidistantes. Tal hecho es calificado por Gemino como el más paradójico de toda la Geometría.
- Ptolomeo (siglo II n.e.): Intentó resolver el problema con el siguiente razonamiento:



Sean AB y CD dos rectas paralelas, FG la transversal, α , β , α' , β' los ángulos internos como muestra la figura.

Entonces planteó la suma $\alpha + \beta$ será mayor, menor o igual a $2R$.

Luego, puesto que las rectas AB y CD son paralelas probó que $\alpha + \beta > 2R$ y $\alpha + \beta < 2R$ es absurdo y por tanto $\alpha + \beta = 2R$. De este resultado se deduce fácilmente el postulado de Euclides.

- Proclo (410-485): Después de criticar el razonamiento de Ptolomeo intentó alcanzar el mismo objetivo por otro camino. Su demostración reposa sobre la siguiente proposición que él consideraba evidente:

“La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera prolongando suficientemente las dos rectas”.

Esta proposición fue demostrada rigurosamente por Saccheri siglos más tarde.

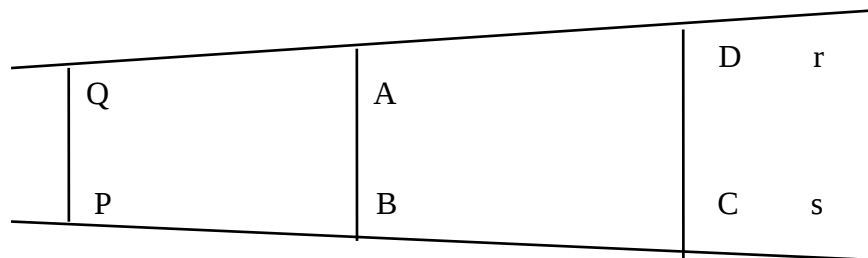
Proclo introduce, por consiguiente, la hipótesis de que la distancia de dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que básicamente se deduce la hipótesis de Euclides.

- Aganis (siglo VI): Su demostración la basa en la hipótesis de que existan rectas equidistantes que como Posidonio, las llama paralelas. De tal hipótesis deduce que la misma distancia entre dos paralelas es un segmento perpendicular común a las dos rectas; que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí; que dos paralelas cortadas por una tercera forman ángulos internos de un mismo lado suplementarios y recíprocamente.

- Al-Nirizi (siglo IX): Dio una demostración similar a la de Aganis. Este matemático aceptó las ideas y demostraciones de sus maestros, cuyo comentario a las definiciones, postulados y axiomas del libro I de los “**Elementos**” está modelado sobre la introducción a los “**Elementos**” que hace Simplicius compañero de Aganis.
- Nassir-Eddin (1201-1274): A diferencia de Al-Nirizi, hizo su contribución personal al problema del V Postulado, a pesar de adaptarse al criterio dado por Aganis, merece ser recordado por la idea original de anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo y por la forma acabada de su razonamiento. (Su obra escrita en árabe fue reproducida en 1657 y 1801).

Partió de la hipótesis de que si dos rectas son tales que r es perpendicular a AB ; s no perpendicular a AB , los segmentos de perpendiculares bajados desde s hasta r son menores que AB en la región en que AB y s forman ángulo agudo y mayores que AB en la región en que AB y s forman un ángulo obtuso.

En la siguiente figura, $CD > AB$ y $PQ < AB$.



De este resultado, obtuvo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. De los dos resultados anteriores “demostró” el V Postulado.

- F. Commandino (1509-1575): Añade a la definición de paralelas de Euclides, el concepto de equidistante. Repite la demostración de Proclo.
- C. Clavio (1537-1612): Critica la demostración de Proclo. Da una demostración basada en que “**La equidistante de una recta es una recta**”. Su demostración tiene puntos de contacto con la de Nasir-Eddin.
- P.A. Ghetaldi (1566-1626): Primer geómetra moderno en publicar un trabajo exclusivo sobre el problema de las paralelas. Brinda una demostración del V Postulado recurriendo a la hipótesis de que rectas no equidistantes son convergentes en una región y en la otra divergentes, al igual que Nasir Al-Din.
- G.A. Borelli (1608-1679): Admite, tratando de justificarlo, el siguiente axioma: Si una línea recta transportada lateralmente en el mismo plano sobre otra línea recta la toca siempre en su punto extremo, y en todo su curso es perpendicular a aquella, su otro punto extremo describirá en su movimiento una línea recta. Sucesivamente demuestra que dos rectas perpendiculares a una tercera son equidistante y define las paralelas como rectas equidistantes.
- Giordano Vitale (1633-1711): Escribe su obra: “**Euclides restaurado o bien los antiguos “Elementos” geométricos corregidos y facilitados**”. Trata de demostrar que la equidistante de una recta es una recta. Obtiene el resultado más notable hasta el momento:

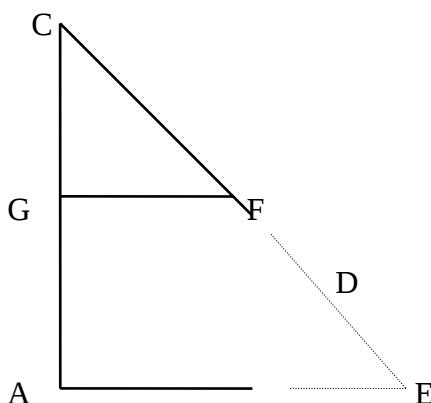
Sea ABCD un cuadrilátero tal que DA es perpendicular a AB, CB es perpendicular a AB y DA igual con CB. Entonces prueba que el ángulo ADC es igual al ángulo BCD y que si HK es igual a AD entonces el ángulo ADC y el ángulo BCD son rectos y CD es equidistante de AB.

D	H	C
A	K	B

Con este teorema Giordano reduce la cuestión de las rectas equidistantes a demostrar la existencia de un punto H sobre DC, cuya distancia a AB sea igual a los dos segmentos AD y CB.

J.Wallis (1616-1703): En el 1663, dio un curso que contenía una demostración del postulado de las paralelas. Fundamenta su demostración en que para toda figura existe una semejante de razón arbitraria.

Plantea el postulado siguiente: **“La perpendicular AB y la oblicua CD a la secante AC, necesariamente se cortan del lado del ángulo agudo ACD”**. Este postulado se le atribuye a Legendre.



Existieron otros demostradores del postulado, ya que son raros los grandes matemáticos que no se hayan interesado alguna vez en ese problema: Ampere, Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Fourier, Gauss, Jacobi, etc. Todos intentaron demostrar el famoso postulado y de hacer luz sobre esa “mancha oscura de la teoría de las paralelas”.

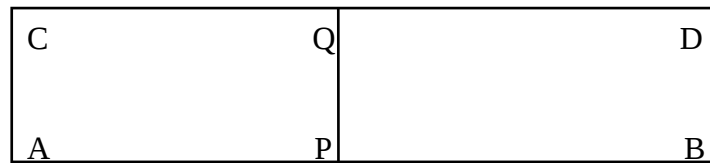
Tres matemáticos, en sus trabajos, se acercaron bastante a la Geometría no-euclidiana, ellos fueron Saccheri, Lambert y Legendre, de los cuales brindaremos aspectos de sus trabajos.

Girolamo Saccheri (1677-1733): Los estudios de Saccheri fueron publicados en 1733, bajo el título: **“Euclides depurado de toda mácula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la Geometría Universal”**. En esta obra se hace un intento de demostrar el V Postulado por reducción al absurdo.

Construyó un cuadrilátero ABCD de la siguiente forma: Trazó un segmento AB, por A y B trazó segmentos AC y BD iguales y perpendiculares a AB y unió los puntos C y D.

Demostó fácilmente a partir de los postulados del I al IV que los ángulos ACD y BDC son iguales. La demostración la realizó tomando los puntos medios de los lados AB y CD respectivamente, demostró primeramente que los triángulos ACP y BDP son iguales

(proposición 4 del libro I, que no necesita del V Postulado) y luego la igualdad entre los triángulos PQC y PDQ (proposición 48 del libro I).



Llamando a los ángulos que se forman en C y D “ángulos de los vértices del cuadrilátero de Saccheri” formula las siguientes hipótesis, excluyentes y exhaustivas:

- 1- Los ángulos son rectos.
- 2- Los ángulos son obtusos.
- 3- Los ángulos son agudos.

Saccheri demostró que si una de estas hipótesis es válida para un cuadrilátero entonces es válida para todos.

Demostró que el V Postulado es consecuencia de la hipótesis del ángulo recto, que la hipótesis del ángulo obtuso es contradictoria con el sistema.

Saccheri comienza a trabajar en la hipótesis del ángulo agudo con el objetivo de encontrar una contradicción. Al no encontrar la misma es incapaz de rechazar dicha hipótesis, basándose en resultados lógicos se refugió en el terreno menos firme de la intuición y llegó a la conclusión en la proposición 32 de su libro de que la hipótesis del ángulo agudo es falsa porque contradice la naturaleza de la línea recta. Evidentemente el propio Saccheri siente aquí que no pudo reducir la hipótesis del ángulo agudo a una contradicción lógica y él regresa a ella, a fin de demostrar que se “contradice a sí misma”. Con este fin, calcula de dos maneras diferentes la longitud de cierta línea y obtiene dos valores distintos para ella. Esto sería, en efecto, una contradicción, pero Saccheri llegó a ella cometiendo un error de cálculo.

- Lambert (1728-1777): Sus ideas desarrolladas en la obra **“Teoría de las líneas paralelas”** (1766), se aproximan a los razonamientos de Saccheri. Considera en el cuadrilátero tres ángulos rectos y con el cuarto, al igual que Saccheri, analiza las tres hipótesis. Y desarrolla la hipótesis del ángulo agudo, en la cual no encontró contradicción lógica alguna y a diferencia de Saccheri no cometió error que le permitiese descartar la hipótesis del ángulo agudo. Lambert en su obra, no afirma haber demostrado el V Postulado y llega a la firme conclusión de que las restantes tentativas en esta dirección no llevaron a la meta deseada.

“Las demostraciones del postulado euclidiano -escribe Lambert- pueden ser llevadas tan lejos que, a primera vista, sólo queda un detalle insignificante. Pero al hacer un análisis escrupuloso, resulta que en esta insignificancia aparente reside, precisamente, la esencia del problema; comúnmente esta contiene o bien la proposición a demostrar o bien un postulado equivalente a ella.

Inclusive yo me inclino a pensar que la tercera hipótesis es válida en alguna esfera imaginaria. Al fin de cuentas, debe existir una causa por la cual en el plano se resiste altamente a ser refutada, cosa que puede hacerse fácilmente con la segunda hipótesis” (ver N. V. Efímov-**“Geometría Superior”**, Editorial Mir, Moscú, 1984, pág. 19).

- Legendre (1752-1833): Es conocido por sus trabajos en el Análisis y en la Mecánica, dejó una herencia importante en Geometría. Intentó por mucho tiempo “demostrar” el V Postulado de Euclides; llegó a publicar algunas de las “demostraciones” del V Postulado y a pesar de que ninguna fue correcta, sus razonamientos son de interés, pues ponen en claro la relación existente entre el V Postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo.

En sus trabajos consideró tres hipótesis:

- 1- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que $2R$.
- 2- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $2R$.
- 3- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que $2R$.

La primera es reducida a una contradicción, mediante razonamientos exactos. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera a una contradicción, Legendre utilizó una proposición equivalente al V Postulado.

El saldo positivo de su trabajo, se encuentra en que obtuvo proposiciones de gran interés, como por ejemplo:

Proposición 1: Si la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a $2R$, tiene lugar el V Postulado.

“A pesar de sus múltiples intentos Legendre no logró demostrar que no existe ningún triángulo cuya suma de sus ángulos sea menor que dos rectos, así como Saccheri tampoco consiguió llevar a una contradicción la hipótesis del ángulo agudo. Con todo, en la construcción de un sistema de corolarios de las hipótesis que rechazan el V Postulado, Saccheri y Lambert fueron mucho más lejos que Legendre” (ver Efimov, Ob. Cit., pág. 27).

Su mayor mérito está en la forma sencilla y elegante que supo dar a sus investigaciones, por lo que estas alcanzaron aquella difusión que tanto contribuyó a ensanchar el círculo de los cultivadores de las nuevas ideas.

Farkas Bolyai (?-1856): Oriundo de Transilvania (parte suroriental de Hungría), donde la familia Bolyai tenía sus tierras. A pesar de la pobreza de sus padres, Farkas fue enviado a una ciudad mayor, a realizar sus estudios en un colegio evangelista, donde asombró rápidamente por su memoria y habilidad de hacer complicados cálculos matemáticos mentalmente.

Su interés por el aprendizaje no sólo se puso de manifiesto en la Matemática, pues sus exigencias en otras materias de demostraciones rigurosas, conllevaron a que su profesor de teología lo convenciera a no dedicarse a la Matemática *“ya que su interés por demostrarlo todo, aún las cuestiones del catecismo, provenían del diablo”*.

En un inicio Farkas se apartó de las Matemáticas, luego sus criterios cambiaron y durante un tiempo se dedicó al ateísmo. Esta inestabilidad de intereses fue un rasgo característico de toda su adolescencia y juventud. Los recursos de su padre continuaban siendo mínimos y las motivaciones de Farkas oscilaban desde la pintura hasta la artillería; pero indudablemente, la amistad que mantuvo con el hijo del Barón de Keméng salvaron el futuro de este gran matemático. Este lo convenció de viajar a Alemania a la Universidad de Gottinga, donde se dedicó definitivamente al estudio de las Matemáticas.

En dicha Universidad conoció a un joven, dos años menor que él, este respondía al nombre de Karl Friedrich Gauss. Ambos jóvenes entablaron una larga y duradera amistad y el joven Gauss estimuló los intereses de Farkas por los fundamentos de la Geometría y especialmente por la “demostración” del V Postulado. En esta época Farkas formuló una demostración, la cual reelaboró muchas veces y en la literatura se conoce con el nombre de “La Teoría Gottingeana de las paralelas”, debido a él y a su entrañable amigo.

En 1800 conoció a Susana Arkos, hija de un cirujano, con la cual entabló rápidamente matrimonio. De este casamiento nació en Diciembre de 1802 Janos Bolyai, el cual superó a su padre en el talento, pero heredó de su madre la histeria. De la obra de este famoso matemático hablaremos más adelante.

En Abril de 1804 la familia Bolyai se mudó para el poblado de Márosh-Vasharguely, donde Farkas se desempeñó durante casi 50 años como profesor de Matemática en el colegio evangelista.

A pesar del talento de Farkas, de su ardiente entusiasmo por la ciencia y de su profundo amor por la juventud, como profesor no era capaz de exponer sus ideas en forma asequible. Esto lo hizo sufrir, pues conocía de esta dificultad.

En 1821, murió su esposa y para encontrar el consuelo que no hallaba en las investigaciones sobre la teoría de las paralelas, se dedicó a la creación literaria, aspecto en el cual tampoco tuvo éxito. Luego se dedicó por más de 15 años a la preparación de un manual de Matemáticas, pero su dificultad para hacer asequible sus ideas, troncharon este nuevo propósito.

Los éxitos del hijo fueron el único consuelo de la infeliz vida de Farkas.

Cuando contaba con más de 80 años, Farkas enfermó gravemente y en 1856 murió.

En su comentario sobre los “**Elementos**” de Euclides, Heath, señaló:

“Cuando se consideran los innumerables intentos hechos a través de veinte siglos para demostrar este postulado, muchos de ellos por geómetras de primera fila, no se puede por menos de admirar el genio del hombre que llegó a la conclusión de que tal hipótesis, necesaria para la validez de todo el sistema, es realmente indemostrable” (ver L. Blumenthal-“**Geometría Axiomática**”, siglo A. Ediciones, Madrid, 1965, pág. 7).

PROPOSICIONES EQUIVALENTES AL V POSTULADO.

Aunque las “demostraciones” anteriores del V Postulado no fueron válidas, sí se obtuvieron resultados positivos, como por ejemplo, se formularon proposiciones equivalentes al V Postulado, veamos algunas de ellas.

1. Dos rectas paralelas son equidistantes. (Proclo)
2. Si una recta encuentra a una de dos paralelas encuentra también la otra. (Proclo)
3. De un triángulo cualquiera puede siempre construirse un triángulo semejante de magnitud arbitraria. (Wallis)
4. Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia. (F. Bolyai)
5. Por un punto situado entre los lados de un ángulo pasa siempre una recta que corta los dos lados del ángulo. (Lorenz)
6. Si dos rectas, r y s , son una perpendicular y la otra oblicua a la transversal AB , los segmentos de las perpendiculares bajadas desde los puntos de s sobre r son menores que AB , en la región en que AB forma con s un ángulo agudo. (Nassir-Eddin).
7. El lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta.

8. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. (Saccheri y Legendre)
9. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una a dicha recta. (Playfair)
10. Si k es un entero cualquiera, existe siempre un triángulo cuya área es mayor que k . (Gauss)

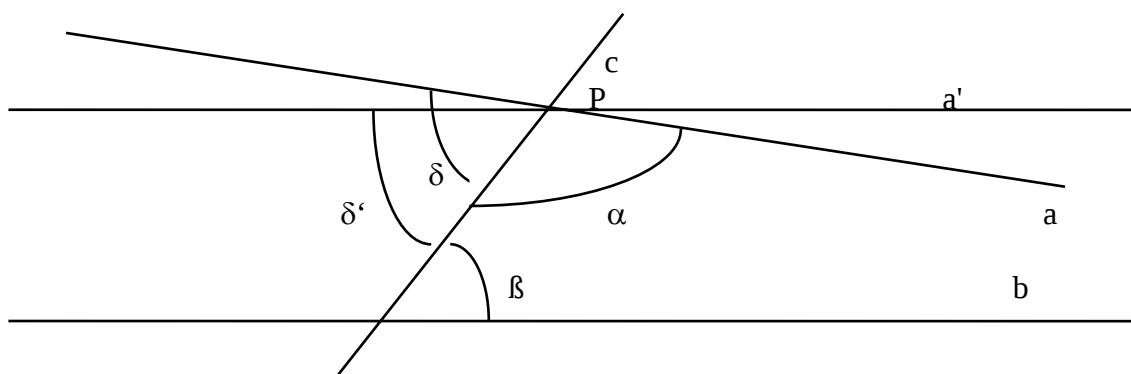
Analicemos la que es, quizás, usada:

“Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una a dicha recta”.

A partir de este axioma y el resto del sistema demostremos el V Postulado.

Demostración:

- 1) Sea δ adyacente a α .
 - 2) Tracemos a' por P que forma un ángulo δ' con c y que sea igual a β .
 - 3) Como $\delta' = \beta$ entonces $a' \parallel b$.
 - 4) Luego por unicidad de la paralela (Playfair) se obtiene que $a \parallel b$.
- Probemos ahora que las rectas a y b se cortan del lado que $\alpha + \beta < 2R$
- 5) Como $\alpha + \beta = 2R$ y $\alpha + \beta < 2R$ entonces $\delta > \beta$.
 - 6) Luego se cortan del lado en que $\alpha + \beta < 2R$.



Por otro lado, con los intentos por demostrar este famoso postulado se obtuvo al inicio del siglo XIX la llamada “Geometría de Lobatchevski”.

SURGIMIENTO DE LA GEOMETRÍA DE LOBATCHEVSKI.

Probablemente, el primero que obtuvo un concepto claro sobre una Geometría distinta a la de Euclides fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el más grande matemático del siglo XIX y quizás de todos los tiempos.

Gauss estudió durante 40 años la teoría de las paralelas y después de muchas reflexiones formuló una nueva Geometría que llamó no euclidiana y comenzó su desarrollo.

Los documentos que permitieron una reconstrucción aproximada de las investigaciones gaussianas sobre la teoría de las paralelas son la correspondencia de Gauss con F. Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus y Bessel; dos pequeñas notas en Gottgelehrte Anzeigen (1816-1822) y algunos apuntes encontrados entre sus cartas (1831).

Revisando las cartas de Gauss se pudo fijar como fecha de partida de sus meditaciones sobre la teoría de las paralelas el año 1792. En una carta del 28 de Noviembre de 1846 dirigida a Schumacher, Gauss afirma que desde el 1792 había llegado a puntos de vistas idénticos a los de Lobatchevski.

En una carta del 17 de Diciembre de 1799 a F. Bolyai prueba que Gauss ha intentado demostrar el V Postulado tomando como hipótesis su falsedad.

En 1804, respondiendo a F. Bolyai, expresa que los escollos contra los que ha tropezado en sus investigaciones sobre las paralelas, acaban por dejarle libre el paso.

El segundo período en el estudio de la teoría de las paralelas es después del 1813, ilustrado principalmente por algunas cartas dirigidas a Wachter (1816), a Gerling (1819), a Taurinus (1824) y Schumacher (1831) y por los apuntes encontrados en las cartas de Gauss.

Todos estos documentos nos muestra que a partir de aquí Gauss obtuvo algunos de los teoremas fundamentales de la nueva Geometría, que él llamó primero antieuclidiana, después Geometría Astral y finalmente no-euclidiana.

Sin embargo, Gauss no dejó traslucir sus ideas por temor a no ser comprendido; sólo a algunos amigos íntimos confió algo de sus investigaciones y cuando por necesidad se vio obligado a escribir a Taurinus (1824), le ruega que guarde silencio sobre las comunicaciones que le hace.

Pero además, el llamado **“Príncipe de las Matemáticas”** no publicó sus resultados por temor a la crítica del mundo matemático de aquella época y el golpe que una tal Geometría significaba para las concepciones filosóficas imperantes, el Kantismo, su creador Emmanuel Kant (1724-1804). Este filósofo, sostenía la doctrina de que la Geometría Euclidiana es inherente a la naturaleza del mundo físico. Así, mientras Platón decía que sólo Dios hacía Geometría, Kant afirmaba que Dios hace Geometría de acuerdo a los **“Elementos”** de Euclides.

“Efectivamente Gauss evitó las críticas y después de su muerte, sólo encontraron en sus papeles fragmentos aislados, esbozos de las proposiciones primeras de la Geometría no-euclidiana. Estos fragmentos figuran en el tomo VIII de las obras de Gauss; es suficiente revisarlos para constatar hasta qué punto es insignificante esa herencia del matemático alemán con respecto a las obras de Lobatchevski” (ver V. Kagán, Ob. Cit., pág. 288).

Similares resultados obtuvo Janos Bolyai (1802-1860) en 1832 después de 10 años de trabajo. Janos estudió las consecuencias que se derivan de negar el V Postulado, suponiendo que no existe ninguna paralela o que existe más de una.

La primera hipótesis puede rechazarse fácilmente, como lo había sido la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri; fue la segunda hipótesis la que condujo a Bolyai a una nueva e interesante Geometría derivada del ángulo agudo de Saccheri. Sin embargo, los puntos de vista de Bolyai y Saccheri son distintos por completo: Cuando Saccheri se hallaba convencido de que encontraría una contradicción si llegaba suficientemente lejos en su estudio, Bolyai sabía que estaba desarrollando una nueva Geometría.

Este matemático húngaro escribió, en 1832, en un apéndice de 26 páginas los resultados de sus investigaciones sobre la nueva Geometría, y que junto a su padre publicaron en un manual de Matemáticas, de ahí que el nombre con el cual pasó a la historia fuese **“Appendix”**.

Janos a pesar de que su padre le suplicó que no intentara “demostrar” el V Postulado, obtuvo la nueva Geometría, citemos un fragmento de la carta enviada a Janos por su padre:

“Te suplico, no trates de intentar conseguir la demostración de la teoría de las paralelas. perderás en ello todo tu tiempo y con todo lo que tú eres, no llegarás a demostrar esa proposición. No busques la razón de esa teoría ni por el procedimiento que me comunicas, ni por ningún otro. He explorado a fondo las vías posibles, no he dejado una sola idea sin estudiar. He atravesado esa noche negra y en ella he enterrado todos los goces de la vida.

Por el amor de dios, te lo suplico, abandona ese tema, témele tanto como a las pasiones, porque puede sustraerte todo tu tiempo, tu salud, tu tranquilidad, toda la felicidad de tu vida...” (ver V. Kagán, Ob. Cit., pág. 123).



Luego que Bolyai obtuvo la Geometría no-euclidiana, su padre escribió a Gauss con el objetivo de que el “Príncipe de las Matemáticas” diera su opinión con respecto al trabajo del hijo. Al conocer el trabajo del joven Bolyai, Gauss lo calificaría como “genio geométrico de primera magnitud” pero le respondió a Farkas que no podía dictaminar dicho trabajo puesto que eso equivaldría a alabarse él mismo.

Esto fue un golpe muy duro para Janos, en primer lugar porque no podía creer que Gauss hubiera tenido esas ideas antes que él y estimaba que éste quería arrancarle la prioridad de su descubrimiento. Ya a finales de su vida Janos sufrió una nueva decepción que le afectó mucho ya que el 17 de Octubre de 1841 recibió de su padre un folleto escrito por Lobatchevski en el cual se trataba la Geometría no-euclidiana y que

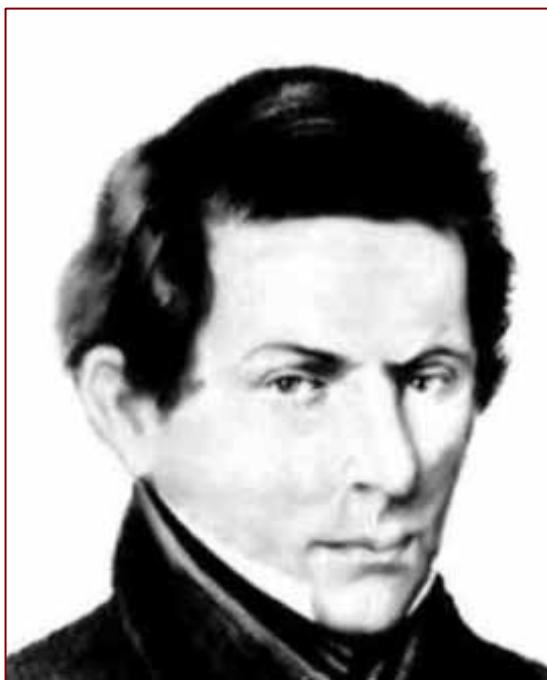
Lobatchevski había publicado en el año 1829, es decir, tres años antes que él.

A pesar que Janos Bolyai no pudo disfrutar de ser el primero en encontrar esta nueva Geometría, a la hora de hablar de las Geometría no-euclidianas, hay que dejar un espacio muy especial a su obra y el papel de éste en esta magistral teoría.

Hemos hablado de los trabajos de Gauss y Janos Bolyai. Creadores de la Geometría no-euclidiana, sin embargo, el mérito de tal descubrimiento recae sobre Nikolai Ivanivich Lobatchevski (1793-1856), quien el 11(23) de Febrero del año 1826 en la reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán expuso su obra con una conferencia y por primera vez informó de los resultados de sus investigaciones sobre la teoría de las paralelas, bajo el nombre de **“Exposition succincte des principes de la géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théoreme des parallèles”** (**“Exposición breve de los fundamentos de la Geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas”**), este día lo podemos considerar como el certificado de nacimiento de las Geometría no-euclidianas.

Lobatchevski estudió Matemáticas en la Universidad de Kazán bajo la dirección del alemán J.M.C. Bartels (1769-1836), amigo y compatriota de Gauss, se licenció en 1813 y permaneció en la Universidad de Kazán primero como profesor auxiliar, después como profesor enseñando todas las ramas de la Matemática, la Física y la Astronomía. En 1815, se ocupa de la teoría de las paralelas, y en un manuscrito suyo relativo a las lecciones de 1815-1817, se

encuentran tentativas por demostrar el V Postulado e investigaciones semejantes a Legendre.



Pero sólo después de 1823 concibió la ya mencionada Geometría no-euclidiana.

En 1829, editó su obra, en forma ampliada, bajo la denominación: **“Sobre los “Elementos” de la Geometría”**. En lo sucesivo Lobachevski desarrolló una nueva Geometría, publicando una serie de trabajos los que relacionamos a continuación: **“Geometría Imaginaria”** (1835), **“Aplicación de la Geometría Imaginaria a ciertas Integrales”** (1836), **“Nuevos “Elementos” de la Geometría con una Teoría Completa de las Paralelas”** (1834-1838), un pequeño libro, **“Investigaciones Geométricas”** (1840), **“Pangeometría”** (1855).

El punto de partida de las investigaciones de Lobachevski sobre la Geometría fue el axioma de las paralelas de Euclides, supuso que el V Postulado no se cumplió, conservó los restantes postulados y sustituyó el axioma de las paralelas por su negación.

¿Cómo Lobachevski se vio llevado a ocuparse de las paralelas y a descubrir la Geometría no-euclidiana?

A pesar de que Lobachevski fue instruido por Bartels, amigo de Gauss, y que pasó con este dos años en Brunswick antes de ser elegido para trabajar en Kazán (1807), no pudo haberle transmitido a Lobachevski algo positivo de los trabajos de Gauss sobre las paralelas, pues hasta 1807, Gauss no tenía aún clara la idea sobre la Geometría no-euclidiana. Luego, podemos concluir que Lobachevski creó su geometría independientemente de cualquier influjo gaussiano.

Puede suponerse que Lobachevski conocía las obras de Saccheri y Lambert, lo que le permitió recibir otros influjos, aunque esto es pura suposición y no existe nada que pueda probarlo. De todos modos, o la falta de demostraciones de sus predecesores, o la inutilidad de sus primeras investigaciones (1815-1817), indujeron a Lobachevski, como antes a Gauss, a pensar en el desarrollo de una nueva teoría.

Lobachevski expresa claramente esta idea en 1835 cuando escribe:

“La infructuosidad de las tentativas, hechos desde la época de Euclides por espacio de dos milenios despertó en mí la sospecha de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su conformación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas...”
(ver R. Bonola-**“Geometrías No-euclidianas”**, Espasa-Calpe Argentina siglo A., Buenos Aires, 1951, pág. 97.

En síntesis, los resultados obtenidos por Lobachevski pueden resumirse de la siguiente forma:

1. El axioma de las paralelas no es una consecuencia de los restantes axiomas de la Geometría Euclidiana, o sea, es independiente de ellos.

2. El V Postulado no es una consecuencia de los restantes postulados, porque al lado de la Geometría de Euclides donde sí se cumple, existe otra, La Geometría no-euclidiana en la cual no se cumple.

La Geometría, en dependencia de que se utilice o no el axioma de las paralelas, se divide en dos partes: aquella parte, donde se incluyen proposiciones que no se apoyan en el axioma, lleva el nombre de **“Geometría Absoluta”**. Lobatchevski, el cual inicialmente se esforzó por dar la demostración del mencionado postulado, enseguida se convenció de la posibilidad de dividir la Geometría en absoluta y no absoluta y lo llevó a cabo. La Geometría de Lobatchevski en su parte absoluta no se diferencia en esencia de la Geometría de Euclides.

Lobatchevski desarrolló la Geometría no-euclidiana hasta el nivel de la de Euclides, sin embargo, nunca pudo probar la consistencia lógica de su Geometría, es decir, no pudo probar la no-contradicción de dicha Geometría. Él comprendió de manera profunda la relación entre la Geometría de Euclides y su **“Geometría Imaginaria”**, ambas son lógicamente no contradictorias, ahora bien, el problema de cuál de estas Geometría corresponde más a las propiedades del espacio real, es algo que debe decidirse experimentalmente y Lobatchevski intentó verificar si nuestro espacio se rige por la Geometría no-euclidiana. Ya sabemos que el dilema que oponía la Geometría de Euclides a la Geometría no-euclidiana, es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual o menor que dos rectos. Él quería evaluar esa suma en el caso de un triángulo con lados suficientemente grandes, evaluó la suma de un triángulo cuyos vértices son la Tierra, el Sol y la estrella Sirio, llegó a la conclusión de que esa suma difería de 2R menos de 0,000372.

No obstante, a todos los esfuerzos de Lobatchevski por probar la no contradicción de su geometría, esta se resuelve después de su muerte y el primero en hacerlo fue Eugenio Beltrami, aspecto este que abordaremos más adelante.

Lobatchevski con este descubrimiento aportó nuevas ideas en el desarrollo de la Geometría, sus méritos van mucho más allá del hecho de que haya arrancado el velo del misterio milenar del axioma del paralelismo; con su análisis crítico del axioma de las paralelas, dio comienzo a la revisión de algunas posiciones iniciales del sistema de Euclides, hecho que condujo posteriormente a la elaboración de principios rigurosamente científicos de construcción axiomática de la Geometría y otras ciencias matemáticas.

Dicha Geometría encontró aplicación directa, en la teoría de las integrales definidas, donde Lobatchevski halló más de 200 fórmulas nuevas para el cálculo de las mismas. Sin su descubrimiento, no hubiera sido posible desarrollar la teoría de la relatividad, uno de los mayores alcances de la Física contemporánea. Partiendo de sus investigaciones se construyó una teoría que permite efectuar el cálculo de los procesos que transcurren en el interior del núcleo atómico.

Con su descubrimiento, retornó la Geometría a las posiciones del materialismo ya que antes y durante muchos siglos reinó en la Geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, negando la procedencia experimental de los axiomas. En sus obras expresó de forma explícita sus posiciones materialistas, por ejemplo, en su obra **“Sobre los Elementos de la Geometría”** (1929), expresó:

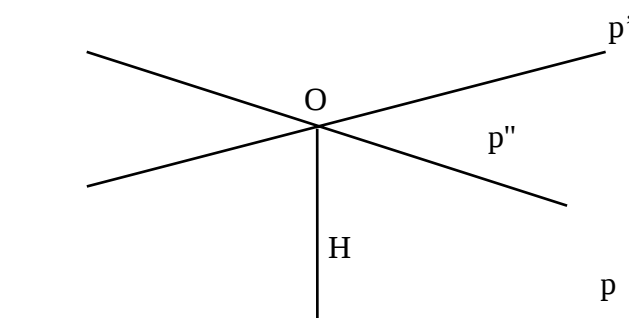
“Los conceptos primarios deben ser claros y reducidos a la mínima cantidad. Sólo entonces estos pueden proporcionar una base sólida y suficiente para la teoría. Tales conceptos se adquieren por medio de los sentidos, los conceptos innatos son inaceptables”.

De esta forma rechazaba la tesis kantiana de que nuestras representaciones espaciales son innatas y no tienen un origen empírico.

Antes de su Geometría se consideraba a la Geometría de Euclides la única teoría imaginable del espacio, su descubrimiento destruyó este punto de vista. Esto marcó el comienzo de profundas generalizaciones de los enfoques de la Geometría y su finalidad, que condujeron al concepto moderno de espacio abstracto con sus múltiples aplicaciones en la propia Matemática y en disciplinas afines.

Como sabemos, el postulado de Euclides afirma que dos rectas pueden ser paralelas, únicamente cuando la suma de los ángulos internos que forman con una secante es igual a 180° (ver la primera figura de esta sección), se puede negar este postulado de dos formas:

1. Afirmando con Lobatchevski que estas rectas pueden ser paralelas cuando la suma de dichos ángulos es inferior a $2R$, lo que es igual a decir, que existen dos paralelas distintas p' , p'' y, por consecuencia, una infinidad comprendida en el ángulo que hacen esas dos rectas.



2. Afirmando con Riemann que no se puede trazar ninguna paralela a p en el punto o . En este caso, p' y p'' se cortan aún cuando el ángulo sea de $2R$. Esta geometría se llama geometría esférica. Ocurre con la línea recta algo análogo a lo que tiene lugar en un gran círculo de la esfera: por dos puntos situados sobre una esfera pasa un solo gran círculo, a menos que sean diametralmente opuestos.

Pero los adeptos más o menos declarados de la única geometría euclidiana, señalaron que Lobachevski y Riemann no habían extraído todas las consecuencias posibles de sus geometrías y que, por consiguiente, no estaban seguros de no llegar alguna vez a una contradicción. Los que hacían estas observaciones no tenían en cuenta que esas mismas objeciones podían hacerse a la geometría de Euclides, pero, de hecho, si colocaban dicha geometría por encima de toda sospecha es porque le concedían un valor superior.

El geómetra inglés Cayley será el primero en llegar, en 1859, a una síntesis. Riemann, por la introducción de una concepción infinitesimal de la geometría, permitirá un desarrollo dialéctico de la noción de espacio que se mostrará muy fecundo.

SOBRE LA NO CONTRADICCIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LOBATCHEVSKI.

Como ya planteamos, existió un aspecto que ocupó a Lobatchevski toda su vida y que no pudo dar respuesta de manera categórica, nos referimos al problema de la no contradicción de su Geometría, es decir, para establecer la no contradicción del sistema geométrico que había creado era necesario demostrar con el mayor rigor que ningún desarrollo de este sistema podía conducir a una contradicción. De aquí, que sus adversarios mantenían que toda la Geometría de Lobatchevski era pura fantasía e indigna de la menor atención.

Lobatchevski en 1835 publicó en su obra **“Geometría Imaginaria”** que la existencia del axioma de las paralelas se puede deducir a la cuestión sobre la veracidad de las relaciones hiperbólicas. Más tarde en 1840, F. Minding, profesor de la Universidad de Tartu (Durpat) estudió las superficies de curvatura gaussiana constante; en particular estudió la superficie de revolución de la tractriz, cuya ecuación es:

$$y = \pm \left[\sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right]$$

probando que la curvatura de esta superficie es $k = -1/a^2$, de aquí que a esta superficie se le denomine pseudoesfera.

Y dedujo las fórmulas de la trigonometría de los triángulos geodésicos sobre la superficie de curvatura constante negativa, que no es más que la trigonometría hiperbólica.

De esta forma estos dos matemáticos, no se percataron que la Geometría Interior de la pseudoesfera es isomorfa a la planimetría de Lobatchevski.

Precisamente, expondremos este isomorfismo y las ideas de algunos matemáticos para resolver el problema de la no contradicción de la Geometrías no-euclidianas, entre ellos citaremos las ideas de Eugenio Beltrami (1835-1900) y Felix Klein (1849-1925).

El primero de los matemáticos en convertir la fantasía de la Geometría de Lobatchevski en realidad fue precisamente Beltrami.

¿Cómo Beltrami resolvió el problema?, y ¿Cómo se dio cuenta de su posible solución?

Para la solución de este problema, nos debemos basar en la Geometría Interior de superficies, concepto introducido por Gauss en 1824, la cual la podemos definir de la siguiente forma:

“Es la parte de la Geometría que se ocupa de aquellas propiedades de superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie”.

Tratándose de superficies regulares, podemos decir que la Geometría Interior de éstas estudia las propiedades de superficies y figuras sobre las mismas determinadas por la Primera Forma Cuadrática Fundamental (PFCF).

A partir de esta PFCF, es posible calcular la longitud de una curva sobre la superficie, el ángulo que forman dos curvas sobre la superficie y el área de una región sobre la superficie.

Recordemos dicha PFCF, la cual tiene la forma:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (6)$$

Y como ya planteamos a partir de esta forma obtenemos:

$$\cos \alpha = \frac{E u \partial v + F (du \partial v + dv \partial u) + G dv \partial u}{\sqrt{(E u^2 + 2F du dv + G dv^2)} \sqrt{(E \partial u^2 + 2F \partial u \partial v + G \partial v^2)}}, \quad (7)$$

$$\sigma = \iint_S \sqrt{(EG - F^2)} du dv, \quad (8)$$

es decir, el ángulo entre dos curvas y el área de una región sobre la superficie.

Estas mismas fórmulas sirven para cuando la superficie sea el plano euclidiano, por consiguiente la métrica del plano euclidiano en cada sistema de coordenadas se determina por la PFCF lo cual, por esta razón se llama métrica.

A partir de estos resultados surgió la pregunta:

¿Existirá en el plano de Lobatchevski una métrica determinada por cierta forma diferencial cuadrática?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, es decir, sí existe en el plano de Lobatchevski una métrica determinada por cierta forma diferencial cuadrática. En este trabajo no haremos referencia a las deducciones para obtener dicha forma diferencial, pero sí daremos la fórmula que se obtiene en el plano de Lobatchevski.

Para hacer dichas deducciones, hay que introducir en el plano de Lobatchevski, las llamadas coordenadas beltramianas y con este sistema de coordenadas se obtiene:

La diferencial del arco de una línea suave es:

$$ds^2 = R^2 \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)}, \quad (*)$$

donde R es el radio de curvatura del espacio de Lobatchevski. Introduciendo las notaciones:

$$E(x,y) = \frac{R^2(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)}, \quad F(x,y) = \frac{R^2xy}{(1-x^2-y^2)}, \quad G(x,y) = \frac{R^2(1-x^2)}{(1-x^2-y^2)},$$

se obtiene que $ds^2 = E dx + 2F dxdy + G dy$, y a esta forma se le llama forma métrica del plano de Lobatchevski, es decir, esta forma cuadrática determina la medición de las magnitudes de las líneas sobre el plano de Lobatchevski.

Cuando se determinan las fórmulas para encontrar el ángulo entre dos líneas y el área de una región sobre el plano de Lobatchevski, sus formas son análogas a las del plano euclidiano, (7) y (8), pero en coordenadas beltramianas.

Luego de obtener estas fórmulas podemos plantear la pregunta:

¿Existirá en el espacio euclidiano cierta superficie que tenga como Geometría Interior la planimetría de Lobatchevski?

Antes de responder esta pregunta abordaremos algunos aspectos que nos serán de utilidad.

Ya conocemos que la métrica de una superficie la determina la PFCF, pero si consideramos sobre la superficie coordenadas distintas, entonces las formas métricas serán distintas, pero si se pueden transformar mediante transformaciones de coordenadas sobre esta superficie, entonces decimos que estas formas métricas son equivalentes.

Si las formas métricas de las superficies son iguales, entonces podemos decir que las superficies son isométricas, es decir, podemos definir superficie isométricas de la siguiente forma:

“Las superficies F1 y F2 se llaman isométricas si existe una aplicación inyectiva de la superficie F1 sobre la superficie F2 tal que las curvas correspondientes de estas superficies tengan igual longitud”.

En otras palabras, si se establece una correspondencia entre ambas superficies que conserve las longitudes.

Por tanto para superficies isométricas, todas las propiedades de las superficies que puedan revelarse mediante las mediciones que se efectúan sobre ella, resultan iguales. Luego podemos decir que las superficies isométricas tienen una Geometría Interior común.

Luego es posible construir infinitas superficies diferentes que tengan la misma Geometría Interior. Intuitivamente puede verse esto, tomando un material elástico y deformando la superficie dada sin que halla ruptura o pliegues y por tanto se obtiene una superficie con la misma Geometría Interior.

La deformación continua de una superficie por la cual se conserva la Geometría Interior de ésta se llama doblado o doblamiento.

Como ya vimos las formas métricas del plano de Lobatchevski y la del plano euclidiano son en forma semejante y según lo expuesto hasta ahora, el problema se reduce a encontrar una superficie en el espacio euclidiano que sea isométrica con el plano de Lobatchevski.

Fue aquí donde Beltrami planteó en su obra **“Experiencia de la interpretación de la Geometría no-euclidiana”** (1868), los dos problemas siguientes:

1. Hallar una superficie, para cada punto de la cual existe entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobatchevski.

Es decir, que exista la superficie y se verifique la Geometría del plano de Lobatchevski de forma “local” sobre esta superficie.

2. Hallar una superficie que admita su aplicación isométrica sobre todo el plano de Lobatchevski.

Es decir, que exista la superficie y se verifique toda la Geometría de plano de Lobatchevski sobre esta superficie.

La solución del segundo problema conduciría directamente a la consistencia lógica del sistema no euclidiano bidimensional. Beltrami resolvió el primero, pero al segundo no pudo darle respuesta. Más tarde, Hilbert demostró en el año 1901, que en el espacio de Euclides no existe una superficie que tenga la propiedad requerida, es decir, no existe superficie analítica de curvatura constante negativa que no tenga singularidades en ninguna parte y que sea en todas partes regular. Por esto, llevar a cabo una interpretación del tipo Beltrami en todo el plano de Lobatchevski es imposible.

Beltrami para darle respuesta al problema 1) consideró que existe tal superficie y considerando el teorema de Gauss sobre la invarianza de la curvatura total en las aplicaciones isométricas, la superficie tomada necesariamente tiene una curvatura total igual en todos los puntos y tal superficie se llama superficie de curvatura constante.

Sobre esta superficie de curvatura gaussiana constante k tomó en un entorno de un punto arbitrario P de la superficie una parametrización semigeodésica, partiendo de cualquier línea geodésica que pase por el punto P . Aquí la PFCF de la superficie es $ds = E du + dv$, pudiéndose aceptar que:

$$E(u,0)=1 \text{ y } E_v(u,0)=0, \quad (**)$$

Como en coordenadas semigeodésicas la curvatura total k de una superficie se determina por la fórmula:

$$k = - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2},$$

entonces el coeficiente E debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2} + k\sqrt{E} = 0.$$

Integrando y considerando las condiciones iniciales (**) y los tres casos:

- 1) $k > 0$
- 2) $k < 0$
- 3) $k = 0$

Se obtienen las tres formas métricas siguientes:

$$1) ds^2 = \cos^2(\sqrt{k} v) du^2 + dv^2.$$

$$2) ds^2 = \operatorname{ch}^2(\sqrt{-k} v) du^2 + dv^2. \quad (***)$$

$$3) ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Por tanto, vemos que en coordenadas semigeodésicas con la línea básica geodésica ($v=0$), la forma métrica de una superficie de curvatura constante k se determina únicamente por el valor numérico de k . Podemos concluir que:

Cualesquiera que sean dos superficies de una misma curvatura constante, cada porción suficientemente pequeña de cualquiera de ellas puede ser aplicada isométricamente, sobre cierta porción de la otra.

Dos superficies de curvatura constante igual localmente, tienen Geometría Interior igual.

Luego para investigar localmente la Geometría Interior de las superficies de curvatura constante dada, es suficiente estudiar sólo algún representante de esta clase, precisamente Beltrami trabajó con la seudoesfera y al igual que Minding logró calcular que $k = -1/a^2$ (donde a es el parámetro de la tractriz), con esto demostró que en todos los puntos de la seudoesfera tienen una misma curvatura negativa. Luego se percató que en un entorno de cualquier punto de la seudoesfera la forma métrica tiene el aspecto en las coordenadas semigeodésicas (con la geodésica básica) igual a (***), pues de (*) haciendo la transformación de coordenadas:

$$x = \operatorname{th} \frac{x}{R}, \quad y = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{R}}{\operatorname{ch} \frac{x}{R}},$$

se obtiene $ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{h}{R} dx^2 + dh^2$ y poniendo $R^{-1} = \sqrt{-k}$; coincide con la de la seudoesfera (***).

A pesar que Beltrami no resolvió el segundo problema sus investigaciones revistieron una gran importancia de principio.

Primero, una realización parcial de la planimetría de Lobatchevski en el espacio euclidiano cambió la actitud escéptica de los geómetras ante las obras de Lobatchevski. Por lo tanto, sus investigaciones jugaron un papel importante en el desarrollo general de la ciencia.

Segundo, gracias a sus estudios, la planimetría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann resultaron unidas en un esquema geométrico diferencial general.

Todos estos sistemas geométricos se realizan sobre una superficie de curvatura constante k y corresponden a los casos $k=0$, $k<0$ y $k>0$.

La siguiente interpretación de la Geometría no-euclidiana que realizara en el año 1871 F. Klein en el trabajo **“Sobre la llamada Geometría no-euclidiana”** se basa en la definición de medida proyectiva en el plano, introducida por Cayley en el año 1859 en la obra **“Sexta Memoria sobre las Formas”**; además, Klein se basó en el concepto de grupo que él introdujo en la Geometría; sus nuevos puntos de vistas sobre las Geometrías los expuso en el famoso Programa de Erlangen, este discurso jugó un papel capital en la génesis de las ideas sobre la esencia de la Geometría, principalmente para dilucidar el lugar que ocupa la Geometría de Lobatchevski.

Las ideas de Klein se basaron en el conjunto de los desplazamientos del espacio que constituyen un grupo de aplicaciones.

La concepción de Klein estuvo basada en la Geometría Métrica que permite desplazamientos tales que cada punto puede llevarse en coincidencia con cualquier otro punto; en este caso el grupo de desplazamientos de esa Geometría se dice que es transitivo. Aquí, el grupo de desplazamiento del espacio admite una invariable de dos puntos, pero no una invariable independiente de un mayor número de puntos; en otras palabras, el conjunto de aplicaciones que forma este grupo conserva la distancia entre los puntos.

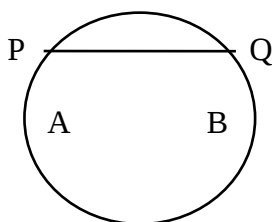
Por otra parte, Sophus Lie mostró que no puede haber más que tres sistemas de Geometría Métrica fundados sobre el desplazamiento, es decir, la Geometría de Euclides, Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann. A Lie se debe la teoría de los grupos continuos de transformaciones.

En la concepción de Klein y Lie puede haber sistemas geométricos que hagan intervenir grupos en los cuales dos puntos no tengan invariantes, en tal Geometría, para dos puntos no corresponde ninguna distancia, es decir, no es métrica. Tal es el grupo para la base de la Geometría Proyectiva.

Precisamente basado en esta Geometría se construyó un modelo para Geometría no-euclidiana y para el cual se tomó el círculo fundamental, ya que las aplicaciones que en un círculo fundamental corresponden a los desplazamientos hiperbólicos, son transformaciones proyectivas que transforman la circunferencia de ese círculo en sí misma.

¿Cómo en este modelo vemos aparecer la distancia entre dos puntos? Veamos:

Dos puntos A, B cualesquiera del círculo fundamental definen otros dos puntos, o sea, los puntos P y Q en la intersección de la recta AB con la circunferencia.



La razón doble (AB, PQ) que definen estos puntos es un invariante de las aplicaciones consideradas y determinan la distancia entre los puntos A y B . Para ello se escoge la función:

$$(AB) = \frac{k}{2} \ln(AQ, PQ) = \frac{k}{2} \ln\left(\frac{AQ}{BQ} : \frac{AP}{BP}\right).$$

Aquí siempre la distancia es positiva, pues los números AQ/BQ y AB/BP son siempre respectivamente superior e inferior a la unidad y bajo el signo del logaritmo siempre se encuentra un número positivo superior a la unidad.

En este modelo se verifica en forma absolutamente irreprochable la Geometría Hiperbólica para dos dimensiones. La aplicación del espacio hiperbólico en el interior de la esfera euclidiana se hace de manera análoga. Toda contradicción en la Geometría Hiperbólica, si se llegase a descubrir, significaría que existe otra análoga a la Geometría Euclidiana. Luego la Geometría Hiperbólica es lógicamente verdadera como la Geometría Euclidiana.

El modelo de Klein, resultó la demostración completa, largamente esperada de la no-contradicción de la Geometría de Lobatchevski y la existencia para ella de un sentido real.

De manera que 80 años después del nacimiento de Lobatchevski, la no-contradicción de la Geometría que él había creado prácticamente no se ponía en duda. El problema que le había ocupado toda su vida se encontraba del todo resuelto.

La aceptación de las Geometrías no Euclidianas conllevó ante todo a consideraciones metafísicas. Por ejemplo, F. Lange y O. Libman, seguidores de Kant, planteaban que las Geometrías no-euclidianas eran una Geometría del mundo “en sí” y la euclidiana representaba la Geometría de las percepciones sensoriales, la Geometría del mundo “para nosotros”.

El matemático inglés W.K. Clifford (1845-1879), planteaba que la Geometría del mundo real era no-euclidiana y todo lo que ocurre en el mundo puede ser comprendido como determinada variación con la curvatura del espacio en una u otra de sus partes.

Los tres creadores de la Geometría no-euclidiana, Gauss, Lobatchevski y Bolyai se pronunciaron contra las gnoseologías apriorísticas y se apoyaron en la procedencia experimental de los conceptos geométricos. Con estas posiciones se pronunciaron más tarde Riemann, Helmholtz, Boltzman y Klein.

Boltzman y Klein tomaron posiciones empiristas, pero su análisis era más subjetivo, haciendo énfasis en el lado psicológico.

Sin embargo, estos científicos de posiciones empiristas que trataron de justificar la existencia de las Geometrías no-euclidianas, relacionándolas con la experiencia, no obtuvieron resultados positivos.

De esta forma las posiciones neokantianas tomaron fuerza hasta inicios del siglo XX. El objetivo de estos fue compatibilizar los hechos de las Geometrías no-euclidianas con la filosofía matemática de Kant. Entre los neokantianos podemos citar a G.Cohen, A.Krautze, B.Russell, L.Nelson, P.Natorp, E.Cassirer y otros.

Los argumentos de los neokantianos pueden ser reducidos a las siguientes afirmaciones:

- A Kant no se le debe ver en antagonismo con las Geometrías no-euclidianas, sino al contrario, como una de sus antecesores teóricos, pues por primera vez formuló la misma idea de las Geometrías Superiores no coincidentes con la Geometría Euclidiana.
- Las afirmaciones de Kant sobre la posibilidad de otros espacios y otras formas de concepciones sensoriales no son casuales, ellas son el producto necesario de los principios de la filosofía.
- Las Geometrías no-euclidianas y la Euclidiana son equitativas desde el punto de vista matemático para la descripción de diferentes relaciones objetivas pero no desde el punto de vista psicológico, no se pueden construir nuevas concepciones intuitivas del espacio.
- Los empiristas ignoran el hecho de que las teorías matemáticas no se demuestran y no se niegan en el experimento.

- La posición empirista es contradictoria desde el punto de vista lógico.

En el momento actual está claro que los intentos neokantianos no podían ser exitosos. Pero a fines del siglo XIX la posición neokantiana parecía completamente válida. Los argumentos de los empiristas, aunque tuvieron aceptación dentro de los científicos, de ninguna forma pudieron ser suficientes para la guerra con ellos en la esfera teórica.

Otra tendencia fue la Convencionalista, desarrollada por Henri Poincaré (1854-1912), donde la experiencia juega un papel importante pero en última instancia lo que determina la veracidad es la sencillez y la comodidad. Esta posición de Poincaré, es idealista y no puede dar explicación a la existencia de las Geometrías no-euclidianas.

No obstante, gracias a las ideas de Poincaré se tomó una dirección más correcta que la de los empiristas y neokantianos.

La idea fundamental necesaria para la comprensión contemporánea de la matemática, surge en el contexto de los trabajos de Dedekind, Cantor y Hilbert, los cuales se esforzaron por fundamentar la Geometría y las otras ciencias matemáticas partiendo de presupuestos lógicos (concepciones estructuralistas y formalistas).

El significado que actualmente reconocemos a estas teorías es enorme y multifacético:

- Desde el punto de vista matemático, resolvió un problema tan viejo como la misma Geometría (“el problema de las paralelas”).
- Desde el punto de vista científico, permitió el avance revolucionario de la ciencia y especialmente de la Física del siglo XX. Así lo expresó Albert Einstein en su famoso discurso “La Geometría y la Experiencia” pronunciado en 1921 en la Academia de Berlín.
- Desde el punto de vista metodológico, los axiomas dejaron de ser resultados evidentes que no necesitan demostración, para convertirse en aquellas proposiciones de la teoría, las cuales en una construcción determinada de la misma, se toman como punto de partida, independientemente de que sean simples, evidentes o intuitivamente claros para todos. El método axiomático así concebido permite estructurar los fundamentos de cualquier otra región del saber, no cumpliendo sólo una función organizadora, sino, heurística y de ahí la consideración de su universalidad en la ciencia.
- Desde el punto de vista psicológico, Bolyai y Lobatchevski dieron un fuerte golpe a la opinión más extendida sobre la ciencia a ellos contemporánea.
- Desde el punto de vista filosófico, esta adquiere el mayor significado, pues su aceptación sirvió de punto de partida y estímulo fundamental para una de las más profundas revoluciones en las concepciones sobre los problemas filosóficos de la Matemática, en las representaciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

La propia historia de la aceptación de las Geometrías no-euclidianas en el siglo XX, es un ejemplo de atraso de la concepción filosófica en relación al desarrollo del contenido de la ciencia.

Las dos tendencias imperantes al surgir las Geometrías no-euclidianas, el empirismo de los materialistas franceses que absolutizaban la experiencia como fuente necesaria del conocimiento y los racionalistas de Emmanuel Kant que aseguraban el apriorismo de los postulados de Euclides y la concepción metafísica del espacio como cierta esencia invariable, no respondían a los fundamentos de esta nueva Geometría. En última instancia estas Geometrías confirmaron la visión dialéctica del espacio como forma de existencia de la materia, forma susceptible de cambiar a la vez que cambia la materia.

En el plano gnoseológico, esto permitió fundamentar con todo rigor la cuestión de la Geometría real del mundo. Las confirmaciones experimentales han demostrado que el espacio

real tiene estructura Riemanniana y que la métrica euclidiana del espacio sólo se manifiesta en recintos muy pequeños, donde las Geometrías Euclidianas y no-euclidianas coinciden.

Desde el punto de vista superior de Riemann comprendemos que la cuestión de la no contradicción de las geometrías no euclidianas no tiene sentido especial. Siendo las reglas de cálculo las mismas si k es positivo, negativo o nulo, los tres espacios son contradictorios y no lo son a la vez.

Pero estos tres tipos de espacios con curvatura constante conservan el carácter general de homogeneidad del espacio euclidiano. Las geometrías de esos espacios continúan siendo geometrías en el sentido de Klein, es decir, en el sentido de la teoría de grupos.

La negación de ese concepto general de geometría se efectúa fácilmente, como lo haría Riemann, con ayuda de esta noción del ds^2 : basta considerar ds^2 completamente generales, que no pueden colocarse bajo la forma:

$$ds^2 = \frac{(1 + k \sum dx_i^2) - k \left(\sum x_i dx_i \right)^2}{(1 + k \sum x_i^2)^2}.$$

Los espacios métricos considerados no son homogéneos y existe una infinidad de espacios posibles.

Más, si existe una infinidad de espacios posibles en la concepción de Riemann, ¿qué se puede decir del espacio real? Durante mucho tiempo se ha respondido así: el espacio real es euclidiano. El mismo Lobachevski llama a su geometría **imaginaria**. Poincaré piensa que no hay experiencia que pueda decidir acerca de la naturaleza del espacio, puesto que toda experiencia porta sobre cuerpos y no sobre el espacio. Hay solamente, según él, unos espacios más cómodos que otros. El espacio euclidiano continuará siendo siempre el más cómodo. Esta concepción, que lo ha llevado al **convencionalismo**, hace del espacio un continente independiente del contenido: hace de él una abstracción, negación de lo real, colocado por una acto de la razón pura en un dominio inaccesible a la experiencia.

Las concepciones de Riemann, son por el contrario, diametralmente opuestas. Riemann niega que el espacio sea independiente de los fenómenos físicos que lo componen, es por el contrario, el contenido material, es decir, físico, el que existe únicamente y el que determina el contenido abstracto, es decir, geométrico. Riemann, piensa genialmente que (**“Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen”**, en M. Spivak-**“Differential Geometry”**):

“la respuesta a estas preguntas se pueden obtener únicamente partiendo de la concepción de los fenómenos verificada hasta ahora por la experiencia y que Newton tomó como base, aportando a esta concepción las modificaciones sucesivas exigidas por los hechos, que ella no puede explicar.”

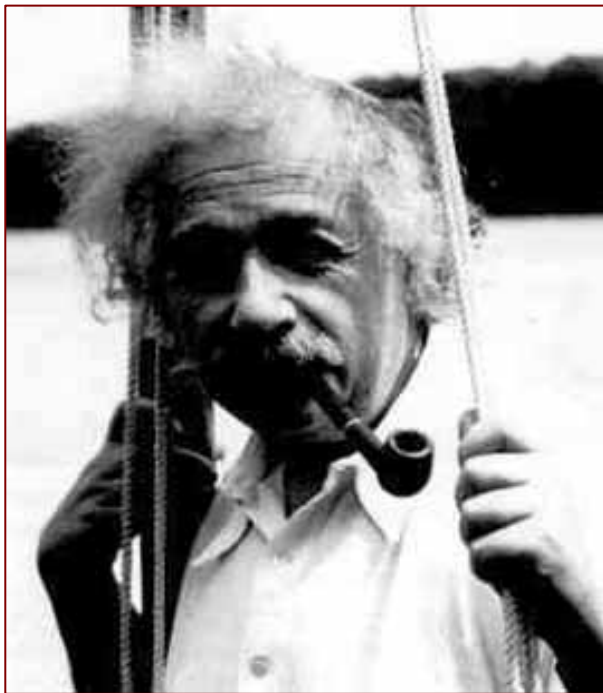
Y Riemann declara que el interés de su trabajo es impedir que el progreso en el conocimiento de la dependencia mutua de las cosas encuentre un obstáculo en los prejuicios tradicionales.

Esta síntesis, que Riemann había previsto y que sus trabajos y los de sus sucesores han hecho posible, será la obra de Einstein. No podemos, en el cuadro de esta obra, exponer ni siquiera sucintamente la teoría de la relatividad. Digamos brevemente que las teorías electromagnéticas de la luz y de la relatividad restringida muestran que el tiempo t debe estar ligado a las coordenadas del espacio x, y, z en un continuo espacio-tiempo, cuyos cuatro parámetros x, y, z, t están reunidos en una métrica pseudoeuclidiana $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$, donde c es la velocidad de la luz.

La relatividad restringida, que explica en particular la experiencia de Michelson y Michelson-Morley, la experiencia de Fizeau sobre el arrastre de las ondas luminosas por los cuerpos en movimiento, la variación de la masa de un electrón con la velocidad (P. Langevin), debe ser completada por la relatividad general que muestra que el principio de relaciones métricas, es decir, la determinación de los **gik**, reside en las fuerzas de gravitación, es decir, en definitiva, en la repartición de las masas en el Universo. De esa forma, el espacio no existe más que en una función de las masas que lo llenan. La evolución dialéctica que nos ha conducido de Euclides a Riemann termina en una concepción materialista del espacio.

La relatividad general ha sido verificada en todas sus consecuencias. El espacio es únicamente euclidiano en su primera aproximación y su curvatura variable depende de la repartición de las masas en el Universo. A decir verdad, las variaciones de los **gik** son débiles, puesto que, como dice H. Weyl,

“el campo de gravitación ejerce sobre los rayos luminosos y los cuerpos “sólidos” que tomamos como modelos de medida una acción tal, que si utilizamos los rayos luminosos y los modelos para medir objetos en la forma habitual, resulta de ello una métrica que se aparta muy poco de la métrica euclidiana”.



Las teorías de Einstein triunfaron sólo después de discusiones. Todo fue opuesto al fundador de la relatividad: buen sentido, intuición, lógica, incluso moral, por muy raro que eso pueda parecer, puesto que es tan cierto que el espíritu no acepta fácilmente la negación de los principios sobre los que reposa su quietud. La Relatividad General aporta a la concepción materialista y dialéctica del Universo el apoyo de una de las síntesis más vastas de la Física Teórica Moderna.

Por otra parte, existen otras negaciones posibles de la Geometría Euclidiana, por ejemplo se puede definir la métrica del espacio planteando que $ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dxdydz$, o tomando para ds^4 una forma diferencial homogénea de grado 4.

La geometría de Lobachevski y la geometría esférica constituyen, examinadas cada una

por separado, una síntesis que engloba la geometría euclidiana como caso particular. En efecto, el espacio de Lobachevski, como hemos visto, es un espacio de curvatura constante negativa, si hacemos tender esa curvatura a cero, obtenemos al límite la geometría euclidiana que es, de esa forma, englobado en los espacios lobachevskianos. Se puede hacer la misma observación a los espacios de la geometría esférica. Los espacios de Riemann más generales, contienen ellos también la geometría euclidiana como caso particular, puesto que es suficiente para volver a ellos dar a los **gik**, valores constantes.

No hay de eso, por el contrario, en la geometría de los ds^3 .

Posterior refinamientos y extensiones son debidos a Finsler, Cartan, etc que han demostrado la integración de espacios de Riemann muy generales (los así llamados espacios de Finsler) en la teoría general de los espacios de conexión euclidiana, a condición de que se defina la

conexión euclidiana de “**Elementos**” liniarios constituidos por un punto y un soporte, llamado elemento de apoyo que pasa por dicho punto.

CUESTIONARIO

1. Discuta los principales intentos de demostración del V Postulado.
2. Presente algunas de las proposiciones equivalentes al V Postulado.
3. ¿Cómo y con quién, surgen las Geometrías No-Euclidianas?
4. Discuta el principio sobre el cual se funda la geometría hiperbólica.
5. Abunde sobre los aportes de Riemann al desarrollo de la Geometría.
6. ¿Qué significó el Algebra en el desarrollo de la Geometría del siglo XIX?
7. ¿Cómo fue resuelto el problema de la no-contradicción de las Geometrías No-Euclidianas?
8. ¿Cuál es la geometría que corresponde al mundo físico?
9. Presente las implicaciones metodológicas que significó la aceptación de las Geometrías No-Euclidianas.
10. El desarrollo de la Física de principios de siglo, se apoya, esencialmente, en el desarrollo ocurrido en la Geometría. Fundamente.