Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

Método de Blackman para el cálculo de impedancias
Sus características y ventajas

Roberto Angel Rivero

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Tucumán
Departamento de Electrónica

Resumen

Cuando se analizan y/o diseñan circuitos realimentados, en muchas ocasiones resulta necesario conocer los valores de impedancias que pueden presentar distintas puertas del mismo. En general, el cálculo de las mismas no es fácil. Por ello, este artículo desarrolla el método de Blackman que es quizás la forma más directa y sencilla para hacerlo, sin necesidad de tener conocimiento de características de la realimentación existente en el circuito.

Palabras claves: Impedancias, cálculo de impedancias.

Abstract

In the analysis and design of feedback circuits, sometimes it is necessary to know the impedance values in different ports of the circuit. But it is difficult to find mathematical methods easy to use.
Thus, this paper shows Blackman´s formula, considered the easier method to find them without knowing important characteristics of the feedback circuit.

Key words: Impedance, impedance calculation.

1 Introducción

Es conocido que la realimentación en un circuito electrónico modifica parámetros del mismo en aquellos puntos por donde circulan las distintas señales de los lazos de realimentación. En particular, los valores de impedancias también cambian por efecto de esta realimentación.

Por otra parte, el cálculo de los mismos resulta en general bastante complicado. Sin embargo, la fórmula que R. B. Blackman presentó en 1943 es un interesante método para el cálculo de dichas impedancias, y posiblemente el más sencillo. No requiere conocimientos previos del sistema realimentado ni tampoco sobre el tipo y modo de realimentación, signo, etc. Se basa fundamentalmente en los principios clásicos de una realimentación.

A continuación se presentan el desarrollo del mismo y ejemplos de uso al final de este artículo.

2 Relación causa-efecto

El concepto de la *relación causa-efecto* en la naturaleza, indica que toda excitación *(causa)* que acciona sobre un sistema determinado, produce una respuesta *(efecto)*, la cual depende únicamente del sistema y de la excitación, es decir, que conociendo la causa o excitación y el sistema, se puede encontrar el efecto o respuesta.

Aplicando este principio para la medición de la impedancia en alguna puerta de un circuito, resultará necesario excitar en dicha puerta con un generador de corriente senoidal para que la tensión que se desarrolla entre sus bornes sea proporcional al valor de la impedancia a medir. Este principio se muestra esquemáticamente en la figura *1*.

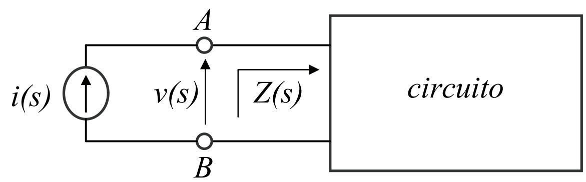

Fig. 1: Medición de la impedancia en bornes A-B de un circuito

En efecto, si:

$i(s)$ = Generador senoidal excitador de corriente en la puerta A-B
$v(s)$ = Tensión generada en los bornes de la puerta A-B
$Z(s)$ = Impedancia a medir en los bornes A-B del circuito

la relación causa efecto queda expresada como:

$$i(s) \times Z(s) = v(s) \qquad (1)$$

y la impedancia Z_s resulta:

$$Z(s) = \frac{v(s)}{i(s)} \qquad (2)$$

En particular, y como una forma práctica de cálculo, si se supone que el generador excitador de corriente es de valor unitario, la respuesta de tensión entre los bornes A-B brindará directamente el valor numérico de $Z(s)$ buscado.

Quede en claro entonces que para el cálculo de una impedancia en bornes de un circuito, debe excitarse siempre con un generador de corriente y evaluar la tensión que la misma genera en dichos bornes.

3 Análisis previo

Supóngase que se desea medir la impedancia que presenta un circuito entre los bornes *A–B* del mismo, tal como se muestra en la figura *2.* En dicho circuito, por ser activo, existirá por lo menos un generador controlado explicitado. En la figura *2* se lo ha dibujado por simplicidad, como si fuera un generador de tensión controlado por tensión, pero en la práctica, tanto el generador controlado explicitado ξ como su variable de control φ pueden tener cualquier dimensión y se encontrarán en alguna parte dentro del circuito. Solo basta que sea explicitado y que uno de sus bornes esté referido a tierra. En consecuencia φ y ξ serán variables intermedias con a como factor de proporcionalidad **unidireccional** entre ellas, es decir:

$$\xi(s) = a \times \varphi(s) \qquad (3)$$

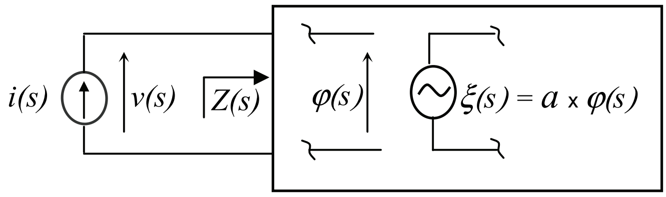

Fig. 2

Ahora, si momentáneamente se supone que $\xi(s)$ es una variable independiente (*que equivale decir que el parámetro a es igual a cero*), se pueden definir cuatro caminos diferentes de señales en el circuito, los que partiendo de las variables independientes que en este caso serían $i(s)$ y $\xi(s)$, recorrerán distintas partes del mismo hacia las variables dependientes $v(s)$ y $\varphi(s)$, determinando las siguientes transmitancias:

a) $f(s)$: Transmitancia entre la variable intermedia $\varphi(s)$ y la corriente de excitación $i(s)$.
b) $k(s)$: Transmitancia entre la tensión de salida $v(s)$ y la corriente de excitación $i(s)$ (en la misma puerta).
c) $h(s)$: Transmitancia entre la variable intermedia $\varphi(s)$ y la variable intermedia $\xi(s)$.
d) $g(s)$: Transmitancia entre la tensión de salida $v(s)$ y la variable intermedia $\xi(s)$.

En consecuencia, pueden escribirse las siguientes ecuaciones de interdependencia:

$$v(s) = g(s) \times \xi(s) + k(s) \times i(s) \qquad (4)$$
$$\varphi(s) = h(s) \times \xi(s) + f(s) \times i(s) \qquad (5)$$
$$\xi(s) = a \times \varphi(s) \qquad (6)$$

que representan las ecuaciones del circuito cuando la excitación de entrada es una corriente $i(s)$ y la salida es la tensión $v(s)$ que dicha corriente genera entre sus bornes (figura 2).

Estas ecuaciones pueden interpretarse gráficamente como se muestra en la figura *3*, formando un diagrama de flujo de Mason.

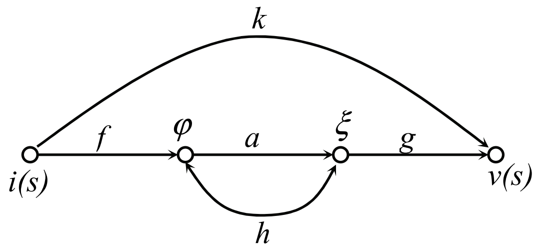

Fig.3 Diagrama de flujo

Resolviendo las ecuaciones *4, 5* y *6* para encontrar la relación $Z(s) = v(s)/i(s)$ o utilizando la teoría de los diagramas de flujo, queda finalmente:

$$\frac{v(s)}{i(s)} = Z(s) = \frac{f(s) \times a \times g(s)}{1 - a \times h(s)} + k(s) = k(s) \times \frac{1 - a \times h(s) + \dfrac{f(s) \times a \times g(s)}{k(s)}}{1 - a \times h(s)} \qquad (7)$$

4. La Fórmula de Blackman

Todos los términos de la ecuación *7* tienen interpretación física, las que se muestran a continuación.

a) Transmitancia $k(s)$:

Obsérvese de la ecuación *4* de interdependencia que el parámetro $k(s)$ no es otra cosa que el cociente entre la tensión de salida $v(s)$ y la corriente de entrada $i(s)$ cuando el generador controlado explicitado ξ es igual a cero. En otras palabras, es la impedancia vista en los bornes $A–B$ con el generador controlado explicitado $\xi(s)$ igual a cero. O sea:

$$k(s) = \frac{v(s)}{i(s)}\Big|_{(\xi=0)} = Z(s)\,|_{(\xi=0)} \qquad (8)$$

b) Numerador de la expresión *7*:

Supóngase por el momento que exista una particular corriente de excitación $i'(s)$ que hace que los bornes A-B presenten una tensión igual a cero, ($v(s)$=0). En consecuencia, el circuito vería a dichos bornes como un cortocircuito por donde circula la corriente $i'(s)$.

Esta corriente puede conocerse a partir de la ecuación *4* para $v(s)=0$:

$$i'(s) = -\frac{g(s)\times\xi(s)}{k(s)} \qquad (9)$$

En consecuencia, la variable $\varphi(s)$ valdrá entonces, de acuerdo a la ecuación *5*:

$$\varphi(s) = -\frac{f(s)\times g(s)\times\xi(s)}{k(s)} + h(s)\times\xi(s) \qquad (10)$$

Luego

$$\frac{\varphi(s)}{\xi(s)} = h(s) - \frac{f(s)\times g(s)}{k(s)} \qquad (11)$$

Ahora, si se define como Ganancia del Lazo en Cortocircuito, G_{Lcc}, a la *ganancia del lazo del circuito cuando el borne A-B donde se desea medir la impedancia está en cortocircuito*, se puede calcular esta ganancia utilizando la expresión anterior *(11)*, es decir:

$$G_{Lcc}(s) = \frac{a\times\varphi(s)}{\xi(s)} = a\times h(s) - \frac{a\times f(s)\times g(s)}{k(s)} \qquad (12)$$

Nótese que esta expresión es igual a los dos últimos sumandos del numerador de la ecuación *7* pero con signo cambiado. En consecuencia, dicho numerador podrá expresarse como:

$$1 - G_{Lcc}(s) \qquad (13)$$

c) Denominador de la expresión *7*:

Si ahora se define como Ganancia del Lazo en Circuito Abierto, G_{Lca}, a la *ganancia del lazo del circuito cuando el borne A-B donde se desea medir la impedancia está abierto*, es decir, para la corriente de excitación igual a cero, se tiene:

$$G_{Lca}(s) = a\times h(s) \qquad (14)$$

Nótese nuevamente que esta expresión es igual al segundo término del denominador de la ecuación *7*, pero con signo cambiado. En consecuencia, el denominador podrá expresarse como:

$$1 - G_{Lca}(s) \qquad (15)$$

d) Expresión general:

Utilizando las definiciones anteriores, finalmente puede escribirse la ecuación *7* para el cálculo de una impedancia, como:

$$Z(s) = Z(s)\big|_{(\xi=0)} \times \frac{1 - G_{Lcc}(s)}{1 - G_{Lca}(s)} \qquad (16)$$

que es la expresión más general de la Fórmula de Blackman.

5. Ejemplos de utilización:

5.1 Impedancia de entrada de un Amplificador inversor

Como ejemplo de utilización de la Fórmula de Blackman, se calculará la impedancia de entrada de un amplificador tipo inversor cuyo esquema es el de figura *4*.

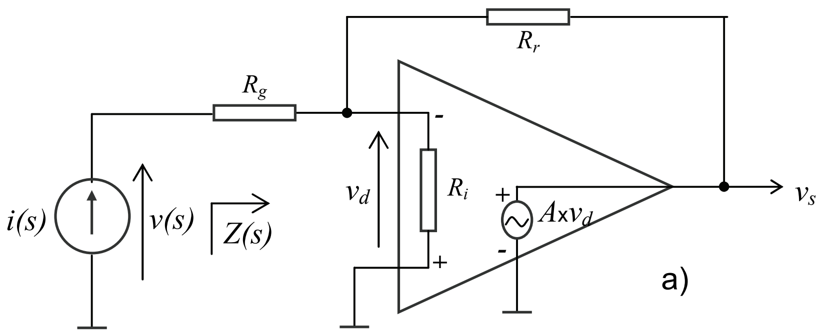

Fig. 4: Circuito amplificador inversor.

Para ello y de acuerdo al punto anterior, debe excitarse con un generador senoidal de corriente $i(s)$ y encontrar la tensión que se desarrolla entre sus bornes.
Se procede de la siguiente manera:

Paso 1: Elección del generador controlado explicitado: Se elige como generador controlado explicitado al generador controlado $\xi = A_x v_d$ del amplificador, por tener un extremo a tierra.

Paso 2: Se calcula el valor de la impedancia de entrada para el generador controlado explicitado igual a cero. En estas condiciones resulta:

$$Z(s)\big|_{A=0} = \frac{v(s)}{i(s)}\Big|_{A=0} = R_g + R_i \,||\, R_r \qquad (17)$$

Obsérvese que esta impedancia es exactamente igual a la impedancia que presenta la puerta cuando se abre el lazo de realimentación.

Paso 3: Se calcula G_{Lcc} o sea la Ganancia del Lazo del circuito para cuando la puerta donde se desea calcular está en cortocircuito.

Se puede escribir entonces que:

$$G_{Lcc}(s) = 1 \times (-A) \times \frac{R_g \| R_i}{R_r + R_g \| R_i} \qquad (18)$$

Paso 4: Se calcula G_{Lca}, o sea la Ganancia del Lazo del circuito para cuando la puerta donde se desea calcular está abierta. Luego:

$$G_{Lca}(s) = 1 \times (-A) \times \frac{R_i}{R_r + R_i} \qquad (19)$$

Paso 5: Utilizando la ecuación *16*, resulta finalmente para el valor de la impedancia de entrada $Z(s)$:

$$Z(s) = \left[R_g + R_i \| R_r\right] \times \frac{1 + A \times \dfrac{R_g \| R_i}{R_r + R_g \| R_i}}{1 + A \times \dfrac{R_i}{R_r + R_i}} \qquad (20)$$

que es la expresión más general de la impedancia de entrada.

En particular, cuando $A \to \infty$ se tiene el valor conocido:

$$Z_e = R_g \qquad (21)$$

5.2 Impedancia de salida de un amplificador no inversor

La figura *5* muestra un amplificador del tipo no inversor del que se desea conocer la impedancia de salida Z_s.

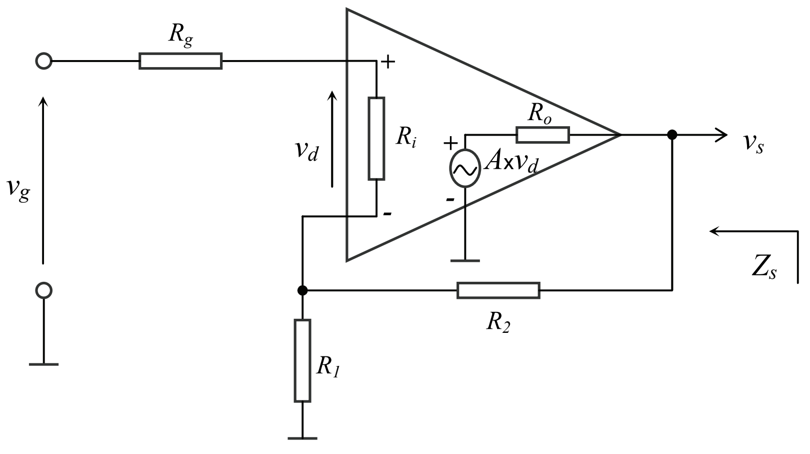

Fig. 5: Amplificador no inversor

Se tiene:

a) Generador controlado explicitado: El generador controlado A del amplificador.

b) Impedancia de salida con el generador controlado explicitado igual a cero (y el generador externo v_s=0):

$$Z_s\big|_{A=0} = \left[\left(R_g + R_i\right)\| R_1 + R_2\right]\| R_o \qquad (22)$$

c) La Ganancia del Lazo G_{Lcc} con la puerta de salida en cortocircuito:

$$G_{Lcc} = 0 \qquad (23)$$

e) La Ganancia del Lazo G_{Lca} con la puerta de salida en circuito abierto:

$$G_{Lca} = -A \times \frac{\left(R_g + R_i\right)\| R_1}{\left(R_g + R_i\right)\| R_1 + R_2 + R_o} \times \frac{R_i}{R_i + R_g} \qquad (24)$$

f) Finalmente la impedancia de salida Z_s es:

$$Z_s = \left\{\left[\left(R_g + R_i\right)\| R_1 + R_2\right]\| R_o\right\} \times \frac{1-0}{1-(-A)\times \frac{\left(R_g + R_i\right)\| R_1}{\left(R_g + R_i\right)\| R_1 + R_2 + R_o} \times \frac{R_i}{R_i + R_g}} \qquad (25)$$

g) Si el valor de la ganancia A del amplificador tiende a infinito, es decir, que el módulo de la Ganancia del Lazo en Circuito Abierto G_{Lca} es suficientemente más grande que uno, resulta:

$$Z_s = 0 \qquad (26)$$

6 Conclusión

La fórmula de Blackman es un método para el cálculo de impedancias en circuitos realimentados, de fácil utilización. No requiere conocimientos previos sobre el tipo y/o modo de realimentar como tampoco si la realimentación es positiva o negativa, o si las impedancias a medir fuesen de entrada, de salida o intermedias, motivo por el cual se considera que el método presentado es de uso general.

Solo es necesario conocer previamente que el sistema sea estable y luego ubicar correctamente el generador controlado explicitado del circuito.

7 Bibliografía

- R. Blackman – “Effect of Feedback on Impedance” – BSTJ, Vol. 22, Octubre 1943.
- Sol Rosenstark – Feedback amplifier principles – Mac Millan Publishing Company- New York 1986.
- Choma J. – “Signal Flow Analysis of Feedback Networks” – IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol 17, Abril 1990.
- Sam Ben-Yaakov – “A Unified Approach to Teaching Feedback in Electronic Circuits Courses” – IEEE Transactions on Education, Vol. 34, November 1991.
- Christian Falconi Arnaldo-Gianluca Giustolisi Gaetano – “Rosenstark-like Representation of Feedback Amplifier Resistance” – IEEE Transactions – 2007.
- Roberto Angel Rivero – “Variación de impedancias debido a la realimentación”
  - Web: http:///www.edutecne.utn.edu.ar/tutoriales - 2007