Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

IDENTIFICACION DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Ing. Roberto Angel Rivero*

Resumen

Para el diseño de sistemas de control, existen numerosos métodos que permiten ser desarrollados dentro de una amplia gamma de características. Sin embargo, no es fácil encontrar métodos de reconocimiento matemático de un sistema prearmado, que sea de sencilla implementación. Por ello, el presente artículo muestra una forma simple de identificación de sistemas de segundo orden o de aquellos que puedan representarse con un par de polos dominantes.

Palabras claves: Identificación de sistemas, Sistemas de segundo orden.

Abstract

To design control systems, there is a lot of methods that permit develop systems of different types. But it is not so easy to find mathematical identifications methods of actual systems, easy to implement. Thus, this paper shows a simple identification method for second order systems or systems which can be represented by a pair of dominant poles.

Key words: Systems identification, Second order Systems

1. INTRODUCCION

Existe en la actualidad un sinnúmero de métodos de diseño de distinto origen que permiten desarrollar sistemas de control dentro de una amplia gamma de características y/o posibilidades.

Pero poco, proporcionalmente, se ha trabajado sobre el problema del reconocimiento matemático de un sistema prearmado, que sea eminentemente práctico. Es decir, que una vez que se ha podido implementar el subsistema o planta a controlar, a veces no se conocen con certeza sus principales parámetros, cual es su función de transferencia equivalente, etc. En otras circunstancias, puede conocerse su estructura, pero no los valores de los parámetros que la componen. Todo ello genera a veces dificultades insalvables para realizar un control efectivo y confiable.

Por consiguiente, poder determinar, aunque sea en forma aproximada los parámetros más importantes de una función de transferencia de un sistema se convierte en una necesidad insoslayable.

Lo que sigue muestra una forma sencilla de identificación de sistemas de segundo orden o de aquellos que puedan representarse en forma aproximada como tal, utilizando la respuesta en el tiempo a un salto escalón de entrada, a partir de una idea de Draper, Mc Kay y Lees publicada en el año 1953 (ref. 6).

2. CARACTERISTICA

La identificación de un sistema consiste en la determinación de la función de transferencia de la misma o de sus parámetros fundamentales, a partir de mediciones experimentales.

En particular, este trabajo desarrolla una metodología de identificación de sistemas de segundo orden, basada en las características de la respuesta en el tiempo $Y(t)$ a la excitación de un salto escalón de entrada $X(t)$, tal como lo indica la figura 1.

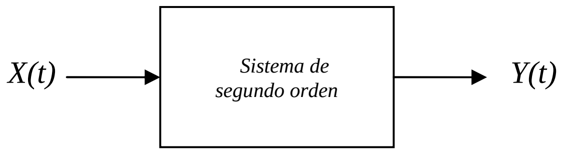

Fig. 1

Se ha elegido este método de identificación porque presenta las siguientes características:

a) Obtención de rápidos resultados aproximados.
b) Simplicidad para analizar y entender.
c) La respuesta en el tiempo a un salto escalón es posiblemente una de las más fáciles de obtener en un sistema cualquiera.
d) Muchas veces en una planta, a pesar de que su función de transferencia tenga más de dos polos, la respuesta al salto escalón de entrada puede ser representada en forma aproximada por la respuesta de un sistema de segundo orden. Ello es posible porque frecuentemente los otros polos adicionales están ubicados más lejos del eje imaginario que estos polos dominantes y por ende la influencia de los mismos en la respuesta en el tiempo resulta menor. (En particular ello se cumple significativamente cuando la relación entre las partes reales de los otros polos y las partes reales de los polos dominantes es mayor de 5 y no hay ceros cercanos) Por ello, se la puede representar aproximadamente por un sistema de segundo orden conocido como de **modos dominantes**.

3. METODOLOGIA E IMPLEMENTACION:

Se parte suponiendo:

a) que un sistema de segundo orden está representado por la ecuación clásica

$$T(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (1)$$

b) que la entrada es un salto escalón de amplitud $\boldsymbol{Y_0}$ de la forma

$$x(s) = \frac{Y_0}{s} \qquad (2)$$

c) y que las condiciones iniciales son nulas,

Entonces, la respuesta del sistema a un salto escalón de amplitud $\boldsymbol{Y_0}$ está dada por:

$$Y(s) = \frac{Y_0}{s} \times \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (3)$$

Se reconoce en estos casos tres formas posibles de respuestas distintas a saber:

a) Subamortiguada u oscilante (para ζ menor que uno)
b) Critica (para ζ igual a uno)
c) Sobremortiguada o no oscilante (para ζ mayor que uno)

Cada una de ellas presenta características distintas que la diferencian entre sí. Sin embargo, para el reconocimiento de los parámetros del sistema, se utiliza otra división basada en las siguientes situaciones prácticas:

1. Respuestas de sistemas oscilantes con sobrepicos significativos (ζ menor que 0,5)
2. Respuestas de sistemas sin sobrepicos o con sobrepicos de poco valor (ζ entre 0,5 y 2)
3. Respuestas de sistemas sobreamortiguados (ζ mayor que 2)

Se presenta a continuación, para cada una de ellas, el método de reconocimiento de los parámetros y su justificación.

En todos los casos se supone que las condiciones iniciales del sistema son nulas.

3.1. Respuesta oscilante (para ζ igual o menor que 0,5):

La respuesta de un sistema oscilante a una entrada salto escalón de amplitud Y_0 es de la forma tal como indica la figura 2.

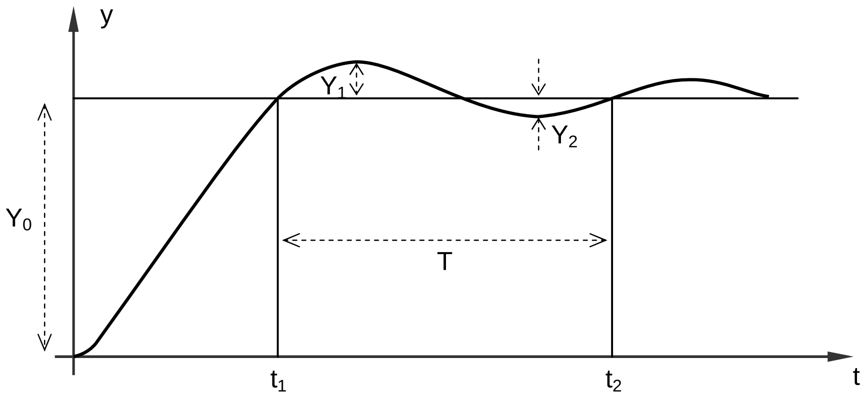

Fig. 2 Respuesta oscilante del sistema de segundo orden a la excitación de un salto escalón de amplitud Y_0

En la práctica, es fácil distinguir los sobrepicos primero (Y1) y segundo (Y2) cuando el valor de ζ es igual o menor que 0,5. Cuando ζ es mayor que 0,5, pero menor que 1, si bien matemáticamente es posible determinar la oscilación de la respuesta, a veces los valores de los sobrepicos Y1 e Y2 no resultan lo suficientemente notorios en los métodos de medición, por lo que una estimación de los parámetros utilizando estos valores pueden llevar a errores poco aceptables.

En consecuencia, en esta primera parte, el objetivo es encontrar valores aproximados para ω_n y ζ, que representen de la mejor forma posible a los parámetros fundamentales del sistema de segundo orden, cuando ζ sea igual o menor que 0,5.

Para ello, se utilizan los valores de Y_0, Y_1 y Y_2 (que son las amplitudes del salto escalón de entrada, del primer sobrepico y segundo sobrepico de la respuesta en el tiempo respectivamente) y de T (que es el período de una oscilación de la respuesta en el tiempo), tal como se observa en la figura (1).

Entonces, la respuesta en el tiempo *y(t)* cumple la ecuación:

$$y(t) = Y_0 - Y_0 \times e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)\right] \qquad (4)$$

Puede demostrarse a partir de la ecuación (4), que:

$$\frac{Y_1}{Y_0} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \text{e} \quad \frac{Y_2}{Y_0} = e^{-\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad (5)$$

de donde se obtienen dos posibles valores para ζ, utilizando las expresiones

$$\zeta = \frac{\ln(Y_1/Y_0)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(Y_1/Y_0))^2}} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{\ln(Y_2/Y_0)}{\sqrt{4\pi^2 + (\ln(Y_2/Y_0))^2}} \qquad (6)$$

En la práctica se adopta el valor promedio de ambos.

Los valores de las ecuaciones *(6)* también pueden obtenerse utilizando la tabla N^{o}1 o el gráfico N^{o}1.

El valor de ω_n se obtiene a partir de la expresión:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{o sea} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (7)$$

Valores porcentual de sobrepico	**Valor de ζ calculado con el primer sobrepico**	**Valor de ζ calculado con el segundo sobrepico**
0,05	0,690	0,431
0,10	0,591	0,344
0,15	0,517	0,289
0,20	0,456	0,248
0,25	0,404	0,216
0,30	0,358	0,188
0,35	0,317	0,165
0,40	0,280	0,144
0,45	0,246	0,126
0,50	0,216	0,110
0,55	0,187	0,095
0,60	0,161	0,081
0,65	0,136	0,068
0,70	0,113	0,057
0,75	0,091	0,046
0,80	0,071	0,036
0,85	0,052	0,026
0,90	0,034	0,017

Tabla N^o 1

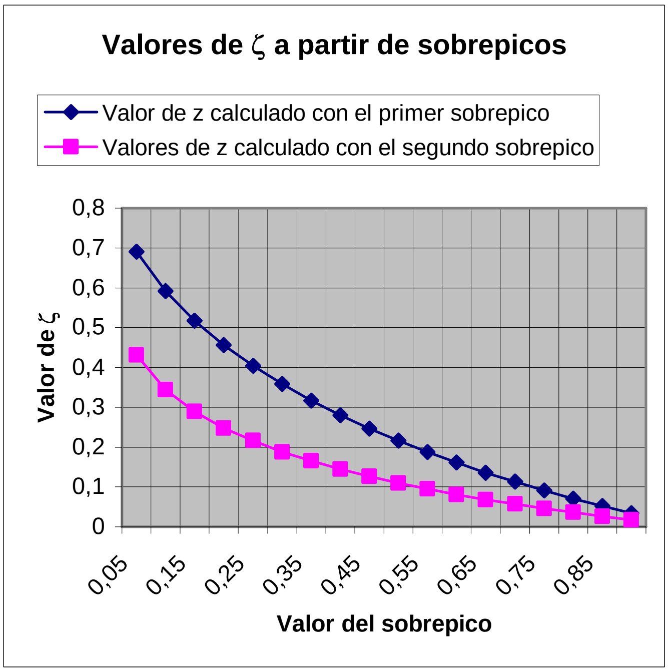

Gráfico N°1

3.2 Respuesta para amortiguamientos próximos al crítico (ζ entre 0,5 y 2):

La forma de la respuesta de un sistema con amortiguamiento crítico o próximo al crítico es:

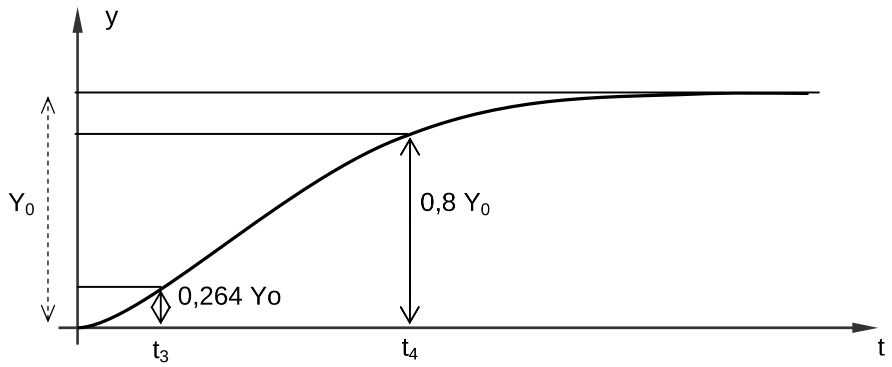

Fig. 3 Forma aproximada de la respuesta del sistema de segundo orden a la excitación de un salto escalón de amplitud Y_0 cuando el valor de ζ está comprendido entre 0,5 y 2.

Se puede demostrar que una característica importante de la respuesta en estos casos es que si se toma como referencia a los valores de salida indicados en la figura 3, a saber:

$$
\begin{aligned}
Y_4 &= Y_0 \times (1 - 4 \times e^{-3}) = Y_0 \times 0{,}80079 \\
Y_3 &= Y_0 \times (1 - 2 \times e^{-1}) = Y_0 \times 0{,}26416
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

y si se conocen los tiempos t_3 y t_4 respectivos, se cumple que:

$$\frac{t_4}{t_3} = 3 \qquad (9)$$

cuando ζ **es igual a uno**.

Por ello, si la relación t_4/t_3 es menor que tres, significa que ζ es menor que uno y si resulta mayor que tres, el valor de ζ es mayor que uno. Esta característica permite en consecuencia determinar los parámetros ζ y ω_n del sistema de segundo orden, a partir de las dos posibles respuestas en el tiempo a una excitación escalón.

En efecto, la respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden a un salto escalón está dada por la ecuación:

$$y(t) = Y_0 - Y_0 \times e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,sen(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)\right] \qquad (10)$$

cuando ζ es menor que uno, y por

$$y(t) = Y_0 + Y_0 \times \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\times(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\,e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \\ - Y_0 \times \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\times(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}\,e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \qquad (11)$$

cuando ζ es mayor que uno.

A partir de estas ecuaciones, se puede determinar el valor de ζ utilizando la relación t_4/t_3 en la tabla N° 2.

El valor de ω_n queda dado entonces, a partir de la tabla 2, utilizando la tercera columna, la relación t_4/t_3 y el valor del tiempo t_4 tal que:

$$\omega_n = \frac{\omega_n t_4}{t_4} \qquad (12)$$

t_4/t_3	ζ	$\omega_n t_4$
2,21	0,5	1,89
2,33	0,6	2,05
2,46	0,7	2,24
2,62	0,8	2,46
2,80	0,9	2,71
2,90	0,95	2,85
3,00	1	3,00
3,13	1,05	3,19
3,20	1,1	3,31
3,37	1,2	3,63
3,57	1,3	3,96
3,72	1,4	4,30
3,90	1,5	4,64
4,04	1,6	4,97
4,15	1,7	5,30
4,25	1,8	5,63
4,35	1,9	5,97
4,43	2	6,3

Tabla 2

Los valores anteriores también pueden obtenerse del gráfico 2, donde se presentan las curvas de t_4/t_3, $\omega_n t_3$, y $\omega_n t_4$ en función de ζ.

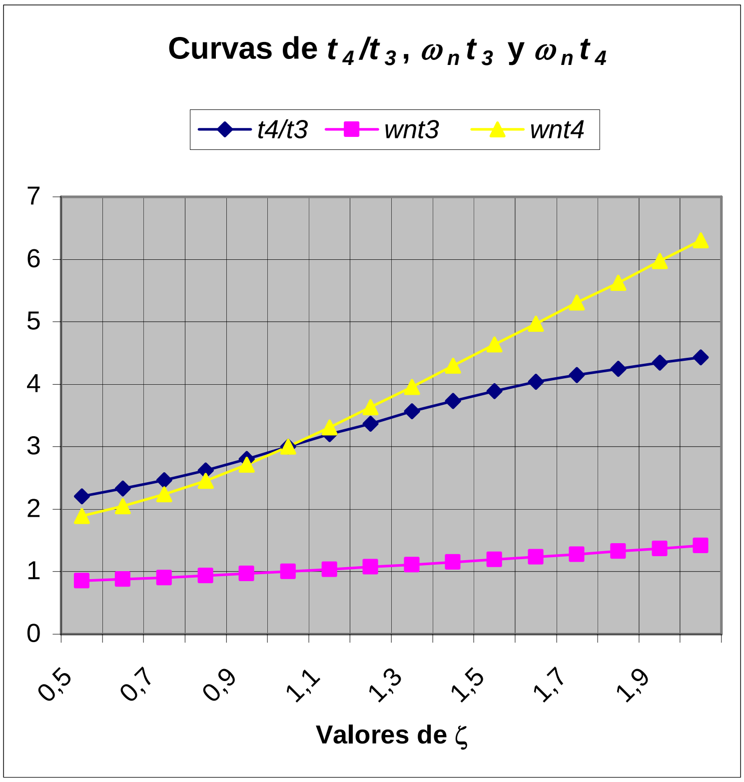

Gráfico N° 2

<u>3.3 Respuesta para sistemas sobreamortiguamientos (ζ mayor que 2)</u>:

La respuesta de un sistema sobreamortiguado a una entrada salto escalón de amplitud Y_0 a la entrada, es de la forma como indica la figura 3.

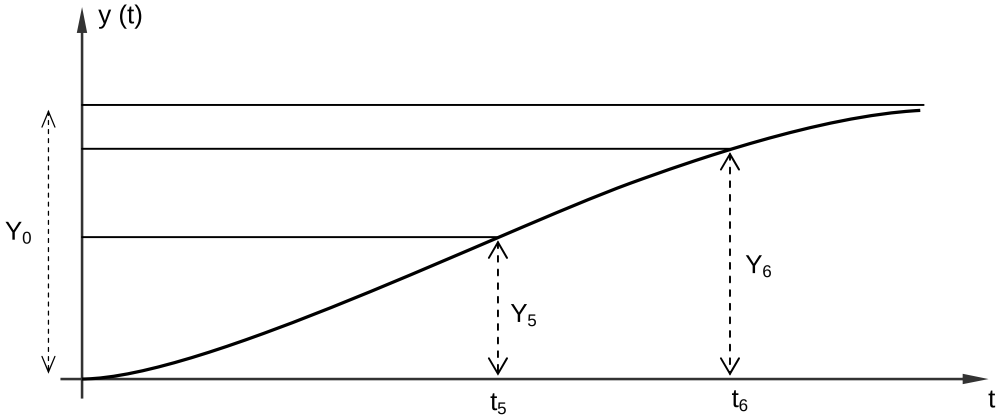

Fig. 4 Forma aproximada de la respuesta del sistema de segundo orden a la excitación de un salto escalón de amplitud Y_0 cuando el valor de ζ es mayor que 2.

Su ecuación está dada por:

$$y(t) = Y_0 + Y_0 \times \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \times (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$
$$- Y_0 \times \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} \times (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \qquad (13)$$

En estos casos, al ser el coeficiente de amortiguamiento ζ mayor que 2, el sistema posee polos reales y negativos, bastantes distanciados entre sí, por lo menos 3,7 veces el uno del otro.

Ellos son:

$$p_1 = -\omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$
$$p_2 = -\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \qquad (14)$$

Debido a esta particularidad, resulta más accesible, como objetivo de identificación en este caso, encontrar dos valores aproximados para los polos p_1 y p_2 del sistema, tal que representen de la mejor forma posible a los parámetros fundamentales del sistema de segundo orden.

Por lo tanto la ecuación representativa del sistema de segundo orden a encontrar es:

$$T(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{p_1 \times p_2}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 \times p_2} \qquad (15)$$

Para ello, conociendo que la respuesta en el tiempo al salto escalón está prácticamente determinada por el polo de menor valor absoluto p_2, cuando la amplitud de la salida es superior a la mitad del valor total, el cálculo de los coeficientes se facilita determinando primero el polo p_2, como si fuera el único existente. Para ello se determinan dos valores de ordenadas de la curva de respuesta en frecuencia, $Y_5(t_5)$ e $Y_6(t_6)$, tal que ambos sean mayores que el 50 % de la amplitud final de la respuesta, según indica la figura 4.

Entonces, el polo p_2 está dado por:

$$p_2 = \frac{\ln(1 - (Y_5 / Y_0)) - \ln(1 - (Y_6 / Y_0))}{t_5 - t_6} \qquad (16)$$

y luego el valor del polo p_1 como:

$$p_1 = p_2 \times \frac{(1 - (Y_5 / Y_0)) \times e^{p_2 t_5}}{(1 - (Y_5 / Y_0)) \times e^{p_2 t_5} - 1} \qquad (17)$$

o

$$p_1 = p_2 \times \frac{(1 - (Y_6 / Y_0)) \times e^{p_2 t_6}}{(1 - (Y_6 / Y_0)) \times e^{p_2 t_6} - 1} \qquad (18)$$

tomándose en la práctica el valor promedio entre ambas expresiones (17) y (18).

Finalmente, de las ecuaciones *(15), (16), (17) y (18)*, si se desea, pueden encontrarse los valores de ζ y ω_n, según:

$$\omega_n = \sqrt{p_1 \times p_2} \qquad (19)$$

y

$$\zeta = -\frac{p_1 + p_2}{2\sqrt{p_1 \times p_2}} \qquad (20)$$

4. CONCLUSION:

Se ha presentado un método determinístico de valoración de los parámetros de un sistema de segundo orden, utilizando para ello la respuesta en el tiempo del sistema a un salto escalón a la entrada. Se usó esta particular información del sistema, por considerar que es una de las respuestas más fácil de obtener. Para su cálculo se han utilizado las características más significativas y fáciles de valorar en una situación experimental, para las distintas formas de curvas de respuesta.

El método implica la utilización de fórmulas, tablas y/o curvas, dependiendo de la forma de la respuesta en el tiempo. Con ello se obtienen los valores de los parámetros clásicos de sistemas de segundo orden a saber: frecuencia no amortiguada ω_n, factor de amortiguamiento ζ y en el caso de respuestas sobreamortiguadas, los valores de los polos reales negativos ubicados en el eje real negativo del plano s.

Quede sin embargo en claro que los valores de los parámetros del sistema de segundo orden que con este método se obtienen, son representativos del sistema si el mismo es realmente de segundo orden. Por el contrario, si el sistema es de orden superior, la aproximación obtenida será más exacta en la medida que el sistema pueda ser representado por un par de polos dominantes.

5. BIBLIOGRAFIA

1. Katsuhito Ogata – Ingeniería de Control Moderno- Prentice Hall – 1993
2. Rohrs C., Melsa J. y Schultz D. – Sistemas de Control Lineal – Mc. Graw Hill – 1994
3. Monzingo, R. – “On approximating the Step Response of a Third-order Linear System by a Second-order Linear System” – IEEE Trans. Automatic Control – 1989
4. Sinha N., Kuszta – Modeling and Identification of Dynamic Systems – Van Nostrand Reinhold – 1983
5. Truxal J., Control System Synthesis – Mc. Graw Hill, 1955
6. Draper C.S., Mc Kay W. y Lees S. - Instrument Engineering, Vol 2, - McGraw Hill, N.Y. 1953

*Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Tucumán
Departamento de Electrónica
Correo electrónico: ingrivero@hotmail.com